

Introducción a la Física Moderna

Patricio Cordero S.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile *

versión muy incompleta

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Acerca del Desarrollo de la Física | 5 |
| 2. Sobre el desarrollo de la Teoría de la Relatividad. | 11 |
| 3. La transformación de Lorentz | 18 |
| 4. Líneas de universo | 19 |
| 5. Tiempo propio | 19 |
| 6. Contracción de Fitzgerald Lorentz y dilatación del tiempo | 21 |
| 7. Ilustraciones | 21 |
| 7.1. Vida media y partículas veloces | 21 |
| 7.2. Efecto Doppler | 22 |
| 8. Suma de velocidades | 23 |
| 9. Transformaciones de Lorentz y causalidad | 24 |
| 9.1. Simultaneidad | 24 |
| 9.2. En el mismo lugar | 25 |
| 10. Obtención de las transformaciones de Lorentz | 26 |
| 10.1. La transformación $\Lambda_{[01]}$ | 26 |
| 10.2. Propiedades generales | 27 |
| 11. Notación relativista | 29 |
| 11.1. Cuadrivelocidad | 29 |
| 11.2. Momentum | 30 |

| | |
|---|-----------|
| 11.3. Forma algo más general para las transformaciones de Lorentz | 32 |
| 11.4. La transformación | 32 |
| 11.5. Suma de velocidades | 33 |
| 11.6. Campo electromagnético | 33 |
| 12. Fotones y probabilidad | 34 |
| 13. Albores de la física cuántica | 35 |
| 13.1. “ <i>Ya todo está hecho</i> ” | 35 |
| 13.2. Primeros quiebres | 37 |
| 13.3. Microcosmos: átomo, núcleo y más adentro | 41 |
| 13.4. Materia, antimateria y fotones | 43 |
| 14. El problema de dos o más cuerpos | 46 |
| 14.1. Caso no relativista | 46 |
| 14.2. Caso cuántico no relativista | 46 |
| 14.3. Caso relativista | 48 |
| 14.4. El caso cuántico relativista se posterga | 51 |
| 15. Cadena Unidimensional de Osciladores | 51 |
| 15.1. Osciladores cuánticos | 51 |
| 15.1.1. El caso de un oscilador cuántico 1D | 51 |
| 15.1.2. Varios osciladores cuánticos independientes | 53 |
| 15.2. Cadena discreta clásica | 54 |
| 15.3. Medio continuo clásico | 60 |
| 15.3.1. Si dos funciones f y g satisfacen: | 63 |
| 15.4. Cadena discreta cuántica | 64 |
| 15.4.1. Hacia una cadena abierta | 67 |

| | |
|--|-----------|
| 15.4.2. La energía de estado fundamental | 69 |
| 15.4.3. El efecto Casimir | 70 |
| 15.5. Medio continuo cuántico | 72 |
| 16. El campo cuántico escalar complejo | 74 |
| 16.1. La expansión del campo | 74 |

En el primer tercio del siglo XX hubo una gran revolución en física y el propósito de estas notas es ver los resultados profundos de esos cambios. Principalmente veremos relatividad especial y mecánica cuántica. Es conveniente, sin embargo, no entrar directamente en materia sino dar primero una hojeada a los antecedentes que condujeron a esta revolución.

A fines del siglo XIX la física había alcanzado un alto nivel de coherencia que la hacía filosóficamente atractiva. Las aplicaciones prácticas de esta ciencia eran cada vez mayores. La mecánica, que ya había cristalizado un par de siglos antes, era utilizada en todos los campos de la tecnología. El electromagnetismo, que alcanzó su cúspide en la década 1860-70, estaba comenzando a aplicarse especialmente en centrales eléctricas, comunicaciones, tranvías e iluminación. El desarrollo de la termodinámica comenzaba a influir en el diseño de máquinas a vapor, en el de otro tipo de máquinas y en plantas químicas. En los años que estaban por venir aun se harían otros importantes avances tecnológicos con la ciencia conocida el siglo XIX: comunicación inalámbrica, motores a combustión interna, automóviles, aviones, etc. Pero todo esto no era sino una extensión de lo que se sabía. Era tecnología y estaba impactando directamente en la vida del mundo moderno.

Este mismo desarrollo científico—técnico iba a tener sus consecuencias: iba a permitir desarrollar la base experimental que llevaría a remecer los principios filosóficos en que se fundaba. Para comprender esto se debe tener claro los mecanismos que rigen el progreso científico.

1. Acerca del Desarrollo de la Física

El desarrollo de cualquier disciplina científica es largo, complejo, sutil. Es difícil normalmente decir quién o cuándo hicieron las observaciones básicas que dieron origen a un nuevo adelanto en nuestra comprensión de la naturaleza. Aquí trataremos de presentar un esquema, una simplificación, del proceso de avance científico, recalcando algunos aspectos de

él.

Lo fundamental es darse cuenta que todo comienza a partir de la *observación* y del afán de poder llegar a “explicar” lo que se observa, esto es, tener un modelo con alguna lógica interna del cual el resultado de nuevas observaciones puedan ser inferidas del modelo. De la observación de ciertos fenómenos naturales vamos poco a poco extrayendo *conceptos* o elementos que nos parecen importantes para describir lo que estamos observando. En la ciencia moderna se trata de asociar a cada concepto básico un método de *medición*, es decir, lo observado puede ser medido y así podemos hacer una *descripción cuantitativa* de lo observado. Aislado un fenómeno que puede ser observado repetidas veces se inicia el proceso de acumulación de datos numéricos, *tabulación*, y cualquier otro tipo de anotaciones sobre descripción del fenómeno de interés. Este proceso de acumulación de datos puede durar desde meses a generaciones. Un ejemplo notable, de tantos otros, es el caso de Tycho Brahe que por toda una vida anotó la posición de los planetas en el cielo, datos que fueron fundamentales para Kepler quién formuló las leyes sobre el movimiento de los planetas. Es siempre la acumulación de datos, resultado (normalmente de miles) de observaciones lo que permite dar el próximo paso: la formulación de *leyes de comportamiento* del objeto estudiado. Estas son las primeras leyes científicas, las que podemos llamar *leyes fenomenológicas*. Son el segundo hito en el desarrollo científico, siendo el primero la observación inicial que concentra la atención en un nuevo fenómeno. La formulación de una ley fenomenológica envuelve un salto discontinuo en el sentido que la ley siempre dice infinitamente más que el número necesariamente finito de datos experimentales utilizados para llegar a ella.

Al formular una ley se filtran elementos *ideales* en la ciencia y por lo tanto el buen científico debe estar atento para mantener este peligro bajo control. Incluso los conceptos mismos, los conceptos básicos y que pueden parecer fundamentales pueden contener un cierto grado de *idealización*. El concepto de medida, por ejemplo, es criticado y fundamentalmente revisado al formular la mecánica cuántica; el concepto de tiempo y simultaneidad es modificado al formular relatividad, etc. Evidentemente cuando, por ejemplo, Coulomb planteó la ley de atracción de cargas eléctricas (proporcional al inverso del cuadrado de la distancia) no pudo basarse sino en datos que se referían a distancias ni muy pequeñas ni muy grandes. Sin embargo, la Ley de Coulomb se supuso, con gran

éxito, válida para distancias totalmente fuera de las posibilidades experimentales en los tiempos de Coulomb. Así entonces, hay idealizaciones que conducen al éxito y otras a la contradicción con nuevas leyes.

En 1860 Gustav Kirchhoff introdujo, por ejemplo, el concepto de *cuerpo negro*. Luego entre 1900, Lord Rayleigh primero, y pocos años después acompañado por James Jeans, formularon la ley clásica de radiación de cuerpo negro. El trabajo de Max Planck, también de 1900, sin embargo, dió con una ley que, para el momento, se impuso y abrió paso a la física cuántica.

Cuando ya se tiene una ley, o varias, sobre el comportamiento de un cierto objeto, debe procederse a ver qué implican ellas para hacer un *diseño experimental* que permita constatar *predicciones* hechas con la(s) nueva(s) ley(es). Esto es especialmente crucial cuando se trata de una predicción obtenida de la combinación de más de una ley. Por lo tanto no se trata de buscar la simple confirmación de un punto interpolado o extrapolado trivialmente de los datos que se tenían.

Cuando se ha logrado acumular muchas leyes suele poder inferirse una de ellas a partir de una elaboración lógica a partir de otras. Estos procesos que permiten reducir el número de leyes independientes se han logrado unas pocas veces en la historia de la ciencia, llegándose a formular una *teoría*, esto es, una estructura lógica que, basándose en un conjunto de *postulados* (leyes básicas), se puede inferir todas las demás leyes conocidas hasta ese momento.

El esquema en Fig. 1 muestra en forma muy simplificada la secuencia que se ha seguido en la presentación del desarrollo de la física.

La mecánica de Newton (siglo XVII) es tal vez el primer ejemplo en la historia de la construcción de una teoría. Seguirían ejemplos notables como la construcción de la teoría electromagnética de Maxwell en 1862-5 y la termodinámica. En disciplinas más complejas como la química o la biología no se espera alcanzar en ningún futuro previsible un grado de desarrollo como el de la física. Sin embargo en esas ciencias también se tiene acumulación de leyes fenomenológicas las que permiten construir—no teorías, pero—modelos que se aplican en un reducido ámbito de esas ciencias. Un ejemplo moderno es el caso del modelo de molécula del ADN (en genética) que fué obtenido después de una enorme acumulación de

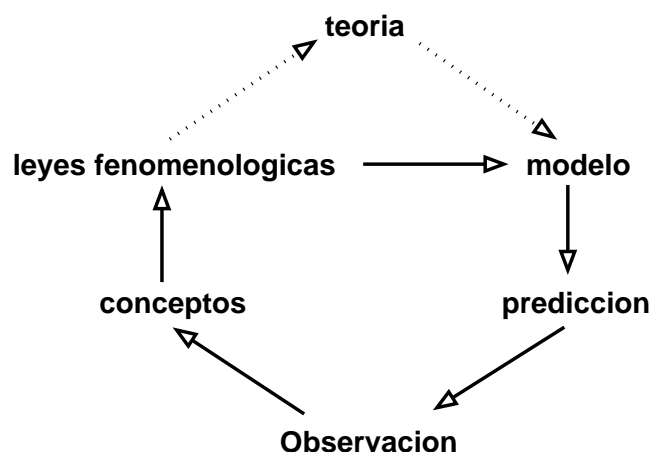


Figura 1: En la base de las ciencias naturales está la observación. Ellas pueden conducir a conceptos nuevos o a una aplicación de ellos. Las observaciones y los conceptos suelen permitir formular leyes fenomenológicas. Idealmente la acumulación de esas leyes conduce a modelos.

información y leyes parciales del comportamiento de la molécula.

Subrayemos que una teoría no es obtenida por inferencia lógica a partir de las leyes conocidas, sino que hay un salto, una cierta adivinanza, conjeturas cultas, sobre la naturaleza profunda de él o los fenómenos estudiados.

Una teoría o modelo, tanto como las leyes fenomenológicas, permiten hacer una cantidad de *predicciones*, permite deducir nuevas leyes, las que, una vez deducidas, deben ser corroboradas con la experiencia.

Cuando se diseña un experimento y se lleva adelante se está por cerrar un ciclo y, en cierto sentido podemos decir que se inicia un *diálogo* entre los científicos y la naturaleza. La observación lleva a enunciar leyes, las que deben ser corroboradas y a menudo perfeccionadas después de nuevas observaciones. Este ciclo se repite en espiral ascendente (cada vez se sabe más) en forma interminable. La labor del científico jamás termina, no hay capítulos cerrados. Ningún científico serio hoy en día pondría sus manos al fuego por que alguna ley “natural”, aceptada firmemente hoy, no vaya a ser modificada más adelante.

No siempre son solo las leyes las que deben revisarse después que nuevos experimentos conducen a una crítica a lo establecido. Hay veces que los conceptos mismos deben ser cambiados, como ya se mencionó al hablar de idealizaciones. Después de un proceso de pulido muy fino una teoría puede quedar tan bien formulada que, por mucho tiempo, no sea necesario perfeccionarla. Eso pasó especialmente con la mecánica de Newton. Surgen entonces corrientes filosóficas que comienzan a justificar el carácter fundamental, eterno e ideal de la teoría y todos sus conceptos y leyes. Las cosas absolutas e inmutables toman un valor especial en la imaginación de esa época.

Es inevitable, empero, que el avance científico acarree un avance tecnológico y este avance permite experimentos más refinados que permiten hacer nuevos descubrimientos, nuevas observaciones u observaciones más refinadas de fenómenos ya conocidos y así se haga necesaria una *adaptación* de la teoría aceptada para explicar lo nuevo. Estas adaptaciones se hacen para resolver abiertas contradicciones entre *predicción* y observaciones. Así ocurrió, por ejemplo, con el corrimiento del perihelio de la órbita del planeta Mercurio. Este fenómeno estaba contra la predicción newtoniana de que las órbitas debían ser elipses perfectas. Se trató entonces de explicar este fenómeno como un efecto de la no esfericidad del sol. Hoy sabemos que debía nacer una nueva teoría para dar clara explicación a esta observación.

Sucede que toda teoría admite un cierto grado de adaptación—pequeños *cambios cuantitativos* en sus predicciones—para poder mantenerse válida, sin que haya contradicción entre lo predicho y lo observado. Pero llega un momento en que ya no es posible adaptar más la teoría vigente. Ya no es cuestión de hacer más cambios cuantitativos sino que algo más profundo es necesario. Una *nueva teoría* es forzada por las contradicciones. El estado del conocimiento científico obliga a dar un salto brusco: un *cambio cualitativo* en la concepción de la naturaleza. Es el momento del quiebre de la vieja teoría y una, o pocas personas, normalmente los más claros científicos jóvenes de la época, se dan cuenta de la necesidad de reformular todo el marco científico en esa área y ellos pasan a formular la nueva teoría, la que queda en la historia asociada al nombre de esos científicos.

Para comprender el desarrollo de la ciencia, para comprender también

que las nuevas teorías no surgen porque en esa época existe *un genio* que antes no existía, sino que el cambio es el resultado de un *largo proceso en que se ha ido acumulando experiencia* por un lado, se ha hecho avances tecnológicos y se ha ido mellando los simientos de la teoría vigente por otros. Además poco antes del nacimiento de una nueva teoría, y como parte del “parto” de ella, se comienza a desarrollar nuevos conceptos o bien se revisa profundamente algunos de los ya existentes. Es por esto que suele suceder que una teoría surja en más de un centro científico casi simultáneamente. No es una casualidad, sino un producto de *condiciones creadas* que empujan hacia la nueva formulación. Einstein, al formular la relatividad en 1905 no sabía que Poincaré casi un año antes había hecho una buena parte de ese trabajo. En mecánica cuántica también se dió el caso que Heisenberg y Schrödinger hicieron descubrimientos teóricos complejos simultáneamente y equivalentes. Hoy en día es permanente que ocurran descubrimientos y avances en más de un lugar a la vez, después de años en que se había buscado resolver una interrogante.

Hoy resultaría infantil suponer que pueda existir una teoría de carácter permanente. En ciencia ya no es serio pensar en una teoría vigente sino como una etapa en el desarrollo experimental-intelectual que enriquece nuestro conocimiento de la naturaleza, etapa que tarde o temprano va a ser superada.

Hay que dejar constancia además, que normalmente toda nueva teoría “contiene” a la anterior como una aproximación válida bajo ciertas condiciones especiales. Debido a esto, muchos cálculos prácticos se prefiere usar la vieja teoría, que por ser más simple de utilizar, hace más fácil el trabajo. Así en los cálculos de una estructura de hormigón un ingeniero no considera efectos relativistas ni efectos cuánticos.

Recapitulando, podemos decir que las teorías están muy lejos de ser el capricho de sus “creadores oficiales”—como algunos platónicos o idealistas podrían creer—sino que están profundamente enraizadas en miles de observaciones y cientos de leyes y una acumulación de intentos fallidos de construir explicaciones adecuadas. También sería ingenuo que un científico se planteara hacer una nueva teoría sin que haya razón profunda para ello. No en toda época están dadas las condiciones de desarrollo de contradicciones para que se pueda dar un salto hacia adelante; en casi

toda época aún no se tiene suficiente conocimiento, experiencia y conceptos suficientemente desarrollados para que se pueda hacer una nueva teoría en determinada disciplina.

Los postulados en que se basa una nueva teoría no son arbitrarios; no hay libertad alguna para “inventar” postulados. Ellos provienen de un desarrollo intelectual que nace de la observación y la coherencia interna de la intelectualización. El avance, hay que tenerlo claro, no es rectilíneo. Se cometen muchos errores en el camino. La historia nos muestra que debe intentarse muchas veces un cambio o una nueva explicación antes que se logre una que sea aceptada por la comunidad científica. Hay muchos casos de buenos científicos que en algún problema concreto buscaron la solución por un lado que después se pudo ver que era el equivocado.

2. Sobre el desarrollo de la Teoría de la Relatividad.

Toda época del desarrollo científico se caracteriza por la existencia de una cantidad de datos y observaciones que se espera que conduzcan a un entendimiento de fenómenos que hasta ese momento no se comprenden satisfactoriamente. Se tiene entonces una serie de pistas pero no se sabe cuáles son sus importancias relativas, ni cuáles pueden ser desechadas, ni si faltan datos aún por descubrir.

Cuando se enseña física se le entrega a los alumnos exactamente aquellos datos que conducen a la teoría que deben aprender (si es que se les entrega alguno) y normalmente se omite—por falta de tiempo—aquella información extra que mantuvo a tantos científicos buscando una explicación por otro lado. Tampoco es posible en una asignatura que dura un semestre hacer un análisis muy completo de la imposibilidad de explicar los nuevos fenómenos con la vieja teoría, aun cuando ese análisis tuvo que ser hecho en su época. El efecto es que esto puede tener es que el alumno comprenda con gran facilidad la nueva teoría pero adquiera una idea muy errada de cómo se gestó su concepción. Puede incluso llegar a formarse la idea que hacer ciencia es una tarea fácil o un simple juego formal.

Dadas estas explicaciones pasemos a hacer una rápida revisión a la cronología de conceptos y otros avances que condujeron a formular la teoría de la relatividad.

En el siglo XVII Descartes introdujo el concepto de *eter* provisto de propiedades que le permitía transmitir fuerza. Hooke utilizó este mismo concepto para describir la luz como un fenómeno vibratorio. Newton desarrolló toda la *mecánica* y también trató de explicar la luz como corpuscular y estableció la teoría de la gravitación. Olaf Roemer en 1675 hizo la primera medida de la velocidad de la luz en base a la observación de los eclipses de un satélite de Júpiter, Io. En el siglo XVIII y XIX se avanzó sistemáticamente en la teoría de la luz y en el estudio de fenómenos eléctricos y magnéticos. Fresnel desarrolló en forma sistemática la *teoría de la luz* en base a una precisa descripción matemática del *eter*. Faraday amplió las propiedades del eter para atribuirle la propiedad de ser vehículo de fuerzas magnéticas. Seguidamente otros atribuyeron al eter ser vehículo de fuerzas *gravitacionales y eléctricas*. Todos estos modelos eran matemáticamente bastante complicados y exigían una constante confrontación con nuevos experimentos. Las leyes eléctricas y magnéticas comenzaron a mostrar una interrelación.

Todo este esfuerzo cristalizó con la formulación de Maxwell de las leyes electromagnéticas basadas en las cuatro *ecuaciones de Maxwell* (1861-2). Para concebirlas Maxwell utilizó en forma central el concepto ya desarrollado de eter. Aun cuando esas ecuaciones eran perfectamente consistentes ellas requerían demasiadas propiedades para el eter. Maxwell, W. Thomson, G. Kirchhoff, G.F. Fitzgerald, J. Larmor y otros trataron en vano de construir una teoría consistente del eter mismo que fuera también compatible con las leyes de la mecánica. Esa contradicción se mantuvo hasta la desaparición misma del concepto de eter en física.

Los primeros intentos de medir la *velocidad de la luz en eter* fueron hechas por Fizeau (1849) y por Foucault (1850). No detectaron efectos del movimiento de la Tierra. Pocos años después, en 1856, Weber y Kohlrausch determinaron que el valor de $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ midiendo la carga de una botella de Leyden tanto electrostáticamente como electromagnéticamente, obteniendo el valor 3.1×10^{10} cm/seg, lo cual coincidía, dentro del error experimental, con la velocidad de la luz recién medida. Más tarde Maxwell tomó estos resultados como evidencia conclusiva de que

la luz consiste en ondulaciones transversales “*del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos*”. Desde ese momento el fenómeno de la luz fue interpretado como el de ondas electromagnéticas.

Se descubrió que, al contrario que las leyes de la mecánica de Newton, las leyes del electromagnetismo no parecían ser las mismas en los distintos sistemas de referencia con movimiento relativo uniforme. Surgió la necesidad de hablar de un *sistema de referencia en reposo absoluto*: el eter (Lorentz). Solamente se podía explicar que la electrodinámica de los cuerpos en movimiento (con respecto al eter) no podía ser la misma que la de los cuerpos en reposo. Esta era la solución teórica que debía llevar a un diseño experimental. Así fue como se consideró importante medir las velocidades absolutas con respecto al eter. Debía tratarse de efectos muy pequeños, puesto que no se habían observado diferencias hasta ahora, que indicaran una dependencia en la velocidad del sistema de referencia, se buscó el experimento que considerara la velocidad mecánica más grande que se pudiera tener a disposición: la velocidad de la Tierra, que en su órbita es de alrededor de 30 km/seg. Se mediría la velocidad de la luz, que acababa de mostrarse que era un fenómeno puramente electromagnético, con respecto a la Tierra, comparando las velocidades paralela y perpendicular a la velocidad de la Tierra. Estas medidas se llevaron a efecto en los célebres experimentos de Michelson y luego de Michelson y Morley en 1885-7. A pesar de la precisión extraordinaria que se tenía en los instrumentos que, a través de interferencia, medían directamente la diferencia de velocidad, no se detectó diferencia alguna. Este experimento ha sido repetido innumerables veces, con técnicas cada vez más refinadas y el resultado ha sido siempre el mismo: no hay diferencia en las velocidades. De aquí se podía sospechar que en la práctica no había diferencia entre las leyes electromagnéticas para sistemas en reposo o en movimiento y la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia.

Se intentó toda clase de explicaciones adaptando las dos grandes teorías ya conocidas: la mecánica de Newton y al electrodinámica de Maxwell. A veces se lograba dar una explicación a ese experimento pero caían en contradicción en la explicación de otros fenómenos.

Tratando de buscar una explicación al resultado negativo del experimento, Fitzgerald adelantó la hipótesis de que los cuerpos materiales, al

moverse a través del éter, se acortan en la dirección del movimiento en una cantidad que depende de la velocidad. Lorentz aumentó la hipótesis al agregar que ese acortamiento se debía a una modificación que sufrían las leyes electromagnéticas que gobiernan las distancias interatómicas. La fórmula de contracción de Fitzgerald y Lorentz explicaba a la perfección el experimento de Michelson y Morley.

El experimento comentado, así como experimentos similares, llevaron a la conclusión de que era imposible detectar el *movimiento absoluto*, el movimiento con respecto al éter. No hay manera de decir cuál es la velocidad absoluta de los cuerpos, solo es posible observar las velocidades *relativas* entre diversos cuerpos o sistemas de referencia. La mecánica de Newton siempre satisfiso este Principio de Relatividad, es decir, desde tiempos de Galileo que se tuvo claro que las leyes de la mecánica no permitían detectar el movimiento absoluto. Ahora resultaba que tampoco esto era posible por medio de fenómenos electromagnéticos, incluida la luz.

Las ecuaciones de Maxwell parecían indicar lo contrario. Se comenzó a tratar de compatibilizar las leyes de la mecánica, las ecuaciones de Maxwell y la contracción de Fitzgerald-Lorentz.

Se veía dos salidas posibles. O las ecuaciones de Maxwell estaban malas o la forma como ellas se deducen en un sistema en movimiento se estaba haciendo en forma incorrecta. Todo intento de modificar las ecuaciones de Maxwell llevaron a contradicciones con la experiencia. Lorentz entonces notó que las ecuaciones de Maxwell deducidas de un sistema a otro en movimiento relativo uniforme a través de los cambios de coordenadas distintos a los usuales—o de Galileo—y que se les conoce como *transformación de Lorentz de coordenadas* (Lorentz (1904)).

$$\begin{aligned}t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ y eran las mismas en todos los laboratorios, sin importar su movimiento relativo uniforme.

Mientras mayor sea la velocidad relativa v mayor es la diferencia entre una transformación de Lorentz y una de Galileo. Sin embargo esta veloci-

dad debe ser muy grande para que el efecto sea notable. Si tomamos la velocidad de la Tierra en su órbita : 30 Km/seg se puede ver que la diferencia entre la transformaciones de Galileo y la de Lorentz está en la relación 1 a 200.000.000 con respecto a lo corregido. De esta manera comprendemos por qué hasta entonces no se había detectado algún efecto que hiciera necesario dudar de la transformación de Galileo.

En 1898 Poincaré afirmó que *“es muy probable que los fenómenos ópticos dependan solo de los movimientos relativos de los cuerpos materiales, fuentes luminosas y aparatos ópticos envueltos”*, con la implicación de que el movimiento *“absoluto”* era en principio indetectable en lo que a fenómenos ópticos concernía. Sospechó además que no solo los fenómenos ópticos sino cualquier otro tipo de fenómenos iban a fallar en el intento de detectar movimiento absoluto.

En 1900 Poincaré dijo *“¿Existe realmente nuestro eter? No creo que mediciones más precisas puedan revelar alguna cosa más allá de movimiento relativo”*. Y finalmente en 1904 enunció un nuevo principio: *“Las leyes de los fenómenos físicos deben ser las mismas para un observador “fijo” que para un observador que posee un movimiento relativo uniforme de traslación”*. Agregando: *“debe surgir una dinámica enteramente nueva que estará caracterizada sobre todo por la regla de que ninguna velocidad puede ser mayor que la de la luz”*.

Precisamente esto fue lo que hizo Einstein en 1905. Cambió la mecánica tomando como base las transformaciones de Lorentz en lugar de las de Galileo, unificando, en cierto modo, la descripción de las leyes electromagnéticas y mecánicas. Einstein eliminó totalmente de la física el concepto de eter por innecesario ya que ninguna de sus supuestas propiedades era detectable. Einstein además notó que las transformaciones de Lorentz eran condición necesaria y suficiente para que la velocidad de la luz sea una magnitud absoluta, independiente de la velocidad de la fuente luminosa o del estado de movimiento relativo del observador. En lugar de postular entonces las transformaciones, postuló la constancia de la velocidad de la luz y luego dedujo elegantemente las transformaciones de Lorentz. Se dice que Einstein no conocía ni el trabajo de Poincaré de 1904 ni el trabajo de Lorentz, también de 1904.

En 1905 Einstein tenía 26 años y se acababa de doctorar. No había logrado conseguir trabajo en ninguna universidad por lo que estaba traba-

jando en una oficina de patentes en Berna, Suiza.

Los postulados de la relatividad se basan en el concepto de *sistema inercial*: un *sistema de referencia* libre de fuerzas externas en el cual un cuerpo dejado libre se mueve con velocidad vectorial constante. Se supone además que la velocidad relativa entre dos sistemas inerciales es independiente del tiempo. Los postulados principales entonces son:

P1: Las leyes físicas toman la misma forma en todos los sistemas inerciales (covariancia).

P2: La velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema inercial, independiente del movimiento de la fuente luminosa relativa al observador.

P3: El espacio es homogéneo e isótropo. El tiempo es homogéneo.

Comprender estos postulados toma un cierto esfuerzo. La relatividad no fue aceptada en el momento que fue enunciada. Se reconoce hoy día que fue solo al final de la primera guerra mundial (1918) que ella fue universalmente aceptada por la comunidad científica. Este es un fenómeno muy explicable. La mecánica de Newton ya llevaba tanto tiempo como una teoría aceptada, riquísima y archicomprobada que no era fácil convencer a muchos que había algo superior. Ocurre normalmente que haya resistencia al cambio y la relatividad tuvo mucha resistencia.

Por muchos años fue atacada y rechazada por la mayoría de los físicos. Pero ese conservadurismo no solo se refleja como reacción contra el cambio ya hecho sino además se refleja en el hecho que el cambio no fue propuesto por quienes tuvieron prácticamente todos los elementos para darse cuenta que se imponía una nueva concepción de la naturaleza. Sobre esto ha opinado un gran físico, *Paul Dirac*. En su discurso de aceptación del premio Oppenheimer en 1970 dijo: *“Cualquiera que haya estudiado relatividad se habrá seguramente preguntado por qué Lorentz obtuvo exitosamente las ecuaciones correctas necesarias para construir la relatividad del espacio y el tiempo pero simplemente no fue capaz de dar el último paso. Hizo todo el trabajo duro, todas las matemáticas necesarias, pero no fue capaz de ir más allá de eso y ustedes se preguntarán ¿Por qué? ”* ... *“Creo que fue detenido por sus temores, una especie de inhibición. Estaba realmente atemorizado de aventurarse en tierras totalmente nuevas, de cuestionar ideas que habían sido aceptadas desde tiempos inmemoriales. Prefirió permanecer en el terreno sólido de*

sus matemáticas. Mientras mantuviera ahí su posición era irrefutable”... “Se necesitó toda la audacia de Einstein y varios años para dar el paso adelante y decir que el espacio y el tiempo están conectados. Lo que hoy nos parece un paso pequeño fué muy difícil para las personas de esos tiempos”. Sin duda hubo que luchar contra la gran inercia del conservadurismo.

P3 no es un postulado propio de la relatividad. También es parte de la física prerrelativista, tanto la mecánica como el electromagnetismo. P1 era válido para la mecánica de Newton si se usaba transformaciones de coordenadas de Galileo y también es válido para las ecuaciones de Maxwell si se usa las transformaciones de Lorentz. El postulado novedoso es P2, el cual implica que deben ser las transformaciones de Lorentz las que deben usarse siempre para transformar coordenadas y tiempo y de otras cantidades físicas de un sistema de referencia a otro.

El primer paso hacia una comprensión de la teoría de la relatividad requiere hacer un detenido análisis de las transformaciones de Lorentz. Lo primero que se nota y sorprende es que el tiempo no es el mismo en ambos sistemas de referencia (sistemas que designaremos K y K'). El tiempo no es aquel absoluto que se pensó en toda época anterior. El tiempo depende del observador y dos observadores en movimiento relativo, K y K' , obtendrán resultados sorprendentemente distintos. Por ejemplo, veremos más adelante que lo que es simultáneo en un sistema de referencia no tiene por qué serlo en el otro. Tampoco las longitudes son absolutas El espacio y el tiempo dejan de ser conceptos separados e independientes para fundirse en un concepto superior, que, a falta de mejor palabra, llamaremos el *espacio-tiempo*.

3. La transformación de Lorentz

Si se tiene dos sistemas inerciales de referencia K y K' tal que, desde K , se observa que K' se mueve con velocidad relativa \vec{v} . En ambos sistemas se escoge ejes coordenados cartesianos de tal modo que los ejes X y X' son paralelos a \vec{v} y tanto los ejes Y e Y' como Z y Z' son paralelos. En tal caso la relación entre las coordenadas espaciotemporales de un mismo evento observado desde ambos sistemas se relacionan por

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (3.1)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (3.2)$$

$$y' = y \quad (3.3)$$

$$z' = z \quad (3.4)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{con} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (3.5)$$

Inmediatamente se observa que γ diverge cuando $v \rightarrow c$. Las transformaciones de Lorentz carecen de sentido con $v > c$.

La velocidad de la luz es $c \approx 3 \cdot 10^{10} \left[\frac{\text{cm}}{\text{seg}} \right]$ y la velocidad de la Tierra con respecto a su órbita es aproximadamente $v = 3 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{cm}}{\text{seg}} \right]$ lo que implica $\beta \approx 10^{-4}$. Cuando β es suficientemente chico γ se puede aproximar por

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \quad (3.6)$$

La misma transformación se puede escribir más elegantemente si, en lugar de t , se usa una variable $x^0 \equiv ct$ que tiene dimensiones de longitud

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x) \quad (3.7)$$

$$x' = \gamma(x - \beta x^0) \quad (3.8)$$

$$y' = y \quad (3.9)$$

$$z' = z \quad (3.10)$$

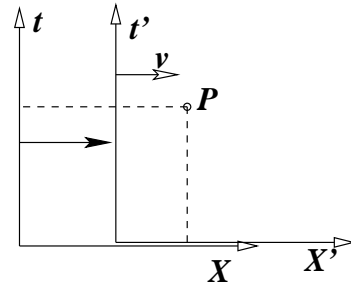


Figura 2: El sistema de referencia inercial K' se mueve con velocidad v paralela al eje X , con respecto al sistema K .

Las dos primeras relaciones, que son las no triviales, se pueden escribir en la forma,

$$x^{0'} = x^0 \cosh \theta - x \sinh \theta \quad (3.11)$$

$$x' = x \cosh \theta - x^0 \sinh \theta \quad (3.12)$$

con tal que se defina

$$\boxed{\cosh \theta = \gamma, \quad \sinh \theta = \beta \gamma} \quad (3.13)$$

4. Líneas de universo

Observemos la figura 3. El eje vertical representa al eje tiempo, que describimos con x^0 , y el eje horizontal representa al eje X o incluso a todo el espacio 3D. Una línea es la historia de un punto. Por ejemplo, la historia del origen \mathcal{O} de coordenadas espaciales es el eje t mismo. La curva en el diagrama representa la historia de un punto que en $x^0 = 0$ sale desde el origen y avanza hacia valores positivos de x , luego retrocede, vuelve a pasar por $x = 0$, va hacia valores negativos de x etc. Esta curva de historia se llama *línea de universo*.

Mientras más vertical es la línea más lenta es la velocidad del punto. Al alcanzar la velocidad de la luz se tiene un caso límite. En la figura Fig. 3 las líneas a trazos a 45° representan líneas de universo de señales que salen del origen a la velocidad de la luz. Se habla del *cono de luz*.

5. Tiempo propio

Si dos señales de luz son emitidas desde el origen \mathcal{O} de K separadas por un intervalo t . Desde K' ellas son vistas separadas por un intervalo t' . Podemos recurrir a (3.1) con $x = 0$ lo que da que $t' = \gamma t$, donde t es el intervalo en el sistema en el cual las señales fueron emitidas (el sistema del reloj).

Será de utilidad llamar *tiempo propio*, τ , al que corresponde al sistema con el reloj en reposo

$$t_{\text{sistema móvil}} = \gamma \tau \quad (5.1)$$

Si la velocidad relativa no es uniforme, como en el caso de la línea de universo recién descrita, entonces (5.1) carece de sentido ya que $v = v(t)$ y por lo tanto $\gamma = \gamma(t)$. En tales casos se debe escribir

$$dt = \gamma d\tau \quad (5.2)$$

El tiempo propio asociado a un sistema con velocidad V no uniforme se define por

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^t \sqrt{1 - V(t')^2/c^2} dt' \\ &= \int_0^t \frac{dt'}{\gamma_V} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Supongamos veloces naves que al pasar por el origen \mathcal{O} de K echan a andar un mecanismo de relojería que τ_0 segundos después detona una bomba en la nave. Veamos dónde están las coordenadas (t, x) de las detonaciones de las distintas naves, vistas desde el sistema K . La pregunta es ¿cuáles son las coordenadas (x^0, x) de las detonaciones $(x^{0'} = \tau_0, x' = 0)$? La coordenada x' son nulas porque las bombas están en reposo en cada nave K' y lo más cómodo es tomar el origen de coordenadas espaciales \mathcal{O}' en la posición de la bomba. Las ecuaciones que se tiene son

$$\begin{aligned} c\tau_0 &= \gamma(x^0 - \beta x) \\ 0 &= \gamma(x - \beta x^0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

De aquí es fácil demostrar que $x^{02} - x^2 = c^2 \tau_0^2$. Es decir, el lugar geométrico en (x^0, x) de los puntos donde explotan las bombas según la velocidad de las naves, es una hipérbola, como se aprecia en la figura 4. Con transformaciones de Galileo, en lugar de una hipérbola se tendría una simple línea horizontal en $x^0 = c\tau_0$.

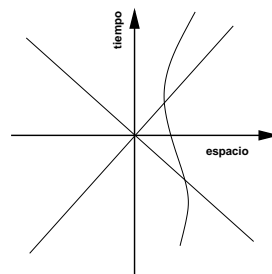


Figura 3: Una línea de universo traza la historia de un punto en el espacio-tiempo. Se escoge unidades tales que la inclinación de 45° represente la velocidad de la luz.

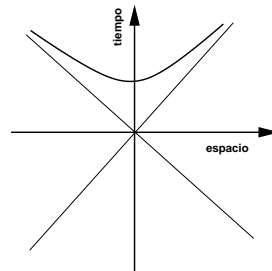


Figura 4: La hipérbola representa los puntos espacio-temporales donde explotarían bombas con el mismo τ_0 de tiempo de explosión, todas inicializadas cuando pasaron por el origen, pero a distintas velocidades.

6. Contracción de Fitzgerald Lorentz y dilatación del tiempo

Consideremos una vara de largo L en reposo en K y paralela a los ejes X de ambos sistemas. Desde X' se observa simultáneamente sus dos extremos obteniéndose entonces que la diferencia de coordenadas entre los dos extremos es $x' = L'$ y, puesto que ambos extremos son observados simultáneamente, $x^{0'} = 0$. De (3.9) se puede escribir que

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(x^0 - \beta L) \\ L' &= \gamma(L - \beta x^0) \end{aligned}$$

Al eliminar x^0 se despeja que

$$L' = \frac{1}{\gamma} L \quad (6.1)$$

es decir, la vara desde el sistema móvil K' se ve más corta.

7. Ilustraciones

7.1. Vida media y partículas veloces

El choque de radiación cósmica en la atmósfera, a unos 60 kilómetros de altura, produce mesones μ prácticamente a la velocidad de la luz. Estas son partículas inestables con vida media de $\tau_0 = 1.5 \cdot 10^{-6}$ segundos, esto es, si inicialmente hay N_0 de ellas, un tiempo t después quedan $N = N_0 2^{-t/\tau_0}$. Estas partículas tardan en llegar a la superficie un tiempo que aproximadamente es $h/c = 60 \times 10^5 \text{cm} / 3 \times 10^{10} \text{cm/seg} \approx 2 \times 10^{-4} \text{seg}$ lo que equivale a unas 133 vidas medias. Un cálculo ingenuo entonces nos dice que llegaría a Tierra aproximadamente una fracción $2^{-133} = 10^{-40}$ de las partículas creadas arriba. Lo que se observa, sin embargo, es que llega aproximadamente un octavo de todas las creadas a 60 kilómetros de altura. La razón es que en el factor $2^{-t/\tau_0}$ dicho arriba, $t = \tau$ es el tiempo que transcurre en el reloj de las propias partículas. Si tal factor se quiere

escribir en términos del tiempo del observador en Tierra, debe escribirse $2^{-t/(\gamma\tau_0)}$. Puesto que $t = 2 \times 10^{-4}$ y que el exponente es $-t/(\gamma\tau_0) = -3$, entonces se deduce que $133/\gamma = 3$ de donde resulta $1 - \beta \approx 2.5 \times 10^{-4}$, es decir, en efecto la velocidad de las partículas es prácticamente la de la luz.

7.2. Efecto Doppler

Un frente plano de onda electromagnética propagándose en la dirección X se describe con una función de $\omega(t - x/c)$. Esta cantidad, como justificaremos más adelante, debe ser invariante a transformaciones de Lorentz, es decir,

$$\omega' \left(t' - \frac{x'}{c} \right) = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (7.1)$$

Reemplazando al lado izquierdo los valores de t' y x' se obtiene una expresión factorizable, uno de cuyos factores es $(t - x/c)$ que se simplifica con el mismo factor a la derecha. Resulta directo, entonces, despejar la frecuencia angular ω' en términos de los datos en el sistema K ,

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \omega \quad (7.2)$$

Problema: Cada seis meses la Tierra está en puntos diametralmente opuestos de su órbita, y las velocidades respectivas tienen, entonces, signo opuesto. Se observa que el ángulo ATB que forma la dirección hacia una estrella A muy lejana hacia la cual la Tierra T se está acercando (alejando) y otra estrella B (también muy lejana) que está en una posición perpendicular al plano de la órbita, cambia. Determine este cambio de ángulo en función de la velocidad de la Tierra en su órbita.

Problema: Cuando una lancha va a una velocidad mayor que la velocidad de las ondas superficiales del agua, se crea un frente en forma de V con vértice en la lancha. Cuando un electrón atraviesa un medio de índice de refracción n , con una velocidad $v > c/n$ se crea, debido a la misma razón, un frente de radiación electromagnética, ya que la velocidad de la luz en ese medio (velocidad de grupo) es c/n . Esta radiación, observable en las piscinas de refrigeración en plantas nucleares, se llama radiación de Cherenkof. Determine el ángulo del cono de radiación en términos de $\beta = v/c$ y de $\beta' = 1/n$.

Problema: En el sistema K hay un medio refringente con índice de refracción n en el cual la velocidad de la luz es c/n . Si este medio está en reposo en K , calcule la velocidad de la luz en tal medio vista desde el sistema K' .

8. Suma de velocidades

Siempre—en el caso en que todo movimiento ocurre en la dirección X —se verá la relación entre las velocidades con que un mismo cuerpo en movimiento es visto desde K y K' . Estas velocidades se denotarán V y V' y no deben ser confundidas con la velocidad v relativa entre ambos sistemas. Las definiciones de V y V' son

$$V = \frac{dx}{dt} \quad V' = \frac{dx'}{dt'} \quad (8.1)$$

pero de (3.1) y de (3.2) es directo deducir que

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \gamma(V - v) \\ \frac{dt'}{dt} &= \gamma \left(1 - \frac{vV}{c^2} \right) \end{aligned}$$

entonces

$$V' = \frac{dx'}{dt'} = \left(\frac{dx'}{dt} \right) \left(\frac{dt'}{dt} \right)^{-1} \quad (8.2)$$

y por lo tanto

$$V' = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}} \quad (8.3)$$

La ley de suma de velocidades no es simplemente aditiva; es una relación no lineal. La correspondiente relación con cinemática de Galileo es $V' = V - v$. Es fácil comprobar, por ejemplo, que si $V = 0.9c$ y $v = -0.9c$ entonces $V' = 0.99c$.

Problema: Demuestre que si $|V| < c$ y $|v| < c$ entonces $|V'| < c$.

Si a cada velocidad se le asocia un β , ($V' \rightarrow \beta_2$, $V \rightarrow \beta_1$, $v \rightarrow \beta$), entonces la relación anterior se puede escribir,

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 - \beta}{1 - \beta_1 \beta} \quad (8.4)$$

pero, de (3.13) se obtiene que $\boxed{\tanh \theta = \beta}$ y entonces la ley de suma de velocidades toma una forma mucho más sencilla:

$$\tanh \theta_2 = \tanh(\theta_1 - \theta) \quad (8.5)$$

Esto sugiere inmediatamente que las velocidades no son tan buenos parámetros como los θ asociados ya que el θ_2 resultante se obtiene de la suma (resta) de los dos θ s involucrados. Esta sí es una relación lineal.

9. Transformaciones de Lorentz y causalidad

9.1. Simultaneidad

Todos los sucesos que en K son simultáneos a un suceso $P = (x_p^0, x_p)$ tienen coordenada cero x_p^0 y cualquier posición espacial. Estos puntos definen, en el plano $(0, 1)_K$ una recta paralela al eje X .

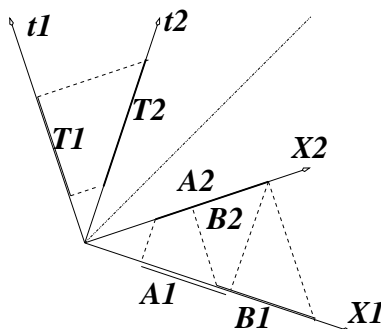


Figura 5: Los ejes $(X1, t1)$ y $(X2, t2)$ corresponden a distancias y tiempos en los sistemas $S1$ y $S2$ que se mueven con una velocidad relativa uniforme v .

En K' el suceso P tiene coordenada cero $x_p^{0'}$ ($x_p^{0'} = \gamma(x_p^0 - \beta x_p)$) y en este sistema son simultáneos los sucesos con coordenada cero $x_p^{0'}$ y cualquier coordenada espacial. Ellos definen, en el plano $(0, 1)_K$ la recta $x_p^{0'} = \gamma(x_p^0 - \beta x_p)$. Esta recta tiene una pendiente $dx^0/dx = \beta < 1$.

Supongamos dos eventos P_1 y P_2 son simultáneos con respecto a algún sistema de referencia inercial. Es fácil convencerse que existe un sistema

de referencia respecto al cual P_1 ocurre antes que P_2 y otro en el cual P_2 ocurre primero. Se concluye que no pueden tener una relación causa efecto.

Para que dos eventos puedan tener una relación de causa y efecto ellos deben estar contenidos en el cono de luz (futuro o pasado) del como de luz del otro evento.

9.2. En el mismo lugar

Todos los sucesos que, con respecto a K , ocurren en el mismo lugar que P tienen las mismas coordenadas espaciales que P y cualquier coordenada temporal. En el plano $(0, 1)_K$ estos eventos forman una recta paralela al eje x^0 .

Aquellos que, con respecto a K' , ocurren en el mismo lugar que P definen la recta $x^{P'} = \gamma(x - \beta x^0)$, que tiene pendiente $dx^0/dx = 1/\beta > 1$.

Si dos eventos P_1 y P_2 ocurren en el mismo lugar (pero P_1 ocurre antes que P_2) respecto a algún sistema de referencia, entonces pueden estar ligados causalmente. Esto quiere decir que en todo sistema de referencia P_1 ocurre antes que P_2 .

La forma de caracterizar esta relación es a través del *intervalo invariante* s^2 que separa a ambos eventos.

$$s^2 \equiv (x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2 \quad (9.1)$$

Se define el grupo de Lorentz como el grupo de transformaciones lineales $(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ que deja invariante a s^2 . Como luego veremos, una transformación de Lorentz Λ puede ser representada por una matriz de 4×4 tal que

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (9.2)$$

tal que

$$\sum_{\nu, \mu=0}^3 g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = \sum_{\nu, \mu=0}^3 g_{\mu\nu} x^{\mu'} x^{\nu'} \quad (9.3)$$

donde g es la matriz

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

A partir de ahora cada vez que haya dos índices griegos repetidos, se entenderá que hay una suma y el símbolo de sumatoria será omitido.

10. Obtención de las transformaciones de Lorentz

10.1. La transformación $\Lambda_{[01]}$

Se ha insistido lo suficiente que las transformaciones de Lorentz fueron el producto de un largo trabajo de ajuste para poder compatibilizar las ecuaciones de Maxwell con la mecánica y con la idea que las leyes de la física deben ser las mismas en diversos sistemas de referencia inerciales.

Ahora es apropiado “deducirlas”. Supondremos que existe una relación lineal entre espacio y tiempo de los mismos dos sistemas K y K' que hemos usado. Es decir suponemos que existe una relación lineal entre las coordenadas (t, x) y (t', x') de un mismo evento P y además suponemos que es simétrica en el siguiente sentido. Si

$$\alpha x' = x - vt \quad (10.1)$$

por simetría se debe tener

$$\alpha x = x' + vt' \quad (10.2)$$

Lo único que cambia es el signo de la velocidad, lo cual es natural. Si de la segunda relación se despeja t' y se elimina x' usando la primera relación se obtiene que

$$t' = \frac{1}{\alpha} \left(t - \frac{1 - \alpha^2}{v} x \right) \quad (10.3)$$

Si P es parte de la línea de universo de un objeto que se mueve con velocidad uniforme y paralela a ambos ejes X , entonces

$$V' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{V - v}{1 - \frac{V}{v}(1 - \alpha^2)} \quad (10.4)$$

donde V es la correspondiente velocidad medida desde K .

La transformación de Lorentz resulta de exigir que si $V = c$ entonces V' también debe ser c . En efecto, al reemplazar estos dos valores en la expresión anterior se obtiene que $\alpha = 1/\gamma$. El resultado final, entonces es

$$\Lambda_{[01]}(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

que relaciona las componentes $[0]$ y $[1]$ de dos sistemas de referencia con velocidad relativa adimensional $\beta = \tanh \theta$.

10.2. Propiedades generales

La propiedad (9.2) junto a la propiedad de invariancia (9.3) permite deducir fácilmente que

$$\Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (10.6)$$

la que también se puede escribir

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (10.7)$$

donde T designa 'trasposición'. Esta propiedad implica que

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad (10.8)$$

El grupo de Lorentz tiene transformaciones tanto con este determinante igual a $+1$ como igual a -1 .

Las transformación de Lorentz más general está caracterizada por seis parámetros que podemos relacionar con las tres componentes del $\vec{\beta}$ relativo y los tres ángulos de Euler de una rotación ordinaria. Estos ángulos relacionan sistemas con ejes con orientación relativa arbitraria. En lugar de las tres componentes de $\vec{\beta}$ lo natural es usar tres ángulos hiperbólicos θ_k tales que, por definición, $\beta_k = \tanh \theta_k$.

También se define la inversa de g , cuyas componentes se denotan simplemente $g^{\mu\nu}$ y es,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

y entonces, por definición,

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho} \quad (10.10)$$

donde δ es la delta de Kronecker, es decir, la matriz **1**.

De (10.7) también se puede ver que

$$\Lambda g^{-1} \Lambda^T = g^{-1} \quad (10.11)$$

El grupo de Lorentz tiene varias propiedades muy importantes. Ya vimos la propiedad del determinante (10.8). Otra es que

$$\Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{o bien} \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \quad (10.12)$$

Juntando estas propiedades se puede llevar a ver que el grupo de Lorentz tiene cuatro partes disjuntas:

- 1: $\Lambda^0_0 \geq 1$ y $\det\Lambda = 1$ (se llama el *grupo restringido de Lorentz*)
- 2: $\Lambda^0_0 \geq 1$ y $\det\Lambda = -1$ (contiene a la inversión espacial)
- 3: $\Lambda^0_0 \leq -1$ y $\det\Lambda = 1$ (contiene a la inversión de espacio y tiempo)
- 4: $\Lambda^0_0 \leq -1$ y $\det\Lambda = -1$ (contiene a la inversión temporal)

En relatividad se denomina *cuadrivector* a un objeto que, como x^μ , transforma de un sistema de referencia a otro por medio de (9.2). Así, se dice que a es cuadrivector *contravariante* si sus componentes en K y K' se relacionan por

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad (10.13)$$

Se habla del cuadrado del cuadrivector a , y se denota a^2 a

$$a^2 = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu \quad (10.14)$$

y se puede comprobar que el cuadrado de un cuadrivector es siempre un invariante, es decir, tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia.

Un tensor de segundo orden contravariante es una cantidad que transforma

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (10.15)$$

et cétera.

11. Notación relativista

11.1. Cuadrivelocidad

Ya se ha visto que la velocidad no tiene una buena ley transformación, pero se puede definir un cuadrivector de velocidad, u que sí las tiene.

Si Q es una partícula material con movimiento arbitrario, llamaremos V a su velocidad (en general variable). Q tiene asociado un tiempo propio definido en (5.3) y con tal noción se define

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} \\ &= \gamma_V \frac{dx^\mu}{dt} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_V c \\ \gamma_V \vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^0 \\ \vec{u} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.1)$$

A partir de esta definición y de la relación (8.3) se puede comprobar, con un mínimo de paciencia, que para la transformación [0, 1]

$$u' = \gamma(u - \beta u^0) \quad (11.2)$$

que es la forma correcta en que debe transformarse una componente espacial, (3.8). El cálculo de u^2 lleva a

$$u^2 = c^2 \quad (11.3)$$

Es decir, todas las cuadrivelocidades tienen cuadrado c^2 .

11.2. Momentum

En mecánica no relativista se define el momentum lineal de una partícula con velocidad \vec{V} como $\vec{p}_{NR} = m\vec{V}$. En esta sección se buscará una cantidad de la forma

$$\vec{p} = f(\vec{V}^2)\vec{V} \quad (11.4)$$

que se conserve en un choque elástico. Puesto que en el límite no relativista $\vec{V}/c \rightarrow 0$ debe coincidir con \vec{p}_{NR} entonces debe cumplirse que

$$f(0) = m \quad (11.5)$$

Para nuestro estudio (que sigue el que publicaron Lewis y Tolman en 1909) se analizará el choque de dos partículas a y b de igual masa. En general los momentos iniciales son \vec{p}_a y \vec{p}_b y los finales son \vec{p}'_a y \vec{p}'_b . Supondremos que estos cuatro vectores son coplanarios y al plano asociado lo llamaremos plano XY . Se escoge el eje X como la intersección entre este plano y el plano tangente al choque. Es decir, cada partícula conserva su velocidad en la dirección X y ellas intercambian momentum en la dirección Y . Se escoge dos sistemas de referencia con movimiento relativo en la dirección X que llamaremos K y K' . Ambos sistemas se definen moviéndose en la dirección X con respecto al sistema centro de momento. La conservación de la componente X del momento, entonces, será trivial. La información interesante de la dirección Y en la cual se intercambia momentum. Pero como ambos sistemas de referencia se definen

a partir del sistema c.m., entonces el momentum total en la dirección Y es cero en ambos antes y después del choque,

$$\vec{P}_{y\text{tot}} = 0 \quad \text{antes y después} \quad (11.6)$$

K es el sistema que se mueve en la dirección X manteniendo a la partícula a siempre sobre el eje Y , es decir, su velocidad antes y después de choque es $\vec{V}_{a\text{antes}} = (0, w)$ y $\vec{V}_{a\text{despues}} = (0, -w)$. Mientras que la partícula b tiene velocidad con componente en ambos ejes, $\vec{V}_{b\text{antes}} = (v, -v \tan \alpha)$ y $\vec{V}_{b\text{despues}} = (v, v \tan \alpha)$

K' es un sistema que también se mueve en la dirección X pero manteniendo a la partícula b siempre sobre el eje Y , es decir, la velocidad de b antes y después de choque es $\vec{V}_{b\text{antes}}' = (0, -w)$ y $\vec{V}_{b\text{despues}}' = (0, w)$. Mientras que la partícula a tiene velocidad con componente en ambos ejes, $\vec{V}_{a\text{antes}}' = (-v, v \tan \alpha)$ y $\vec{V}_{a\text{despues}}' = (-v, -v \tan \alpha)$

De la cinemática anterior es obvio que K' se mueve con velocidad v con respecto a K . Puesto que Y es una dirección ortogonal al movimiento relativo, entonces

$$\begin{aligned} V_{a\text{antes}}'^y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{\gamma} V_{a\text{antes}}^y \end{aligned} \quad (11.7)$$

es decir,

$$v \tan \alpha = \frac{w}{\gamma} \quad (11.8)$$

de aquí que

$$\left(\vec{V}_{b\text{antes}} \right)^2 = \sqrt{v^2 + w^2/\gamma^2} \quad (11.9)$$

Ahora se impone (11.6) lo que da

$$f(w^2)w - f(v^2 + w^2/\gamma^2) \frac{w}{\gamma} = 0 \quad (11.10)$$

que implica que

$$\frac{f(v^2 + w^2/\gamma^2)}{f(w^2)} = \gamma \quad (11.11)$$

En el límite en que $w \rightarrow 0$ la expresión anterior es

$$f(v^2) = m\gamma \quad (11.12)$$

y así, finalmente se tiene que el momentum de una partícula con velocidad \vec{V} es

$$\vec{p} = \gamma_V m \vec{V} = m\vec{u} \quad (11.13)$$

Si la velocidad de la partícula tiende a c , su momentum diverge.

Resulta natural definir entonces

$$p^\mu = m u^\mu \quad p^0 = m c \gamma \quad (11.14)$$

y por tanto,

$$p^2 = m^2 c^2 \quad (11.15)$$

Una forma de leer (11.13) es

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m' \vec{V} \quad \text{con} \\ m' &\equiv \gamma_V m = \frac{m}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned} \quad (11.16)$$

Lorentz, en 1904 dijo que la inercia de una partícula no era sencillamente m sino m' . Actualmente se les suele denominar *masa en reposo* a m y *masa relativista* a m' .

11.3. Forma algo más general para las transformaciones de Lorentz

11.4. La transformación

Consideremos dos sistemas de referencia K y K' con ejes cartesianos paralelos y que se mueven con una velocidad relativa \vec{v} . Más precisamente, desde K se detecta que K' se mueve con \vec{v} y desde K' se detecta que K se mueve con $-\vec{v}$. Sea $\vec{r} = (x, y, z)$ la posición de un evento que en K ocurre en el instante t . Este evento es detectado en K' en $\vec{r}' = (x', y', z')$

en el instante t' . La relación de estas las mediciones en ambos sistemas de referencia es la llamada *transformación de Lorentz*,

$$x^{0'} = \gamma (x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{r}) \quad (11.17)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \gamma \left(x^0 - \frac{\gamma}{1+\gamma} \vec{\beta} \cdot \vec{r} \right) \vec{\beta} \quad (11.18)$$

donde

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad (11.19)$$

La misma transformación también puede escribirse usando objetos tetradimensionales

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

que más compactamente se escriben en la forma

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta^i \\ -\gamma\beta^j & \delta^{ij} - \frac{1-\gamma}{\beta^2} \beta^i \beta^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^i \end{pmatrix} \quad (11.21)$$

11.5. Suma de velocidades

Desde los dos sistemas de referencia K y K' se observa el movimiento de un mismo cuerpo. Lo que de cada uno de ellos se observa son velocidades \vec{V} y \vec{V}' que se determinan por

$$\vec{V} = c \frac{d\vec{r}}{dx^0} \quad \vec{V}' = c \frac{d\vec{r}'}{dx^{0'}} \quad (11.22)$$

11.6. Campo electromagnético

El electromagnetismo, descrito por las ecuaciones de Maxwell, es relativista desde que Maxwell escribió sus ecuaciones. La notación vectorial, sin embargo, no ayuda a ver esta propiedad de las ecuaciones de Maxwell.

Se define el tensor antisimétrico

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & E_z/c \\ -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c & 0 \end{pmatrix} \quad (11.23)$$

donde la primera fila y la primera columna corresponden $\mu = 0$ y $\nu = 0$ respectivamente. Por ejemplo:

$$F_{01} = B_z, \quad F_{30} = -E_x/c$$

12. Fotones y probabilidad

Si se tiene una fuente luminosa monocromática iluminando una placa con dos orificios y más allá hay una pantalla (ver figura), en esta última se observa el espectro de interferencia correspondiente a dos fuentes coherentes colocadas en el lugar de los dos orificios. Este resultado, en particular el patrón de interferencia que se da en la pantalla, no depende de la intensidad de la fuente luminosa. Se puede llegar al extremo de una fuente que emita los fotones uno por uno sin posibilidad alguna que uno afecte al otro y aun así el patrón de interferencia es el mismo. ¿Por cuál orificio pasa cada fotón? ¿O pasa medio fotón por cada orificio? En análisis cuidadoso de la situación ha llevado a concluir que se debe trabajar con la idea que existe una probabilidad que el fotón pase por este orificio o aquel.

Si un haz de luz linealmente polarizada, de intensidad I_0 , incide sobre un filtro polarizador, en general solo una fracción de la luz incidente atraviesa el filtro. Si la dirección de polarización del haz incidente forma un ángulo α con la dirección privilegiada por el filtro, entonces la intensidad del haz emergente es

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

y esa luz tiene la polarización lineal que determina el filtro. En términos de fotones individuales se debe pensar que algunos fotones son absorbidos por el filtro mientras otros logran cruzarlo. Existe una probabilidad de que los fotones pasen, y ella vale $\cos^2 \alpha$.

Una estrella muy distante emite fotones. Clásicamente se dice que es fuente de frentes luminosos esféricos de radio ct . La discontinuidad de la energía en $h\nu$ más el hecho que que en la cáscara $ct, c(t + dt)$ la estrella emite una energía finita hace imposible pensar en un frente esférico continuo de fotones reales en alguna dirección definida. El frente esférico continuo debe atribuirse a una distribución de probabilidad de encontrar a un fotón en un determinado ángulo sólido.

— incompleto —

13. Albores de la física cuántica

13.1. “Ya todo está hecho”

Hacia fines del siglo XIX se había alcanzado una sensación de que ya la física era una ciencia que había alcanzado su culminación, que todas las grandes leyes y principios básicos de la naturaleza se conocían y lo único que quedaba por hacer era rellenar los detalles y encontrar la manera de dar explicación práctica, en base a tales principios, a los fenómenos de la física que se conocía.

Había sido una formidable empresa en la que se fue abriendo camino a partir de lograr incorporar a un marco teórico cada nueva ley que se detectaba. Un ejemplo notable de este tipo de avance se dió, por ejemplo, en la forma como electromagnetismo se desarrolló particularmente en el mismo siglo XIX culminando, después de arduo trabajo y una infinidad de experimentos hecho por grandes físicos en distintos países, en las ecuaciones de Maxwell.

Las nuevas leyes, como la ley de Coulomb por ejemplo, ingresaban como aportes que no destronaba nada anterior. En ese sentido, las nuevas leyes eran aceptadas y bienvenidas aun cuando puede haber habido algún tipo de disputa en casos particulares.

El ejemplo de electromagnetismo es un buen ejemplo del desarrollo de la física porque además de irse incorporando poco a poco leyes que permitían ir cubriendo los fenómenos conocidos, permitían ir creando un marco coherente. A Maxwell le tocó, en la etapa final, darse cuenta que no

había coherencia posible si no se agregaba un elemento más: la *corriente de desplazamiento*. Con este nuevo ingrediente todos los fenómenos de inducción quedaron descritos en forma unificada y se pudo culminar con las formidables ecuaciones de electrodinámica. Subrayamos que fue un asunto de coherencia interna y no nuevos experimentos lo que condujo al concepto de corriente de desplazamiento. Los experimentos corroboraron lo que ya se anticipaba.

Al parecer, durante el siglo XIX a nadie se le ocurrió pensar que la fuente de energía que permitía al Sol brillar como lo hace, era un fenómeno totalmente inexplicable en ese momento. O que la precesión de la órbita de Mercurio no podría ser explicada en base a lo que se sabía.

¿Qué tópicos habría escogido un profesor para enseñar Física Moderna en 1890? Sin duda que electromagnetismo habría sido uno de esos tópicos pero no parece claro que habría incluido en su exposición el problema de la incoherencia entre la covariación de Galileo y el electromagnetismo. Aun si ese profesor hubiese estado al día con los frustrados intentos de Michelson primero y Michelson y Morley después en medir la velocidad de la Tierra con respecto al *eter*, no lo habría incluido porque no era un tema que se considerara importante. Posiblemente tampoco habría incluido el problema de la *radiación de cuerpo negro* porque ya había resultados teóricos que parecían buenos y no había razón para pensar que no se podían mejorar, tanto los experimentos como el análisis teórico; Jeans estaba seguro que lo malo estaba en los experimentos mismos. Un problema que tal vez sí se habría incluido habría sido el dilema de los calores específicos de ciertas sustancias. No se había logrado dar buena cuenta de ellos y había inquietud. Ese sí era un tema que se consideraba importante.

Lo que nadie se esperaba es que las leyes que se conocían iban a ser cambiadas en tal forma que iban a provocar fuerte controversia. El problema es que ya no se trataba de incorporar leyes, al estilo de Coulomb, allí donde no había ley alguna, sino que se trataba de establecer leyes que entraban en colisión con la física que se conocía y se consideraba fuertemente cimentada. Se trataba de lo que tal vez se pueda llamar leyes iconoclastas o algo así no porque lo fueran sino porque así fueron tomadas por destacados contemporáneos.

13.2. Primeros quiebres

En 1874, cuando el joven de 16 años Max Planck, se informaba sobre la perspectiva de estudiar física un profesor de Munich, Phillip von Jolly, le argumentó en contra diciéndole que en física todo lo esencial ya estaba aclarado y solo quedaban por rellenar unos pocos huecos insignificantes.

Afortunadamente Max Planck no hizo caso a su profesor. Estudió física, se especializó en Mecánica Estadística y luego de graduarse se concentró en un problema que no tenía aun una solución satisfactoria. ¿Porqué las brasas son rojizas? ¿Porqué cualquier cuerpo que coloquemos en esas brasas terminará viéndose también rojizo? ¿cómo se determina el color de objetos calientes? Es decir, ¿qué frecuencias se mezclan en qué proporciones para dar el color rojizo? Fue Kirchhoff en 1859-60 quien estableció que tenía que existir una función universal que describía intensidad de la radiación de cuerpo negro. Fueron varios los que intentaron resolver este problema y fue Planck quien entregó en 1900 la solución a un gran costo emocional.

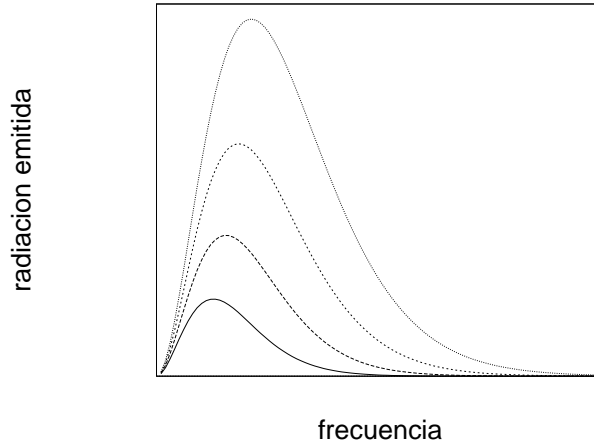


Figura 6: Un cuerpo que está a cualquier temperatura T emite radiación electromagnética (luz) en la forma que indica la figura. Las distintas curvas se refieren a temperaturas diferentes. Planck logró encontrar una ley empírica que describiera estas curvas, y eso significó introducir la constante h . Por algún tiempo Jeans defendió que el máximo observado experimentalmente se debía a un defecto en los experimentos, porque, según él, aun no ha sido posible hacer un cuerpo suficientemente negro a bajas frecuencias.

Tuvo un costo porque Planck debió introducir una hipótesis extraña a la física de ese entonces. En lo que él llamó *un acto desesperado*, supuso que la energía que emiten estos cuerpos no se emite en cantidades arbitrarias, sino que depende de la frecuencia de tal forma que la energía que se emite a frecuencia ν va en unidades que son múltiplos enteros de

$$\boxed{h\nu} \quad (13.1)$$

donde h es la constante de Planck:

$$h = 6.6252 \times 10^{-34} \text{Joule seg} \quad (13.2)$$

Bastó incorporar esta hipótesis y el razonamiento estándar de Mecánica Estadística permitió a Planck establecer que la radiación se emite en la forma que indica la figura 13.2. Estas curvas, que se concluyen a partir de la hipótesis de Planck coincidían muy bien con las curvas experimentales de radiación que se había hecho muy poco antes. La fórmula de Planck, presentada el 14 de diciembre de 1900 da la densidad de radiación emitida por un cuerpo negro a temperatura T ,

$$\rho = \frac{\alpha \nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

La ley de Wien de 1896 establecía que la intensidad luminosa era $I \sim \nu^5 e^{-c_2\nu/T}$.

Hoy se cree que el universo nació hace alrededor de 20 000 000 000 años (y también se cree que nuestro Sol y sistema solar tienen una edad de poco más de 4 000 000 000 años). Se piensa que el universo nació como una gran explosión (el Bing Bang). La radiación que produjo esa explosión tendría que tener un espectro al estilo de la calculada por Planck y en 1948 George Gamow junto a dos estudiantes determinaron que hoy día esa radiación debiera aun ser detectada y debiera corresponder aproximadamente 5°K . Este resultado fue totalmente desdeñado como mera fantasía especulativa y nadie buscó tal radiación. Ella, sin embargo fue detectada por mero accidente en 1965-7 y resultó corresponder a 2.7°K .

Aquel año de 1900 Albert Einstein se graduó y además obtuvo la ciudadanía Suiza. Especialidad: Mecánica Estadística. Sus primeros resultados fueron publicados en 1902 y son sobre fundamentos de Mecánica

Estadística. Su inquietud lo condujo a estudiar el problema de la presión que ejercen muchos cuerpos muy livianos contra cuerpos más grandes. Fue este estudio el que lo llevó a publicar en 1905 tres artículos muy interesantes.

En el primero hizo la hipótesis de que el agua está compuesta de pequeñas moléculas (en ese entonces esto no era un hecho establecido) y dedujo el movimiento que debía tener un cuerpo mesoscópico pero grande suspendido en agua: es lo que se llama movimiento Browniano, (Robert Brown fue quien observó y describió en 1827 que el polen suspendido en agua se mueve como si tuviese vida). Este trabajo de Einstein se considera como la base histórica para el mundo de la física de la existencia de las moléculas, a pesar del trabajo desde Avogadro (1811) hasta Maxwell y Boltzmann en la segunda mitad del siglo XIX.

En un segundo trabajo supuso que la luz (o más bien los rayos x), de frecuencia ν , ejerce presión sobre los electrones en un metal como si los rayos x fuesen cuerpos de energía $h\nu$, tal como en (13.1), es decir, según Einstein, la radiación electromagnética ejerce una presión debido *al golpeteo* de muchísimos *fotones* que constituyen la radiación. Esto lo llevó a describir un fenómeno conocido como *efecto fotoeléctrico*, explicación considerada válida hasta hoy día. La idea de “fotones” resultaba extremadamente extraña, ya que no se veía cómo podía compatibilizarse con la tan excitosa electrodinámica.

Poco más adelante, en 1907, Einstein extendió la hipótesis de Planck al movimiento de las moléculas mismas y pudo dar una notable explicación sobre la variación de la capacidad calórica de los sólidos cuando cambia la temperatura, problema que se consideraba una de las grandes cojeras de la física del siglo XIX.

Pero no es lo mismo golpear un objeto quieto que uno moviéndose. Si todo un grupo de personas está lanzando piedras contra una pared, hay presión sobre la pared, pero si esa pared es la parte trasera de un camión de mudanzas que se está alejando de la gente, la presión es menor. Einstein quiso comprender la relación entre objetos en reposo y en movimiento en el contexto de la electrodinámica (la presión de los fotones sobre cuerpos en movimiento). Su artículo: *Electrodinámica de cuerpos en movimiento*, también de 1905, es donde formula la Teoría de la Relatividad. Este trabajo puede ser considerado como la búsqueda de

coherencia entre electrodinámica y cinemática, sacrificando la tradición galileana. Fue un enorme salto conceptual pero tardó bastante tiempo en que la comunidad de físicos le dedicara su atención. En los años siguientes Einstein no descuidó su trabajo en Mecánica Estadística.

La Relatividad condujo a una reinterpretación de nuestras nociones de espacio y tiempo. Ya no podía considerárseles como conceptos separados, debía pensarse en la nueva noción de *espaciotiempo* como una unidad. Al estudiar Relatividad se comprende, por ejemplo, que acontecimientos que para un observador ocurren simultáneamente, para otro que se mueve con respecto al primero tales acontecimientos en general no son simultáneos. En esta concepción del espaciotiempo se incorporó la velocidad de la luz como un gran absoluto universal, mientras que distancias espaciales o lapsos de tiempo pasaron a ser cantidades que dependen del movimiento relativo entre el observador y el objeto observado.

En el estudio de las implicaciones de este enorme cambio conceptual el propio Einstein llegó a la conclusión que cada cuerpo, por el solo hecho de tener masa tiene energía y, si el cuerpo está en reposo, tal energía es la conocida expresión $E = mc^2$, donde c es la velocidad de la luz, más precisamente, un cuerpo que se mueve tiene una energía

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La diferencia $K = E - mc^2 = \frac{m}{2}v^2 + \frac{3m}{8c^2}v^4 + \dots$ es la energía cinética relativista.

Preocupado Einstein por la credibilidad que pudiera tener esta conclusión, sugiere, al final de su artículo, que tal vez aquella energía que ha sido observada en cuerpos radioactivos se deba a una transformación de masa en energía. Einstein tenía 26 años y pelo negro.

Según la relatividad, por ejemplo, la frecuencia ν de trasmisión desde una nave que se aleja la captaremos como una frecuencia ν' ,

$$\nu' = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \nu$$

Si $v = 0.9c$ entonces $\nu' \approx 0.23\nu$.

Marginalmente Planck (en carta a Ehrenfest del 6 de julio de 1905) dejó planteada una pregunta curiosa. Dos leyes de fuerza muy importantes de la naturaleza, la eléctrica y la gravitacional, pueden ser escritas como

$$F = \frac{\lambda_a \lambda_b}{r_{ab}^2}$$

y el cociente

$$\frac{\lambda^2}{c}$$

tiene las dimensiones de \hbar , ¿por qué? Hoy día se llama constante de estructura fina al cociente

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.036..}$$

Einstein hizo algunos intentos, sin éxito, por responder a esto en 1909.

También en 1909 Lorentz (H.A.) dijo: *La teoría de Planck es la única que está de acuerdo con los resultados experimentales pero ella puede ser aceptada tan solo estipulando que se deberá reconstruir totalmente nuestras concepciones básicas de los fenómenos electromagnéticos (...)*

13.3. Microcosmos: átomo, núcleo y más adentro

En 1911 Rutherford descubrió la existencia del núcleo atómico, *cien mil veces más chico* que el átomo mismo. En 1913 Bohr propone modelo planetario del átomo.

Este modelo de Bohr fue una de esas ideas iconoclastas, en el sentido que cualquier estudiante de electromagnetismo sabe que una carga con movimiento circular emite radiación perdiendo energía. El átomo de Bohr no podía ser estable en base a los marcos tan firmemente establecidos. Y sin embargo esta idea que fue repudiada por algunos grandes físicos fue abrazada rápidamente por el mundo de la química. Se dieron cuenta que todo el asunto de la tabla periódica de los elementos, el concepto de valencia, las líneas espectrales etc se aclaraba en forma unificada gracias al modelo de Bohr. Comienza a darse los primeros pasos en una nueva *física cuántica*. En los años siguientes se hizo importantes experimentos que mostraron las bondades del modelo de Bohr.

Luego de De Broglie propone que toda partícula en movimiento tiene asociada una onda caracterizada por una longitud de onda

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \text{si} \quad v_e = 1 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \Rightarrow \quad \lambda \approx 1\text{mm}$$

hay una sucesión rápida de ideas y nuevos conceptos que conducen al nacimiento de la Mecánica Cuántica que involucra a Heisenberg, Schrödinger, Bohr, Born y muchos otros.

Muy poco después (1927), como ya se ha comentado, Dirac formula una excitosa teoría relativista del electrón y da los primeros pasos hacia una electrodinámica cuántica, la que culmina, pero no termina, en 1947 con los trabajos de Feynman, Schwinger y Tomonaga.

¿Cómo explicarle la noción de color a alguien que es ciego de nacimiento? En Mecánica Cuántica hay nociones que podemos describir en un lenguaje especializado en forma muy precisa, pero que nuestra imaginación no puede captar.

» Tal vez lo central de Mecánica Cuántica, desde el punto de vista de transmitir algo al lego, es dejar establecido que aquellos objetos subatómicos como el electrón, el protón y tantas otras *partículas* no son puntos ni esferas moviéndose. Son objetos de una naturaleza tal que nuestra intuición no puede captar.

Como se ha dicho, el modelo atómico se basaba en el descubrimiento experimental, hecho poco antes, de que los átomos tienen un núcleo central muy pequeño en comparación al tamaño atómico. Se supuso, correctamente, que el núcleo central está rodeado de electrones. En ese tiempo, 1911, también se descubrió el *protón*, que es una partícula cargada positivamente. El átomo de hidrógeno está hecho precisamente de un protón (el núcleo) y un electrón. Por mucho tiempo fue un problema abierto saber la composición de los núcleos más pesados, ya que la evidencia experimental excluía la posibilidad de que estuviesen constituidos únicamente de protones y la emergente teoría cuántica afirmaba que era imposible que hubiera electrones en un núcleo. El problema se resolvió cuando en 1932 fue descubierto el *neutrón*. Así, el núcleo se compone de protones y neutrones.

En ese momento se había cumplido una gran etapa. Ya no se necesitaba considerar como básicos y elementales a los 92 átomos diferentes de la tabla periódica que se utilizan normalmente en química para dar cuenta de todas las sustancias; ahora todo se reducía a tan solo tres “partículas elementales” a partir de las cuales se podían comprender los 92 elementos químicos conocidos y todos aquellos elementos trasuránicos que se obtendrían más tarde. Ciertamente el cuadro se veía mucho más sencillo y satisfactorio.

Pero la realidad parece ser siempre más intrincada de lo que queremos imaginarnos. El mismo año en que se descubrió el neutrón también se descubrió otra partícula.

En efecto, poco antes, en 1927 como ya se comentó, Dirac había conjeturado—sobre la base de argumentos teóricos en que mezclaba física cuántica y relatividad—que debían existir, junto a los electrones negativos, ciertos “electrones positivos” o *positrones*. Los positrones fueron el primer ejemplo de *antimateria* que se descubrió experimentalmente, y ese descubrimiento se hizo, precisamente en 1932.

13.4. Materia, antimateria y fotones

Desde aquel entonces, el concepto de antimateria ha estado presente en todo intento de descubrir el comportamiento y la composición más íntimos de la materia. Y esto porque a todo tipo de materia descubierto hasta hoy le corresponde—al menos teóricamente—un tipo similar de antimateria. Al electrón le corresponde el positrón, al protón, el antiprotón, al neutrón, el antineutrón. Todas estas partículas han sido observadas. Para obtener un antiátomo de hidrógeno se debe juntar un antiprotón con un positrón. Más en general, pueden existir antiátomos de cualquier elemento químico. Se podría tener una antipiedra e incluso una antigalaxia completa.

Así entonces, por cada tipo de materia que se conoce existe otra que es su “anti-”. ¿En qué se distinguen ambas? ¿Porqué no se encuentra antimateria a nuestro alrededor? La respuesta es si un trozo de materia entra en contacto con antimateria se produce una explosión mucho más violenta que una bomba de uranio o de hidrógeno porque ambos tipos de

materia se destruyen mutuamente dando origen a energía radiada. Esto responde a la segunda pregunta, pero tanto materia como antimateria tienen, por sí solas la misma apariencia y solamente propiedades sutiles permiten distinguir una de otra mientras no sean puestas en contacto. Se ha especulado que podrían existir galaxias completas de antimateria, con millones de estrellas, posiblemente planetas y, porqué no, vida, en ellos. Hasta hoy no hay técnicas observacionales que permitan deshechar esta posibilidad.

Y la luz ¿qué papel juega en todo esto? El siglo pasado la luz fue extraordinariamente bien explicada en base a ondas electromagnéticas. También son ondas electromagnéticas los rayos x, las ondas de radio, de televisión, de celular, de radar etc. La diferencia está en que las longitudes de onda son diferentes en cada caso. Nuestra experiencia cotidiana nos informa que la luz (y todo tipo de radiación electromagnética) acarrea energía: luz solar y una lupa nos permite iniciar un fuego, la luz solar evapora agua de los océanos, se forman nubes, llueve y hay ríos de los que extraemos energía hidroeléctrica. El petróleo es energía que llegó del sol, formó bosques de los que derivaron estos combustibles que tan universalmente usamos.

La energía que acarrea la radiación electromagnética de frecuencia ν es “granular”, en el sentido que la cantidad mínima de energía que puede acarrear es $h\nu$. Esta energía la acarrea un *fotón*. Los fotones son considerados partículas en un sentido muy semejante a los electrones, protones etc. La diferencia reside en que la masa de los fotones es nula y ellos se mueven siempre a la velocidad de la luz. Esto no es fácil de entender, pero la clave está en aceptar que el concepto de partícula a este nivel tan básico es muy diferente de algo así como una “bolita”. Las partículas que nosotros estamos hablando tienen también comportamiento ondulatorio. A electrones, protones etc. también se les asocia ondas.

¿Puede considerarse material a los fotones entonces? La pregunta es más un asunto de lenguaje que de fondo, pero resulta más natural hoy día responderla afirmativamente. Mencionemos, en apoyo de que el fotón es materia, que la luz es atraída por los campos gravitacionales tal como cualquier otra sustancia. La desviación de la luz por efecto de un campo gravitacional fue medido por primera vez hace casi sesenta años. Se observó, gracias a un eclipse total de sol, que la luz de estrellas que

pasa muy cerca del sol antes de alcanzarnos es desviada ligeramente de su trayectoria, debido a la atracción solar.

Hay estrellas relativamente pequeñas y de masa tan grande que su campo gravitacional es lo suficientemente intenso para que la luz no pueda escapar de ella, se trata de los *agujeros negros*.

Si los fotones son materia, ¿cuáles son los antifotones entonces? Pues son los fotones mismos. No se destruyen convirtiéndose en radiación porque ellos son radiación.

No es el único caso en que partícula y antipartícula son la misma. Por ejemplo, hay una partícula propia de las fuerzas nucleares, llamada π^0 que es idéntico a su antipartícula. La reacción $\pi^0 + \pi^0 \rightarrow 2\gamma$ es observada todos los días en los laboratorios de partículas.

La historia sigue pero no hay espacio para seguir con ella. Digamos que protones y neutrones pertenecen a una enorme familia de partículas que se llaman colectivamente *hadrones*. Estas partículas son explicables principalmente en base a *quarks*. Los quarks se manifiestan en seis tipos (u, d, c, s, b, t) y con una propiedad que los físicos con cierto sentido del humor llaman *color*. Por otro lado el electrón pertenece a una familia de partículas de seis *leptones*: ($\nu_e, e, \nu_\mu, \mu, \nu_\tau, \tau$), son seis también. El fotón pertenece a una familia que se llama em bosones intermediarios y 8 gluones: (γ, W^\pm, Z, G^i). Tal vez también exista al menos un “higgs”, cuestión que debiera ser dilucidada muy pronto.

14. El problema de dos o más cuerpos

14.1. Caso no relativista

En mecánica Newtoniana Las ecuaciones dinámicas asociadas a un problema de dos cuerpos son,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{f}_{12} + \vec{F}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{f}_{21} + \vec{F}_2 \end{aligned}$$

Elas se pueden separar en el problema del movimiento del centro y el movimiento relativo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \mu \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) &= f_{21} + \dots \end{aligned}$$

donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida, $f_{21} = -f_{12}$ y las fuerzas \vec{F}_a son fuerzas externas que solo pueden depender de la posición (y tal vez de la velocidad) de la partícula a .

El problema de dos partículas, entonces, queda separado en dos ecuaciones diferenciales enteramente independientes, una asociada al movimiento del centro de masa y otra asociada al movimiento relativo. Basta con dar condiciones iniciales para que ambos movimientos tengan solución bien definida.

El problema clásico de M cuerpos ($M > 1$) siempre se puede reducir al movimiento del centro de masa (tres grados de libertad) y un sistema de ecuaciones que equivale a $M - 1$ cuerpos y una fuerza externa.

14.2. Caso cuántico no relativista

En mecánica cuántica en general, por cada coordenada cartesiana q_a , el momentum lineal asociado es un operador p_a tal que

$$[\hat{q}_a, \hat{p}_b] = i\hbar \delta_{ab}$$

Si q_a es una coordenada real entonces \hat{q}_a y \hat{p}_a quedan representados por

$$\hat{q}_a = q_a, \quad \hat{p}_a = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_a} \quad (14.1)$$

Es general también que

$$i\hbar \hat{A} = [\hat{A}, \hat{H}] \quad (14.2)$$

Los operadores \hat{q} y \hat{p} son hermíticos,

$$\hat{q}^\dagger = \hat{q}, \quad \hat{p}^\dagger = \hat{p}$$

donde por definición, el *hermítico conjugado*, B^\dagger de cualquier operador B se define a partir de la noción de producto escalar de funciones de onda,

$$(\psi_1, \psi_2) \equiv \int \psi_1^* \psi_2 dq$$

y B^\dagger satisface por definición, para dos funciones arbitrarias del espacio considerado, que

$$(B^\dagger \psi_1, \psi_2) = (\psi_1, B\psi_2)$$

y además en mecánica cuántica interesa el caso en que $(B^\dagger)^\dagger = B$.

Una separación enteramente semejante a la del caso de mecánica básica puede hacerse si se plantea las ecuaciones de Schrödinger para dos partículas interactuando y la razón es que en física no relativista cada partícula reacciona a los movimientos de la otra en forma instantánea.

En efecto, el Hamiltoniano de dos partículas interactuantes puede plantearse como

$$H = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + V(q_1 - q_2)$$

Si se hace el cambio de variables (operadores)

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{p}_1 + \hat{p}_2, & \hat{R} &= \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \\ \hat{\pi} &= \frac{m_2 \hat{p}_1 - m_1 \hat{p}_2}{m_1 + m_2} & \hat{r} &= q_1 - q_2 \end{aligned}$$

que se comprueba que satisfacen

$$[\hat{R}, \hat{P}] = i\hbar, \quad [\hat{r}, \hat{\pi}] = i\hbar$$

y todos los demás conmutadores son nulos. Usando estos nuevos operadores y llamando M a la suma de las masas, el hamiltoniano H queda de la forma

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{\hat{\pi}^2}{2\mu} + V(r)$$

que es natural separar en dos hamiltonianos: $H_{cm} = \frac{\hat{P}^2}{2M}$ y $H_{rel} = \frac{\hat{\pi}^2}{2\mu} + V(\hat{r})$. El primero es el hamiltoniano de una "partícula libre", que es el centro de masas, y el otro es el de una partícula con masa μ y sometida a un potencial externo $V(r)$.

La ecuación de Schrödinger original

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q_1, q_2, t)}{\partial t} = H(1, 2) \Psi(q_1, q_2, t)$$

se transforma en

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(R, r, t)}{\partial t} = \{H_{cm} + H_{rel}\} \Psi(R, r, t)$$

y es fácil ver. si se escribe $\Psi(R, r, t) = \psi_{cm}(R, t) \psi_{rel}(r, t)$ que la ecuación anterior puede ser separada en dos ecuaciones independientes

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{cm}(R, t)}{\partial t} = H_{cm} \psi_{cm}(R, t), \quad i\hbar \frac{\partial \psi_{rel}(r, t)}{\partial t} = H_{rel} \psi_{rel}(r, t).$$

Se concluye que el problema cuántico no relativista de dos partículas, puede ser separado en la ecuación para la función de onda del centro de masa del sistema y la ecuación para la función de onda asociada al movimiento relativo. Ambas ecuaciones están desacopladas y cada uno de estos problemas puede ser visto como problemas independientes de una sola partícula.

14.3. Caso relativista

Si se considera dos partículas evolucionando debido a su mutua interacción (puede ser una estrella doble o una molécula de nitrógeno), cada una recibe el efecto de la otra con un cierto retraso. Para simplificar el razonamiento supondremos que la interacción llega exactamente a la

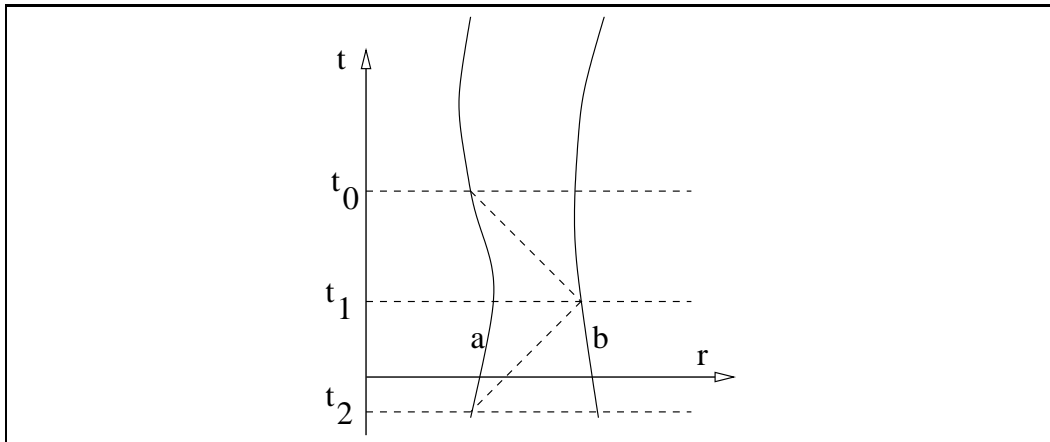


Figura 7: La evolución de dos partículas vistas en un diagrama de espacio-tiempo.

velocidad de la luz, como es el caso tanto de las interacciones electromagnéticas como las gravitacionales.

¿Qué tipo de ecuaciones podría escribirse para un sistema de este tipo? Supongamos que para la partícula a se da su posición y velocidad en un instante t_0 . Para poder determinar su evolución inmediatamente posterior se necesita saber los datos de b en un instante *retardado* t_1 . Se podría pensar entonces que para resolver el problema se debe dar las condiciones iniciales de b en ese instante retardado t_1 . Pero esto no puede resultar, porque para poder saber como evoluciona b a partir de t_1 se necesita saber los datos de a en un instante aun anterior t_2 . Razonando de esta manera se puede ver que ni aun teniendo una infinitud de condiciones iniciales de este tipo el movimiento puede quedar determinado.

Se puede ver que el problema es complejo por muchas otras razones. Por ejemplo, si en un instante t_2 la partícula a sufre un cambio discontinuo de velocidad que produce un cambio de la energía de esa partícula y por lo tanto del sistema de dos, ¿qué ocurre con la partícula b ? Nada le puede ocurrir antes del instante t_1 necesario para que pueda llegar una señal de a a b , la que suponemos que viaja a la velocidad de la luz. Hay, entonces, un lapso finito, posterior a t_2 en que nada diferente puede ocurrir a b . Sea t_1 el momento en que una señal—que partió de a a la velocidad de la luz—alcanza a b . Si en el instante t_2 la energía de a aumenta bruscamente,

¿que ocurre con b en t_1 ? En general su energía cambia.

¿Hay una energía potencial asociada a este sistema? Ya que a y b están interactuando debiera haber un V , pero ¿cuál es su argumento? No es posible que V sea sencillamente función de la distancia relativa $r_{ab} = \|\vec{r}_a - \vec{r}_b\|$ porque habría que especificar las posiciones que tienen las partículas en un tiempo definido, pero tal especificación resulta arbitraria. En el caso norelativista todo ocurre instantaneamente y este problema no se presenta. Se puede dar muchas vueltas buscando una salida a este dilema, pero no hay solución sencilla.

La forma en que esto se resuelve este problema relativista es tomando en cuenta que las interacciones no son a distancia, sino locales. Cada partícula interactúa tan solo con entes que estén en ese instante en ese mismo lugar. Si la interacción es electromagnética, la partícula a interactúa en cada instante t con el campo electromagnético que hay en $\vec{r}_a(t)$. En el caso actual el campo electromagnético que actúa sobre a tuvo su origen en la historia pasada de la partícula b , pero eso no importa. Para definir bien el problema de este sistema se debe tener presente que no tan solo evolucionan las dos partículas sino que también evoluciona el campo electromagnético como ente físico independiente. El sistema no puede ser planteado sencillamente como el de dos partículas sino el de *dos partículas y un campo*. El campo tiene infinitos grados de libertad.

El problema se debe plantear con ecuaciones diferenciales de cada partícula interactuando con un campo y además se debe escribir las ecuaciones de evolución del campo mismo, el cual tiene—al menos en parte— a las partículas como fuentes. Un ejemplo podría ser

$$\begin{aligned}\frac{dp_a^\mu}{d\tau} &= \frac{q_a}{c} F^{\mu\nu} u_{a,\nu} \\ \frac{dp_b^\mu}{d\tau} &= \frac{q_b}{c} F^{\mu\nu} u_{b,\nu} \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} (j_a^\mu + j_b^\mu)\end{aligned}$$

donde q_a y q_b son las cargas de las dos partículas y las densidades de corriente son las que producen ellas dos. El problema recién planteado es una mera ilustración y es demasiado complejo para intentar resolverlo.

Lo central que debe retenerse es que en relatividad no se puede ig-

norar la presencia de campos como entes dinámicos cuando se trata de sistemas con más de una partícula.

14.4. El caso cuántico relativista se posterga

Este caso será discutido más adelante, una vez que se desarrolle varios conceptos previos.

15. Cadena Unidimensional de Osciladores

15.1. Osciladores cuánticos

15.1.1. El caso de un oscilador cuántico 1D

El hamiltoniano del oscilador armónico es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2 \quad (15.1)$$

Si se definen los operadores

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} \left(\omega\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} \left(\omega\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m} \right) \quad (15.2)$$

se comprueba que satisfacen

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

y que \hat{H} se puede escribir

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (15.3)$$

lo que implica que

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \quad [\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega \hat{a}$$

Si Ψ_E es una autofunción de \hat{H} con autovalor E , es decir, $H\Psi_E = E\Psi_E$ entonces

$$\hat{H}\hat{a}\Psi_E = (E - \hbar\omega)\hat{a}\Psi_E \quad \hat{H}\hat{a}^\dagger\Psi_E = (E + \hbar\omega)\hat{a}^\dagger\Psi_E \quad (15.4)$$

La primera relación dice que $\hat{a}\Psi_E \propto \Psi_{E-\hbar\omega}$ mientras que la segunda dice que $\hat{a}^\dagger\Psi_E \propto \Psi_{E+\hbar\omega}$. Pero $\hat{H} \geq 0$, lo que implica que tiene que existir una autofunción ψ_0 tal que

$$\hat{a}\psi_0 = 0 \quad (15.5)$$

y claramente, debido a (15.3), se tiene

$$\hat{H}\psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0$$

es decir $\psi_0 = \Psi_{\hbar\omega/2}$ y la autoenergía es $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$.

Conociendo la autofunción ψ_0 , y sabiendo que $\hat{a}^\dagger\psi_0$ es una función con energía $\hbar\omega$ superior, se define

$$\psi_1 = \hat{a}^\dagger\psi_0$$

que tiene autovalor $E_1 = \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}$. En general, todas las autofunciones superiores se obtienen en la forma

$$\psi_n = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\psi_0 \quad (15.6)$$

las que tienen asociado los autovalores

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \text{con } n = 0, 1, \dots \quad (15.7)$$

La función explícita $\psi_0(q)$ se obtiene de resolver (15.5),

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar}q + \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi_0(q) = 0$$

cuya solución es

$$\psi_0 = \left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-m\omega q^2/2\hbar} \quad (15.8)$$

que se ha definido normalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0|^2 dq = 1 \quad (15.9)$$

El ancho de ψ_0 es $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

La deslocalización Δ de la partícula en estado ψ se define por medio de

$$\Delta^2 \equiv \int q^2 |\psi|^2 dq - \left(\int q |\psi|^2 dq \right)^2$$

y en el caso de ψ_0 resulta ser

$$\Delta^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Frecuencias grandes y/o masas grandes dan deslocalización muy pequeña, es decir, en tales extremos el estado ψ_0 es muy localizado. En el caso del oscilador la posición media para cualquier estado es nula.

15.1.2. Varios osciladores cuánticos independientes

Si se tiene un conjunto de K osciladores independientes entonces el sistema es trivialmente descrito por

$$H = \sum_{v=1}^K H_v$$

donde cada H_v está caracterizado por un ω_v y depende de los operadores independientes \hat{q}_v y \hat{p}_v , es decir, $[\hat{q}_v, \hat{p}_\mu] = i\hbar\delta_{v\mu}$. Con los operadores (\hat{q}_v, \hat{p}_v) se puede definir operadores a_v y a_v^\dagger y el hamiltoniano del sistema toma la forma

$$\begin{aligned} H &= \sum_{v=1}^K \hbar\omega_v \left(a_v^\dagger a_v + \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_v H_v \end{aligned} \quad (15.10)$$

Tal como se ya se vió en el problema de dos cuerpos, al tener un hamiltoniano separable (suma de hamiltonianos que dependen de conjuntos independientes de operadores (\hat{q}_v, \hat{p}_v)), la función de onda asociada a estos osciladores puede escribirse como el simple producto de las funciones de onda de cada uno de los osciladores individuales:

$$\Psi = \prod_{v=1}^K \psi_v(q_v) \quad (15.11)$$

Supongamos que cada ψ_v es un estado propio de su respectivo H_v con una cierta energía propia—que tiene que ser alguna de las que se ha descrito con (15.7)—y que llamaremos $\varepsilon_{n_v}^{(v)}$, entonces

$$H\Psi = \sum_{v=1}^K H_v \left(\prod_{r=1}^K \psi_r \right) \quad (15.12)$$

pero cada H_v actúa no trivialmente tan solo sobre la función que depende de sus variables, es decir,

$$\begin{aligned} H\Psi &= \sum_{v=1}^K \psi_1 \psi_2 \dots \psi_{v-1} \underbrace{(H_v \psi_v)}_{\varepsilon_{n_v}^v \psi_v} \psi_{v+1} \dots \psi_K \\ &= \sum_v \varepsilon_{n_v}^v \psi_1 \psi_2 \dots \psi_{v-1} \psi_v \psi_{v+1} \dots \psi_K \\ &= \sum_v \varepsilon_{n_v}^v \left(\prod_r \psi_r \right) \\ &= \sum_v \varepsilon_{n_v}^v \Psi \\ &= E\Psi \end{aligned} \quad (15.13)$$

La función Ψ es autofunción de H y su autovalor E es la suma de las energías propias $\varepsilon_{n_v}^v$ asociadas a los estados particulares ψ_v en que está el oscilador v . En este caso el estado Ψ y la energía E quedan definidos si se da el conjunto de K números enteros $\{n_v\}$.

15.2. Cadena discreta clásica

Consideremos el problema clásico no-relativista de una cadena unidimensional de partículas P_n de masa κ tal que cada partícula n está unida

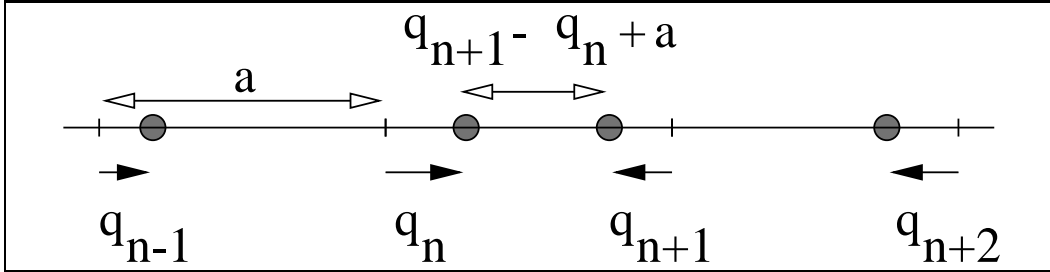


Figura 8: Cadena unidimensional de masas. La partícula n se desvía q_n de su punto de reposo x_n y $x_n - x_{n-1} = a$. La cadena tiene largo $L = Na$.

a la partícula $n + 1$ por un resorte de largo natural a y constante elástica $k = \kappa \left(\frac{c}{a}\right)^2$. Además cada partícula n está unida por otro resorte de longitud natural nula y constante elástica $\kappa \Omega_0^2$ al punto de coordenada $x_n = na$. El largo de la cadena es $L = Na$. Se tomará una cadena periódica, de N partículas, de modo que la partícula $n + N$ es idéntica a la partícula n y, en particular, la coordenada q_n debe satisfacer,

$$q_{N+n} = q_n \quad (15.14)$$

Para que el análisis resulte más sencillo se considerará N par, $[N = 2M]$.

El hamiltoniano de este sistema es

$$H = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{p_n^2}{2\kappa} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{c}{a}\right)^2 (q_{n+1} - q_n)^2 + \frac{\kappa}{2} \Omega_0^2 q_n^2 \right\} \quad (15.15)$$

y las correspondientes ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{p_n}{\kappa} \\ \dot{p}_n &= -\frac{\partial H}{\partial q_n} = \kappa \left(\frac{c}{a}\right)^2 (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) - \kappa \Omega_0^2 q_n \end{aligned} \quad (15.16)$$

Repasaremos que la forma de oscilar de este sistema se puede descomponer en N modos normales de oscilación cada cual con una frecuencia propia.

Para obtener tales modos normales conviene hacer una transformación discreta de Fourier,

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s Q_s e^{ins}, \quad p_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s P_s e^{-ins} \quad (15.17)$$

Al imponer que se cumpla la condición de periodicidad (15.14) se obtiene que $e^{iNs} = 1$ lo que implica que Ns tiene que ser un múltiplo entero de 2π , $Ns = 2\ell\pi$ con ℓ entero, con lo cual s puede tomar N valores

$$s = \frac{2\ell\pi}{N} \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1), M. \quad (15.18)$$

El rango de variación de s en (15.17) es de N valores consecutivos que a veces nos convendrá tomar simétricos en torno a cero particularmente porque la exigencia de que tanto los q_n como los p_n sean reales permite obtener que

$$Q_{-s}^* = Q_s \quad \text{y} \quad P_{-s}^* = P_s \quad (15.19)$$

De la relación $p_n = \kappa \dot{q}_n$ se obtiene que

$$P_s = \kappa \dot{Q}_s^* \quad (15.20)$$

La forma $q_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s Q_s(t) e^{ins}$ muestra que a medida que n va tomando sus valores desde 1 hasta su valor máximo N , la exponencial alcanza a tener el exponente $i2\pi\ell$, es decir, la exponencial toma ℓ veces el valor $e^{2i\pi} = 1$, lo que permite asociar al modo s una longitud de onda

$$\lambda = \frac{L}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \text{un vector de onda} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\ell}{L} \quad (15.21)$$

En lo que sigue, muchas veces se hará uso de

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi inr/N} = \delta_{0,r} \quad (15.22)$$

donde r es entero y $0 \leq r < N$.

Una forma de convencerse de la propiedad (15.22) se consigue tomado en cuenta los siguientes factores: $\zeta \equiv e^{i\alpha}$ es un número complejo sobre la

circunferencia unitaria y que puede verse como una rotación del número 1 en un ángulo α en el plano complejo. La potencia ζ^r es una rotación en un ángulo $r\alpha$ del mismo número 1. Si α es una fracción entera de 2π , es decir, si $\alpha = 2\pi/N$, entonces $\zeta^N = 1$ y es fácil convencerse que el conjunto $\{\zeta^n\}_{n=1..N}$ es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $z^N = 1$. Puesto que estas raíces tienen la forma genérica $z = \zeta^r$, entonces $z^N = \zeta^{rN} = 1$. Además el conjunto $\{z^n\}_{n=1..N}$ también recorre todas las raíces de $z^N = 1$.

Por otro lado, si se tiene una ecuación de la forma $\sum_{k=0}^N a_k z^k = 0$, la suma de todas las raíces z_j satisface $\sum z_j = -a_{N-1}$ y en nuestra ecuación $z^N - 1 = 0$ el coeficiente a_{N-1} es nulo, es decir $\sum_{n=1}^N \zeta^n = 0$. Pero como z^r también sirve como base para generar todas las raíces de $z^N - 1$ entonces más en general $\sum_{n=1}^N \zeta^{rn} = 0$. El único caso en que esto no es cierto es cuando $r = 0$, ya que en tal caso todos los sumandos valen la unidad y $\frac{1}{N} \sum_n \zeta^0 = 1$.

La propiedad (15.22) también será escrita en la forma

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i(s-s')n} = \delta_{s,s'} \quad (15.23)$$

entendiendo que los números s son del tipo (15.18).

Las relaciones inversas a (15.17) son

$$Q_s = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-ins} q_n \quad P_s = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ins} p_n \quad (15.24)$$

La energía cinética del sistema es

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2\kappa} \sum_n p_n^2 \\ &= \frac{1}{2\kappa N} \sum_n \sum_{s,s'} e^{-in(s+s')} P_s P_{s'} \end{aligned}$$

Haciendo primero la suma sobre n se obtiene un $\delta_{s',-s}$ que permite eliminar la suma sobre s' colocando $s' = -s$ lo que da

$$K = \frac{1}{2\kappa} \sum_s P_s P_s^* \quad (15.25)$$

De la energía potencial hay diversos tipos de contribuciones. Debiera ser obvio que $\sum_n q_n^2 = \sum_n q_{n+1}^2$ y es fácil ver que

$$\sum_n q_n^2 = \sum_s Q_s Q_s^* \quad (15.26)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \sum_n q_n q_{n+1} &= \frac{1}{N} \sum_n \sum_{s,s'} e^{ins+i(n+1)s'} Q_s Q_{s'} \\ &= \sum_s e^{-is} Q_s Q_{-s} \end{aligned} \quad (15.27)$$

pero como $Q_s Q_{-s}$ no cambia si se hace el cambio $s \rightarrow -s$, entonces se puede reemplazar el coeficiente e^{-is} por $\frac{1}{2}(e^{is} + e^{-is}) = \cos s$ y por tanto

$$\sum_n q_n q_{n+1} = \sum_s \cos s Q_s Q_s^* \quad (15.28)$$

El hamiltoniano H definido al comienzo tiene dos términos de energía potencial—sean V_1 y V_2 —que a continuación son evaluados separadamente. Primero

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\kappa}{2} \left(\frac{c}{a}\right)^2 \sum_n (q_{n+1} - q_n)^2 \\ &= \kappa \left(\frac{c}{a}\right)^2 \sum_n (q_n^2 - q_n q_{n+1}) \\ &= \kappa \left(\frac{c}{a}\right)^2 \sum_s (1 - \cos s) Q_s Q_s^* \\ &= \kappa \left(\frac{c}{a}\right)^2 \sum_s 2 \sin^2 \frac{s}{2} Q_s Q_s^* \\ &= \frac{\kappa}{2} \left(\frac{c}{a}\right)^2 \sum_s \left(2 \sin \frac{s}{2}\right)^2 Q_s Q_s^* \end{aligned} \quad (15.29)$$

en cambio

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\kappa}{2} \Omega_0^2 \sum_n q_n^2 \\ &= \frac{\kappa}{2} \Omega_0^2 \sum_s Q_s Q_s^* \end{aligned} \quad (15.30)$$

Por tanto el hamiltoniano total puede ser separado en la suma independiente de hamiltonianos para cada modo normal s ,

$$H = \sum_s H_s$$

$$H_s = \frac{1}{2\kappa} P_s P_s^* + \frac{\kappa}{2} \left\{ \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left(2 \sin \frac{s}{2} \right)^2 + \Omega_0^2 \right\} Q_s Q_s^* \quad (15.31)$$

que conduce a las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{Q}_s = -\omega_s^2 Q_s \quad \text{con} \quad \omega_s = \sqrt{\left(\frac{c}{a} \right)^2 \left(2 \sin \frac{s}{2} \right)^2 + \Omega_0^2} \quad (15.32)$$

El modo s está caracterizado por la frecuencia angular ω_s .

Cada hamiltoniano independiente H_s tiene la forma (15.1),

$$H_s = \frac{1}{2\kappa} P_s P_s^* + \frac{\kappa}{2} \omega_s^2 Q_s Q_s^*$$

La solución de (15.32) es

$$Q_s(t) = Q_s(0) \cos \omega_s t + \frac{\dot{Q}_s(0)}{\omega_s} \sin \omega_s t \quad (15.33)$$

Este $Q_s(t)$ depende de s a través de ω_s y $\omega_s = \omega_{-s}$, que implica $Q_s = Q_{-s}$ que es consistente con (15.19) porque Q_s es real.

Si $\ell \ll N$ el argumento $\frac{s}{2}$ de la función *seno* es pequeño y la frecuencia angular ω_s se puede aproximar por

$$\begin{aligned} \omega_s &\approx \sqrt{\left(\frac{c}{a} \right)^2 \frac{4\ell^2 \pi^2}{N^2} + \Omega_0^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2\pi\ell}{L} \right)^2 c^2 + \Omega_0^2} \\ &= \sqrt{k_s^2 c^2 + \Omega_0^2} \quad \text{con} \quad k_s \equiv \frac{2\pi\ell}{L} \end{aligned} \quad (15.34)$$

Si bien este es un sistema no relativista y clásico es interesante observar que si se asocia a ω_s la energía $E_s = \hbar\omega_s$, al vector de onda k_s se

le asocia el momentum lineal $p_s = \hbar k_s$ y a Ω_0 la energía en reposo (la que subsiste cuando el momentum p_s es nulo), $\hbar\Omega_0 = \mu c^2$, entonces (15.34) toma la forma

$$E_s = \sqrt{p_s^2 c^2 + \mu^2 c^4} \quad (15.35)$$

Aunque este resultado pueda resultar sorprendente, es de una enorme generalidad. En física cuántica, las pequeñas excitaciones—en torno a un equilibrio estable—de sistemas de muchos grados de libertad, se comportan como partículas. Así surge el concepto de fonones en redes elásticas y en líquidos, como ondas localizadas de spin en materiales ferromagnéticos, etc. Y estas excitaciones que se comportan como partículas en general tienen masa no nula.

Como ya se discutió antes, los sistemas relativistas necesariamente deben tratar la dinámica de campos y entonces surge la necesidad de describirlos cuánticamente. El primer atisbo de tal necesidad viene de la descripción de la radiación de cuerpo negro de Planck (1900) y Einstein y de la teoría del efecto fotoeléctrico de Einstein de 1905.

15.3. Medio continuo clásico

Del caso de la cadena elástica anterior se obtendrá un caso continuo tomando un límite especial. Las coordenadas $x_n = na$ serán reemplazadas por la variable continua x , y se hará los reemplazos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\kappa}{a}} q_n(t) &\rightarrow \phi(t, x) \\ a \sum_n &\rightarrow \int_{-L/2}^{L/2} dx \end{aligned} \quad (15.36)$$

de tal forma que, como $q_n \rightarrow 0$, los $\phi(t, x)$ son finitos. Esto permite ver que

$$\sum_n \frac{p_n^2}{2\kappa} = \sum_n \frac{\kappa}{2} \dot{q}_n^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int \dot{\phi}^2(x) dx \quad (15.37)$$

y similarmente

$$\sum_n \frac{\kappa}{2} \left(\frac{c}{a}\right)^2 (q_{n+1} - q_n)^2 \rightarrow \frac{c^2}{2} \int \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \quad (15.38)$$

$$\sum_n \frac{\kappa}{2} \Omega_0^2 q_n^2 \rightarrow \frac{\Omega_0^2}{2} \int \phi^2(x) dx = \frac{\mu^2 c^4}{2\hbar^2} \int \phi^2(x) dx$$

y que da como hamiltoniano

$$H = \frac{c^2}{2} \int \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + \phi'^2 + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \right) dx \quad (15.39)$$

y el lagrangeano es

$$L = \frac{1}{2} \int \left(\dot{\phi}^2 - c^2 \phi'^2 - \frac{\mu^2 c^4}{\hbar^2} \phi^2 \right) dx \quad (15.40)$$

pero la combinación $\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - \phi'^2$ es

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_0} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \sum_{\mu=0}^1 g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$$

lo que permite escribir la integral de acción $S = \int L dt$ como una integral invariante

$$S = \frac{1}{2} \int \left(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \right) dx_0 dx_1$$

El campo $\phi(x, t)$ es un campo clásico escalar, invariante relativista, que satisface la ecuación de evolución,

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad (15.41)$$

que es una ecuación invariante relativista conocida como ecuación de Klein-Gordon. (Se usa \hbar aun cuando se trata de un sistema clásico como un abuso de lenguaje).

Un elemento de 4-volumen transforma en la forma

$$d^4 x' = \left[\frac{\partial \{x'^0, \dots, x'^3\}}{\partial \{x^0, \dots, x^3\}} \right] d^4 x$$

donde el coeficiente es el Jacobiano usual. En el caso del espacio de Minkowsky las coordenadas en un sistema de referencia y en otro se relacionan por medio de una transformada de Lorentz

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

lo que permime ver que y este Jacobiano es sencillamente el determinante $\det \Lambda$, el que debiéramos saber que vale 1. Es decir, $d^4 x' = d^4 x$.

La expresión para la integral S de acción lleva a definir la *densidad lagrangeana*, \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \right) \quad (15.42)$$

Conociendo \mathcal{L} la ecuación de movimiento en general es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) \quad (15.43)$$

y pueden ser obtenidas mediante un principio variacional tal como siempre.

En el caso discreto las posiciones en la red son designadas por los índices n y

$$\sum_{n=1}^N \delta_{nm} = 1$$

Para llevar esta relación al caso continuo multiplicamos y dividimos por a ,

$$\sum_{n=1}^N a \frac{\delta_{nm}}{a} = 1$$

El factor a combinado con la suma se convierte en $\int dx$, mientras que la fracción que queda como integrando es nula si $n \neq m$ y diverge si $n = m$, ya que $a \rightarrow 0$. Además esta integral es la unidad. Esto permite agregar que

$$\frac{\delta_{nm}}{a} \rightarrow \delta(x - x') \quad (15.44)$$

con $na \rightarrow x$ y $ma \rightarrow x'$.

Si el campo $\phi(x, t)$ está definido sobre un espacio periódico

$$\phi(x, t) = \phi(x + L, t) \quad (15.45)$$

y se define su expansión de Fourier

$$\phi(x, t) = \frac{1}{L} \sum_k \varphi_k(t) e^{ikx} \quad (15.46)$$

es directo demostrar que el vector de onda k debe tomar valores

$$k = \frac{2\pi\ell}{L} \quad \text{con } \ell \text{ entero} \quad (15.47)$$

Si se parte del formalismo del caso discreto, puede verse que la relación es

$$\sqrt{\kappa L} Q_s \rightarrow \varphi_k \quad (15.48)$$

La extensión directa de (15.23) es

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k-k')x} dx = \delta_{kk'} \quad (15.49)$$

Puesto que ϕ es real, se tiene que cumplir que

$$\varphi_k^* = \varphi_{-k} \quad (15.50)$$

que permite escribir el hamiltoniano en la forma

$$H = \frac{1}{2L} \sum_k (\dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_k^* + k^2 c^2 \varphi_k \varphi_k^* + \Omega_0^2 \varphi_k \varphi_k^*) \quad (15.51)$$

Si se hace toma el límite $L \rightarrow \infty$ la variable k pasa a ser continua y (15.49) ahora es

$$\int e^{i(k-k')x} dx = \delta(k-k') \quad (15.52)$$

que es consistente con que en general se pueda usar

$$\frac{1}{L} \sum_k \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int dk \quad (15.53)$$

Esto se puede comprobar invirtiendo de ϕ a $\varphi(k)$ en el caso con L finito y a $\varphi(k)$ en el caso infinito, con $\varphi_k \rightarrow \varphi(k)$.

15.3.1. Si dos funciones f y g satisfacen:

la ecuación de Kein-Gordon $(\partial_0^2 - \nabla^2 + \mu^2) F = 0$ entonces la cantidad E

$$E = \int ((\partial_0 f) g - f (\partial_0 g)) d\vec{r}$$

es independiente del tiempo.

15.4. Cadena discreta cuántica

Nuevamente el hamiltoniano del sistema es

$$H = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\hat{p}_n^2}{2\kappa} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{c}{a} \right)^2 (\hat{q}_{n+1} - \hat{q}_n)^2 + \frac{\kappa}{2} \Omega_0^2 \hat{q}_n^2 \right\} \quad (15.54)$$

solo que esta vez \hat{q}_n y \hat{p}_n son operadores que satisfacen

$$[\hat{q}_n(t), \hat{p}_{n'}(t)] = i\hbar \delta_{nn'} \quad (15.55)$$

Nuevamente se puede pasar a variables de Fourier utilizando la transformación

$$\hat{q}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s \hat{Q}_s(t) e^{ins}, \quad \hat{p}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s \hat{P}_s(t) e^{-ins} \quad (15.56)$$

y ahora \hat{Q}_s y \hat{P}_s son operadores y ellos *no* son hermíticos. Nuevamente las relaciones inversas son

$$\hat{Q}_s = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-ins} \hat{q}_n \quad \hat{P}_s = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ins} \hat{p}_n \quad (15.57)$$

La exigencia que los \hat{q}_n y los \hat{p}_n sean hermíticos implica que

$$\hat{Q}_s^\dagger = \hat{Q}_{-s}, \quad \hat{P}_s^\dagger = \hat{P}_{-s} \quad (15.58)$$

Los diferentes operadores \hat{Q}_s conmutan entre sí y lo mismo ocurre entre los \hat{P}_s , en cambio

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_{s'}, \hat{P}_s] &= \frac{1}{N} \sum_{n,m} e^{-ins' + ims} \underbrace{[\hat{q}_n, \hat{p}_m]}_{i\hbar \delta_{nm}} \\ &= \frac{i\hbar}{N} \sum_n e^{-in(s'-s)} \\ &= i\hbar \delta_{s's} \end{aligned} \quad (15.59)$$

Es un ejercicio sencillo demostrar que

$$\begin{aligned} H &= \sum_s \left(\frac{1}{2\kappa} \hat{P}_s \hat{P}_s^\dagger + \frac{\kappa \omega_s^2}{2} \hat{Q}_s \hat{Q}_s^\dagger \right) \\ \omega_s^2 &= \left(\frac{2c}{a} \sin \frac{s}{2} \right)^2 + \Omega_0^2 \end{aligned} \quad (15.60)$$

Los números $s = \frac{2\ell\pi}{N}$ aparecen sólo en $\sin^2(s/2)$ y en exponenciales del tipo $\exp[-isn]$. Queremos ver que se puede tomar $\ell = 1, \dots, N$ en lugar de $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (M-1), M$. Primero notamos que si se considera un ℓ' que sobrepasa el valor M , $\ell' = M + \ell$, se obtiene un $s' = s + \pi$ y por tanto $\sin s' = -\sin s$. Similarmente $\exp[-is'n] = (-1)^n \exp[-isn]$.

Si se introduce los operadores

$$\begin{aligned} a_s &= \sqrt{\frac{\kappa}{2\hbar\omega_s}} \left(\omega_s \hat{Q}_s + \frac{i}{\kappa} \hat{P}_s^\dagger \right) \\ a_s^\dagger &= \sqrt{\frac{\kappa}{2\hbar\omega_s}} \left(\omega_s \hat{Q}_s^\dagger - \frac{i}{\kappa} \hat{P}_s \right) \end{aligned} \quad (15.61)$$

se comprueba que satisfacen

$$[a_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs} \quad (15.62)$$

y H puede ser reescrito como

$$H = \sum_s \hbar\omega_s \left(a_s^\dagger a_s + \frac{1}{2} \right) \quad (15.63)$$

que es exactamente igual al hamiltoniano de N osciladores independientes rotulados s , tal como se vió en (15.10). La diferencia conceptual es que acá se comenzó con osciladores acoplados y se ha obtenido esta forma tan solo una vez que se hizo uso de los modos normales.

Las energías propias de H pueden ser escritas como

$$E = \sum_s \hbar\omega_s \left(n_s + \frac{1}{2} \right) \quad \text{donde cada } n_s \text{ puede ser } n_s = 0, 1, 2, \dots \quad (15.64)$$

donde la energía del estado fundamental (llamada también *energía de punto cero*) es $E_0 = \sum_s \frac{1}{2} \hbar\omega_s$ y es un número finito porque N es finito, en el caso continuo diverge. E_0 corresponde al caso en que todos los n_s son nulos, es decir, cada uno de los osciladores independientes está en su estado fundamental. Al este estado fundamental se lo llama *vacío* (carente de excitaciones).

La energía E queda caracterizada por el conjunto de enteros (n_1, n_2, \dots, n_N) . En lo sucesivo se usará la notación

$$\varepsilon_s \equiv \hbar \omega_s \quad (15.65)$$

y la autofunción Ψ asociada al autovalor (15.64) se debe denotar $\Psi_{n_1, n_2, \dots, n_N}$ y, en analogía con (15.6), ella se puede relacionar al estado fundamental Ψ_0 por

$$\Psi_{n_1, n_2, \dots, n_N} = \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_N!}} \left(a_1^\dagger \right)^{n_1} \dots \left(a_N^\dagger \right)^{n_N} \Psi_0 \quad (15.66)$$

Una primera señal de que las excitaciones de estos sistemas pueden ser interpretadas como partículas proviene de constatar que los autovalores de H se componen de múltiplos enteros de las energías ε_s . Si se trata realmente de un sistema elástico vibrante, entonces estas partículas son fonones. Puesto que las energías son aditivas, se trata de partículas que no interactúan. Más aun, el formalismo lleva incorporado que no hay forma de distinguir a partículas que tengan asociada la misma frecuencia, lo que implica (aunque no será visto) que estas partículas satisfacen la estadística de Bose-Einstein. Uno de los aspectos revolucionarios de estos sistemas de campos cuánticos es la pérdida de individualidad de las partículas: se trata de partículas indistinguibles. La noción de esta indistinguibilidad *bosónica* está en la base de la teoría del calor específico de sólidos a muy bajas temperaturas.

La expresión para \hat{q}_n dada en (15.17) puede ser escrita de otra forma haciendo uso de (15.33),

$$\begin{aligned} \hat{q}_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s \left(\hat{Q}_s(0) \cos \omega_s t + \frac{\dot{\hat{Q}}_s(0)}{\omega_s} \sin \omega_s t \right) e^{ins} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s \frac{1}{2\omega_s} \left[\left(\omega_s \hat{Q}_s(0) - \frac{i\hat{P}_s^\dagger(0)}{\kappa} \right) e^{i\omega_s t} + \left(\omega_s \hat{Q}_s(0) + \frac{i\hat{P}_s^\dagger(0)}{\kappa} \right) e^{-i\omega_s t} \right] e^{ins} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s \frac{1}{2\omega_s} \left[a_s^\dagger(0) e^{i\omega_s t - ins} + a_s(0) e^{-i\omega_s t + ins} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s \frac{1}{2\omega_s} \left[a_s^\dagger(0) e^{i(\varepsilon_s t - ipx)/\hbar} + a_s(0) e^{-i(\varepsilon_s t - ipx)/\hbar} \right] \end{aligned} \quad (15.67)$$

Para obtener la penúltima expresión se hizo uso de la igualdad $\sum_s \hat{Q}_s e^{ins} = \sum_s \hat{Q}_s^\dagger e^{-ins}$ y otra similar para \hat{P}_s . La última es una forma atractiva que anticipa lo que será de interés en el límite continuo.

15.4.1. Hacia una cadena abierta

Se ha estado estudiando en cierto detalle la cadena armónica unidimensional periódica de N partículas de masa κ y resortes con constantes elásticas $\kappa \left(\frac{c}{a}\right)^2$ y $\kappa \Omega_0^2$.

A continuación se procederá a obtener la descripción de una cadena abierta a partir de la que ya se sabe.

Se parte de la cadena usual con N par tal que $N = 2N_1 + 2$ y, de todos los movimientos posibles de esta cadena, se considerará solo aquellos que quedan determinados con condiciones iniciales tales que las dos partículas: la $n = N_1 + 1$ y la $n = N = 2N_1 + 2$ se quedan todo el tiempo quietas, $q_{N_1+1}(t) = 0$ y $q_{2N_1+2}(t) = 0$.

La fuerza F_n sobre la partícula n tiene una parte que es proporcional a $q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}$ y otra proporcional a q_n y puesto que si una partícula no se mueve más necesariamente la fuerza sobre ella es nula todo el tiempo, entonces, para que un cierto q_n permanezca nulo todo el tiempo necesariamente se debe tener que $q_{n+1} = -q_{n-1}$. En el caso que se ha definido arriba, para que la fuerza sobre la partícula $N_1 + 1$ sea nula es necesario que las vecinas se muevan satisfaciendo $q_{N_1+2} = -q_{N_1}$ todo el tiempo. Para que esto pueda ser cierto todo el tiempo, a su vez algo semejante debe ocurrir con las vecinas de estas vecinas. Con paciencia se puede demostrar que el sistema cumple con que

La argumentación puede ser extendida para demostrar que debe satisfacerse que $q_{N_1+1}(t) = 0$ y $q_{2N_1+2}(t) = 0$ tan solo si

$$q_{N_1+1+n}(t) = -q_{N_1+1-n}(t) \quad \text{equivalemente} \quad q_n(t) = -q_{N-n}(t) \quad (15.68)$$

Tomando esta relación con $n = 0$ implica $q_{N_1+1} = 0$ que es una de las condiciones y tomando $n = N_1 + 1$ implica $q_{2N_1+2} = 0$ que es la otra. La relación (15.68) permite ver que los movimientos que se están considerando corresponden a los de un sistema con N_1 grados de libertad.

La propiedad (15.68) sirve para ver que

$$\begin{aligned} Q_\ell &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N q_n e^{-2\pi i \ell n / N} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N_1} q_n e^{-2\pi i \ell n / N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=N_1+2}^{2N_1+1} q_{n'} e^{-2\pi i \ell n' / N} \end{aligned} \quad (15.69)$$

La suma originalmente sobre $N = 2N_1 + 2$ valores de n fue separada en dos sumas, sobre N_1 valores cada una. En la segunda se hace el cambio $n' = 2N_1 + 2 - n$ lo que permite demostrar que el rango ya dicho de n' se traduce en que $n = 1, \dots, N_1$ tal como en la primera suma. Además la exponencial es

$$e^{-2\pi i \ell n' / N} = e^{-2\pi i \ell (N-n) / N} = e^{-2\pi i \ell (N-n) / N} = e^{2\pi i \ell n / N}$$

Esta exponencial multiplica a $q_{n'} = q_{N-n} = -q_n$ que conduce a

$$Q_\ell(t) = \frac{-i\sqrt{2}}{\sqrt{N_1+1}} \sum_{n=1}^{N_1} q_n(t) \sin \frac{\pi \ell n}{N_1+1} \quad (15.70)$$

Es obvio que $Q_0 = 0$. Veamos que $Q_{\ell=N_1+1}$ consta de la suma anterior con senos de argumento πn , los que son nulos, es decir, $Q_{\ell=N_1+1} = 0$. Igualmente fácil es demostrar que

$$Q_\ell = -Q_{N-\ell} \quad (15.71)$$

que muestra que hay solamente N_1 funciones $Q_\ell(t)$ diferentes.

Conociendo esta simetría de los Q_ℓ se vuelve a la conocida expansión de q_n en los Q_ℓ y es fácil demostrar que

$$q_n = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{N_1+1}} \sum_{\ell=1}^{N_1} Q_\ell(t) \sin \frac{\pi n \ell}{N_1+1}$$

Puesto que los Q_ℓ son imaginarios, los q_n son reales a pesar de las apariencias.

El hamiltoniano del sistema es el mismo (con o sin Ω_0) ya visto y su reducción en términos de los Q_ℓ también es la misma. Se trata de un caso particular de lo ya visto y conocido, entonces se sabe que $H = \sum_\ell H_\ell$ con $N = 2N_1 + 2$ hamiltonianos H_ℓ . En el caso actual dos de ellos son

idénticamente nulos porque $Q_0 = 0$ y $Q_{N_1+1} = 0$. Además, debido a (15.71), $H_\ell = H_{N-\ell}$, entonces basta con sumar en el rango $\ell = 1, \dots, N_1$ y mutiplicar por 2. El caso con $\boxed{\Omega = 0}$ da

$$H = \sum_{\ell=1}^{N_1} H'_\ell, \quad \text{donde} \quad H'_\ell = \frac{\kappa'}{2} |\dot{Q}_\ell|^2 + \frac{\kappa'}{2} \omega_\ell |Q_\ell|^2 \quad (15.72)$$

con $\kappa' = 2\kappa$ y

$$\omega_\ell = \frac{2c}{a} \sin \frac{\pi \ell}{2(N_1 + 1)}$$

Como ya se sabe, el espectro cuántico de energía es

$$E = \sum_{\ell} \hbar \omega_\ell \left(n_s + \frac{1}{2} \right)$$

15.4.2. La energía de estado fundamental

La energía del estado fundamental es

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\ell} \omega_\ell = \frac{\hbar c}{a} \sum_{\ell} \sin \frac{\pi \ell}{2(N_1 + 1)} \\ &= \frac{\hbar c}{a} \sum_{\ell} \Im \exp \frac{i\pi \ell}{2(N_1 + 1)} = \frac{\hbar c}{a} \Im \sum_{\ell} \left(e^{ib} \right)^\ell \end{aligned}$$

con $b = \frac{\pi}{2(N_1+1)}$. Se trata de una suma geométrica. La suma es

$$\sum_{\ell=1}^{N_1} \left(e^{ib} \right)^\ell = \frac{e^{ib(N_1+1)} - e^{ib}}{e^{ib} - 1} \quad (15.73)$$

una vez que se usa la forma explícita de b se concluye que la parte imaginaria de la suma es

$$E_0 = \frac{\hbar c}{a} \frac{\sin \frac{\pi}{2(N_1+1)} + \cos \frac{\pi}{2(N_1+1)} - 1}{2(1 - \cos \frac{\pi}{2(N_1+1)})}$$

A continuación se hace los reemplazos $N_1 = L_1/a - 1$ y se expande en a , lo que da

$$E_0 \approx \frac{2\hbar c L_1}{\pi a^2} - \frac{\hbar c}{2a} - \frac{\hbar c \pi}{24 L_1}$$

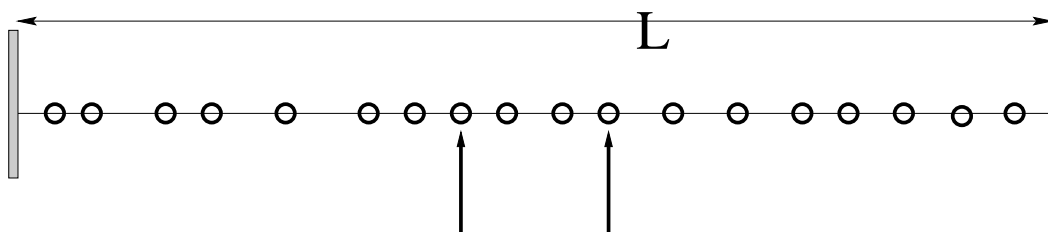


Figura 9: A una cadena armónica y cuántica de largo L se le impone (condición de borde) dos nodos a distancia x .

15.4.3. El efecto Casimir

Un campo (por ejemplo el campo electromagnético) tiene, en cada punto del espacio, un cierto número de grados de libertad. Estos grados de libertad normalmente pueden oscilar en torno a su su mínimo de energía. Macroscópicamente esas excitaciones pueden detectarse como ondas u otras formas. Clásicamente el mínimo absoluto de energía de tal sistema es que el campo sea nulo en todas partes (en electrodinámica la energía en cada punto es una mezcla de E^2 y de B^2). Cuánticamente el mínimo es el estado fundamental, el cual corresponde a la energía E_0 descrita en nuestro sencillo caso 1D algo más arriba. Ese estado fundamental tiene oscilaciones asociadas.

Si se tiene dos placas planas, paralelas (distancia x entre ellas) y conductoras (el análisis resulta mucho más sencillo si se supone que son perfectamente conductoras) en el vacío, las oscilaciones del campo tienen nodos en el conductor. Esta condición de borde altera el valor de la energía del estado fundamental del campo, y depende de la distancia x entre las placas, $E_0 = V(x)$. Puesto que un sistema, inicialmente en reposo, tiende a evolucionar en la dirección en que la energía disminuye, entonces se puede adivinar que existe una fuerza entre las placas y ella se relaciona con dE_0/dx .

En lo que sigue se resuelve esto para el caso de la cadena 1D de osciladores cuánticos. Suponemos que tenemos un sistema \bar{S} de largo fijo L (ver figura) que consiste en una parte central de largo $L_1 = x$ y dos partes laterales de largo $L_1 = L - \frac{x}{2}$. El sistema tiene $N = 2N_1 + 2$ partículas y dos de ellas son forzadas a estar quietas (son los nodos que, en el caso elec-

tromagnético, las placas conductoras implican). Los tres sistemas pueden ser estudiados en forma separada. Se supone que $x \gg a$ y que el número de partículas en cada uno de los tres tramos es arbitrariamente grande.

La energía del sistema \bar{S} resulta ser

$$\bar{E}_0 \approx \frac{4\hbar cL}{\pi a^2} - \frac{3\hbar c}{a} - \frac{\hbar c\pi}{24x} - \frac{\hbar c\pi}{L - \frac{x}{2}} \quad (15.74)$$

La fuerza entre las dos paredes es $F = -\frac{d\bar{E}_0}{dx}$ y resulta ser

$$F = -\frac{\hbar c\pi}{24x^2} + \mathcal{O}(1/L) \quad (15.75)$$

Esta fuerza es finita en el límite al continuo y es atractiva.

En electrodinámica cuántica la fuerza entre dos grandes placas conductoras paralelas separadas por una distancia x es

$$F_{EDQ} = -\frac{\pi}{480} \frac{\hbar c}{x^4}$$

Fue Casimir quien en 1948 se dio cuenta por primera vez de la posibilidad de la existencia de esta fuerza:

H.B.G. Casimir, *Proc. Nederlands aka. Wetenschappen, Amsterdam* **60** 793 (1948)

H.B.G. Casimir, D. Polder, *Phys. Rev.* **73** 360 (1949).

Aparentemente esta fuerza fue medida hace mucho tiempo:

B.V. Deryagin, I.I. Abrikosava, *J. Exp. Theor. Phys.* **30** 993 (1956)

B.V. Deryagin, I.I. Abrikosava, E.M. Lifshitz, *Quart. Rev. Chem. Soc.* **10** 295 (1956)

J.A. Kitchnet, A.P. Prosser, *Proc. Roc. Soc. A* **242** 403 (1957).

Medición reciente:

S. K. Lamoreaux, *Physical Review Letters*, **78**, 5 (1997).

15.5. Medio continuo cuántico

A partir de ahora se va a tomar unidades tales que

$$\hbar = 1, \quad c = 1.$$

El paso al caso continuo nuevamente se hace utilizando el cambio (15.36), se obtiene la misma integral de acción, la misma densidad lagrangeana y la ecuación de movimiento sigue siendo la ecuación de Klein-Gordon,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + \mu^2) \hat{\phi} = 0 \quad (15.76)$$

La diferencia, con lo anterior, está en que las variables de campo $\hat{\phi}(x)$ no conmutan con sus variables conjugadas

$$\hat{\pi}(x) = \dot{\hat{\phi}}(x)$$

En lo que sigue no se usará más el acento circunflejo para indicar operador.

En la relación de conmutación (15.55) el factor q_n es reemplazado por $\sqrt{\frac{a}{\kappa}} \phi(x, t)$ y similarmente el factor $p_m = \kappa \dot{q}_m$ es reemplazado por $\kappa \sqrt{\frac{a}{\kappa}} \dot{\phi}(x, t)$ lo que deja para el lado izquierdo $a[\phi(x, t), \dot{\phi}(x', t)]$ y debe igualarse con $i\delta_{nm}$, pero antes se divide por a y se usa la identificación (15.44), lo que da

$$[\phi(x, t), \dot{\phi}(x', t)] = i\delta(x - x') \quad (15.77)$$

la que debe entenderse que va acompañada de

$$[\phi(x, t), \phi(x', t)] = 0, \quad [\dot{\phi}(x, t), \dot{\phi}(x', t)] = 0. \quad (15.78)$$

En el contexto relativista actual puede parecer extraño que las relaciones de conmutación estén dadas a tiempos iguales porque pareciera que se está privilegiando un sistema de referencia particular. Un poco más abajo se verá que el formalismo es perfectamente covariante.

A partir de las funciones

$$f_p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi E_p}} e^{-iE_p t + i p x} \quad (15.79)$$

donde $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ y tales que satisfacen una relación de ortonormalidad

$$i \int [f_p^*(x,t) \{\partial_0 f_{p'}(x,t)\} - \{\partial_0 f_p^*(x,t)\} f_{p'}(x,t)] dx = \delta(p - p') \quad (15.80)$$

se define los operadores

$$\begin{aligned} a(p) &= i \int [f_p^*(x,t) \dot{\phi}(x,t) - \dot{f}_p^*(x,t) \phi(x,t)] dx \\ a^\dagger(p) &= -i \int [f_p(x,t) \dot{\phi}(x,t) - \dot{f}_p(x,t) \phi(x,t)] dx \end{aligned} \quad (15.81)$$

que, a continuación, se argumentará que no dependen del tiempo. En efecto, si se hace uso de la ecuación de evolución $\ddot{\phi} = \partial^2 \phi / \partial x^2 + \mu^2 \phi$, se desprende que

$$\begin{aligned} \dot{a}_p &= i \int (\dot{f}_p^* \dot{\phi} + f_p^* \ddot{\phi} - \ddot{f}_p^* \phi - \dot{f}_p^* \dot{\phi}) dx \\ &= i \int (f_p^* \ddot{\phi} - \ddot{f}_p^* \phi) dx \\ &= i \int (f_p^* (\partial^2 - \mu^2) \phi - \ddot{f}_p^* \phi) dx \end{aligned} \quad (15.82)$$

En el último paso se usó la notación $\partial^2 = \partial^2 / \partial x^2$. De los tres términos del integrando aislamos

$$\begin{aligned} I &= i \int f_p^* \partial^2 \phi dx \\ &= i \int \partial (f_p^* \partial \phi) dx - i \int \partial (f_p^*) \partial \phi dx \end{aligned} \quad (15.83)$$

pero el primer término es nulo porque es una integral de *superficie* en un dominio periódico. La última expresión se vuelve a integrar por partes y da,

$$I = i \int (\partial^2 f_p^*) \phi dx = i \int (-p^2 f_p^*) \phi dx$$

y como $\ddot{f}_p^* = -E_p^2 f_p^*$ el integrando final que expresa \dot{a}_p contiene el factor $-p^2 - \mu^2 + E_p^2$ que es nulo.

Puesto que ni $a(p)$ ni $a^\dagger(p)$ dependen del tiempo es fácil demostrar que

$$[a(p), a^\dagger(p')] = \delta(p - p') \quad (15.84)$$

$$[a(p), a(p')] = 0 \quad [a^\dagger(p), a^\dagger(p')] = 0$$

Con lo anterior se puede escribir $\phi(x, t)$ en la forma

$$\phi(x, t) = \int \left\{ a(p) f_p(x, t) + a^\dagger(p) f_p^*(x, t) \right\} dp \quad (15.85)$$

Escribir H y escribirlo en terminos de a y a^\dagger .

16. El campo cuántico escalar complejo

16.1. La expansión del campo

En mecánica cuántica básica se trata de sistemas con un número finito de grados de libertad. Un campo $\phi(\vec{r}, t)$ representa infinitos grados de libertad y es natural que la notación al tratarlo cuanticamente sufra algunos cambios.

A continuación se considerará un campo cuántico complejo $\phi(\vec{r}, t)$ cuya evolución libre queda definida por la densidad lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi \quad (16.1)$$

Tal como en mecánica clásica, el momento conjugado a una variable q_j es $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$, también acá se definen los momentos conjugados a ϕ y a ϕ^\dagger , que se denota π y π^\dagger respectivamente, por

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} \quad (16.2)$$

Es natural entonces que la teoría sea contruida en base a las relaciones de conmutación

$$[\phi(\vec{r}, t), \dot{\phi}^\dagger(\vec{r}', t)] = i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (16.3)$$

y todas las otras relaciones de conmutación a tiempos iguales son nulas.

Se define además las funciones

$$f_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3 E_p}} e^{-iE_p t + i\vec{p} \cdot \vec{r}} \quad (16.4)$$

que satisfacen

$$i \int \left(f_{\vec{p}}^*(\vec{r}, t) \dot{f}_{\vec{p}'}(\vec{r}, t) - \dot{f}_{\vec{p}}^*(\vec{r}, t) f_{\vec{p}'}(\vec{r}, t) \right) d^3 r = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (16.5)$$

y si el campo se expande

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \left\{ a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(\vec{r}, t) + b^\dagger(\vec{p}) f_{\vec{p}}^*(\vec{r}, t) \right\} d^3 p \quad (16.6)$$

se demuestra que

$$\begin{aligned} [a(\vec{p}), a(\vec{p}')] &= 0, & [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] &= 0 \\ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] &= \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \\ [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')] &= \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (16.7)$$

y etc.

En forma enteramente similar a como se vió antes, se cumple que (REVISAR)

$$\begin{aligned} a(\vec{p}) &= i \int \left[f_{\vec{p}}^*(\vec{r}, t) \dot{\phi}(\vec{r}, t) - \dot{f}_{\vec{p}}^*(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) \right] d\vec{r} \\ b^\dagger(\vec{p}) &= -i \int \left[f_{\vec{p}}(\vec{r}, t) \dot{\phi}(\vec{r}, t) - \dot{f}_{\vec{p}}(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) \right] d\vec{r} \end{aligned} \quad (16.8)$$

De relaciones similares usando ϕ^\dagger se obtienen a^\dagger y b .

— incompleto —