

Bote de periodo tres previo al caos en el sistema Bouncing Ball

Autor 1 y Autor 2

Escrito el 11 de diciembre de 2009

Resumen

Para el sistema Bouncing Ball describimos un movimiento periódico que es diferente al mostrado por diagrama usual tanto por su aparición, que es similar a la ventana periódica, como a la desaparición. Este movimiento repite rapidez, altura y tiempo de vuelo por cada tres choques y lo denominamos bote triple.

1. Introducción

El modelo Bouncing Ball ha sido largamente estudiado por ser uno de los sistemas más simples en mostrar un comportamiento caótico.

El modelo se compone por una partícula total o parcialmente inelástica que colisiona contra una base que vibra sinusoidalmente bajo la influencia de la gravedad. La masa de la base es mucho mayor a la de la partícula de modo que del movimiento del suelo no se altera por los choques.

Dependiendo de los parámetros usados, el movimiento asintótico, es decir el resultante después de muchas colisiones, puede ser periódico. El caso en estudio es el del bote triple o bote de período tres, tipo de movimiento en que la partícula tiene 3 rapideces distintas (el choque i es igual al choque $i + 3$). Lo primero que hace que este tipo de movimiento se diferencie a los otros ya estudiados es que es una *solución alternativa al bote simple* a la que el sistema puede llegar teniendo iguales parámetros dinámicos (amplitud y frecuencia de oscilación, restitución de la partícula y gravedad) pero diferentes condiciones iniciales. Es decir, para ciertos parámetros hay dos atractores posibles.

Además, el tipo de bifurcación con que parte el bote triple es diferente a la que da inicio al bote doble, cuádruple, etc., y su término es, también una bifurcación diferente a las de los movimientos ya reportados.

El bote triple ha sido visto experimental, pero (suponemos que) no ha sido descrito acabadamente y un ejemplo de su trayectoria puede ser visto en la figura (1).

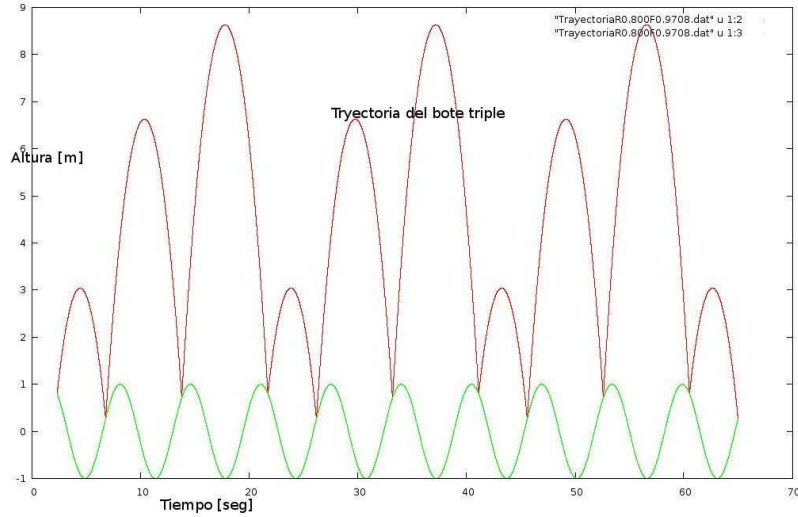


Figura 1: Trayectoria del bote triple para $r = 0,8$ y $w = 97081699$

2. Dinámica y estabilidad local

Llamamos ϕ_i a la fase que tiene la base en la i -ésima colisión, V_i es la rapidez de despegue que tiene la partícula después de la misma colisión, r es el coeficiente de restitución y, finalmente, definimos t_i como el tiempo de vuelo que tiene la partícula entre los choques i e $i + 1$.

Entre colisiones movimiento de la base en función del tiempo está dado por la ecuación (1) y el de la bola o partícula está dado por 2

$$Y_{base}(t) = A \sin(\phi_i + \omega t) \quad (1)$$

$$Y_{bola}(t) = A \sin(\phi_i) + V_i t - \frac{1}{2} g t_i^2 \quad (2)$$

$$(3)$$

Con estas ecuaciones, más la regla de colisión, el mapa que lleva de un choque a otro queda descrito por las ecuaciones:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \omega t_i \quad (4)$$

$$V_{i+1} = (1 + r) A \omega \cos(\phi_{i+1}) - r(V_i - g t_i) \quad (5)$$

Notemos que la t_i es una función que depende de los parámetros ϕ_i y V_i y que para movimientos distintos al simple, no es trivial y resulta al imponer que las ecuaciones de (1) y (2) son iguales, es decir, se debe resolver la ecuación:

$$V_i t_i - \frac{1}{2} g t_i^2 = A \sin(\phi_{i+1}) - A \sin(\phi_i) \quad (6)$$

Esa ecuación es el motivo por el que los desarrollos deben ser numéricos.

2.1. Estabilidad local

El punto fijo será estable si los módulos de la parte real de los autovalores del jacobiano de la función que tiene los puntos fijos, evaluado en el punto fijo, son menores que 1.

En nuestro caso el jacobiano está dado por:

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial \phi_{i+3}}{\partial \phi_i} & \frac{\partial \phi_{i+3}}{\partial V_i} \\ \frac{\partial V_{i+3}}{\partial \phi_i} & \frac{\partial V_{i+3}}{\partial V_i} \end{array}$$

Desde luego esa expresión sólo tiene sentido en los puntos en que la función es derivable. Supondremos que esto es así salvo que en la vecindad del choque las rapideces del suelo y la partícula sean muy parecidas.

Si no ocurre el caso anterior se puede aproximar numéricamente cada derivada y obtener una aproximación del jacobiano y sus autovalores en cada punto fijo triple.

3. Aparición del bote triple

El mecanismo de aparición del bote triple es la bifurcación tangencial, y para entenderla conviene partir revisando la aparición de la ventana periódica principal del mapa cuadrático o logístico:

Se define el mapa $X_{i+1} = rX_i(1 - X_i)$, o bien $X_{i+1} = f(X_i)$ con $f(x) = rx(1 - x)$. El punto triple está es la solución de la ecuación $f^3(x) = x$, que es un polinomio de grado 8. Como su solución no es sencilla, la función se analiza gráficamente. Existe en r^1 en el que los puntos fijos cercanos de la figura (2) se unen. Esta unión se conoce como bifurcación tangencial ya que la curva es *tangente* a la recta identidad, para r menores a ese r crítico los puntos no existen, se dice que se aniquilaron mutuamente después del contacto.

Para este mismo valor crítico de la variable r del mapa cuadrático aparece el punto triple en el diagrama de bifurcaciones.

La explicación de la colorida imagen la postergo.

4. Probabilidades

Acá sólo se presentarían imágenes, pero prefiero no sobrecargar aún el documento.

¹Esto pasa cuando $r = 1 + \sqrt{6}$

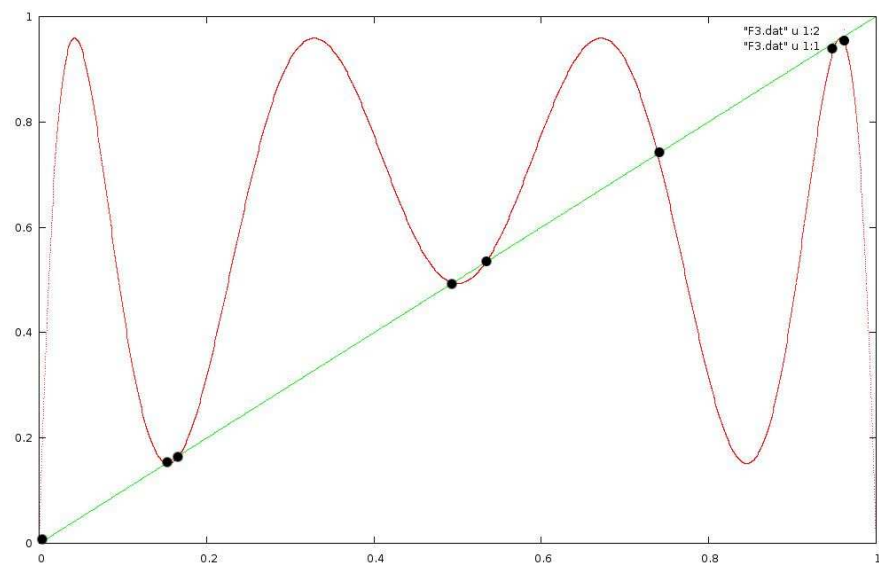


Figura 2: Imagen de $f^3(x)$ en función de x para $r = 3,835$.

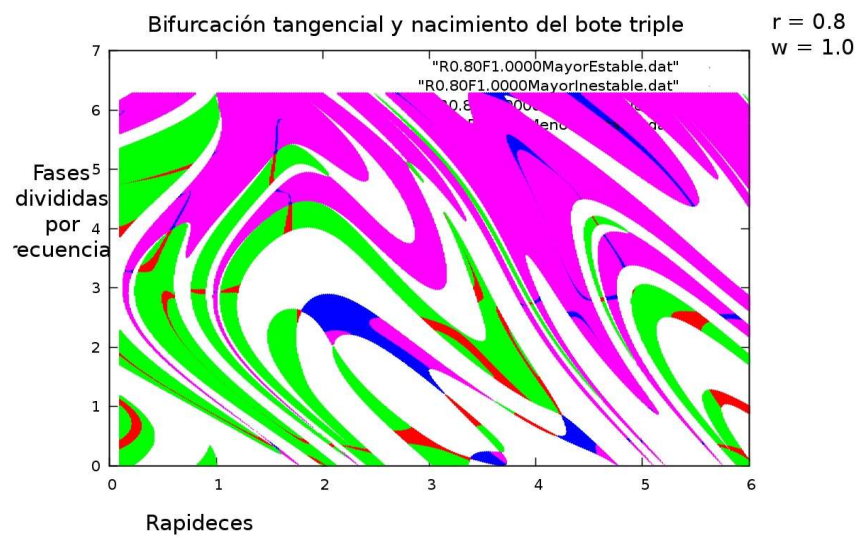


Figura 3: Figura difícil de entender.

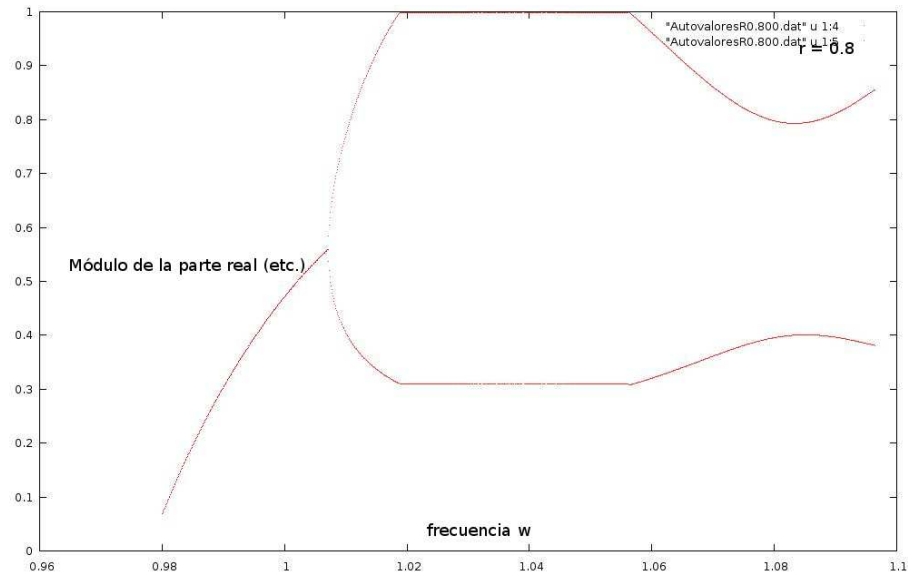


Figura 4: Autovalores asociados a la estabilidad del bote triple, $r = 0.8$

5. Desaparición del bote triple

El estudio del bote simple, es decir aquel, en que la partícula periódicamente colisiona despegando siempre de la misma altura y a la misma velocidad, se ha hecho y revisado por varios autores. Entender la estabilidad de este régimen permite predecir cuando termina: cuando los módulos de la parte real de los autovalores de la función son superan la unidad hay una bifurcación (llamada flip bifurcation) y esto marca el inicio del bote doble (un bote por medio es igual).

La figura (4) muestra los autovalores que miden la estabilidad local del bote triple mientras éste tenga una probabilidad no nula de aparecer en el diagrama de bifurcaciones. la imagen reve la dos cosas, primero que el bote triple mientras existe es estable (muy razonable, pues lo vemos en las simulaciones) y, lo segundo y más importante, el bote desaparece *antes* de acercarse a la inestabilidad, *lo que sugiere un mecanismo de bifurcación mucho más complejo que el de las flip bifurcations*.

6. Simulaciones y aspectos numéricos

Nuestras simulaciones resuelven la ecuación (6) usando el algoritmo de Newton en una becinidad del punto en que se detecta que la diferencia de altura entre la bola y la base cambia de signo.