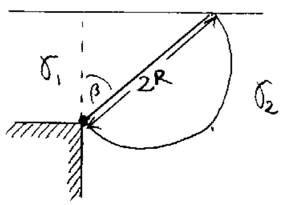
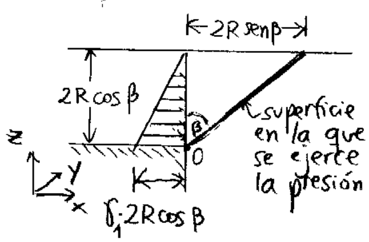
P4|



Existen fuerzas de presión desde el lado del líquido γ_1 y desde el líquido γ_2.

i) Líquido γ_1:



En el sentido horizontal:

$$Fp_{1x} = \frac{\gamma_1 \cdot 2R\cos\beta \cdot 2R\cos\beta}{2} \cdot \underset{\text{ancho}}{1}$$

(Volumen del prisma de presión aplicado en la proyección en el plano y-z de la compuerta)

$$Fp_{1x} = 2\gamma_1 R^2 \cos^2\beta$$

En el sentido vertical:

$$Fp_{1z} = \frac{\gamma_1 \cdot 2R\,\text{sen}\beta \cdot 2R\cos\beta}{2} \cdot \underset{\text{ancho}}{1}$$ (peso del agua sobre la superficie donde se aplica la presión)

$$Fp_{1z} = 2\gamma_1 R^2 \,\text{sen}\beta \cos\beta$$

Distancia desde O al centro de aplicación de la fuerza horizontal:

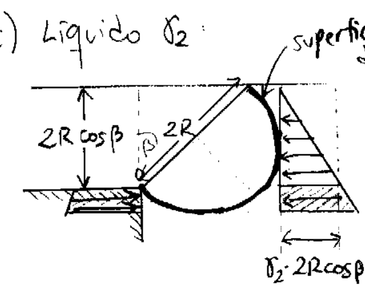
$$d_{1x} = \frac{2R\cos\beta}{3}$$ (medida en forma vertical)

Distancia desde O al centro de aplicación de la fuerza vertical:

$$d_{1z} = \frac{2R\,\text{sen}\beta}{3}$$ (medida en forma horizontal)

(Estas distancias se miden en forma perpendicular a la dirección de aplicación de la fuerza para obtener el brazo asociado al torque)

ii) Líquido γ_2:

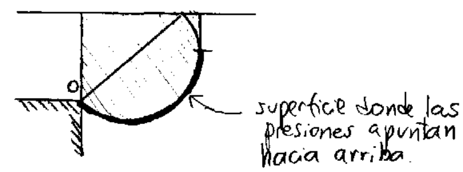


En el sentido horizontal, se ve que las presiones más abajo de la profundidad $2R\cos\beta$ se anulan al actuar en forma idéntica por ambos lados de la compuerta, con signos opuestos.

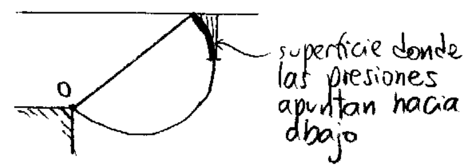
$$Fp_{2x} = \frac{\gamma_2 \cdot 2R\cos\beta \cdot 2R\cos\beta}{2} \cdot \underset{\text{ancho}}{1} = 2\gamma_2 R^2 \cos^2\beta$$

En el sentido vertical:

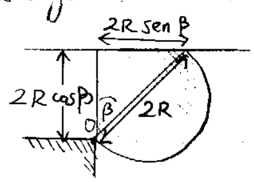
Dividiremos entre las presiones que apuntan hacia arriba y las que lo hacen hacia abajo (ver figuras a la derecha)



En ambos casos, las presiones están dadas por el peso de la zona achurada, considerando que, contiene un líquido de peso específico γ_2.



Como hay parte de las áreas que se intersectan, y las fuerzas que representan tienen signo contrario, se anulan, y la fuerza queda dada por el peso de la siguiente zona:



Para el cálculo se divide en el triángulo superior y el semicírculo inferior.

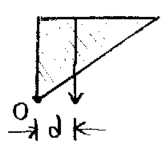
$$F_{p2z}(\triangledown) = \frac{\gamma_2 \cdot 2R\cos\beta \cdot 2R\,\text{sen}\,\beta}{2} \cdot \overset{\text{ancho}}{1} = 2\gamma_2 R^2 \cos\beta\,\text{sen}\,\beta$$

$$F_{p2z}(\triangle) = \gamma_2 \cdot \frac{\pi R^2}{2} \cdot \overset{\text{ancho}}{1} = \frac{\gamma_2 \pi R^2}{2}$$

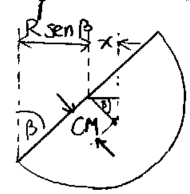
Distancia (vertical) desde O al centro de aplicación de la fuerza horizontal.

$$d_{2x} = \frac{2R\cos\beta}{3}$$

Distancia (horizontal) desde O al centro de aplicación de la fuerza vertical.



$$d_{2z}(\triangledown) = \frac{2R\,\text{sen}\,\beta}{3}$$



$$d_{2z}(\triangle) = R\,\text{sen}\,\beta + x$$

$$x = CM \cdot \cos\beta$$

$$x = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \cdot \cos\beta$$

$$\Rightarrow d_{2z}(\triangle) = R\left(\text{sen}\,\beta + \frac{4}{3\pi}\cos\beta\right)$$

Por último, se tiene el peso de la compuerta, que actúa en forma vertical:

$F = W \qquad d_W = R\left(\text{sen}\,\beta + \frac{4}{3\pi}\cos\beta\right)$

(actúa en el centro de gravedad de la compuerta, también medido en forma perpendicular a la fuerza)

Sumando los momentos en torno a O:

$\Sigma M = 0$ (ángulo de equilibrio, no hay movimiento)

$$-\left(2\gamma_1 R^2 \cos^2\beta\right)\cdot\left(\frac{2R\cos\beta}{3}\right) + -\left(2\gamma_1 R^2 \operatorname{sen}\beta\cos\beta\right)\cdot\left(\frac{2R\operatorname{sen}\beta}{3}\right)$$

$$+\left(2\gamma_2 R^2 \cos^2\beta\right)\left(\frac{2R\cos\beta}{3}\right) + \left(2\gamma_2 R^2 \operatorname{sen}\beta\cos\beta\right)\cdot\left(\frac{2R\operatorname{sen}\beta}{3}\right)$$

$$+\left(\gamma_2 \frac{\pi R^2}{2}\right)\left(R\operatorname{sen}\beta + \frac{4R}{3\pi}\cos\beta\right) + - W\left(R\operatorname{sen}\beta + \frac{4R}{3\pi}\cos\beta\right) = 0$$

$$(\gamma_2-\gamma_1)\left(\frac{4}{3}R^3\cos^3\beta\right) + (\gamma_2-\gamma_1)\left(\frac{4}{3}R^3\operatorname{sen}^2\beta\cos\beta\right)$$

$$+\left(\gamma_2\frac{\pi R^2}{2} - W\right)\left(R\operatorname{sen}\beta + \frac{4R}{3\pi}\cos\beta\right) = 0$$

$$(\gamma_2-\gamma_1)\left(\frac{4}{3}R^3\cos\beta\right) + \left(\gamma_2\frac{\pi R^2}{2} - W\right)\left(R\operatorname{sen}\beta + \frac{4R}{3\pi}\cos\beta\right) = 0$$

Evaluando numéricamente se llega a:

$$\beta = 4{,}7^\circ = 0{,}082\ [\mathrm{rad}]$$