La vecindad del punto fijo en bote simple

Botes1Da.TEX

versión 17 de julio de 2009

Los cálculos están hechos con `Maple` por lo que son muy confiables. Sin embargo puede haber errores de trascripción.

Índice

1. Choques en 1D

Si dos partículas chocan en 1D las ecuaciones para el choque son

$$p_1' = p1 + \Delta \tag{1}$$
$$p_2' = p2 - \Delta \tag{2}$$

donde el momentum intercambiado Δ es

$$\Delta = \frac{(1+r)m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)$$

lo que conduce a

$$v_1' = \frac{(m_1 - r m_2)v_1 + (1+r)m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$
$$v_2' = \frac{(m_2 - r m_1)v_2 + (1+r)m_1 v_1}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

donde r es el coeficiente de restitución.

Casos especiales

1. $r = 1$ y masas iguales $\Rightarrow v_2' = v_1$ y $v_1' = v_2$ (intercambio de velocidades)
2. Masas iguales

$$v_1' = \frac{1-r}{2}v_1 + \frac{1+r}{2}v_2 \tag{5}$$
$$v_2' = \frac{1+r}{2}v_1 + \frac{1-r}{2}v_2 \tag{6}$$

3. $m_2 \to \infty \quad \Rightarrow$

$$v_1' = (1+r)v_2 - r v_1 \tag{7}$$

2. Una partícula rebotando contra suelo oscilante

2.1. Notación

Supongamos una sola partículas rebotando contra un piso que oscila periódicamente. Entre golpe y golpe el movimiento de la partícula es

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g \\ \dot{x} &= v_0 - g(t-t_0) \\ x &= x_0 + v_0(t-t_0) - \frac{g}{2}(t-t_0)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Los instantes de los golpes contra el suelo serán designados t_k, ($k = 1, 2 \ldots$), la posición en el choque k se denotará x_k y la velocidad de despegue desde x_k se denotará v_k. Además se usará la abreviación $\boxed{\vec{y}_k}$ para desigmar al par (x_k, v_k).

De esta manera se tiene que la partícula emerge de su primer choque desde el punto del espacio de fase: $\vec{y}_1 = (x_1, v_1)$, tiene un vuelo libre de acuerdo a las ecuaciones (8) y tiene un segundo choque del cual emerge desde el punto $\vec{y}_2 = (x_2, v_2)$ del espacio de fase.

Si se conoce la dinámica del suelo, por ejemplo

$$z(t) = A \sin \omega t \quad (9)$$

y si se conoce la regla de choque con el suelo para una partícula que llega al suelo con velocidad v_c se aplica la ecuación (7):

$$v_k = (1+r)\dot{z} - r v_c \quad (10)$$

entonces, dado $\vec{y}_k$ se puede, al menos en principio, calcular $\vec{y}_{k+1}$.

Aparte de r se va a usar como parámetro adimensional a

$$\Gamma = \frac{A\omega^2}{g} \quad (11)$$

que es la forma adimensional de cuantificar la aceleración máxima de la base oscilante.

2.2. Puntos fijos sencillos

Veamos un candidato a punto fijo en el caso de una partícula que golpea un suelo periódico. La situación más sencilla es que la partícula regrese a golpear el suelo cuando éste está en la misma fase $\phi^\star = \omega t$ que cuando despegó y por lo tanto se encuentra a la misma altura: $x_{k+1} = x_k = x^\star$. Debido a esto la velocidad con que regresa es la misma con la que despegó del bote enterior, excepto por el signo: $v_c = -v_k$ y por lo tanto (10) implica que

$$\begin{aligned} v^\star &= \frac{1+r}{1-r}\dot{z}^\star \\ &= \frac{g\Gamma}{\omega}\frac{1+r}{1-r}\cos\phi^\star \end{aligned} \quad (12)$$

Aquí $\dot{z}^\star$ es la velocidad del suelo en el punto donde se produce el choque, $\dot{z}^\star = A\omega \cos\phi^\star$. En el caso elástico la condición que esto ocurra es $v^\star = 2\dot{z} + v^\star$ que solo admite solución con $\dot{z} = 0$.

Por otro lado, el tiempo que toma la partícula entre un bote y el próximo está determinado por su velocidad de despeque y es $2v^\star/g$. Pero este tiempo debe ser igual a un múltiplo del período del suelo, es decir, $2n\pi/\omega$, entonces

$$\cos\phi_n^\star = \frac{n\pi}{\Gamma}\frac{1-r}{1+r} \quad (13)$$

Puesto que un coseno es menor que la unidad, se obtiene inmediatamente una cota inferior para Γ,

$$\Gamma_{\min} = \frac{1-r}{1+r} n\pi \quad (14)$$

En el límite inelástico ($r \to 0$) esta cota se reduce a $n\pi$. La cota en el límite elástico es nula. Si $r \geq \frac{\pi-1}{\pi+1} \approx 0{,}517$ se obtiene $\Gamma_{\min} < 1$.

Para $r = \frac{15}{100}$ y $n = 1$ se detecta efectivamente que el bote simple comiemza cuando

$$\Gamma = \frac{17\pi}{23} \quad \Rightarrow \quad \omega \approx 1{,}52382635$$

De (13) se ve que la fase $\phi_n^\star$ del suelo para un choque periódico sencillo está totalmente determinada por los datos del problema: el coeficiente de restitución r, y el parámetro adimensional Γ.

El punto fijo $(x^\star, v^\star)$ está definido por

$$x^\star = \frac{g\Gamma}{\omega^2}\sin\phi_n^\star \quad (15)$$

$$v^\star = \frac{g\Gamma}{\omega}\frac{1+r}{1-r}\cos\phi_n^\star = n\pi\frac{g}{\omega} = \frac{1}{2}ngT \quad (16)$$

¿es éste un punto estable?

3. Análisis de la vecindad del bote sencillo asociado a $n = 1$

3.1. El punto fijo sencillo

Se sabe que el bote sencillo está caracterizado por la fase ϕ^* del suelo, ocurre a la altura x^* y el despeque tiene velocidad v^* donde

$$\cos\phi^* = \frac{1-r}{1+r}\frac{\pi}{\Gamma} \tag{17}$$

$$x^* = \frac{g\Gamma}{\omega^2}\sin\phi^* \tag{18}$$

$$v^* = \frac{\pi g}{\omega} \tag{19}$$

Este es el punto fijo más sencillo que se puede tener, donde la amplitud A del suelo se reempazará por $A = \frac{g\Gamma}{\omega^2}$ cada vez que parezca conveniente.

3.2. Despegue cerca del punto fijo

Supongamos que se tiene una condición muy cercana al punto fijo. Se trata de un despegue a altura x_k con velocidad v_k en un instante t_k tales que

$$x_k = x^* + \delta x \tag{20}$$

$$v_k = v^* + \delta v \tag{21}$$

$$A\sin(\omega t_k) = A\sin(\phi^* + \omega\delta_k) \tag{22}$$

La última expresion se puede escribir como

$$A(\sin\phi^* + \omega\delta_k\cos\phi^*) = x^* + \frac{\pi g}{\omega}\frac{1-r}{1+r}\,\delta_k$$

lo que determina que la desviación de t_k respecto a los tiempos asociados al punto fijo es

$$\delta_k = \frac{\omega}{\pi g}\frac{1+r}{1-r}\,\delta x \tag{23}$$

3.3. Vuelo y altura del choque

Puesto que se la partícula despega en condiciones cercanas al punto fijo, el tiempo de vuelo deviera ser cercano al período $T \equiv \frac{2\pi}{\omega}$ del suelo. El tiempo de vuelo es $t_{\text{vuelo}} = T + \delta t$ el cual determina la altura de la partícula al cabo de ese vuelo y la altura del suelo en ese instante. Por definición ambas alturas deben ser iguales. La primera es

$$x_{k+1} = x_k + (T+\delta t)\,v_k - \frac{g}{2}(T+\delta t)^2$$

y la segunda es

$$x_{k+1} = A\sin(\omega(t_k + t_{\text{vuelo}}))$$

Definiendo $\delta' x = x_{k+1} - x^*$ la primera de estas dos expresiones conduce a

$$\delta' x = \delta x + \frac{2\pi}{\omega}\delta v - \frac{\pi g}{\omega}\,\delta t \tag{24}$$

Para ver lo que da

$$\begin{aligned} & A\sin(\omega(t_k + t_{\text{vuelo}})) \\ & = A(\sin\omega t_k\cos\omega t_{\text{vuelo}} + \cos\omega t_k\sin\omega t_{\text{vuelo}}) \end{aligned}$$

es necesario determinar que

$$\begin{aligned} \sin\omega t_k &= \sin\phi^* + \delta_k\cos\phi^* \\ \cos\omega t_k &= \cos\phi^* - \omega\delta_k\sin\phi^* \\ \sin\omega t_{\text{vuelo}} &= \omega\delta t \\ \cos\omega t_{\text{vuelo}} &= 1 - \omega\delta t \end{aligned}$$

con lo cual la segunda expreión para x_{k+1} es

$$\delta' x \equiv x_{k+1} - x^* = \frac{\pi g}{\omega}\frac{1-r}{1+r}(\delta_k + \delta t)$$

que da

$$\delta' x = dx + \frac{\pi g}{\omega}\frac{1-r}{1+r}\,\delta t \tag{25}$$

Comparando con la expresión anterior para $\delta' x$ ellas coinciden si

$$\delta t = \frac{1+r}{g}\,\delta v$$

con lo cual se concluye que

$$\delta' x = \delta x + \frac{\pi(1-r)}{\omega}\,\delta v \tag{26}$$

De esta expresión se obttiene que

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,1} &= 1 \\ \Lambda_{1,2} &= \frac{\pi(1-r)}{\omega} \end{aligned} \tag{27}$$

3.4. Las velocidades

Si la partícula despega desde altura x_k con velocidad v_k y vuela durante un tiempo $t_{\text{vuelo}} = T + dt$ entonces vuelve a golpear el suelo con velocidad

$$v_c = v_k - g\,t_{\text{vuelo}} = -v^* + dv - gdt$$

Golpeando al suelo con esta velocidad, vuelve a despegar con una velocidad dada en (7),

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= (1+r)\dot{z} - r\,v_c \\ &= (1+r)A\omega\cos(\omega(t_k + t_{\text{vuelo}}) - r\,v_c \end{aligned}$$

Definiendo $\delta' v \equiv v_{k+1} - v^*$ un trabajo cuidadoso conduce a

$$\delta' v = -\frac{\omega\Gamma\sin\phi^*}{\pi}\frac{(1+r)^2}{1-r}\,dx + \left(r^2 - (1+r)^2\Gamma\sin\phi^*\right)\,dv \tag{28}$$

De esta expresion se tiene que

$$\begin{aligned} \Lambda_{2,1} &= -\frac{\omega\Gamma\sin\phi^*}{\pi}\frac{(1+r)^2}{1-r} \\ \Lambda_{2,2} &= \left(r^2 - (1+r)^2\Gamma\sin\phi^*\right) \end{aligned} \tag{29}$$

4. Matriz de estabilidad y sus autovalores

La matriz Λ ya determinada tiene un determinante muy sencillo:

$$\det\Lambda = r^2$$

Los autovalores λ_1 y λ_2 de Λ son un tanto complicados.

Definiendo

$$R = \sqrt{\Gamma^2\,(1+r)^2 - \pi^2(1-r)^2}$$

los autovalores λ_1 y λ_2 son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1+r^2-(1+r)R+\sqrt{1+r}\sqrt{(1+r-R)((1-r)^2-(1+r)R)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{1+r^2-(1+r)R-\sqrt{1+r}\sqrt{(1+r-R)((1-r)^2-(1+r)R)}}{2} \end{aligned} \tag{30}$$

Ver PtoFijoNewB.mw.

Por ejemplo, al usar nuevamente $r = 0{,}15$ se recupera que hay un Γ mínimo que vale $\frac{17\pi}{23}$ y además se obtiene un valor máximo–que corresponde al valor donde aparece la primera bifurcación. Este valor sólo se puede obtener numéricamente y es

$$\Gamma_{\text{max}} \approx 2{,}78980061$$

y que corresponde al vaklor que arroja la simulación.

Apéndices

A. Estabilidad

Supongamos que se define una sucesión $\vec{y}_k$ por medio de una función $\vec{f}$

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{f}(\vec{y}_k) \tag{31}$$

Una cuestión de especial interés, una vez que se conoce un punto fijo $\vec{y}^\star$ de la sucesión

$$\vec{y}^\star = \vec{f}(\vec{y}^\star) \tag{32}$$

es saber decidir si este punto es *localmente estable*. La idea es saber si a partir de puntos muy cercanos al punto fijo hay convergecia (con la función $\vec{f}$) hacia el punto fijo.

Para estudiar este tipo de estabilidad se hace un análisis lineal (estabilidad lineal) como sigue. Se supone que $\vec{y}_k$ es muy cercano a $\vec{y}^\star$,

$$\vec{y}_k = \vec{y}^\star + \vec{\delta} \tag{33}$$

Se define $\vec{\delta}\,'$ por

$$\begin{aligned} \vec{y}_{k+1} \equiv \vec{y}^\star + \vec{\delta}\,' &= \vec{f}(\vec{y}_k) = \vec{f}(\vec{y}^\star + \vec{\delta}) \\ &= \vec{f}(\vec{y}^\star) + \vec{\delta} \cdot \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \right)^\star \end{aligned} \tag{34}$$

donde el término entre paréntesis a la extrema derecha es el gradiente de $\vec{f}$ evaluado en el punto fijo que se está considerando. Se ve que se puede cancelar un par de términos y la ecuación anterior (dentro de esta aproximación lineal) se convierte en

$$\delta_a{}' = \Lambda_{ab}\, \delta_b \tag{35}$$

donde

$$\Lambda_{ab} = \left(\frac{\partial f_a}{\partial y_b} \right)^\star \tag{36}$$

Λ es una matriz e interesan sus autovalores: λ_a. Un punto fijo es estable si todos los autovalores de Λ tienen módulo menor que 1,

$$\vec{y}^\star \text{ es estable} \qquad \Leftrightarrow \qquad |\lambda_a| < 1, \forall a \tag{37}$$

(postergo la demostración, está en muchos lados)

También es de mucho interés estudiar los puntos que si bien no son puntos fijos de $\vec{f}$ sí lo son del cuadrado de $\vec{f}$, $\vec{f} \circ \vec{f}$, esto es,

$$\vec{y}^\bullet = \vec{f}\left(\vec{f}(\vec{y}^\bullet) \right) \tag{38}$$

Estos puntos corresponden a *período doble*.