

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

DINÁMICA DE DOMINIOS EN SISTEMAS FORZADOS PARAMÉTRICAMENTE

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER
EN CIENCIAS MENCIÓN FÍSICA

RODRIGO ALEJANDRO NAVARRO ESPINOZA

PROFESOR GUÍA:
MARCEL CLERC GAVILÁN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
Prof. Nicolas Mujica
Prof. Enrique Tirapegui
Prof. Marcel Clerc

SANTIAGO DE CHILE
NOVIEMBRE 2008

Resumen

Los sistemas temporalmente reversibles o conservativos perturbados con inyección y disipación de energía, llamados sistemas casi-reversibles, exhiben comportamientos complejos tales como oscilaciones, caos temporal, patrones, estados coherentes o estructuras localizadas, caos espacio temporal, etc. Para sistemas simples, es decir sistemas descritos por un número pequeño de grados de libertad, los comportamientos robustos o genéricos han sido caracterizados. En cambio, en el caso de sistemas extendidos, es decir, sistemas con un gran número de grados de libertad (campos), los tipos de comportamientos robustos aún son una pregunta abierta y central del área de la física denominada no lineal.

El marco teórico de esta tesis es el estudio de formación de estados coherentes en sistemas casi reversibles forzados temporalmente. En particular estudiaremos la formación, destrucción e interacción de solitones disipativos observados en una cadena de péndulos vibrada verticalmente. Cerca de la resonancia paramétrica este sistema es descrito por la ecuación Paramétrica de Schrodinger no lineal. Esta ecuación de amplitud da una descripción unificada de la evolución de la envolvente de las oscilaciones. En este marco teórico he caracterizado los mecanismos de aparición y destrucción de los solitones disipativos, en particular el mecanismo de aparición es una bifurcación saddle-node y el mecanismo de desaparición es la pérdida de estabilidad del estado homogéneo que soporta las soluciones coherentes. Por lo tanto he caracterizado el diagrama de fase de estos estados coherentes. He mostrado que hay dos tipos de soluciones coherentes o localizadas, caracterizadas por estar en fase o en oposición de fase. Estas dos soluciones están conectadas por una simetría de reflexión. Considerando dos soluciones coherentes, he caracterizado la interacción de estas, la cual satisface una fuerza efectiva que decae exponencialmente con la distancia entre ellas. Además, esta fuerza es atractiva o repulsiva dependiendo si los estados coherentes están en fase o en oposición de fase, respectivamente. Esto me permitió caracterizar la interacción de un gas diluido de estados coherentes, a partir de lo cual he mostrado que la distancia promedio crece con el tiempo satisfaciendo una ley logarítmica. La configuración de un gas diluido de solitones disipativos es un estado genérico, pues las soluciones homogéneas no nulas observadas en este sistema se destabilizan por medio de una inestabilidad espacial que da origen a esta configuración.

Todas las observaciones anteriores han sido verificadas numéricamente tanto en la ecuación de la envolvente—ecuación Paramétrica de Schrodinger no lineal— y la ecuación de la cadena de péndulos forzada paramétricamente, encontrando un acuerdo consistente.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Alcances de este trabajo de tesis	1
1.2. Ejemplo mecánico de sistema con inyección y disipación de energía	2
1.2.1. Ecuación de Mathieu para ángulos pequeños	2
1.2.2. Ecuación de Mathieu para cualquier ángulo	5
1.2.3. Ecuación de Mathieu para cualquier ángulo con disipación de energía	7
1.3. Ejemplo mecánico de sistema extendido espacialmente	8
1.3.1. Ecuaciones de movimiento para un sistema discreto con acoplamiento espacial	8
1.3.2. Límite continuo y la ecuación de onda	9
1.3.3. Ecuación para una cadena de péndulos forzada paraméricamente y con disipación de energía	11
2. Ecuación No Lineal de Schrödinger y sus soluciones estacionarias	14
2.1. Ecuación de amplitud	14
2.1.1. Alternativa de Fredholm	18
2.1.2. Análisis del operador del sistema	18
2.2. Soluciones estacionarias con fase constante	21
2.3. Aparición de soluciones a través de una bifurcación de <i>Saddle-Node</i>	26
2.4. El espacio de parámetros	27
3. Sobre la interacción entre de solitones	28
3.1. Interacción entre dos 0-solitones	28
3.1.1. Estudio de la dinámica en la región I	33
3.1.2. Alternativa de Fredholm	36
3.1.3. Pequeño análisis del operador del sistema	37
3.1.4. Otro análisis del operador del sistema	42
3.1.5. Cálculo de las integrales de la ecuación de interacción	45
3.1.6. Estudio de la Dinámica en la región II	47
3.1.7. Estudio de la dinámica en la región I	49
4. Análisis de la interacción	52
4.1. Análisis de la interacción	52
4.1.1. Sistema muy disipativo	52
4.1.2. Análisis de la interacción entre $0 - \pi$ -solitones	53
5. Gas de Solitones	55
5.1. Gas 0-solitones	55
5.2. Coarsening	56
5.2.1. Caso sobreamortiguado	56
6. Simulaciones	57
6.1. Simulaciones	57
7. Formación de estructuras en sistemas fuera del equilibrio: solitones y coarsening	63

7.1. Interacción entre dos π -solitones	63
7.1.1. Análisis de las regiones permitidas en el problema de la cadena de péndulos	63
7.1.2. Análisis del espacio de fase de la interacción	64
7.1.3. Resolución de la ecuación diferencial de interacción entre dos π -solitones	66
A. Detalle del paso del discreto al continuo en la cadena de resortes	72

Capítulo 1

Introducción

1.1. Alcances de este trabajo de tesis

Es posible observar, en sistemas macroscópicos mantenidos fuera del equilibrio (vía inyección y disipación de energía), comportamientos auto organizados, tales como formación de patrones y estructuras localizadas [1]. Durante las últimas décadas han sido observadas estructuras localizadas en distintas áreas de la ciencia, tales como: dominios en medios magnéticos [2], burbujas quirales en cristales líquidos [3], sistemas de descargas eléctricas [4], reacciones químicas fuera del equilibrio [5], ondas superficiales en fluidos vibrados verticalmente [6], oscilones en medios granulares [7], estados aislados en convección termal [8, 9], sistemas ópticos con retro inyección [10, 11].

Las estructuras localizadas representan estados que quiebran localmente la simetría de traslación (defectos), es decir, son como un parche de patrones soportados en un fondo distinto, por ejemplo un estado homogéneo. En la figura 1.1 se ilustra un contenedor que tiene un líquido (agua) y un gas (aire) encerrado entre dos placas verticales, el cual es sometido a vibraciones verticales armónicas. Para ciertos valores críticos de la frecuencia y amplitud el sistema exhibe soluciones tipo partícula (ver figura). Las estructuras localizadas son caracterizadas por la posición de los defectos y un número finito de parámetros, tales como el ancho, quiralidad, etc.

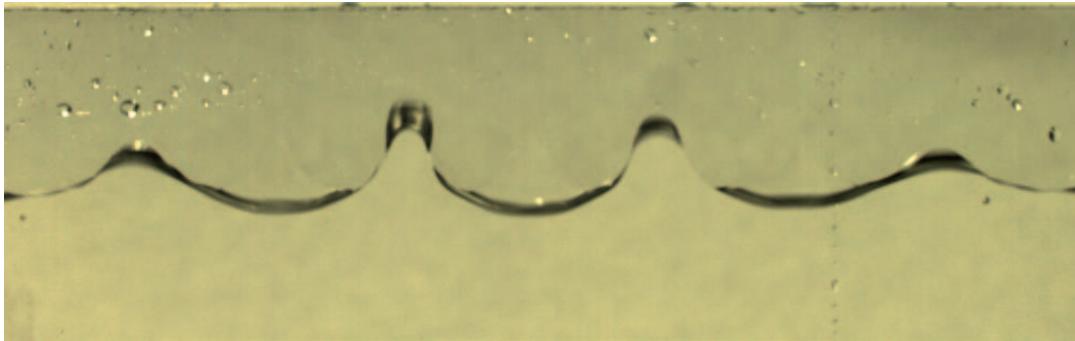


Figura 1.1: Estructuras localizadas en una celda con agua, sometida a un forzamiento externo.

Las estructuras localizadas son comportamientos robustos de los sistemas fuera del equilibrio, las cuales son consideradas como estados tipo partícula. Cuando los sistemas reversibles temporalmente son perturbados con inyección y disipación de energía (sistemas cuasi reversibles) [12], se ha observado que originan este tipo de soluciones. Hay dos formas naturales de inyectar energía a sistemas reversibles: por medio de forzamientos a frecuencia constante o a frecuencia nula (fuerza o torque externo). En el caso de forzamiento a frecuencia constante el mecanismo más conocido de inyección de energía es la resonancia. En el caso de forzamientos no lineales la generalización de esto es la resonancia paramétrica [13]. Sistemas cuasi reversible forzados paraméricamente, cerca de la resonancia paramétrica, son descritos en forma unificada por la *Ecuación No Lineal de Schrödinger forzada paraméricamente y amortiguada*, la cual analíticamente exhibe soluciones tipo partícula denominadas *solitones disipativos*. En la figura 1.2 es mostrado un solitón usual observado en este modelo universal.

Al realizar simulaciones numéricas de una cadena de péndulos forzados paraméricamente de modo que el

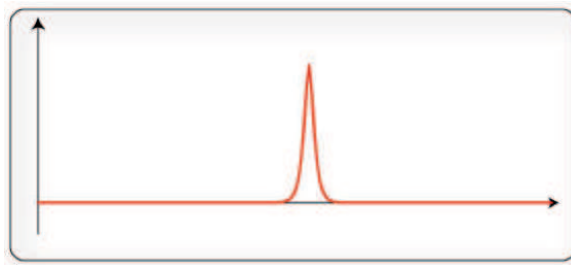


Figura 1.2: Estructura localizada tipo solitón en la ecuación no lineal de Schrödinger.

sistema oscila verticalmente, observamos que la oscilación homogénea se deviene inestable por medio de una inestabilidad espacial, que da origen a un gas de solitones disipativos. Estos solitones empiezan a interactuar produciendo aniquilación entre ellos y dando origen a una dinámica auto similar, dado que la desaparición de solitones origina solitones cada vez más aislados. En la figura 1.3 se ilustra este fenómeno por medio del diagrama espacio temporal de la ecuación de Schrödinger no lineal, donde el eje horizontal da cuenta del espacio y el vertical del tiempo.

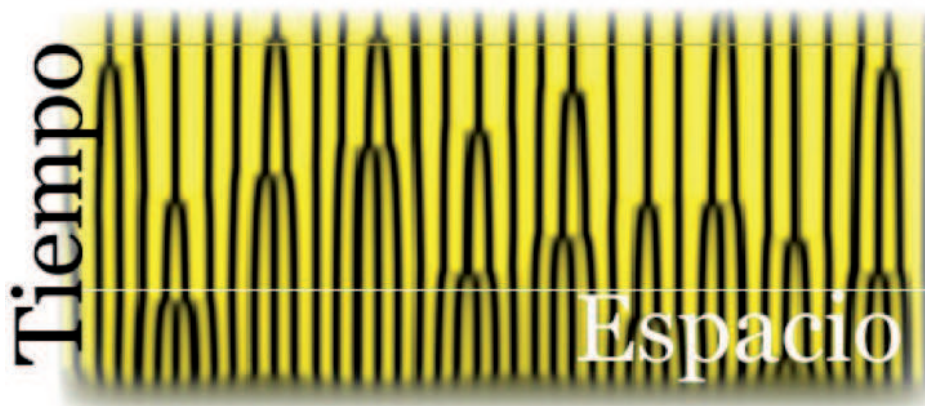


Figura 1.3: Dinámica auto similar entre solitones, en la ecuación no lineal de Schrödinger.

A continuación presentamos un desarrollo detallado de ejemplos mecánicos que contienen los elementos esenciales de los sistemas de nuestro interés, más específicamente, de los sistemas fuera del equilibrio extendidos espacialmente. Comenzaremos estudiando un péndulo al cual se le inyecta energía (a través de un forzamiento paramétrico), luego, en el mismo péndulo, consideraremos la disipación de energía debida a efectos de roce con el aire. Luego pasaremos a revisar el acoplamiento espacial de masas por medio de resortes, que resulta la analogía natural de acoplar péndulos (una cadena de ellos) por medio de un soporte que los conecta a través de la torsión.

Finalmente, obtendremos la ecuación de una cadena de péndulos forzada paraméricamente y amortiguada en la cual, tal como ha sido mencionado, es posible observar formación de patrones, estructuras localizadas tipo solitón disipativo e interacción entre solitones disipativos. Y por lo tanto, será fundamental para continuar nuestro estudio de interacción.

1.2. Ejemplo mecánico de sistema con inyección y disipación de energía

1.2.1. Ecuación de Mathieu para ángulos pequeños

Consideremos un péndulo de largo l , donde en el extremo inferior colocamos una masa m y en el otro extremo (el pivote) lo forzamos paraméricamente mediante un agente externo en forma cosenoidal $Y(t) = y_0 \cos(\Omega t)$, donde y_0 representa la amplitud del forzamiento y Ω es la frecuencia externa de forzamiento. Consideraremos que tanto el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical como la amplitud de forzamiento son pequeños. Por otro lado,

la frecuencia natural del sistema es $\Omega_0 = \sqrt{g/l}$. Las coordenadas de masa (puntual) respecto al sistema referencia

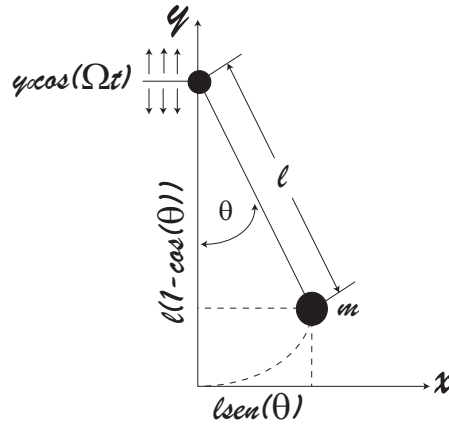


Figura 1.4: Péndulo forzado paramétricamente.

son

$$x = l \sin \theta, \quad (1.1)$$

$$y = Y(t) + l(1 - \cos \theta), \quad (1.2)$$

y dado que el ángulo es pequeño, tenemos

$$x \approx l\theta, \quad (1.3)$$

$$y \approx Y(t) + l \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} l\theta^2 \right) \right), \quad (1.4)$$

(sólo consideraremos la variable angular hasta segundo orden y la variable de amplitud hasta primer orden) luego la variación temporal de estas coordenadas, es dada por

$$\dot{x} = l\dot{\theta}, \quad (1.5)$$

$$\dot{y} = \dot{Y} + l\theta\dot{\theta}, \quad (1.6)$$

luego la energía cinética del sistema está dada por

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (1.7)$$

$$= \frac{1}{2} m \left((l\dot{\theta})^2 + (\dot{Y} + l\theta\dot{\theta})^2 \right). \quad (1.8)$$

Como mencionamos al comienzo, tanto la amplitud de forzamiento como el ángulo que forma el péndulo con la vertical son pequeños, entonces despreciamos los términos \dot{Y}^2 y $(l\theta\dot{\theta})^2$, pues la variable de amplitud es de segundo orden, mientras que la variable angular es de cuarto orden. Luego la última expresión queda

$$T = \frac{1}{2} m \left(l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{Y}\theta\dot{\theta} \right). \quad (1.9)$$

Por otro lado, la energía potencial del sistema está dada por

$$V = mg \left(Y + \frac{1}{2} l\theta^2 \right). \quad (1.10)$$

De la teoría lagrangiana, si definimos la función L como el lagrangiano del sistema, entonces $L \equiv T - V$. Luego,

$$L = \frac{1}{2} m \left(l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{Y}\theta\dot{\theta} \right) - mg \left(Y + \frac{1}{2} l\theta^2 \right). \quad (1.11)$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema, aplicamos la ecuación de *Euler-Lagrange*, que para una variable canónica q_k , está dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (1.12)$$

nuestro caso, tenemos sólo una variable canónica, la cual es la variable angular del sistema. Calculando término por término, tenemos

▪

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml\dot{Y}\dot{\theta} - mgl\theta, \quad (1.13)$$

▪

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{Y}\theta, \quad (1.14)$$

▪

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\dot{Y}\theta + ml\dot{Y}\dot{\theta}, \quad (1.15)$$

luego, reemplazando en la ecuación de Euler-Lagrange, tenemos

$$0 = ml^2\ddot{\theta} + ml\dot{Y}\theta + ml\dot{Y}\dot{\theta} - ml\dot{Y}\dot{\theta} + mgl\theta \quad (1.16)$$

$$0 = ml^2\ddot{\theta} + ml\dot{Y}\theta + mgl\theta \quad (1.17)$$

$$0 = l^2\ddot{\theta} + l\dot{Y}\theta - gl\theta \quad / \cdot 1/l^2. \quad (1.18)$$

Finalmente reescribiendo la ecuación en su forma estándar, tenemos

$$\ddot{\theta} + \frac{(\dot{Y} + g)}{l}\theta = 0, \quad (1.19)$$

Ahora definimos unidades de tiempo adimensionales, $\tau = \left(\frac{\Omega}{2}\right)t$, luego, reemplazando en esta última ecuación, tenemos

$$\frac{\Omega^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{(g - y_0\Omega^2 \cos(2\tau))}{l}\theta = 0, \quad (1.20)$$

donde hemos definido $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{d\tau^2}$. Normalizando el primer término de la última ecuación, tenemos

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{4g}{\Omega^2} - \frac{4y_0}{l} \cos(2\tau) \right) \theta = 0. \quad (1.21)$$

Para escribir la ecuación de *Mathieu*, en su forma estándar, definimos las siguientes cantidades $a \equiv (2\Omega_0/\Omega)^2$ y $q \equiv 2y_0/l$, entonces la ecuación queda

$$\ddot{\theta} + (a - 2q \cos(2\tau))\theta = 0 \quad (1.22)$$

por definición de la variable a , tenemos que esta es siempre mayor que cero y que tiene el valor $a = 1$ (a es escogida en unidades de frecuencia natural) $\Leftrightarrow \Omega = 2\Omega_0$, es decir, tiene el valor $a = 1$, cuando la frecuencia de forzamiento es 2 veces la frecuencia natural del sistema. Esta frecuencia se conoce como *frecuencia de resonancia paramétrica*. La ecuación de *Mathieu* es una forma especial de la *ecuación de Hill*.

Analicemos qué ocurre cuando la frecuencia de forzamiento es cercana a la frecuencia de resonancia paramétrica, es decir, $\Omega_{\pm} = 2\Omega_0 \pm \nu$, donde ν juega el rol de un parámetro de *Tuning* (un afinador a la frecuencia de resonancia paramétrica), donde consideramos que este parámetro es pequeño. Por otro lado, el valor del parámetro a toma la

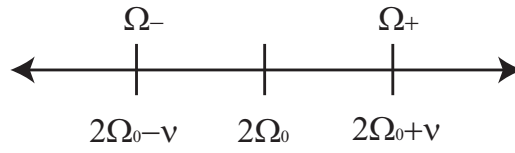


Figura 1.5: Efecto de *Tuning*.

forma

$$a_{\pm} = \left(\frac{2\Omega_0}{\Omega_{\pm}} \right)^2 = \frac{4\Omega_0^2}{(2\Omega_0 \pm \nu)^2}, \quad (1.23)$$

pero dado que ν es pequeño, tenemos

$$a_{\pm} \approx \frac{1}{1 \pm \frac{\nu}{\Omega_0}}. \quad (1.24)$$

Al analizar la última ecuación, notamos una discontinuidad en el parámetro a_- cerca de la frecuencia $\nu = \Omega_0$ pues al acercarnos por la derecha a la frecuencia natural obtenemos que el denominador tiende a cero por la derecha, por lo tanto, esta expresión tiende a *menos infinito*, mientras que al acercarnos por la izquierda obtenemos que a_- tiende a *más infinito*, es decir, hay una discontinuidad (ver figura 1.6). Pero hay que recalcar que sólo debemos concentrarnos en valores pequeños del parámetro de tuning. Por otro lado, tenemos que el valor del parámetro a_+ es $1/2$ cuando $\nu = \Omega_0$ por ambos lados.

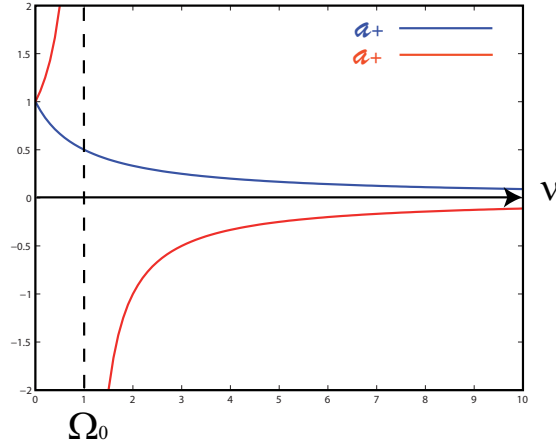


Figura 1.6: Discontinuidad en el efecto *Tuning*.

1.2.2. Ecuación de Mathieu para cualquier ángulo

Ahora deduciremos la ecuación de *Mathieu* para cualquier ángulo. Por lo tanto, en esta sección no haremos aproximaciones del tipo $\theta \ll 1$ para la deducción de dicha ecuación, pero consideraremos que la amplitud de formamiento es pequeña, tal como en la sección anterior. Tenemos que las coordenadas del péndulo (ver figura (1.4)) están dada por:

$$x = l \sin \theta, \quad (1.25)$$

$$y = l(1 - \cos \theta), \quad (1.26)$$

luego, las derivadas con respecto al tiempo de estas coordenadas son

$$\dot{x} = l \cos \theta \dot{\theta}, \quad (1.27)$$

$$\dot{y} = \dot{Y} + l \sin \theta \dot{\theta}. \quad (1.28)$$

Luego la energía cinética del sistema está dada por

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (1.29)$$

$$= \frac{m}{2} \left[(l \cos \theta \dot{\theta})^2 + (\dot{Y} + l \sin \theta \dot{\theta})^2 \right]. \quad (1.30)$$

Luego,

$$T = \frac{m}{2} \left[l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \dot{Y}^2 + 2\dot{Y}l \sin \theta \dot{\theta} + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right], \quad (1.31)$$

y la expresión para la energía cinética es

$$T = \frac{m}{2} \left[l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{Y}^2 + 2\dot{Y}l \sin \theta \dot{\theta} \right] \quad (1.32)$$

pero, tenemos que la amplitud de forzamiento es pequeña, por tanto el término \dot{Y}^2 es despreciable. Finalmente la expresión para la energía cinética queda

$$T = \frac{m}{2} \left[l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{Y}l \sin \theta \dot{\theta} \right]. \quad (1.33)$$

Por otro lado, la energía potencial del sistema es

$$V = mg [Y + l(1 - \cos \theta)]. \quad (1.34)$$

El lagrangiano del sistema es $L = T - V$,

$$L = \frac{m}{2} \left[l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{Y}l \sin \theta \dot{\theta} \right] - mg [Y + l(1 - \cos \theta)]. \quad (1.35)$$

La ecuación que rige la dinámica del sistema se obtiene desarrollando la ecuación de *Euler-Lagrange*. Desarrollando término por término, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} + ml\dot{Y} \sin \theta, \quad (1.37)$$

y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{Y} \sin \theta + ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} \quad (1.38)$$

luego la ecuación de *Euler-Lagrange* implica

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{Y} \sin \theta + ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} - ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0. \quad (1.39)$$

simplificando algunos términos, tenemos

$$l^2 \ddot{\theta} + l\ddot{Y} \sin \theta + gl \sin \theta = 0. \quad (1.40)$$

Finalmente la expresión para la ecuación de *Mathieu* para cualquier ángulo se puede escribir como

$$\ddot{\theta} + \frac{(\ddot{Y} + g)}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.41)$$

La cual concuerda con la ecuación de *Mathieu* para ángulo pequeños (ecuación (1.19)), pues $\sin \theta \approx \theta$ en ese caso. Considerando que el forzamiento es de tipo cosenoidal y aplicando los mismos cambios de variables que en la sección anterior, podemos reescribir la ecuación de *Mathieu* en su forma estándar

$$\ddot{\theta} + (a - 2q \cos(2\tau)) \sin \theta = 0. \quad (1.42)$$

1.2.3. Ecuación de Mathieu para cualquier ángulo con disipación de energía

Ahora deduciremos la ecuación de *Mathieu* sin restricción de ángulos pequeños y con disipación de energía. Para ello, utilizaremos el lagrangiano del sistema encontrado en la sección anterior (sin disipación de energía), es decir, la ecuación (1.35):

$$L = \frac{m}{2} \{l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{Y}l \sin \theta \dot{\theta}\} - mg\{Y + l(1 - \cos \theta)\} \quad (1.43)$$

Agregamos al lagrangiano un término que da cuenta de la disipación de energía, siguiendo la forma típica para disipación lineal

$$L = \left[\frac{m}{2} \{l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{Y}l \sin \theta \dot{\theta}\} - mg\{Y + l(1 - \cos \theta)\} \right] e^{\mu t}, \quad (1.44)$$

donde μ representa el coeficiente de disipación de energía.

Procedamos a calcular los términos a usar en la ecuación de *Euler-Lagrange*:

■

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \{ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta\} e^{\mu t}, \quad (1.45)$$

■

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \{ml^2 \dot{\theta} + ml\dot{Y} \sin \theta\} e^{\mu t}, \quad (1.46)$$

■

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \{ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{Y} \sin \theta + ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta}\} e^{\mu t} + \mu \{ml^2 \dot{\theta} + ml\dot{Y} \sin \theta\} e^{\mu t}, \quad (1.47)$$

y así se obtiene

$$\{ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{Y} \sin \theta + ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} + \mu ml^2 \dot{\theta} + \mu ml\dot{Y} \sin \theta - ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} + mgl \sin \theta\} e^{\mu t} = 0 \quad (1.48)$$

ó

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{Y} \sin \theta + \mu ml^2 \dot{\theta} + \mu ml\dot{Y} \sin \theta + mgl \sin \theta = 0. \quad (1.49)$$

Como lo hemos hecho antes, hemos supuesto que el forzamiento tiene una amplitud pequeña ($Y \sim y_0$) con $y_0 \ll 1$. También vamos a suponer que el parámetro de disipación es pequeño, es decir, $\mu \ll 1$, por lo tanto, los términos del orden $\mathcal{O}(\mu y_0)$ son completamente despreciables, es decir, el término $R\mu ml\dot{Y} \sin \theta \approx 0$, luego la ecuación (1.49) se puede reescribir

$$ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{Y} \sin \theta + \mu ml^2 \dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0. \quad (1.50)$$

Esta es la ecuación puede ser reescrita como

$$\ddot{\theta} + \mu \dot{\theta} + \frac{(\ddot{Y} + g)}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.51)$$

Introduciendo la siguiente variable adimensional $\tau = \left(\frac{\omega}{2}\right)t$, adoptando un forzamiento del tipo coseinoidal $Y(t) = y_0 \cos(\Omega t)$ y haciendo uso de las siguientes definiciones $\ddot{\theta} \equiv \frac{d^2 \theta}{d\tau^2}$ y $\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{d\tau}$, obtenemos

$$\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \ddot{\theta} + \mu \left(\frac{\Omega}{2}\right) \dot{\theta} + \frac{-y_0 \Omega^2 \cos(\Omega t) + g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.52)$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2\mu}{\Omega}\right) \dot{\theta} + \left(\left(\frac{2\Omega_0}{\Omega}\right)^2 - \left(\frac{4y_0}{l}\right) \cos(2\tau) \right) \sin \theta = 0, \quad (1.53)$$

donde Ω_0 es la frecuencia natural del péndulo. Para simplificar la notación, definimos los siguientes parámetros al igual que en la sección anterior

$$a \equiv \left(\frac{2\Omega_0}{\Omega} \right)^2, \quad (1.54)$$

$$q \equiv \left(\frac{4y_0}{l} \right), \quad (1.55)$$

$$b \equiv \left(\frac{2\mu}{\Omega} \right). \quad (1.56)$$

Así la ecuación (1.53) en función de los nuevos parámetros resulta

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + (a - q \cos(2\tau)) \sin\theta = 0. \quad (1.57)$$

Esta es la ecuación de *Mathieu* con disipación de energía, donde el término a contiene información de la frecuencia externa del sistema, q contiene información sobre la amplitud de forzamiento y b contiene información sobre la disipación de energía del sistema.

1.3. Ejemplo mecánico de sistema extendido espacialmente

1.3.1. Ecuaciones de movimiento para un sistema discreto con acoplamiento espacial

Consideremos una cadena lineal de N átomos de igual masa acoplados por $N - 1$ resortes de constante elástica k y separados unos de otros por una distancia a (donde a es mayor que la longitud mínima del resorte) cuando se encuentran en su estado de equilibrio. Cada átomo se diferencia del otro por medio un subíndice l . Denotaremos con q_l el desplazamiento del átomo con respecto a su posición de equilibrio. Enfatizamos que el subíndice l sólo nos da el lugar de localización del átomo l . Vamos a suponer que la cadena es cerrada en si misma, es decir, que la coordenada q_l satisface la condición de periodicidad: $q_l = q_{l+N}$. Para encontrar la ecuaciones de movimiento de cada partícula, existen dos métodos: encontrar el lagrangiano del sistema ó aplicar la segunda ley de *Newton*. El lagrangiano del sistema es: $L = T - V$, donde T representa la energía cinética del sistema y V representa su energía potencial. La energía cinética del sistema está dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m \dot{q}_l^2, \quad (1.58)$$

y la energía potencial es la suma de todas las energías potenciales de cada resorte por estar comprimido o elongado con respecto a su posición de equilibrio, según la ley de Hooke¹,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N k (q_{l+1} - q_l)^2, \quad (1.59)$$

luego el lagrangiano del sistema está dado por

$$L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m \dot{q}_l^2 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N k (q_{l+1} - q_l)^2. \quad (1.60)$$

La ecuación de movimiento, para una partícula s , es obtenida a partir de las ecuaciones de *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0. \quad (1.61)$$

Desarrollando término a término, tenemos

¹La fuerza que ejerce el resorte sobre una partícula obedecen la **Ley de Hooke**. Esta ley establece que la fuerza que experimenta la partícula es proporcional a la distancia respecto a su posición de equilibrio, donde la constante de proporcionalidad es denominada como *constante elástica del resorte*, k .

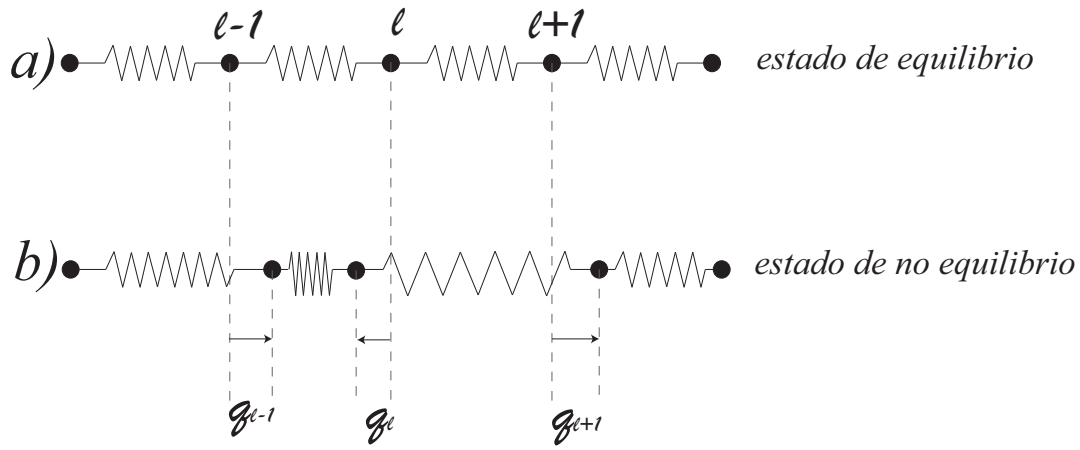


Figura 1.7: a) Cadena de resortes acoplados en estado de equilibrio, b) Cadena de resortes acoplados en estado de no equilibrio.

■

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = m\dot{q}_s, \quad (1.62)$$

■

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) = m\ddot{q}_s, \quad (1.63)$$

■

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} = \frac{\partial}{\partial q_s} \left[\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N m\dot{q}_l^2 - \frac{1}{2} \sum_{l=1; l \neq s, s-1}^N k(q_{l+1} - q_l)^2 - \frac{1}{2} k(q_{s+1} - q_s)^2 - \frac{1}{2} k(q_s - q_{s-1})^2 \right] \quad (1.64)$$

$$= k(q_{s+1} - 2q_s + q_{s-1}). \quad (1.65)$$

Así, la ecuación de movimiento para la partícula s resulta

$$m\ddot{q}_s - k(q_{s+1} - 2q_s + q_{s-1}) = 0. \quad (1.66)$$

1.3.2. Límite continuo y la ecuación de onda

La ecuación (1.66) es válida para un número finito de partículas, o en el mejor caso, para una suma infinita mensurable de grados de libertad.

Para, en la formulación anterior, pasar de un sistema discreto a uno efectivamente continuo, podemos llevar al límite continuo el lagrangiano del sistema. En nuestro caso, tenemos una cadena lineal discreta de resortes y queremos llevarla al continuo. Para ello, aumentaremos el número de “átomos” sin aumentar el largo de la cadena. Esto implica que disminuye la distancia a de separación entre cada átomo cuando se encuentra en su estado de equilibrio, es decir, cuando $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, pero conservando el largo de la cadena.

Para tomar el límite es conveniente reescribir el lagrangiano (1.60), como sigue

$$L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N a \left(\frac{m}{a} \right) \dot{q}_l^2 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N ka^2 \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a} \right)^2 \quad (1.67)$$

$$= a \sum_{l=1}^N \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{a} \right) \dot{q}_l^2 - ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a} \right)^2 \right] \quad (1.68)$$

$$= a \sum_{l=1}^N L_l, \quad (1.69)$$

donde L_l representa el lagrangiano de la partícula l reescrito de manera de hacer más conveniente el tomar el límite continuo.

Por otro lado, el límite continuo corresponde a una barra sólida elástica. Es claro que la cantidad $\left(\frac{m}{a}\right)$ tiende a una densidad lineal de masa (masa por unidad de longitud) ρ . Además, recordamos que la extensión de una barra por unidad de longitud es directamente proporcional a la fuerza o tensión que es sometida la barra, la cual se escribe como $F = Y\xi$, donde ξ es la elongación de la barra y la constante de proporcionalidad Y es conocida como módulo de *Young*. La extensión por unidad del longitud en el caso discreto se puede escribir como $\xi = \frac{q_{l+1} - q_l}{a}$. La fuerza necesaria para el estiramiento de un resorte es

$$F = k(q_{l+1} - q_l)a = ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a} \right), \quad (1.70)$$

que en el límite continuo resulta

$$\lim_{a \rightarrow 0} ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a} \right) = ka\xi = Y\xi. \quad (1.71)$$

Por lo tanto, reconocemos a ka cuando $a \rightarrow 0$ como el módulo de *Young*.

En el continuo cada punto de la barra queda determinado por la posición x y ahora la variable q queda determinada por la posición y el tiempo, es decir, se transforma en una variable tipo campo $q \rightarrow q(x, t)$. Así podemos establecer las siguientes relaciones entre el discreto y el continuo.

caso discreto	→	caso continuo
$\left(\frac{m}{a}\right)$	→	ρ
ka	→	Y
q_l	→	$q(x)$
\dot{q}_l	→	$\frac{\partial q}{\partial t}$
\sum_l	→	$\int dx$

Con esto, reescribimos el lagrangiano (1.68) como

$$L = \frac{1}{2} \int dx \left[\rho \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (1.72)$$

donde definimos la densidad lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \rho \frac{q_t^2}{2} - Y \frac{q_x^2}{2}, \quad (1.73)$$

con $q_t \equiv \partial q / \partial t$ y $q_x \equiv \partial q / \partial x$. La ecuación (1.73) corresponde a la densidad lagrangiana de una barra elástica. Luego el lagrangiano de un sistema continuo se puede escribir en términos de su densidad lagrangiana

$$L = \int dx \mathcal{L}, \quad (1.74)$$

donde \mathcal{L} corresponde al aL_l de la ecuación (1.68), pero en el caso continuo.

Ahora, para deducir la ecuación de onda a través de la densidad lagrangiana \mathcal{L} , nos concentraremos en el campo $u(x, t)$ y supondremos que la dependencia de \mathcal{L} es de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_t, u_x), \quad (1.75)$$

donde u_t y u_x son variables de la variable global $u(x, t)$. Dado que *La densidad lagrangiana es la densidad de energía cinética menos la densidad de energía potencial para un sistema continuo*, análogamente al caso discreto, se tiene

$$\mathcal{L}(\partial_t u, \partial_x u) = \rho \frac{(\partial_t u)^2}{2} - Y \frac{(\partial_x u)^2}{2} \quad (1.76)$$

Ahora aplicamos la ecuación de *Euler-Lagrange* para sistemas continuos [14]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0. \quad (1.77)$$

Calculando cada término, tenemos

■

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = \rho \partial_t u, \quad (1.78)$$

■

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = -Y \partial_x u, \quad (1.79)$$

■

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \quad (1.80)$$

luego,

$$\frac{d}{dt} (\rho \partial_t u) + \frac{d}{dx} (-Y \partial_x u) - 0 = 0 \quad (1.81)$$

$$\rho \partial_{tt} u - Y \partial_{xx} u = 0, \quad (1.82)$$

la cual corresponde a la ecuación de onda deducida a partir de una densidad lagrangiana.

1.3.3. Ecuación para una cadena de péndulos forzada paramétricamente y con disipación de energía

Para deducir esta ecuación utilizaremos los resultados obtenidos en la sección 1.2.3, esto es, el caso de un péndulo forzado paramétricamente paralelo al campo gravitacional. El lagrangiano (1.43) para este péndulo es

$$L = \frac{m}{2} \{l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{Y}l \sin \theta \dot{\theta}\} - mg \{Y + l(1 - \cos \theta)\} \quad (1.83)$$

donde $Y = Y(t)$ representa el forzamiento paramétrico. Ahora construimos la densidad lagrangiana para una cadena de péndulos acoplados a primeros vecinos, los cuales experimentan un torque que es proporcional a su desplazamiento angular respecto a su posición de equilibrio, para ello agregamos un término de energía potencial debida al acoplamiento $\frac{(\partial_x \theta)^2}{2}$ y un término asociado a la disipación de energía $e^{\mu t}$. También debemos enfatizar que tanto la constante de disipación como la amplitud de forzamiento son pequeños. Luego, la densidad lagrangiana se puede escribir como

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \partial_x \theta) = \left\{ \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + ml\dot{Y} \sin \theta \dot{\theta} - mgY - mgl(1 - \cos \theta) - \rho \frac{(\partial_x \theta)^2}{2} \right\} e^{\mu t} \quad (1.84)$$

ahora calculamos los términos de la ecuación de *Euler-Lagrange* para sistemas continuos, de acuerdo con (1.77):

■

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \{ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta\} e^{\mu t}, \quad (1.85)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \{ml^2\dot{\theta} + ml\dot{Y} \sin \theta\}e^{\mu t}, \quad (1.86)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \{ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{Y} \sin \theta + ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta}\}e^{\mu t} + \mu \{ml^2\dot{\theta} + ml\dot{Y} \sin \theta\}e^{\mu t}, \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_x} = -\rho \theta_x e^{\mu t}, \quad (1.88)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_x} \right) = -\rho \theta_{xx} e^{\mu t}. \quad (1.89)$$

Reemplazando, se tiene

$$\{ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{Y} \sin \theta + ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} + \mu ml \dot{\theta} + \mu ml \dot{Y} \sin \theta - \rho \theta_{xx} - ml\dot{Y} \cos \theta \dot{\theta} + mgl \sin \theta\}e^{\mu t} = 0, \quad (1.90)$$

y eliminado algunos términos

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{Y} \sin \theta + \mu ml \dot{\theta} + \mu ml \dot{Y} \sin \theta + mgl \sin \theta = 0 \quad (1.91)$$

$$\theta_{tt} = -\frac{1}{l}\ddot{Y} \sin \theta - \frac{\mu}{l}\dot{\theta} - \frac{\mu}{l}\dot{Y} \sin \theta + \frac{\rho}{ml^2}\theta_{xx} - \frac{g}{l} \sin \theta. \quad (1.92)$$

Ahora suponemos un forzamiento paramétrico de la forma $Y(t) = \gamma \sin(\Omega t)$, así

$$\dot{Y} = \gamma \Omega \cos(\Omega t) \quad (1.93)$$

$$\dot{Y} = -\gamma \Omega^2 \sin(\Omega t). \quad (1.94)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.93) y (1.94) en la ecuación (1.92), tenemos

$$\theta_{tt} = -\frac{1}{l}(-\gamma \Omega^2 \sin(\Omega t)) \sin \theta - \frac{\mu}{l}\dot{\theta} - \frac{\mu}{l}(\gamma \Omega \cos(\Omega t)) \sin \theta + \frac{\rho}{ml^2}\theta_{xx} - \frac{g}{l} \sin \theta \quad (1.95)$$

$$\theta_{tt} = \left(\frac{\gamma \Omega^2}{l} \right) \sin(\Omega t) \sin \theta - \left(\frac{\mu}{l} \right) \dot{\theta} - \left(\frac{\mu \gamma \Omega}{l} \right) \cos(\Omega t) \sin \theta + \left(\frac{\rho}{ml^2} \right) \theta_{xx} - \left(\frac{g}{l} \right) \sin \theta, \quad (1.96)$$

pero considerando que tanto la constante de disipación como la amplitud de formzamiento son pequeños, entonces el término que contiene $\mu\gamma$ es despreciable, entonces la ecuación (1.96) queda

$$\theta_{tt} = \left(\frac{\gamma \Omega^2}{l} \right) \sin(\Omega t) \sin \theta - \left(\frac{\mu}{l} \right) \dot{\theta} + \left(\frac{\rho}{ml^2} \right) \theta_{xx} - \left(\frac{g}{l} \right) \sin \theta \quad (1.97)$$

para escribir la ecuación de una manera más estándar, definimos:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma \Omega^2}{l}, \quad (1.98)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{l}, \quad (1.99)$$

$$D = \frac{\rho}{ml^2}, \quad (1.100)$$

$$\Omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad (1.101)$$

donde Ω_0 , representa la frecuencia natural de oscilación de un péndulo y D una constante de difusión. Así la ecuación resulta

$$\theta_{tt} = \tilde{\gamma} \sin(\Omega t) \sin \theta - \tilde{\mu} \partial_t \theta + D \theta_{xx} - \Omega_0^2 \sin \theta, \quad (1.102)$$

o bien, como ahora $\theta = \theta(x, t)$ es una variable tipo campo y al renombrar los parámetros, se puede escribir como

$$\theta_{tt}(x, t) = -\Omega_0^2 \sin \theta(x, t) - \mu \partial_t \theta(x, t) + D \theta_{xx}(x, t) + \gamma \sin(\Omega t) \sin \theta(x, t) \quad (1.103)$$

Esta es la ecuación de una cadena de péndulos acoplados a primeros vecinos, con forzamiento paramétrico y disipación de energía. El término asociado al acoplamiento está dado por el término de difusión, el cual proviene de una densidad de energía de interacción. El forzamiento paramétrico es paralelo al campo gravitacional, con amplitud γ y frecuencia Ω . El término de disipación es proporcional a la velocidad del péndulo. Además se tiene, por supuesto, el término de oscilador armónico que va acompañado de la frecuencia natural del sistema, que depende tanto de la gravedad como del largo del péndulo.

Capítulo 2

Ecuación No Lineal de Schrödinger y sus soluciones estacionarias

Tal como hemos mencionado, la cadena de péndulos con forzamiento y amortiguamiento, resulta ser un modelo paradigmático de los sistemas fuera del equilibrio extendidos espacialmente, que además exhibe formación de patrones y estructuras localizadas. En este capítulo usaremos una técnica ampliamente desarrollada para estudiar estos sistemas desde una perspectiva unificada. De este modo obtendremos la ecuación de amplitud universal que ya antes hemos mencionado: la ecuación No Lineal de Schrödinger forzada paramétricamente y amortiguada. Luego procederemos a estudiar soluciones estacionarias y de fase constante que exhibe la ecuación, puesto que son soluciones observadas numéricamente, y que resultarán de suma importancia para, posteriormente, estudiar la interacción entre estructuras localizadas, y para así comprender las observaciones experimentales.

2.1. Ecuación de amplitud

La **ecuación de amplitud** de un sistema, da cuenta de los modos lentos que gobiernan las dinámicas ulteriores, tanto de las variables espaciales como temporales, es decir, nos da información de su envolvente. La ecuación de amplitud representa una aproximación de la ecuación en estudio. Pero suponemos que es una aproximación que conserva lo esencial, pues son las variaciones lentas las que gobiernan la dinámica de los sistemas y, consecuentemente, son las que describen los fenómenos observados en la naturaleza o a nivel experimental.

Simplificaciones así son usuales en física. Por ejemplo, al describir un péndulo usando sólo la coordenada angular, se está pasando por alto el hecho de que un péndulo no puede ser una masa puntual (simplificación usual), sino que es un objeto con forma y masa bien definida, dentro del cual hay interacción entre moléculas. Además el soporte por el cual se conecta al pivote, podrá ser una barra gruesa o un hilo delgado, pero de todas formas tendrá el mismo tipo de dinámica microscópica que escapa a la vista. Así, en general, al hacer una descripción macroscópica de un fenómeno, se hacen (aunque de forma implícita) este mismo tipo de aproximaciones, de forma tal que, en vez de usar las muchas ecuaciones (10^{23}) asociadas a los constituyentes elementales de la materia, guardar sólo aquellas que describen la dinámica lenta.

En esta sección obtendremos la ecuación de amplitud para la cadena de péndulo con disipación de energía y forzada paramétricamente a una frecuencia cercana al doble de su frecuencia natural. Para ello comenzaremos con la ecuación (1.103) de la cadena de péndulo, donde la extensión espacial en principio es infinita.

$$\partial_{tt}\theta(x, t) = -\Omega_0^2 \sin \theta(x, t) - \gamma \sin(\Omega t) \sin \theta(x, t) - \mu \partial_t \theta(x, t) + D \partial_{xx} \theta(x, t), \quad (2.1)$$

el ángulo de inclinación θ respecto a su vertical es una función tanto espacial como temporal, es decir, es una variable tipo campo. Además, Ω_0 es la frecuencia natural de oscilación de los péndulos¹, γ es la amplitud del forzamiento paramétrico, μ es la constante disipativa del sistema con el medio y D puede tomarse como la constante de acoplamiento o bien la constante de difusión del sistema.

¹De un péndulo.

A continuación desarrollaremos la variable espacio temporal cerca de su punto de equilibrio $\theta(x, t) = 0$ (sin forzamiento, este punto es estable, en tanto que al incluir forzamiento puede o no ser estable). Es decir, seremos capaces de describir la dinámica no trivial del sistema entorno a esa solución. Para esto consideraremos un campo que caracteriza la envolvente (para la cual obtendremos una ecuación, la ecuación de amplitud) y una pequeña corrección. Luego nuestro Ansatz es

$$\theta(x, t) = 0 + A(X, T)e^{i\frac{\Omega}{2}t} + \bar{A}(X, T)e^{-i\frac{\Omega}{2}t} + W(A, t), \quad (2.2)$$

donde $W(A, t)$ es una pequeña función corrección o una pequeña perturbación del sistema² y $A(X, T)$ es la amplitud de la oscilación para variaciones lentas en el espacio y el tiempo. Tanto la variable de amplitud como la función corrección son pequeñas, es decir, $W, A \ll 1$. Además $\bar{A}(X, T)$ es el complejo conjugado de $A(X, T)$. Las variables lentas se definen como sigue

$$T = Bt, \quad X = Gx, \quad (2.3)$$

donde B y G son factores de escala adimensionales tal que $B, G \ll 1$. Para obtener la ecuación de amplitud debemos reemplazar dicho Ansatz en la ecuación de la cadena de péndulo. Calculando término a término tenemos

■

$$\partial_t \theta = \partial_t \left(A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + W + c.c. \right). \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

Dado que $T = T(t)$, se tiene que $\partial_t = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T}$ y $\frac{\partial T}{\partial t} = B$, entonces

$$\partial_t \theta = B \partial_T A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + i \frac{\Omega}{2} A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + \partial_t W + c.c. \quad (2.6)$$

■

$$\partial_{tt} \theta = \partial_t \left(B \partial_T A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + i \frac{\Omega}{2} A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + \partial_t W + c.c. \right) \quad (2.7)$$

$$= B^2 \partial_{TT} A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + B \partial_T A e^{i\frac{\Omega}{2}t} i \frac{\Omega}{2} + i \frac{\Omega}{2} B \partial_T A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + \left(i \frac{\Omega}{2} \right)^2 A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + \partial_{tt} W + c.c. \quad (2.8)$$

$$= B^2 \partial_{TT} A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + 2i \frac{\Omega}{2} B \partial_T A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + \left(i \frac{\Omega}{2} \right)^2 A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + \partial_{tt} W + c.c. \quad (2.9)$$

$$= \left(B \partial_T + i \frac{\Omega}{2} \right)^2 A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + \partial_{tt} W + c.c. \quad (2.10)$$

■

$$\partial_x \theta = \partial_x \left(A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + W + c.c. \right) \quad (2.11)$$

$$= G \partial_X A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. \quad (2.12)$$

■

$$\partial_{xx} \theta = \partial_x \left(G \partial_X A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. \right) \quad (2.13)$$

$$= G^2 \partial_{XX} A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. \quad (2.14)$$

A continuación expandiremos la función senoidal hasta tercer orden alrededor del punto de equilibrio ($\theta(x, t) = 0$). Tendremos presente que los términos del orden $\mathcal{O}(A^5)$, $\mathcal{O}(W^2)$ y $\mathcal{O}(AW)$ serán completamente despreciables para nuestra ecuación de amplitud dada la aproximación anterior, luego tenemos que

²La cual será escrita en términos de la amplitud de la siguiente forma $W(A, t) = \sum_{m,n} \sigma_{mn} A^m \bar{A}^n e^{i\frac{\Omega}{2}(m-n)t}$

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} \quad (2.15)$$

$$\approx \left(Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + W + c.c. \right) - \frac{1}{6} \left(Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + W + c.c. \right)^3. \quad (2.16)$$

Desarrollando el término cúbico, tenemos

$$\left(Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + \bar{A}e^{i\frac{\Omega}{2}t} + W \right)^3 = A^3 e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + 3|A|^2 Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. \quad (2.17)$$

donde hemos usado las aproximaciones descritas anteriormente³. Así la aproximación de la función senoidal es

$$\sin \theta \approx Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{A^3}{6} e^{3i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{1}{2}|A|^2 Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + W + c.c. \quad (2.18)$$

Ya tenemos todos los términos de la ecuación de la cadena de péndulos. Reemplazando los términos en ella, tenemos

$$\begin{aligned} \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2} \right)^2 Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + \partial_{tt}W = & -(\Omega_0^2 + \gamma \sin(\Omega t)) \left(Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + W - \frac{A^3}{6} e^{3i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{1}{2}|A|^2 Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} \right) \\ & - \mu \left(B\partial_T Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + i\frac{\Omega}{2} Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + \partial_t W \right) + DG^2 \partial_{XX} Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + c.c., \end{aligned} \quad (2.19)$$

y ahora corresponde hacer algunas aproximaciones y reescalamientos para encontrar la ecuación de amplitud.

Vamos a suponer que los parámetros que caracterizan a la cadena de péndulos como el forzamiento y la disipación son cantidades pequeñas, es decir, tomaremos la siguiente condición para dichos parámetros $\gamma, \mu \ll 1$, luego despreciaremos cualquier cantidad de la forma γW o μW y obviamente no despreciaremos las cantidades γA o μA pues estaríamos haciendo desaparecer la información de la disipación y el forzamiento en la ecuación de amplitud, es decir, las cantidades γA o μA son cantidades pequeñas pero no tan pequeñas para despreciarlas⁴. Así la última ecuación queda

$$\begin{aligned} \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2} \right)^2 Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + \partial_{tt}W = & -\Omega_0^2 \left(Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + W - \frac{A^3}{6} e^{3i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{1}{2}|A|^2 Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} \right) \\ & - \gamma \sin(\Omega t) \left(Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{A^3}{6} e^{3i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{1}{2}|A|^2 Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} \right) \\ & - \mu \left(B\partial_T Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + i\frac{\Omega}{2} Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} \right) + DG^2 \partial_{XX} Ae^{i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Factorizaremos nuestra última ecuación por $e^{i\frac{\Omega}{2}t}$ y $e^{3i\frac{\Omega}{2}t}$, mientras que en el lado izquierdo dejamos sólo términos relacionados con la perturbación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W = & \left(- \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2} \right)^2 A - (\Omega_0^2 + \gamma \sin(\Omega t)) \left(A - \frac{1}{2}|A|^2 A \right) - \mu \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2} \right) A + DG^2 \partial_{XX} A \right) e^{i\frac{\Omega}{2}t} \\ & + (\Omega_0^2 + \gamma \sin(\Omega t)) \frac{A^3}{6} e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + c.c., \end{aligned} \quad (2.21)$$

con \mathcal{L} el operador lineal del sistema, definido como

$$\mathcal{L} = \partial_{tt} + \Omega_0^2. \quad (2.22)$$

³Acá hemos despreciado todos los términos de la forma $A \cdot W$, pues tanto $A, W \ll 1$, hemos dejado los términos hasta $\mathcal{O}(A^3)$ para enriquecer nuestra ecuación y sacar un mejor provecho de ella.

⁴Como veremos más adelante estas cantidades son del mismo orden.

Antes de continuar expresaremos la función senoidal de la siguiente forma

$$\sin(\Omega t) = \frac{1}{2i} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}). \quad (2.23)$$

Desarrollando algunos términos de nuestra penúltima ecuación, tenemos

$$\sin(\Omega t) \left(A - \frac{1}{2} |A|^2 A \right) e^{i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. = \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 \right) \left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} \right) \left(A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + \bar{A} e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \right) \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 \right) \left(A e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + \bar{A} e^{i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. \right) \quad (2.25)$$

$$= \frac{-i}{2} \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 \right) \left(A e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + \bar{A} e^{i\frac{\Omega}{2}t} \right) + c.c. \quad (2.26)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 \right) \left(i A e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + i \bar{A} e^{i\frac{\Omega}{2}t} \right) + c.c. \quad (2.27)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 \right) i A e^{3i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 \right) i \bar{A} e^{i\frac{\Omega}{2}t} + c.c., \quad (2.28)$$

y ahora hacemos lo mismo para el siguiente término

$$\sin(\Omega t) A^3 e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. = \left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} \right) \left(A^3 e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + \bar{A}^3 e^{3i\frac{\Omega}{2}t} \right) \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{2i} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) \left(A^3 e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + \bar{A}^3 e^{3i\frac{\Omega}{2}t} \right) \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(A^3 e^{5i\frac{\Omega}{2}t} + \bar{A}^3 e^{-i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. \right) \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2i} A^3 e^{5i\frac{\Omega}{2}t} + \frac{1}{2i} \bar{A}^3 e^{-i\frac{\Omega}{2}t} + c.c. \quad (2.32)$$

$$= -\frac{i}{2} A^3 e^{5i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{i}{2} \bar{A}^3 e^{-i\frac{\Omega}{2}t} + c.c., \quad (2.33)$$

luego reemplazando estos términos en la ecuación (2.21), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W = & \left(- \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2} \right)^2 A - \Omega_0^2 \left(A - \frac{1}{2} |A|^2 A \right) - \mu \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2} \right) A + DG^2 \partial_{XX} A \right) e^{i\frac{\Omega}{2}t} \\ & - \gamma \left(-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 \right) i A e^{3i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 \right) i \bar{A} e^{i\frac{\Omega}{2}t} \right) + \Omega_0^2 \frac{A^3}{6} e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + \frac{\gamma}{6} \left(-\frac{i}{2} A^3 e^{5i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{i}{2} \bar{A}^3 e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \right) + c.c. \end{aligned}$$

y reagrupando los términos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W = & \left[- \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2} \right)^2 A - \Omega_0^2 \left(A - \frac{1}{2} |A|^2 A \right) - \mu \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2} \right) A + DG^2 \partial_{XX} A + i\frac{\gamma}{2} \left(\bar{A} - \frac{1}{2} |A|^2 \bar{A} \right) \right] e^{i\frac{\Omega}{2}t} \\ & + \left[\Omega_0^2 \frac{A^3}{6} + i\frac{\gamma}{2} \left(A - \frac{1}{2} |A|^2 A \right) \right] e^{3i\frac{\Omega}{2}t} + \frac{\gamma}{6} \left(-\frac{i}{2} A^3 e^{5i\frac{\Omega}{2}t} - \frac{i}{2} \bar{A}^3 e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \right) + c.c. \end{aligned}$$

Luego, en principio, tenemos una ecuación de la siguiente forma

$$\mathcal{L}W = b \quad (2.34)$$

esta ecuación tendrá solución para W sí y sólo sí b pertenece a la imagen de \mathcal{L} . Encontrar dicha solución puede ser en principio difícil. Un método alternativo es encontrar una condición la cual nos asegure que por lo menos existe una solución de dicha ecuación, dicha alternativa es llamada de **Fredholm**.

2.1.1. Alternativa de Fredholm

Sea \mathcal{L} un operador que actúa en un cierto espacio \mathcal{E} . Entonces la pregunta es: dado un elemento (o vector) $|b\rangle$, ¿existe un $|W\rangle$ tal que $\mathcal{L}|W\rangle = |b\rangle$? Para responder esto, debemos encontrar un $|W\rangle$ que efectivamente cumpla la ecuación $\mathcal{L}|W\rangle = |b\rangle$.

La Alternativa de Fredholm (*condición de solubilidad*) nos dice que dicha ecuación tiene solución, sí y sólo sí para todo vector $|v\rangle \in \text{Ker}(\mathcal{L}^\dagger)$, $\langle v|b\rangle = 0$.

En efecto: Consideremos la ecuación

$$\mathcal{L}|W\rangle = |b\rangle \quad (2.35)$$

y aplicamos un elemento del kernel de \mathcal{L}^\dagger ,

$$\langle v|\mathcal{L}|W\rangle = \langle v|b\rangle \quad (2.36)$$

y al igual que en mecánica cuántica podemos pasar la ecuación a su *correspondencia dual*⁵

$$\langle W|\mathcal{L}^\dagger|v\rangle = \langle b|v\rangle \quad (2.37)$$

pero dado que $|v\rangle \in \text{Ker}(\mathcal{L}^\dagger)$, es decir, $\mathcal{L}^\dagger|v\rangle = 0$, entonces tenemos que la ecuación tienen solución sí y sólo sí $\langle b|v\rangle = 0$.

Ahora en ves de resolver dicha ecuación $\mathcal{L}W = b$, aplicaremos la alternativa de Fredholm para encontrar la condición de solubilidad.

2.1.2. Análisis del operador del sistema

Tenemos que el operador del sistema es

$$\mathcal{L} = \partial_{tt} + \Omega_0^2 \quad (2.38)$$

Antes de proceder debemos definir un producto punto entre los elementos del *Dominio* de \mathcal{L} con la *Imagen* de \mathcal{L} . Definimos el siguiente producto interno de dos elementos asociados a cada espacio

$$\langle f|g\rangle = \int f \cdot g^* dt \quad (2.39)$$

donde g^* es el complejo conjugado de g . Además supondremos que dichos vectores son nulos en los extremos de la región.

Así definimos el siguiente operador $l = \partial_t$, entonces

$$\langle f|lg\rangle = \int f \partial_t g^* dt \quad (2.40)$$

$$= \int \partial_t (fg) dt - \int \partial_t f g^* dt, \quad (2.41)$$

pero el primer término es nulo pues las funciones en los extremos son nulas. Así tenemos

$$\langle f|lg\rangle = -\langle l^\dagger f|g\rangle, \quad (2.42)$$

donde podemos concluir que $l = -l^\dagger$. Por lo tanto, si tenemos el mismo operador aplicado dos veces, tenemos

$$\langle f|llg\rangle = -\langle l^\dagger f|lg\rangle \quad (2.43)$$

$$= \langle l^\dagger l^\dagger f|g\rangle, \quad (2.44)$$

luego $ll = l^\dagger l^\dagger = (ll)^\dagger$. Ahora definimos el operador $\mathcal{L} = ll + \Omega_0^2$ donde $l = \partial_t$, entonces

$$\langle f|\mathcal{L}g\rangle = \langle f|(ll + \Omega_0^2)g\rangle \quad (2.45)$$

$$= \langle f|llg\rangle + \langle f|\Omega_0^2 g\rangle \quad (2.46)$$

$$= \langle l^\dagger l^\dagger f|g\rangle + \langle \Omega_0^2 f|g\rangle \quad (2.47)$$

$$= \langle (ll + \Omega_0^2)^\dagger f|g\rangle \quad (2.48)$$

$$= \langle \mathcal{L}^\dagger f|g\rangle, \quad (2.49)$$

⁵mecánica cuántica

donde podemos ver que el operador del sistema es autoadjunto, es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$.

Luego, como el operador es autoadjunto, sólo debemos encontrar un elemento del kernel de \mathcal{L} para mostrar que la ecuación (2.21) tiene solución. Por la forma del operador podemos utilizar el siguiente elemento $e^{i\frac{\Omega}{2}t}$, entonces tenemos

$$\mathcal{L}e^{i\frac{\Omega}{2}t} = (\partial_{tt} + \Omega_0^2) e^{i\frac{\Omega}{2}t} \quad (2.50)$$

$$= \left(-\frac{\Omega^2}{4} + \Omega_0^2\right) e^{i\frac{\Omega}{2}t}, \quad (2.51)$$

cuyo elemento cumple con la condición de solubilidad sí y sólo sí $\frac{\Omega}{2} = \Omega_0$, es decir, cuando la frecuencia del forzamiento es el doble de la frecuencia natural del sistema.

Por otro lado, podemos tener un pseudovector⁶ perteneciente al kernel del operador, utilizando un parámetro llamado **detuning**, y definido como

$$\frac{\Omega}{2} = \Omega_0 + \nu. \quad (2.52)$$

Este parámetro de detuning sirve para ajustar al sistema a una frecuencia determinada. Para que el vector que encontramos perteneciente al kernel del operador ($e^{i\frac{\Omega}{2}t}$) sea un pseudovector de dicho operador ponemos la siguiente restricción $\nu \ll 1$. Así el el nuevo vector $e^{i(\frac{\Omega}{2}-\nu)t}$ es un pseudovector de dicho operador. Ahora tenemos

$$\mathcal{L}e^{i(\frac{\Omega}{2}-\nu)t} \approx 0. \quad (2.53)$$

Antes de ocupar el Kernel de este operador (o pseudokernel) reemplazaremos

Luego al aplicar el método de Fredholm para el pseudovector ya establecido $e^{i(\frac{\Omega}{2}-\nu)t}$, tenemos

$$\begin{aligned} \left[-\left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2}\right)^2 A - \Omega_0^2 \left(A - \frac{1}{2}|A|^2 A\right) - \mu \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2}\right) A + DG^2 \partial_{XX} A + i\frac{\gamma}{2} \left(\bar{A} - \frac{1}{2}|A|^2 \bar{A}\right) \right] e^{i\frac{\Omega}{2}t} &= 0 \\ -\left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2}\right)^2 A - \Omega_0^2 \left(A - \frac{1}{2}|A|^2 A\right) - \mu \left(B\partial_T + i\frac{\Omega}{2}\right) A + DG^2 \partial_{XX} A + i\frac{\gamma}{2} \left(\bar{A} - \frac{1}{2}|A|^2 \bar{A}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Si expandimos todos los términos

$$-B^2 \partial_{TT} A - 2B\partial_T A i\frac{\Omega}{2} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 A - \Omega_0^2 A + \frac{\Omega_0^2}{2} |A|^2 A - \mu B\partial_T A - i\mu\frac{\Omega}{2} A + DG^2 \partial_{XX} A + i\frac{\gamma}{2} \bar{A} - i\frac{\gamma}{4} |A|^2 \bar{A} = 0.$$

Pero el hecho que $\frac{\Omega}{2} = \Omega_0 + \nu$, con $\nu \ll 1$, implica

$$\begin{aligned} -B^2 \partial_{TT} A - 2B\partial_T A i(\Omega_0 + \nu) + (\Omega_0 + \nu)^2 A - \Omega_0^2 A + \frac{\Omega_0^2}{2} |A|^2 A \\ -\mu B\partial_T A - i\mu(\Omega_0 + \nu) A + DG^2 \partial_{XX} A + i\frac{\gamma}{2} \bar{A} - i\frac{\gamma}{4} |A|^2 \bar{A} = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} -B^2 \partial_{TT} A - 2B\partial_T A i\Omega_0 - 2B\partial_T A i\nu + \Omega_0^2 A + 2\Omega_0\nu A + \nu^2 A - \Omega_0^2 A + \frac{\Omega_0^2}{2} |A|^2 A \\ -\mu B\partial_T A - i\mu\Omega_0 A - i\mu\nu A + DG^2 \partial_{XX} A + i\frac{\gamma}{2} \bar{A} - i\frac{\gamma}{4} |A|^2 \bar{A} = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Dado que ν es pequeño podemos desprestigiar términos del orden $\mathcal{O}(\nu^2)$. Más aún, como $\mu \gamma \nu$, también podemos excluir ordenes superiores en cualquier combinación de estos parámetros:

$$\begin{aligned} -B^2 \partial_{TT} A - 2B\partial_T A i\Omega_0 - 2B\partial_T A i\nu + 2\Omega_0\nu A + \frac{\Omega_0^2}{2} |A|^2 A - \mu B\partial_T A - i\mu\Omega_0 A \\ + DG^2 \partial_{XX} A + i\frac{\gamma}{2} \bar{A} - i\frac{\gamma}{4} |A|^2 \bar{A} = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

⁶Se dice que es pseudovector porque aplicar dicho vector sobre el operador es aproximadamente nulo o cero

Para encontrar la ecuación de amplitud debemos aplicar un método de escalamiento, para ellos establecemos que $\partial_T A \sim |A|^2 A \longrightarrow \partial_T \sim |A|^2$, $\partial_T \sim \nu \longrightarrow |A|^2 \sim \nu \longrightarrow A \sim \nu^{1/2}$. Luego haciendo un escalamiento a orden $\mathcal{O}(\nu^{3/2})$, nos queda

$$-2B\partial_T A i\Omega_0 + 2\Omega_0\nu A + \frac{\Omega_0^2}{2}|A|^2 A - i\mu\Omega_0 A + DG^2\partial_{XX}A + i\frac{\gamma}{2}\bar{A} = 0. \quad (2.57)$$

Reordenando,

$$2B\partial_T A i\Omega_0 = 2\Omega_0\nu A + \frac{\Omega_0^2}{2}|A|^2 A - i\mu\Omega_0 A + DG^2\partial_{XX}A + i\frac{\gamma}{2}\bar{A} \quad / \quad \cdot \frac{1}{2Bi\Omega_0} \quad (2.58)$$

$$\partial_T A = \frac{2\Omega_0\nu}{2Bi\Omega_0}A + \frac{\Omega_0^2}{2 * 2Bi\Omega_0}|A|^2 A - \frac{i\mu\Omega_0}{2Bi\Omega_0}A + \frac{DG^2}{2Bi\Omega_0}\partial_{XX}A + i\frac{\gamma}{2 * 2Bi\Omega_0}\bar{A} \quad (2.59)$$

$$\partial_T A = \frac{\nu}{Bi}A + \frac{\Omega_0}{4Bi}|A|^2 A - \frac{\mu}{2B}A + \frac{DG^2}{2Bi\Omega_0}\partial_{XX}A + \frac{\gamma}{4B\Omega_0}\bar{A} \quad (2.60)$$

$$\partial_T A = -i\frac{\nu}{B}A - i\frac{\Omega_0}{4B}|A|^2 A - \frac{\mu}{2B}A - i\frac{DG^2}{2B\Omega_0}\partial_{XX}A + \frac{\gamma}{4B\Omega_0}\bar{A}, \quad (2.61)$$

renormalizando los coeficientes y renombrando a $\nu = -\nu$, finalmente obtenemos

$$\partial_T A = i\nu A - i|A|^2 A - i\partial_{XX}A - \mu A + \gamma\bar{A}, \quad (2.62)$$

que es la llamada Ecuación No Lineal de Schrödinger forzada paraméricamente y con disipación.

2.2. Soluciones estacionarias con fase constante

Ahora buscaremos soluciones estacionarias de (2.62). Para esto escribiremos la ecuación en forma polar $A(X, T) = R(X, T)e^{i\theta(X, T)}$. Así, calculando término por término, tenemos

■

$$\partial_T A = \partial_T (Re^{i\theta}) \quad (2.63)$$

$$= \partial_T R e^{i\theta} + R e^{i\theta} i \partial_T \theta \quad (2.64)$$

$$= (\partial_T R + iR \partial_T \theta) e^{i\theta} \quad (2.65)$$

■

$$\partial_X A = \partial_X (Re^{i\theta}) \quad (2.66)$$

$$= \partial_X R e^{i\theta} + R e^{i\theta} i \partial_X \theta \quad (2.67)$$

$$= (\partial_X R + iR \partial_X \theta) e^{i\theta} \quad (2.68)$$

■

$$\partial_{XX} A = \partial_X \{(\partial_X R + iR \partial_X \theta) e^{i\theta}\} \quad (2.69)$$

$$= (\partial_{XX} R + i \partial_X \partial_X \theta + iR \partial_{XX} \theta) e^{i\theta} + (\partial_X R + iR \partial_X \theta) e^{i\theta} i \partial_X \theta \quad (2.70)$$

$$= (\partial_{XX} R + i \partial_X \partial_X \theta + iR \partial_{XX} \theta + (\partial_X R + iR \partial_X \theta) i \partial_X \theta) e^{i\theta} \quad (2.71)$$

$$= (\partial_{XX} R + i \partial_X \partial_X \theta + iR \partial_{XX} \theta + i \partial_X R \partial_X \theta - R \partial_X \theta \partial_X \theta) e^{i\theta} \quad (2.72)$$

$$= \left(\partial_{XX} R + 2i \partial_X R \partial_X \theta + iR \partial_{XX} \theta - R (\partial_X \theta)^2 \right) e^{i\theta}. \quad (2.73)$$

Luego, reemplazando en la ecuación de amplitud, tenemos

$$(\partial_T R + iR \partial_T \theta) e^{i\theta} = i\nu R e^{i\theta} - iR^3 e^{i\theta} - i \left(\partial_{XX} R + 2i \partial_X R \partial_X \theta + iR \partial_{XX} \theta - R (\partial_X \theta)^2 \right) e^{i\theta} - \mu R e^{i\theta} + \gamma R e^{-i\theta} \quad (2.74)$$

Multiplicando por $e^{-i\theta}$ a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\partial_T R + iR \partial_T \theta = i\nu R - iR^3 - i \partial_{XX} R + 2 \partial_X R \partial_X \theta + R \partial_{XX} \theta + iR (\partial_X \theta)^2 - \mu R + \gamma R e^{-2i\theta}. \quad (2.75)$$

Separando parte real de la parte imaginaria, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\partial_T R = 2 \partial_X R \partial_X \theta + R \partial_{XX} \theta - \mu R + \gamma R \cos(2\theta) \quad (2.76)$$

$$R \partial_T \theta = \nu R - R^3 - \partial_{XX} R + R (\partial_X \theta)^2 - \gamma R \sin(2\theta). \quad (2.77)$$

Ahora, buscaremos las soluciones estacionarias de (2.62), es decir que no tienen dependencia en el tiempo, $A(X, T) \rightarrow A(X)$. Además exigimos que las soluciones tengan fase constante, es decir, $\theta(X) \rightarrow \theta_0$, donde θ_0 es constante en el espacio, con lo cual el sistema anterior se reduce a:

$$0 = -\mu R + \gamma R \cos(2\theta_0) \quad (2.78)$$

$$0 = \nu R - R^3 - \partial_{XX} R - \gamma R \sin(2\theta_0). \quad (2.79)$$

De la ecuación (2.78) obtenemos la siguiente restricción para el sistema

$$\cos(2\theta_0) = \frac{\mu}{\gamma}, \quad (2.80)$$

y como sabemos que la función coseno esta acotada entre el rango $[-1, 1]$, tendremos

$$-1 \leq \frac{\mu}{\gamma} \leq 1, \quad (2.81)$$

que podemos visualizar con la figura 2.2, considerando además que μ debe ser positivo, puesto que fue incluido en (2.62) como un término de disipación de energía, y no de inyección.

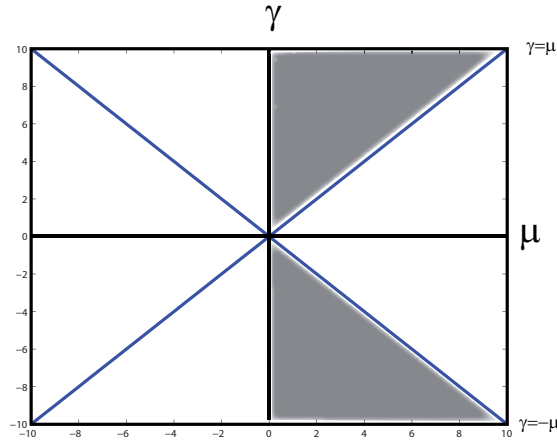


Figura 2.1: Región en el espacio de parámetros γ v/s μ que satisface la ecuación (2.78). La región sombreada, es la región que satisface la ecuación (2.78) y que además satisface el sentido físico del parámetro μ , que debe ser positivo.

Por otro lado, usamos trigonometría para reescribir la ecuación (2.79), en función de los parámetros del sistema

$$\sin^2 2\theta_0 + \cos^2 2\theta_0 = 1 \quad (2.82)$$

$$\sin^2 2\theta_0 = 1 - \cos^2 2\theta_0 \quad (2.83)$$

$$\sin^2 2\theta_0 = 1 - \left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^2 \quad (2.84)$$

$$\sin^2 2\theta_0 = \frac{\gamma^2 - \mu^2}{\gamma^2} \quad (2.85)$$

$$\sin^2 2\theta_0 = \frac{\gamma^2 - \mu^2}{\gamma^2} / \sqrt{\quad} \quad (2.86)$$

$$\sin 2\theta_0 = \pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}, \quad (2.87)$$

luego, reemplazando en (2.79), tenemos

$$0 = \nu R - R^3 - \partial_{XX} R - \gamma R \cdot \pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \quad (2.88)$$

$$0 = \nu R - R^3 - \partial_{XX} R \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} R \quad (2.89)$$

$$0 = \left(\nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\right) R - R^3 - \partial_{XX} R \quad (2.90)$$

$$0 = \varepsilon_{\mp} R - R^3 - \partial_{XX} R, \quad (2.91)$$

donde hemos definido el parámetro $\varepsilon_{\mp} = \nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}$. Para simplificar la notación escribimos $\varepsilon = \varepsilon_{\mp}$. Luego la ecuación (2.79) toma la forma estándar

$$0 = \varepsilon R - R^3 - \partial_{xx} R. \quad (2.92)$$

La ecuación (2.92) tiene soluciones conocidas, tipo secante hiperbólica. Para chequear (y caracterizar) probemos el siguiente ansatz: $R(X) = A \operatorname{sech}(BX)$, donde A y B son constantes a determinar. En efecto,

■

$$\partial_X R = A \partial_X (\cosh^{-1}(BX)) \quad (2.93)$$

$$= -AB \partial_X (\cosh^{-2}(BX)) \cdot \sinh(BX) \quad (2.94)$$

$$= -AB \tanh(BX) \cdot \operatorname{sech}(BX) \quad (2.95)$$

$$\partial_{XX}R = \partial_X\{\partial_X R\} \quad (2.96)$$

$$= \partial_X\{-AB \tanh(BX) \cdot \operatorname{sech}(BX)\} \quad (2.97)$$

$$= -AB\partial_X\{\tanh(BX) \cdot \operatorname{sech}(BX)\} \quad (2.98)$$

$$= -AB\{\partial_X(\tanh(BX)) \cdot \operatorname{sech}(BX) + \tanh(BX) \cdot \partial_X(\operatorname{sech}(BX))\} \quad (2.99)$$

•

$$\partial_X(\tanh BX) = \partial_X\{\sinh(BX) \cdot \cosh^{-1}(BX)\} \quad (2.100)$$

$$= B \cosh(BX) \cdot \cosh^{-1}(BX) - B \cosh^{-2}(BX) \sinh BX \quad (2.101)$$

$$= B(1 - \tanh^2(BX)) \quad (2.102)$$

$$= B \operatorname{sech}^2(BX) \quad (2.103)$$

•

$$\partial_X(\operatorname{sech}BX) = \partial_X(\cosh^{-1}(BX)) \quad (2.104)$$

$$= -B \cosh^{-2}(BX) \cdot \sinh(BX) \quad (2.105)$$

$$= -B \tanh(BX) \operatorname{sech}(BX). \quad (2.106)$$

Reemplazando (2.103) y (2.106) en la ecuación (2.99), obtenemos:

$$\partial_{XX}R = -AB\{B \operatorname{sech}^2(BX) \cdot \operatorname{sech}(BX) + \tanh(BX) \cdot -B \tanh(BX) \operatorname{sech}(BX)\} \quad (2.107)$$

$$= -AB\{B \operatorname{sech}^3(BX) - B \tanh^2(BX) \operatorname{sech}(BX)\} \quad (2.108)$$

$$= -AB^2\{\operatorname{sech}^3(BX) - \tanh^2(BX) \operatorname{sech}(BX)\} \quad (2.109)$$

$$= -AB^2 \operatorname{sech}(BX) \{\operatorname{sech}^2(BX) - \tanh^2(BX)\} \quad (2.110)$$

pero usando la identidad $\cosh^2 X - \sinh^2 X = 1$, multiplicada por $\cosh^{-2} X$, se tiene que $-\tanh^2 X = -1 + \operatorname{sech}^2 X$. Reemplazando esto en la ecuación (2.110), tenemos

$$\partial_{XX}R = AB^2 \operatorname{sech}(BX) \{1 - 2 \operatorname{sech}^2(BX)\}. \quad (2.111)$$

Por otro lado, tenemos

$$\varepsilon R - R^3 = \varepsilon A \operatorname{sech}(BX) - A^3 \operatorname{sech}^3(BX) \quad (2.112)$$

$$= \varepsilon A \operatorname{sech}(BX) \left[1 - \frac{A^2}{\varepsilon} \operatorname{sech}^2(BX)\right] \quad (2.113)$$

y de (2.92),

$$\varepsilon R - R^3 = \partial_{XX}R, \quad (2.114)$$

entonces, reemplazando (2.111) y (2.113) en la ecuación (2.114), obtenemos la siguiente igualdad

$$\varepsilon A \operatorname{sech}(BX) \left[1 - \frac{A^2}{\varepsilon} \operatorname{sech}^2(BX)\right] = AB^2 \operatorname{sech}(BX) [1 - 2 \operatorname{sech}^2(BX)]. \quad (2.115)$$

Igualando término a término obtenemos,

$$\varepsilon A = AB^2 \quad \wedge \quad \frac{A^2}{\varepsilon} = 2 \quad (2.116)$$

con lo cual se tienen valores para A y B en función de parámetros conocidos:

$$A = \pm\sqrt{2\varepsilon} \quad (2.117)$$

$$B = \pm\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.118)$$

Luego, la forma exacta de la solución de la ecuación (2.92) es

$$R(X) = \pm\sqrt{2\varepsilon} \operatorname{sech}(\pm\sqrt{\varepsilon}X). \quad (2.119)$$

Pero tenemos que resaltar dos puntos. Primero, que la función secante hiperbólica es una función par, es decir, $\operatorname{sech}(X) = \operatorname{sech}(-X)$. Segundo que esta solución es invariante bajo traslación espacial, es decir, podemos colocar la solución en una posición arbitraria, por ejemplo X_0 , reconociendo a X_0 como *el corazón* de la solución. Entonces la solución más general de (2.92) es

$$R(X, X_0) = \pm\sqrt{2\varepsilon} \operatorname{sech}(\sqrt{\varepsilon}(X - X_0)). \quad (2.120)$$

En función de los parámetros originales, tenemos

$$R(X, X_0) = \pm\sqrt{2\varepsilon_{\mp}} \operatorname{sech}(\sqrt{\varepsilon_{\mp}}(X - X_0)), \quad (2.121)$$

pero $\varepsilon_{\mp} = \nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}$, entonces la solución de la parte radial de la ecuación ecuación (2.92) en función de los parámetros físicos del sistema es

$$R(X, X_0) = \pm\sqrt{2(\nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2})} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}(X - X_0)\right), \quad (2.122)$$

donde X_0 representa el corazón de la solución⁷.

Es importante remarcar que podemos absorber el signo menos global de la ecuación (2.122) dentro de la parte angular del ansatz propuesto. Así nuestras dos soluciones son de la forma

$$A_+(X, X_0) = \sqrt{2\varepsilon} \operatorname{sech}(\sqrt{\varepsilon}(X - X_0)) e^{i(\theta_0+0)} : \quad \mathbf{0}\text{-soliton}, \quad (2.123)$$

$$A_-(X, X_0) = \sqrt{2\varepsilon} \operatorname{sech}(\sqrt{\varepsilon}(X - X_0)) e^{i(\theta_0+\pi)} : \quad \mathbf{\pi}\text{-soliton}, \quad (2.124)$$

que denominamos como **0-soliton** y **π -soliton** respectivamente, pues una solución respecto a la otra está desfasada en π radianes. La forma de estas soluciones se muestran en las figuras 2.2.

⁷Cabe señalar que la ecuación correspondiente al modelo de Landau estacionario $0 = \varepsilon u - u^3 + \partial_{xx}u$ es análoga a (2.92) salvo una diferencia de signo en la difusión. Las soluciones estacionarias de este modelo son $u(x) = \pm\sqrt{\varepsilon} \tanh\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}(x - x_0)\right)$, las cuales son conocidas como **kink** y **antikink** respectivamente.

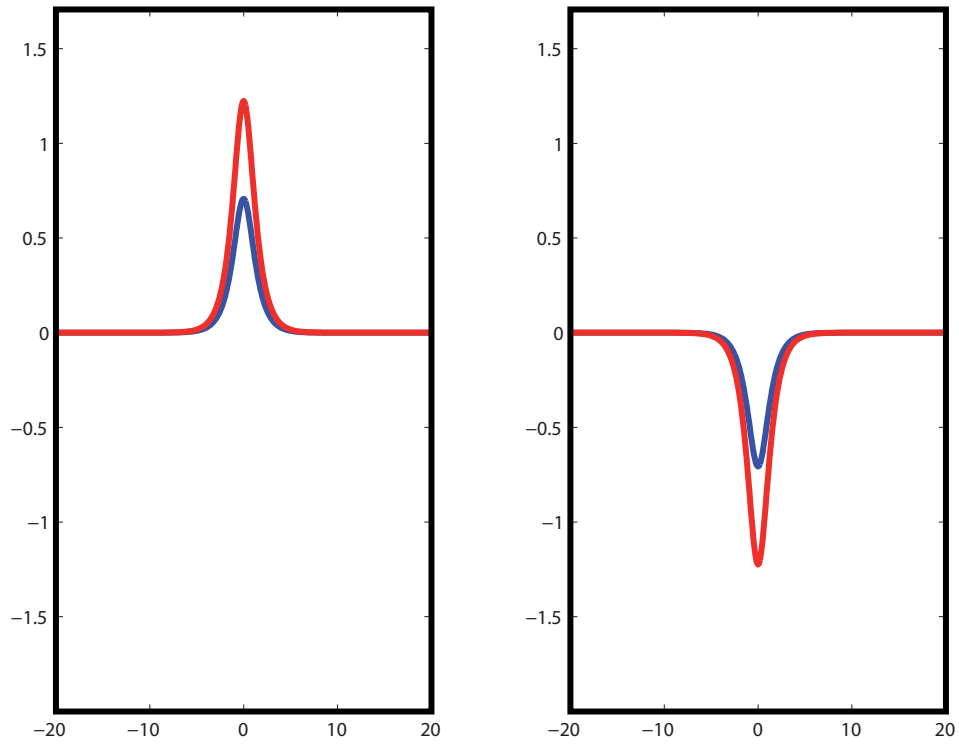


Figura 2.2: Gráficas de las soluciones **0-Solitón** y **π -solitón** respectivamente para un ángulo de 30 grados. La curva en azul representa la parte real y la curva en roja la parte imaginaria de la solución.

2.3. Aparición de soluciones a través de una bifurcación de *Saddle-Node*

Por otro lado, tenemos que la parte angular de la solución general son funciones multivaluadas, pues son invariantes bajo una traslación angular de $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, así las soluciones relevantes son las que están entre $[-\pi, \pi]$ ó $[0, 2\pi]$. Moviendo los parámetros de modo de satisfacer la ecuación (2.80), se crean (o destruyen) soluciones (una estable y otra inestable), lo que es conocido como bifurcación de Saddle-Node. Podemos visualizar esto en la figura 2.3, donde, si se va aumentando el factor γ/μ desde la región donde existen una solución estable y la otra inestable, estas soluciones se acercarán hasta chocar y desaparecer.

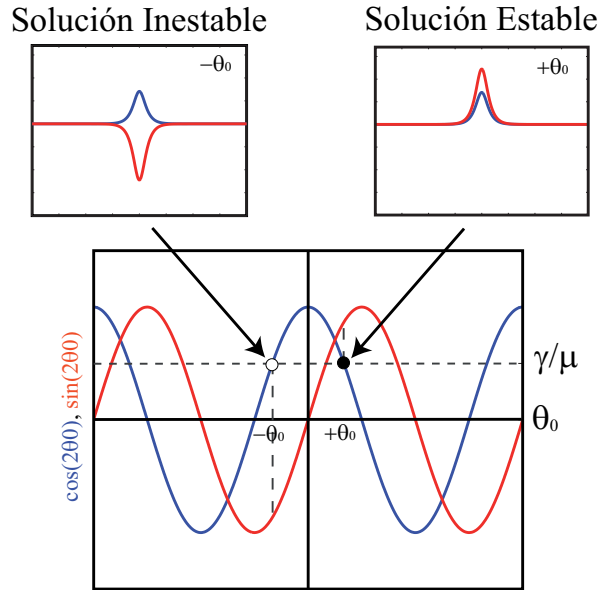


Figura 2.3: Gráficas de las soluciones inestable y estable respectivamente para un ángulo de 30 grados. La curva en azul representa la parte real y la curva en roja la parte imaginaria de la solución.

2.4. El espacio de parámetros

Al analizar la parte real de la solución de la ecuación (2.92), nos damos cuenta que las soluciones están restringidas en el espacio de parámetros. De la ecuación (2.122) tenemos las siguientes restricciones:

■

$$\nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} > 0 \quad (2.125)$$

■

$$\gamma^2 - \mu^2 > 0 \quad (2.126)$$

La ecuación (2.125), representa la ecuación de una hipérbola en el espacio γ v/s ν , donde μ es constante. La ecuación (2.126) se puede reescribir como $\gamma^2 - \nu^2 < \mu^2$ (ecuación de una hipérbola, donde γ es la variable dependiente, ν es una variable independiente y μ es una constante). Por otro lado la ecuación (2.126) presenta otra restricción para $\gamma < \mu$ y $\gamma > -\mu$. La región permitida para el sistema, es presentada en la figura 2.4. Para que la solución estacionaria sea real debemos estar en la región calipso de la figura, como se ilustra en la figura.

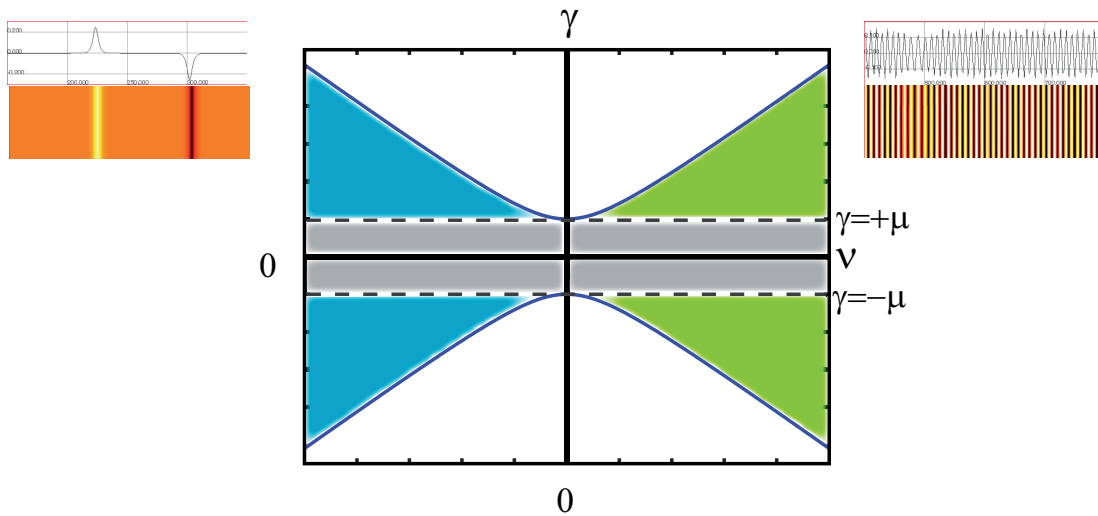


Figura 2.4: Diagrama esquemático del espacio de parámetros del sistema.

Capítulo 3

Sobre la interacción entre de solitones

3.1. Interacción entre dos 0-solitones

En esta sección, estudiaremos si existe algún tipo interacción entre las soluciones tipo “partículas” llamadas 0-soliton y π -soliton. Primero, estudiaremos algún tipo de interacción entre 0-soliton con 0-soliton. Para empezar, comenzaremos estudiando la interacción entre dos 0-solitones. Gráficamente queremos estudiar lo siguiente:

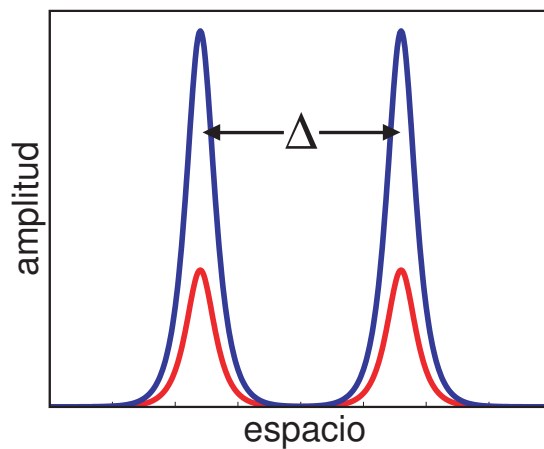


Figura 3.1: Interacción 0-soliton con 0-soliton.

Donde R_- representa una solución 0-soliton ubicada en la posición $X = -\frac{\Delta}{2}$, es decir, de la forma $R_-(X + \frac{\Delta}{2})$, R_+ representa una solución 0-soliton, ubicada en la posición $X = +\frac{\Delta}{2}$, es decir, de la forma $R_+(X - \frac{\Delta}{2})$ y Δ representa la separación entre dichas partículas. En muy importante recalcar que la dinámica de la separación entre dichas “partículas” nos dará cuenta si existe o no existe interacción entre ellas.

Para poder encontrar algún tipo de interacción entre estas dos partículas aplicaremos un método llamado **variación de parámetros**, el cual consiste en aplicar pequeñas perturbaciones sobre una “solución” propuesta, donde supondremos que estas perturbaciones son tipo campo, es decir, ellas dependen tanto del espacio como del tiempo, también supondremos que estas perturbaciones son de variaciones lentas tanto en la variable espacial como en la variable temporal. Para este problema, supondremos que existe una solución tipo combinación lineal en la parte radial, es decir, supondremos una “solución” para la interacción es representada por una combinación lineal entre las partículas R_- y R_+ , pero dado que la ecuación de amplitud para la cadena péndulos que soporta este tipo de soluciones (0-soliton y π -soliton) se trata de una ecuación no-lineal, ello no implica que la combinación lineal de dos soluciones sea una solución de la ecuación de amplitud y es por ello que se introduce un término perturbativo, en este tipo de interacción aplicamos una perturbación en la parte radial de la solución que llamaremos $\rho(X, T)$, es decir, que depende tanto del espacio como del tiempo, mientras que aplicamos una perturbación $\varphi(X, T)$ sobre la parte angular de nuestra solución a fase constante, así tenemos que nuestra solución radial y angular propuesta a partir del método de variación de parámetros toman la forma

$$R(X, T) = R_-(X + \frac{\Delta}{2}) + R_+(X - \frac{\Delta}{2}) + \rho(X, \Delta) \quad (3.1)$$

$$\theta(X, T) = \theta_0 + \varphi(X, \Delta), \quad (3.2)$$

donde promovemos el corazón del soliton como una función dependiente del tiempo, es decir, $\Delta \rightarrow \Delta(T)$. Además tanto $\rho(X, T)$ como $\varphi(X, T)$ son perturbaciones pequeñas, es decir, $\rho(X, T), \varphi(X, T) \ll 1$. Vamos a suponer que estas perturbaciones que dependen del tiempo de una manera implícita, es decir, ellas dependen de la variable temporal a través de la variable que describe la dinámica de interacción, es decir, Δ , luego las soluciones propuestas en las ecuaciones (7.1) y (7.2) toman la forma

$$R(X, T) = R_-(X + \frac{\Delta(T)}{2}) + R_+(X - \frac{\Delta(T)}{2}) + \rho(X, \Delta(T)) \quad (3.3)$$

$$\theta(X, T) = \theta_0 + \varphi(X, \Delta(T)), \quad (3.4)$$

ahora reemplazaremos las soluciones propuestas en las ecuaciones (7.3) y (7.4), en las siguientes ecuaciones, obtenidas a partir de la ecuación de amplitud de una cadena de péndulos forzado paramétricamente con disipación de energía al proponer una solución tipo polar de la forma $A(X, T) = R(X, T)e^{i\theta(X, T)}$, donde obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\partial_T R = 2\partial_X R \partial_X \theta + R \partial_{XX} \theta - \mu R + \gamma R \cos(2\theta) \quad (3.5)$$

$$R \partial_T \theta = \nu R - R^3 - \partial_{XX} R + R (\partial_X \theta)^2 - \gamma R \sin(2\theta) \quad (3.6)$$

Primero, reemplazamos las soluciones propuestas en las ecuaciones (7.3) y (7.4) en la ecuación (7.5), así tenemos

$$\begin{aligned} \partial_T (R_- + R_+ + \rho) &= 2\partial_X (R_- + R_+ + \rho) \partial_X (\theta_0 + \varphi) + \partial_{XX} (\theta_0 + \varphi) \\ &\quad - \mu (R_- + R_+ + \rho) + \gamma (R_- + R_+ + \rho) \cos(2(\theta_0 + \varphi)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde definimos la variable $Z = X \mp \frac{\Delta}{2}$, así tenemos que $R_{\pm}(X \mp \frac{\Delta}{2}) = R_{\pm}(Z)$, es decir, para calcular la derivada temporal de R_{\pm} debemos aplicar la regla de la cadena.

$$\partial_T R_{\pm} = \frac{\partial R_{\pm}}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial T}, \quad (3.8)$$

donde $\frac{\partial Z}{\partial \Delta} = \mp \frac{1}{2}$ y $\frac{\partial \Delta}{\partial T} = \dot{\Delta}$ pues la separación entre las partículas es una función que depende sólo de la variable temporal, luego

$$\partial_T R_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \frac{\partial R_{\pm}}{\partial Z} \dot{\Delta} \quad (3.9)$$

$$= \mp \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z R_{\pm} \quad (3.10)$$

antes de desarrollar la ecuación (7.7) haremos algunas anotaciones con respecto a algunas aproximaciones que realizaremos. Primero como mencionamos anteriormente, en el método de variación de parámetros mencionamos que las perturbaciones son pequeñas ($\rho, \varphi \ll 1$), es decir, despreciaremos términos del orden $\mathcal{O}(\rho\varphi)$ o superiores. Para simplificar la notación, definimos

$$\mathcal{R} \equiv (R_- + R_+), \quad (3.11)$$

desarrollando la expresión (7.7), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_T \mathcal{R} + \partial_T \rho = & (2\partial_X \mathcal{R} + 2\partial_X \rho) (\partial_X \theta_0 + \partial_X \varphi) + \mathcal{R} (\partial_{XX} \theta_0 + \partial_{XX} \varphi) + \\ & \rho (\partial_{XX} \theta_0 + \partial_{XX} \varphi) - \mu \mathcal{R} - \mu \rho + \gamma \mathcal{R} \cos(2\theta_0 + 2\varphi) + \gamma \rho \cos(2\theta_0 + 2\varphi) \end{aligned} \quad (3.12)$$

pero sabemos que $\theta_0 = \text{constante}$, luego $\partial_X \theta_0 = 0$, entonces la última expresión nos queda

$$\begin{aligned} \partial_T \mathcal{R} + \partial_T \rho = & 2\partial_X \mathcal{R} \partial_X \varphi + 2\partial_X \rho \partial_X \varphi + \mathcal{R} \partial_{XX} \varphi + \\ & \rho \partial_{XX} \varphi - \mu \mathcal{R} - \mu \rho + \gamma \mathcal{R} \cos(2\theta_0 + 2\varphi) + \gamma \rho \cos(2\theta_0 + 2\varphi) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como mencionamos anteriormente, las perturbaciones sobre las soluciones son pequeñas, es decir, despreciaremos todos los términos del orden $\mathcal{O}(\rho, \varphi)$ ó $\mathcal{O}(\partial_X \rho \varphi)$, $\mathcal{O}(\rho \partial_X \varphi)$, $\mathcal{O}(\partial_X \rho \partial_X \varphi)$, etc. Por lo tanto $2\partial_X \rho \partial_X \varphi \approx 0$ y $\rho \partial_{XX} \varphi \approx 0$. Luego la expresión (7.13) nos queda

$$\partial_T \mathcal{R} + \partial_T \rho = 2\partial_X \mathcal{R} \partial_X \varphi + \mathcal{R} \partial_{XX} \varphi - \mu \mathcal{R} - \mu \rho + \gamma \mathcal{R} \cos(2\theta_0 + 2\varphi) + \gamma \rho \cos(2\theta_0 + 2\varphi) \quad (3.14)$$

También como mencionamos anteriormente, las perturbaciones tipo campo son variaciones lentas en el espacio y en el tiempo, pero consideraremos que las perturbaciones en el tiempo son mucho más despreciables que en el espacio, por ende, despreciaremos el siguiente término $\partial_T \rho \ll \rho$, es decir, las variaciones en el en la variable temporal son muy pequeñas. Luego la ecuación (7.14) adopta la forma

$$\partial_T \mathcal{R} = 2\partial_X \mathcal{R} \partial_X \varphi + \mathcal{R} \partial_{XX} \varphi - \mu \mathcal{R} - \mu \rho + \gamma \mathcal{R} \cos(2\theta_0 + 2\varphi) + \gamma \rho \cos(2\theta_0 + 2\varphi) \quad (3.15)$$

Por otro lado, ya que la perturbación en la parte angular es pequeña, es decir, $\varphi \ll 1$, desarrollaremos en serie de Taylor la función coseno alrededor de $2\theta_0$ hasta primer orden en φ

$$\cos(2\theta_0 + 2\varphi) \approx \cos 2\theta_0 - 2 \sin \theta_0 \varphi \quad (3.16)$$

lo cual resulta

$$\partial_T \mathcal{R} = 2\partial_X \mathcal{R} \partial_X \varphi + \mathcal{R} \partial_{XX} \varphi - \mu \mathcal{R} - \mu \rho + \gamma \mathcal{R} (\cos 2\theta_0 - 2 \sin \theta_0 \varphi) + \gamma \rho (\cos 2\theta_0 - 2 \sin \theta_0 \varphi) \quad (3.17)$$

$$= 2\partial_X \mathcal{R} \partial_X \varphi + \mathcal{R} \partial_{XX} \varphi - \mu \mathcal{R} - \mu \rho + \gamma \mathcal{R} \cos 2\theta_0 - 2\gamma \mathcal{R} \sin \theta_0 \varphi + \gamma \rho \cos 2\theta_0 - 2\gamma \rho \sin \theta_0 \varphi \quad (3.18)$$

donde despreciamos nuevamente términos de la forma $\mathcal{O}(\rho\varphi)$, es decir, despreciamos el término $2\gamma \rho \sin \theta_0 \varphi \approx 0$, luego la expresión (7.18) nos queda

$$\partial_T \mathcal{R} = 2\partial_X \mathcal{R} \partial_X \varphi + \mathcal{R} \partial_{XX} \varphi - \mu \mathcal{R} - \mu \rho + \gamma \mathcal{R} \cos 2\theta_0 - 2\gamma \mathcal{R} \sin \theta_0 \varphi + \gamma \rho \cos 2\theta_0 \quad (3.19)$$

Por otro lado, encontramos en el capítulo de **Soluciones estacionarias** la siguiente ligadura del sistema

$$\cos 2\theta_0 = \frac{\mu}{\gamma} \quad (3.20)$$

entonces por la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, encontramos también

$$\sin 2\theta_0 = \pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \quad (3.21)$$

Luego, reemplazando los términos de las ecuaciones (7.20) y (7.21), tenemos

$$\partial_T \mathcal{R} = 2\partial_X \mathcal{R} \partial_X \varphi + \mathcal{R} \partial_{XX} \varphi - \mu \mathcal{R} - \mu \rho + \gamma \mathcal{R} \frac{\mu}{\gamma} - 2\gamma \mathcal{R} \left(\pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \right) \varphi + \gamma \rho \frac{\mu}{\gamma} \quad (3.22)$$

$$= 2\partial_X \mathcal{R} \partial_X \varphi + \mathcal{R} \partial_{XX} \varphi - \mu \mathcal{R} - \mu \rho + \mathcal{R} \mu - 2\mathcal{R} \left(\pm \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \right) \varphi + \rho \mu \quad (3.23)$$

eliminando algunos términos, tenemos

$$\partial_T \mathcal{R} = 2\partial_X \mathcal{R} \partial_X \varphi + \mathcal{R} \partial_{XX} \varphi \mp 2\mathcal{R} \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \varphi \quad (3.24)$$

la cual expresada en las variables originales ($\mathcal{R} \equiv R_- + R_+$), tenemos

$$\partial_T (R_- + R_+) = 2\partial_X (R_- + R_+) \partial_X \varphi + (R_- + R_+) \partial_{XX} \varphi \mp 2(R_- + R_+) \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \varphi \quad (3.25)$$

utilizando la ecuación (7.10), obtenemos

$$\frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z (R_- - R_+) = 2\partial_X (R_- + R_+) \partial_X \varphi + (R_- + R_+) \partial_{XX} \varphi \mp 2(R_- + R_+) \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \varphi \quad (3.26)$$

Así de las ecuaciones (7.24), (7.25) y (7.26) (todas análogas) son similares a la ecuación de Schrödinger de la *Mecánica Cuántica*.

Por otro lado, desarrollaremos la ecuación (7.6) utilizando las soluciones propuestas en las ecuaciones (7.3) y (7.4), así tenemos

$$\begin{aligned} (R_- + R_+ + \rho) \partial_T (\theta_0 + \varphi) &= \nu (R_- + R_+ + \rho) - (R_- + R_+ + \rho)^3 \\ &\quad - \partial_{XX} (R_- + R_+ + \rho) + (R_- + R_+ + \rho) (\partial_X (\theta_0 + \varphi))^2 \\ &\quad - \gamma (R_- + R_+ + \rho) \sin(2(\theta_0 + \varphi)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} (R_- + R_+ + \rho) (\partial_T \theta_0 + \partial_T \varphi) &= \nu (R_- + R_+) + \nu \rho - (R_- + R_+ + \rho)^3 \\ &\quad - \partial_{XX} (R_- + R_+) - \partial_{XX} \rho + (R_- + R_+ + \rho) (\partial_X \theta_0 + \partial_X \varphi)^2 \\ &\quad - \gamma (R_- + R_+ + \rho) \sin(2\theta_0 + 2\varphi) \end{aligned} \quad (3.28)$$

ya que $\theta_0 = \text{constante}$, tenemos $\partial_X \theta_0 = \partial_T \theta_0 = 0$, luego tenemos

$$\begin{aligned} (R_- + R_+) \partial_T \varphi + \rho \partial_T \varphi &= \nu (R_- + R_+) + \nu \rho - (R_- + R_+ + \rho)^3 \\ &\quad - \partial_{XX} (R_- + R_+) - \partial_{XX} \rho + (R_- + R_+ + \rho) (\partial_X \varphi)^2 \\ &\quad - \gamma (R_- + R_+ + \rho) \sin(2\theta_0 + 2\varphi), \end{aligned} \quad (3.29)$$

también despreciaremos términos de orden $\mathcal{O}(\varphi^2)$, es decir, $(\partial_X \varphi)^2 \approx 0$ que es de orden $\mathcal{O}(\varphi^2)$ y orden $\mathcal{O}(\rho\varphi)$, es decir, el término $\rho \partial_T \varphi \approx 0$. luego, la ecuación (7.29) toma la forma

$$\begin{aligned} (R_- + R_+) \partial_T \varphi &= \nu (R_- + R_+) + \nu \rho - (R_- + R_+ + \rho)^3 \\ &\quad - \partial_{XX} (R_- + R_+) - \partial_{XX} \rho - \gamma (R_- + R_+ + \rho) \sin(2\theta_0 + 2\varphi) \end{aligned} \quad (3.30)$$

para simplificar la notación utilizaremos la definición de la ecuación (7.11), así obtenemos

$$\mathcal{R} \partial_T \varphi = \nu \mathcal{R} + \nu \rho - (\mathcal{R} + \rho)^3 - \partial_{XX} \mathcal{R} - \partial_{XX} \rho - \gamma (\mathcal{R} + \rho) \sin(2\theta_0 + 2\varphi) \quad (3.31)$$

$$\mathcal{R} \partial_T \varphi = \nu \mathcal{R} + \nu \rho - (\mathcal{R} + \rho)^3 - \partial_{XX} \mathcal{R} - \partial_{XX} \rho - \gamma \mathcal{R} \sin(2\theta_0 + 2\varphi) - \gamma \rho \sin(2\theta_0 + 2\varphi) \quad (3.32)$$

realizando una expansión en serie de Taylor a la función seno alrededor de $2\theta_0$ hasta orden $\mathcal{O}(\varphi)$, tenemos

$$\sin(2\theta_0 + 2\varphi) \approx \sin 2\theta_0 + 2 \cos 2\theta_0 \varphi \quad (3.33)$$

obtenemos

$$\mathcal{R} \partial_T \varphi = \nu \mathcal{R} + \nu \rho - (\mathcal{R} + \rho)^3 - \partial_{XX} \mathcal{R} - \partial_{XX} \rho - \gamma \mathcal{R} (\sin 2\theta_0 + 2 \cos 2\theta_0 \varphi) - \gamma \rho (\sin 2\theta_0 + 2 \cos 2\theta_0 \varphi) \quad (3.34)$$

$$\mathcal{R} \partial_T \varphi = \nu \mathcal{R} + \nu \rho - (\mathcal{R} + \rho)^3 - \partial_{XX} \mathcal{R} - \partial_{XX} \rho - \gamma \mathcal{R} \sin 2\theta_0 - 2\gamma \mathcal{R} \cos 2\theta_0 \varphi - \gamma \rho \sin 2\theta_0 - 2\gamma \rho \cos 2\theta_0 \varphi \quad (3.35)$$

despreciando nuevamente el término de orden $\mathcal{O}(\rho)\varphi$, es decir, el término $2\rho \cos 2\theta_0\varphi \approx 0$, tenemos

$$\mathcal{R}\partial_T\varphi = \nu\mathcal{R} + \nu\rho - (\mathcal{R} + \rho)^3 - \partial_{XX}\mathcal{R} - \partial_{XX}\rho - \gamma\mathcal{R} \sin 2\theta_0 - 2\gamma\mathcal{R} \cos 2\theta_0\varphi - \gamma\rho \sin 2\theta_0 \quad (3.36)$$

ahora, desarrollaremos el término $(\mathcal{R} + \rho)^3$

$$(\mathcal{R} + \rho)^3 = \mathcal{R}^3 + 3\mathcal{R}^2\rho + 3\mathcal{R}\rho^2 + \rho^3 \quad (3.37)$$

conservando los términos hasta orden $\mathcal{O}(\rho)$, tenemos

$$(\mathcal{R} + \rho)^3 \approx \mathcal{R}^3 + 3\mathcal{R}^2\rho \quad (3.38)$$

luego reemplazando el expresión (A.6) en la ecuación (7.36), obtenemos

$$\mathcal{R}\partial_T\varphi = \nu\mathcal{R} + \nu\rho - \mathcal{R}^3 - 3\mathcal{R}^2\rho - \partial_{XX}\mathcal{R} - \partial_{XX}\rho - \gamma\mathcal{R} \sin 2\theta_0 - 2\gamma\mathcal{R} \cos 2\theta_0\varphi - \gamma\rho \sin 2\theta_0 \quad (3.39)$$

utilizando las ligaduras de las ecuaciones (7.20) y (7.21), tenemos

$$\mathcal{R}\partial_T\varphi = \nu\mathcal{R} + \nu\rho - \mathcal{R}^3 - 3\mathcal{R}^2\rho - \partial_{XX}\mathcal{R} - \partial_{XX}\rho - \gamma\mathcal{R} \left(\pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \right) - 2\gamma\mathcal{R} \left(\frac{\mu}{\gamma} \right) \varphi - \gamma\rho \left(\pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \right) \quad (3.40)$$

$$\mathcal{R}\partial_T\varphi = \nu\mathcal{R} + \nu\rho - \mathcal{R}^3 - 3\mathcal{R}^2\rho - \partial_{XX}\mathcal{R} - \partial_{XX}\rho \mp \mathcal{R}\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} - 2\mu\mathcal{R}\varphi \mp \rho\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \quad (3.41)$$

reagrupando algunos términos, tenemos

$$\mathcal{R}\partial_T\varphi = \left(\nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \right) \mathcal{R} + \left(\nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \right) \rho - \mathcal{R}^3 - 3\mathcal{R}^2\rho - \partial_{XX}\mathcal{R} - \partial_{XX}\rho - 2\mu\mathcal{R}\varphi \quad (3.42)$$

donde definimos el siguiente parámetro (que ya hemos definido en el capítulo de soluciones estacionarias)

$$\varepsilon = \nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \quad (3.43)$$

luego la expresión (A.10) adopta la forma

$$\mathcal{R}\partial_T\varphi = \varepsilon\mathcal{R} + \varepsilon\rho - \mathcal{R}^3 - 3\mathcal{R}^2\rho - \partial_{XX}\mathcal{R} - \partial_{XX}\rho - 2\mu\mathcal{R}\varphi \quad (3.44)$$

reagrupando nuevamente los términos, tenemos

$$\mathcal{R}\partial_T\varphi = (\varepsilon - 3\mathcal{R}^2 - \partial_{XX})\rho + (\varepsilon - \mathcal{R}^2 - \partial_{XX})\mathcal{R} - 2\mu\mathcal{R}\varphi \quad (3.45)$$

donde definimos el siguiente operador llamamdo **Operador del sistema**.¹

Definición: Definimos el siguiente operador como **Operador del sistema** pues el cuenta con toda la información acerca de la interacción del sistema.

$$\mathcal{L} = \varepsilon - 3\mathcal{R}^2 - \partial_{XX} \quad (3.46)$$

así la ecuación (A.13) toma la forma

$$\mathcal{R}\partial_T\varphi = \mathcal{L}\rho + (\varepsilon - \mathcal{R}^2 - \partial_{XX})\mathcal{R} - 2\mu\mathcal{R}\varphi \quad (3.47)$$

sabemos que las funciones R_- y R_+ (parte radial de las soluciones estacionarias) satisfacen la siguiente ecuación²

$$0 = \varepsilon R_{\pm} - R_{\pm}^3 - \partial_{XX}R_{\pm}, \quad (3.48)$$

¹la definición de este operador es sólo con fines matemáticos que se verá más adelante en este capítulo

²ver capítulo de soluciones estacionarias

así de la ecuación (A.15) desarrollamos el siguiente término, donde utilizamos la definición de la ecuación (7.11)

$$(\varepsilon - \mathcal{R}^2 - \partial_{XX}) \mathcal{R} = \varepsilon(R_- + R_+) - (R_- + R_+)^3 - \partial_{XX}(R_- + R_+) \quad (3.49)$$

$$= \varepsilon R_- + \varepsilon R_+ - R_-^3 - 3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 - R_+^3 - \partial_{XX} R_- - \partial_{XX} R_+ \quad (3.50)$$

$$= (\varepsilon R_- - R_-^3 - \partial_{XX} R_-) + (\varepsilon R_+ - R_+^3 - \partial_{XX} R_+) - 3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 \quad (3.51)$$

utilizando la identidad de la ecuación (A.16), la ecuación (A.19) nos queda

$$(\varepsilon - \mathcal{R}^2 - \partial_{XX}) \mathcal{R} = -3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2. \quad (3.52)$$

Luego la ecuación (A.15) en función de la parte radial de las soluciones estacionarias (ecuación (7.11)) toma la forma

$$(R_- + R_+) \partial_T \varphi = \mathcal{L}\rho - 3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 - 2\mu(R_- + R_+) \varphi \quad (3.53)$$

Las ecuaciones (7.26) y (A.21) representan un sistema de ecuaciones para las variables φ y ρ

$$\frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z (R_- - R_+) = 2\partial_X (R_- + R_+) \partial_X \varphi + (R_- + R_+) \partial_{XX} \varphi \mp 2(R_- + R_+) \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \varphi \quad (3.54)$$

$$(R_- + R_+) \partial_T \varphi = \mathcal{L}\rho - 3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 - 2\mu(R_- + R_+) \varphi \quad (3.55)$$

3.1.1. Estudio de la dinámica en la región I

Para resolver el sistema dado por las ecuaciones (A.22) y (A.23) supondremos que la perturbación en la parte angular (φ) **varía de manera muy lenta** en el espacio, es decir, $\partial_{XX} \varphi \ll \partial_X \varphi \ll \varphi$, entonces la ecuación (A.22) toma la forma

$$\mp 2(R_- + R_+) \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \varphi = \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z (R_- - R_+) \quad (3.56)$$

$$\varphi = \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z (R_- - R_+) \cdot \frac{1}{\mp 2(R_- + R_+) \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \quad (3.57)$$

luego,

$$\varphi = \mp \frac{\dot{\Delta}}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)}, \quad (3.58)$$

ahora debemos reemplazar la ecuación (7.58) en la ecuación (A.23), pero antes de reemplazar calcularemos el término $\partial_T \varphi$, utilizando los supuestos de la primera región, es decir, utilizando la ecuación (7.58)

$$\partial_T \varphi = \partial_T \left[\mp \frac{\dot{\Delta}}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right] \quad (3.59)$$

$$= \mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \cdot \frac{d\dot{\Delta}}{dT} \cdot \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} + \dot{\Delta} \cdot \partial_T \left[\frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right] \quad (3.60)$$

$$= \mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \ddot{\Delta} \cdot \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} + \dot{\Delta} \cdot \partial_T \left[\frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right] \quad (3.61)$$

ahora calculamos la derivada temporal del siguiente término

$$\partial_T \left[\partial_Z (R_- - R_+) \cdot (R_- + R_+)^{-1} \right] = \partial_T [\partial_Z (R_- - R_+)] (R_- + R_+)^{-1} + \partial_Z (R_- - R_+) \partial_T [(R_- + R_+)^{-1}] \quad (3.62)$$

calculando la derivadas temporales de los siguientes términos

$$\partial_T \left((R_- + R_+)^{-1} \right) = -1 (R_- + R_+)^{-2} \cdot \partial_T (R_- + R_+) \quad (3.63)$$

$$= -1 (R_- + R_+)^{-2} \cdot (\partial_T R_- + \partial_T R_+) \quad (3.64)$$

para calcular las derivadas temporales de la parte radial de la amplitud³, utilizamos la ecuación (7.10)

$$\partial_T \left((R_- + R_+)^{-1} \right) = \frac{-1}{(R_- + R_+)^2} \cdot \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z (R_- - R_+) \quad (3.65)$$

$$= -\frac{\dot{\Delta}}{2} \cdot \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)^2} \quad (3.66)$$

ahora calculamos la derivada temporal del siguiente término

$$\partial_T [\partial_Z (R_- - R_+)] = \partial_T (\partial_Z R_- - \partial_Z R_+) \quad (3.67)$$

acá debemos recordar que la función R_{\pm} es una función que depende de la variable Z y Z a su vez, depende de la variable X y Δ , y Δ a su vez depende de la variable temporal T , entonces para calcular la derivada temporal de la ecuación (3.67), debemos aplicar la regla de la cadena, así tenemos lo siguiente

$$\partial_T (\partial_Z R_+) = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial R_+}{\partial Z} \right) \cdot \frac{\partial Z}{\partial \Delta} \cdot \frac{d\Delta}{dT} \quad (3.68)$$

$$= \partial_Z^2 R_+ \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \dot{\Delta} \quad (3.69)$$

$$= -\frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z^2 R_+ \quad (3.70)$$

calculando el otro término, tenemos

$$\partial_T (\partial_Z R_-) = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial R_-}{\partial Z} \right) \cdot \frac{\partial Z}{\partial \Delta} \cdot \frac{d\Delta}{dT} \quad (3.71)$$

$$= \partial_Z^2 R_- \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \dot{\Delta} \quad (3.72)$$

$$= \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z^2 R_- \quad (3.73)$$

luego de la ecuación (3.67), tenemos

$$\partial_T [\partial_Z (R_- - R_+)] = (\partial_T (\partial_Z R_-) - \partial_T (\partial_Z R_+)) \quad (3.74)$$

$$= \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z^2 R_- - \left(-\frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z^2 R_+ \right) \quad (3.75)$$

$$= \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z^2 R_- + \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z^2 R_+ \quad (3.76)$$

$$= \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_Z^2 (R_- + R_+) \quad (3.77)$$

³Ver capítulos de soluciones estacionarias

luego el término de la ecuación (3.62) ocupando los términos de las ecuaciones (3.66) y (3.77) nos queda expresado de la siguiente forma

$$\partial_T \left[\partial_Z (R_- - R_+) \cdot (R_- + R_+)^{-1} \right] = \frac{\dot{\Delta}}{2} \cdot \frac{\partial_Z^2 (R_- + R_+)}{(R_- + R_+)} + \partial_Z (R_- - R_+) \left(-\frac{\dot{\Delta}}{2} \cdot \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)^2} \right) \quad (3.78)$$

$$\partial_T \left[\partial_Z (R_- - R_+) \cdot (R_- + R_+)^{-1} \right] = \frac{\dot{\Delta}}{2} \left[\frac{\partial_Z^2 (R_- + R_+)}{(R_- + R_+)} - \frac{(\partial_Z (R_- - R_+))^2}{(R_- + R_+)^2} \right] \quad (3.79)$$

$$\partial_T \left[\partial_Z (R_- - R_+) \cdot (R_- + R_+)^{-1} \right] = \frac{\dot{\Delta}}{2} \left[\frac{\partial_Z^2 (R_- + R_+)}{(R_- + R_+)} - \left(\frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{R_- + R_+} \right)^2 \right] \quad (3.80)$$

luego reemplazamos el término de la ecuación (3.80) en la ecuación (3.61)

$$\partial_T \varphi = \mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \ddot{\Delta} \cdot \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} + \dot{\Delta} \cdot \left[\frac{\dot{\Delta}}{2} \left[\frac{\partial_Z^2 (R_- + R_+)}{(R_- + R_+)} - \left(\frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{R_- + R_+} \right)^2 \right] \right] \quad (3.81)$$

$$= \mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \ddot{\Delta} \cdot \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} + \frac{\dot{\Delta}^2}{2} \left[\frac{\partial_Z^2 (R_- + R_+)}{(R_- + R_+)} - \left(\frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{R_- + R_+} \right)^2 \right] \quad (3.82)$$

ahora para simplificar los calculos, tenemos dos opciones para realizar aproximaciones. Primero es suponer que las derivadas espaciales con respecto a la variable Z definida anteriormente para las funciones R_+ y R_- son pequeñas de la siguiente forma

$$(\partial_Z (R_- - R_+))^2 \ll \partial_Z^2 (R_- + R_+) \ll \partial_Z (R_- - R_+), \quad (3.83)$$

es decir, sólo conservamos las derivadas espaciales de las funciones R_+ y R_- hasta primer orden $\mathcal{O}(\partial_Z)$ y sólo hasta la primera derivada espacial, despreciamos términos de la forma ∂_Z^2 . Es decir, estamos asumiendo que las funciones R_+ y R_- varían de manera muy lenta en el espacio.

La otra forma de entender esta simplificación, es suponer que la variable de interacción varía de manera muy lenta en el tiempo, es decir, $\dot{\Delta}^2 \ll \ddot{\Delta}$, por lo tanto la ecuación (3.82) se puede aproximar de la siguiente forma

$$\partial_T \varphi \approx \mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \ddot{\Delta} \cdot \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \quad (3.84)$$

ahora reemplazamos la ecuación (7.58) y (3.84) en la ecuación (A.23)

$$(R_- + R_+) \left(\mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \ddot{\Delta} \cdot \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right) = \mathcal{L}\rho - 3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 - 2\mu (R_- + R_+) \left(\mp \frac{\dot{\Delta}}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \frac{\partial_Z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right) \quad (3.85)$$

reordenando y simplificando, tenemos

$$\mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \ddot{\Delta} \cdot \partial_Z (R_- - R_+) = \mathcal{L}\rho - 3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 - 2\mu \left(\mp \frac{\dot{\Delta}}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \partial_Z (R_- - R_+) \right) \quad (3.86)$$

$$\mathcal{L}\rho = \mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \partial_Z (R_- - R_+) \ddot{\Delta} + 3R_-^2 R_+ + 3R_- R_+^2 \mp \frac{2\mu}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \partial_Z (R_- - R_+) \dot{\Delta} \quad (3.87)$$

$$\mathcal{L}\rho = \mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \partial_Z (R_- - R_+) \ddot{\Delta} \mp \frac{\mu}{2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \partial_Z (R_- - R_+) \dot{\Delta} + 3R_-^2 R_+ + 3R_- R_+^2 \quad (3.88)$$

la ecuación (3.88) contiene información sobre la dinámica de interacción entre dos 0-solitones. Una forma de resolver esta ecuación es encontrar el valor de la función de perturbación de la variable radial pues ya obtuvimos el valor de la perturbación en la parte angular y así el sistema descrito por las ecuaciones (A.22) y (A.23) en principio esta solucionado, pero una manera alternativa es no resolver el sistema como tal, si no más bien encontrar una **condición de solubilidad**, es decir, encontrar una condición para garantizar que por lo menos existe una solución para dicho sistema. Dicho método se llama **Alternativa de Fredholm** y que explicaremos en la siguiente sección.

3.1.2. Alternativa de Fredholm

La Alternativa de Fredholm es una forma de garantizar que exista por lo menos una solución para sistema dado. La ecuación (3.88) se puede resumir de la siguiente forma

$$\mathcal{L}|\rho\rangle = |R\rangle \quad (3.89)$$

la cual tendrá solución para $|\rho\rangle$ sí, y sólo sí $|R\rangle$ pertenece a la imagen del operador \mathcal{L} . En forma pictórica, tenemos lo siguiente

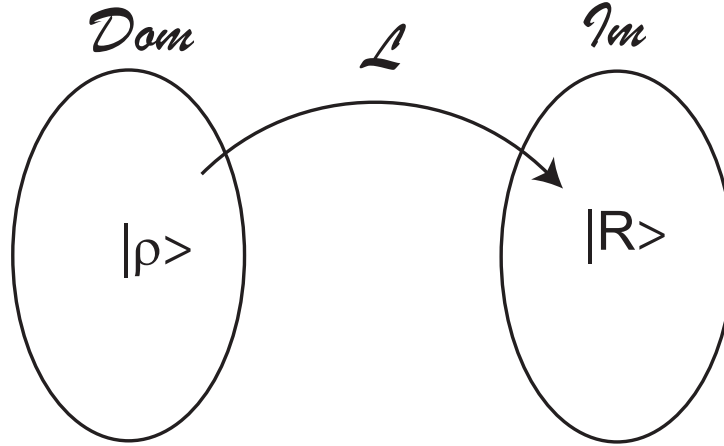


Figura 3.2: Definición pictórica para encontrar solución a la ecuación (89).

Encontrar dicha solución puede resultar difícil. Una forma alternativa es no encontrar dicha solución, si no más bien establecer una **Condición de Solubilidad**, es decir, establecer una condición para poder decir que existe por lo menos una solución para dicho sistema, ecuación(3.89). Esta alternativa sólo nos garantiza que dicha solución existe pero no nos da información sobre dicha solución, esta alternativa se llama **Alternativa de Fredholm**

Sea \mathcal{L} un operador que actúa sobre un espacio \mathcal{E} . Entonces la pregunta es: dado un elemento $|A\rangle$ (vector) perteneciente a la imagen del operador \mathcal{L} . Entonces debemos encontrar un vector $|W\rangle$ perteneciente al dominio de \mathcal{L} , tal que $\mathcal{L}|W\rangle = |A\rangle$ para dicho sistema tenga solución. Si encontramos dicho vector ($|W\rangle$) que satisface la ecuación (3.89), entonces dicho sistema queda completamente resuelto.

La alternativa de Fredholm nos dice que dicho sistema tendrá solución (condición de solubilidad) sí y sólo sí para todo vector $|v\rangle$ perteneciente al $\text{Ker}(\mathcal{L}^\dagger)$, se cumple $\langle A|v\rangle^* = 0$.

En efecto, consideremos la ecuación (3.89)

$$\mathcal{L}|W\rangle = |A\rangle \quad (3.90)$$

y apliquemos un elemento del kernel de \mathcal{L}^\dagger por la izquierda

$$\langle v|\mathcal{L}|W\rangle = \langle v|A\rangle \quad (3.91)$$

al igual que en mecánica cuántica podemos pasar a la ecuación de *correspondencia dual*

$$\langle v|(\mathcal{L}|W\rangle) = \langle v|A\rangle \quad (3.92)$$

$$(\langle W|\mathcal{L}^\dagger)|v\rangle^* = \langle A|v\rangle^* \quad (3.93)$$

dado que $|v\rangle \in \text{Ker}(\mathcal{L}^\dagger)$, es decir, se cumple que $\mathcal{L}^\dagger|v\rangle = 0$. Luego, la ecuación (3.92), tendrá solución sí y sólo si $\langle A|v\rangle^* = 0$ ó $\langle A|v\rangle = 0$. Sí el operador \mathcal{L} es hermítico conjugado, es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$, entonces

$$\langle v|\mathcal{L}|W\rangle = \langle W|\mathcal{L}^\dagger|v\rangle^* \quad (3.94)$$

pero dado que el operador es hermítico conjugado, tenemos

$$\langle v|\mathcal{L}|W\rangle = \langle W|\mathcal{L}|v\rangle^* \quad (3.95)$$

3.1.3. Pequeño análisis del operador del sistema

Recordando el operador de la ecuación (A.14), tenemos

$$\mathcal{L} = \varepsilon - 3\mathcal{R}^2 - \partial_{XX}, \quad (3.96)$$

donde

$$\mathcal{R} = R_- + R_+, \quad (3.97)$$

el cual lo llamaremos **término de interacción**. Para analizar este tipo de operador lo reescribiremos de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \varepsilon - 3(R_- + R_+)^2 - \partial_{XX} \quad (3.98)$$

$$= \varepsilon - 3(r_-^2 + 2R_-R_+ + R_+^2) - \partial_{XX} \quad (3.99)$$

$$= \varepsilon - 3R_-^2 - 6R_-R_+ - 3R_+^2 - \partial_{XX} \quad (3.100)$$

$$= \varepsilon + (\varepsilon - \varepsilon) - 3R_-^2 - 6R_-R_+ - 3R_+^2 - \partial_{XX} + (\partial_{XX} - \partial_{XX}) \quad (3.101)$$

reagrupando los términos de forma conveniente, tenemos

$$\mathcal{L} = (\varepsilon - 3R_-^2 - \partial_{XX}) + (\varepsilon - 3R_+^2 - \partial_{XX}) - (\varepsilon + 6R_-R_+ - \partial_{XX}) \quad (3.102)$$

A continuación definimos los siguientes operadores en analogía al operador de la ecuación (3.96).

- Operador de la solución R_- :

$$\mathcal{L}_- \equiv \varepsilon - 3R_-^2 - \partial_{XX} \quad (3.103)$$

- Operador de la solución R_+ :

$$\mathcal{L}_+ \equiv \varepsilon - 3R_+^2 - \partial_{XX} \quad (3.104)$$

- Operador de interacción entre las soluciones:

$$\mathcal{L}_{\text{inter}} \equiv \varepsilon + 6R_-R_+ - \partial_{XX} \quad (3.105)$$

Así el operador del sistema se puede escribir como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_- + \mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_{\text{inter}} \quad (3.106)$$

Análisis del operador de interacción

Tenemos que el operador del sistema está dado por

$$\mathcal{L}_{\text{inter}} \equiv \varepsilon + 6R_-R_+ - \partial_{XX} \quad (3.107)$$

las funciones radiales R_+ y R_- quedan representadas gráficamente en las siguientes figuras. Ahora mostremos el gráfico del producto de estas dos funciones (R_- y R_+) denominado término de interacción. Al analizar esta gráfica

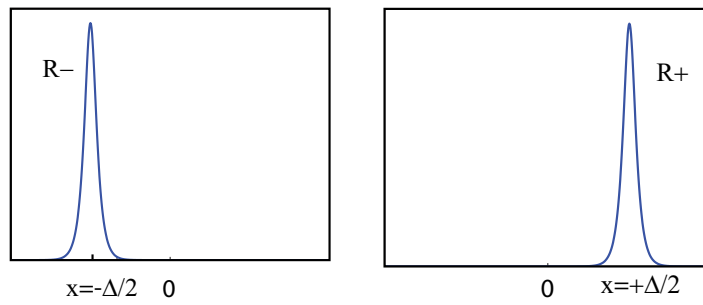


Figura 3.3: Graficos de la parte radial de los solitones ubicados en $x = -\Delta/2$ y $x = \Delta/2$ respectivamente.

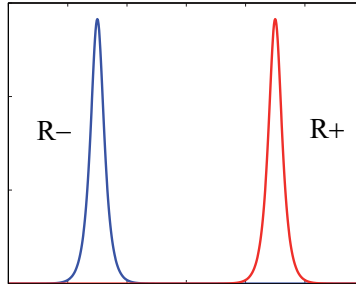


Figura 3.4: Producto de las funciones R_- y R_+ .

podemos observar que el producto $R_- R_+$ es aproximadamente nulo cuando la distancia de separación entre ellos es muy grande, es decir, cuando $\Delta \gg 1$. Luego el operador de interacción se puede aproximar como

$$\mathcal{L}_{\text{inter}} \approx \varepsilon - \partial_{XX} \tag{3.108}$$

cuando la separación entre los solitones es muy grande.

En este caso decimos que los solitones en principio no se “ven”, es decir, para fines prácticos ellos son invisibles. Ahora mostraremos el el operador del sistema (3.96) es autoadjunto, es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$. Para ello, definiremos el siguiente producto interno entre los elementos del *Dominio* de \mathcal{L} y la *Imagen* de \mathcal{L} , en forma pictórica tenemos lo siguiente en forma matemática queda representado por

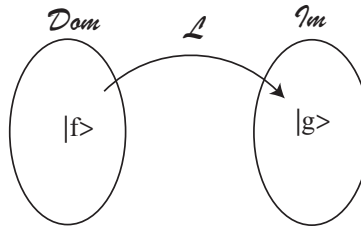


Figura 3.5: Forma pictórica del producto interno.

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot g^* dx \quad (3.109)$$

donde el producto interno se extiende sobre todo el espacio y g^* representa el complejo conjugado de g . Ahora, definimos el siguiente operador $l = \partial_X$, así

$$\langle f|lg \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot (\partial_X g^*) dx \quad (3.110)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_X (f \cdot g^*) dx - \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_X f) \cdot g^* dx \quad (3.111)$$

ahora haremos una condición muy importante, asumiremos que los vectores (funciones) en los extremos del espacio son nulos, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_X (f \cdot g^*) dx = f \cdot g^* |_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (3.112)$$

luego,

$$\langle f|lg \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_X f) \cdot g^* dx \quad (3.113)$$

$$= - \langle l^\dagger f|g \rangle \quad (3.114)$$

luego, al aplicar dos veces el mismo operador, tenemos

$$\langle f|llg \rangle = - \langle l^\dagger f|lg \rangle \quad (3.115)$$

$$= \langle l^\dagger l^\dagger f|g \rangle \quad (3.116)$$

así, con la definición este operador ($l = \partial_X$), tenemos $l = -l^\dagger$ y $ll = l^\dagger l^\dagger = (ll)^\dagger$. Ahora mostraremos que el operador del sistema es autoadjunto, en efecto,

$$\langle f|\mathcal{L}g \rangle = \langle f|(\varepsilon - 3\mathcal{R}^2 - ll)g \rangle \quad (3.117)$$

$$= \langle f|\varepsilon g \rangle + \langle f|-3\mathcal{R}^2 g \rangle + \langle f|llg \rangle \quad (3.118)$$

calculando término por término, tenemos

■

$$\langle f|\varepsilon g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot (\varepsilon g)^* dx \quad (3.119)$$

dado que ε es un parámetro medible del sistema, es decir, es un parámetro real

$$\langle f|\varepsilon g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \varepsilon \cdot g^* dx \quad (3.120)$$

$$= \langle f\varepsilon|g \rangle \quad (3.121)$$

■

$$\langle f|-3\mathcal{R}^2 g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot (-3\mathcal{R}^2 g)^* dx \quad (3.122)$$

tenemos que \mathcal{R} está compuesta por funciones reales, luego

$$\langle f|-3\mathcal{R}^2 g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (f \cdot -3\mathcal{R}^2) \cdot g^* dx \quad (3.123)$$

$$= \langle f \cdot -3\mathcal{R}^2|g \rangle \quad (3.124)$$

$$\langle f|llg \rangle = \langle (ll)^\dagger f|g \rangle \quad (3.125)$$

como se mostro anteriormente. Luego la ecuación (3.118) se puede escribir como

$$\langle f|\mathcal{L}g \rangle = \langle \varepsilon f|g \rangle + \langle -3\mathcal{R}^2 f|g \rangle + \langle (ll)^\dagger f|g \rangle \quad (3.126)$$

$$= \langle (\varepsilon - 3\mathcal{R}^2 + (ll)^\dagger) f|g \rangle \quad (3.127)$$

$$= \langle \mathcal{L}^\dagger f|g \rangle \quad (3.128)$$

Finalmente, hemos mostrado que el operador del sistema $\mathcal{L} = \varepsilon - 3\mathcal{R}^2 + (ll)^\dagger$ es autoadjunto, es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$. Ahora para aplicar la alternativa de Fredholm, sólo debemos encontrar por lo menos un elemento del $\text{Ker}\mathcal{L}$ en vez de $\text{Ker}\mathcal{L}^\dagger$. Para encontrar dicho elemento utilizaremos la ecuación para la solucines estacionarias de la parte radial, ecuación (A.16).

$$0 = \varepsilon R_\pm - 3R_\pm - \partial_{XX}R_\pm \quad (3.129)$$

de las ecuaciones (3.103) y (3.104), podemos concluir que el operador de un solitón ubicado en la posición $x = x_0$ ($R(x - x_0)$) debe ser de la forma

$$\mathcal{L} = \varepsilon - 3R^2 - \partial_{XX} \quad (3.130)$$

y como podemos observar de la ecuación (3.96), este tiene la misma forma que el operador de dos solitones, es fácil proponer un elemento del Kernel del operador de un solitón ubicado en la posición $x = x_0$. Para ello ocupamos la ecuación para una solución estacionaria para un solitón ubicado en una posición arbitraria.

$$0 = \varepsilon R - R^3 - \partial_{XX}R \quad (3.131)$$

para ello derivamos la ecuación (3.131) con respecto a la variable espacial X

$$0 = \varepsilon R - R^3 - \partial_{XX}R \quad /\partial_X \quad (3.132)$$

$$= \varepsilon \partial_X R - 3R^2 \partial_X R - \partial_{XXX}R \quad (3.133)$$

$$= (\varepsilon - 3R^2 - \partial_{XX}) \partial_X R \quad (3.134)$$

y por la definición del operador de un solitón en una posición arbitraria, ecuación (3.130), tenemos

$$0 = \mathcal{L}|\partial_X R \rangle \quad (3.135)$$

donde, identificamos al vector $|\partial_X R \rangle$ como elemento del Kernel del operador del solitón. Es muy importante recalcar que hemos encontrado un elemnto del kernel de un operador de un solitón, cual nos permitirá aplicar la alternativa de Fredholm para establecer una condición de solubilidad a la ecuación (3.88) ó (3.89).

Para el operador del sistema definido en la ecuación (A.14) no se puede realizar el mismo procedimiento pues este operador cuenta con un término (\mathcal{R}) el cual cuenta con información de los dos solitones en estudio como una combinacinación lineal entre ellos. Con este término la ecuación no se satisface la ecuación (A.16) (ecuación que nos entrega la parte radial de un solitón estacionario), ella no es satisfecha cuando el término radial está compuesta por una combinación lineal de ellos, al contar con término no lineal, en efecto: reemplazamos el término $\mathcal{R} = R_- + R_+$ en la ecuación (A.16)

$$\varepsilon \mathcal{R} - \mathcal{R}^3 - \partial_{XX}\mathcal{R} = 0 \quad (3.136)$$

$$\varepsilon (R_- + R_+) - (R_- + R_+)^3 - \partial_{XX} (R_- + R_+) = 0 \quad (3.137)$$

$$\varepsilon R_- + \varepsilon R_+ - R_-^3 - 3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 - R_+^3 - \partial_{XX} R_- - \partial_{XX} R_+ = 0 \quad (3.138)$$

$$(\varepsilon R_- R_-^3 - \partial_{XX} R_-) + (\varepsilon R_+ - R_+^3 - \partial_{XX} R_+) - 3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 = 0 \quad (3.139)$$

de la ecuación (A.16), tenemos que los términos que están entre paréntesis satisfacen dicha ecuación, por lo tanto son nulos. Luego la ecuación (3.139) nos queda

$$-3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 = 0 \quad (3.140)$$

y la ecuación (3.136) queda

$$\varepsilon \mathcal{R} - \mathcal{R}^3 - \partial_{XX} \mathcal{R} = -3R_-^2 R_+ - 3R_- R_+^2 \quad (3.141)$$

la cual no satisface la ecuación (3.136) por contar como una combinación lineal de funciones en la parte radial. Para que la ecuación (3.136) sea cuasisatiable, debemos suponer que la distancia entre los solitones sea muy grande ($\Delta \gg 1$). Esto se debe a que la parte radial de las funciones para la parte radial son funciones hiperbólicas y ellas son exponencialmente pequeñas cuando nos alejamos del corazón (dentro) de dicha función. Que las funciones sean exponencialmente pequeñas, quiere decir que prácticamente tiene un valor casi nulo para puntos alejados del centro y no nulos para valores cerca del centro. Para comprender esto, mostraremos las siguientes figuras que muestran lo comentado anteriormente. Como se puede apreciar en la última figura el producto de las funciones sería

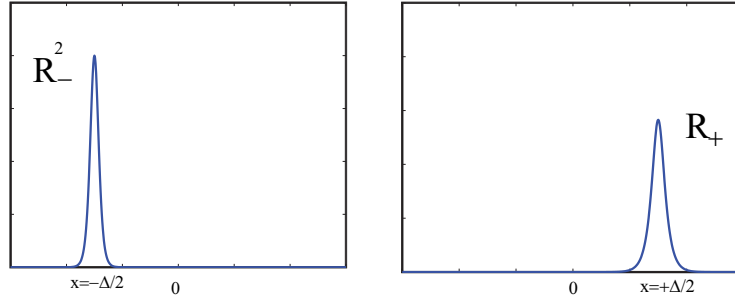


Figura 3.6: Graficos de la parte radial de los solitones ubicados en $x = -\Delta/2$ y $x = \Delta/2$ respectivamente.

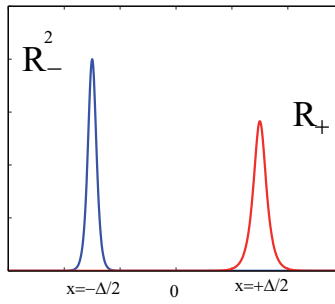


Figura 3.7: Producto de las funciones R_- y R_+ .

cuasi nulo en todo el espacio si la distancia entre los solitones es muy grande, es decir, $R_-^2 R_+ \approx 0$ y lo mismo ocurre para el otro término $R_- R_+^2 \approx 0$. Luego la ecuación (3.136) sería cuasi nula si los solitones están muy alejados. Es decir,

$$\varepsilon \mathcal{R} - \mathcal{R}^3 - \partial_{XX} \mathcal{R} \approx 0 \quad (3.142)$$

La ecuación para parte radial para solitones estacionarios (3.136) es satisfecha cuando los solitones están muy alejados, es decir, ellos no se “ven” pues despreciamos los términos de acoplamiento.

Ahora buscaremos el operador para la ecuación (3.142) que está bajo el supuesto que los solitones están muy alejados, ocupando dicha ecuación

$$\varepsilon \mathcal{R} - \mathcal{R}^3 - \partial_{XX} \mathcal{R} \approx 0 \quad / \partial_X \quad (3.143)$$

$$\varepsilon \partial_X \mathcal{R} - 3\mathcal{R}^2 \partial_X \mathcal{R} - \partial_{XXX} \mathcal{R} \approx 0 \quad (3.144)$$

$$(\varepsilon - 3\mathcal{R}^2 - \partial_{XX} \mathcal{R}) \partial_X \mathcal{R} \approx 0 \quad (3.145)$$

donde podemos reconocer el término entre paréntesis como el operador del sistema para un par de solitones cuando ellos están muy alejados

$$\mathcal{L} |\partial_X \mathcal{R} \rangle \approx 0 \quad (3.146)$$

Para aplicar la alternativa de Fredholm, debemos mostrar que este operador para una combinación lineal de solitones cuando estos están muy alejados es autoadjunto. Pero esto ya lo mostramos en la ecuación (3.128), es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$. Luego $|\partial_X \mathcal{R} \rangle$ es un pseudovector del Ker (\mathcal{L}^\dagger).

3.1.4. Otro análisis del operador del sistema

Ahora estudiaremos de una manera alternativa el operador del sistema dado por la ecuación (3.96)

$$\mathcal{L} = \varepsilon - 3\mathcal{R}^2 - \partial_{XX} \quad (3.147)$$

$$= \varepsilon - 3(R_- + R_+)^2 - \partial_{XX} \quad (3.148)$$

$$= \varepsilon - 3(R_-^2 + 2R_- R_+ + R_+^2) - \partial_{XX} \quad (3.149)$$

$$= (\varepsilon - 3R_-^2 - \partial_{XX}) - 6R_- R_+ - 3R_+^2 \quad (3.150)$$

recordando el término entre paréntesis como el operador del solitón ubicado en la posición $X = -\frac{\Delta}{2}$ como se definió en la ecuación (3.103), tenemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_- - 6R_- R_+ - 3R_+^2 \quad (3.151)$$

Para este análisis vamos a suponer que la distancia entre los solitones es muy grande $\Delta \gg 1$. Recordando que la parte radial de los solitones es de la forma

$$R(X - X_0) = \sqrt{2\varepsilon} \operatorname{sech}(\sqrt{\varepsilon}(X - X_0)), \quad (3.152)$$

donde X_0 representa una ubicación arbitraria de dicho solitón.

Para analizar el operador de la ecuación (3.151), reescribiremos el solitón ubicado en la posición $X = \frac{\Delta}{2}$ de tal forma de hacer algunas aproximaciones para poder utilizar los supuestos que la distancia entre punto de observación y el corazón del solitón es muy grande.

$$R_+(X - \frac{\Delta}{2}) = \sqrt{2\varepsilon} \operatorname{sech} \left(\sqrt{\varepsilon} \left(X - \frac{\Delta}{2} \right) \right) \quad (3.153)$$

$$= \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{e^{\sqrt{\varepsilon}(X - \frac{\Delta}{2})} + e^{-\sqrt{\varepsilon}(X - \frac{\Delta}{2})}} \quad (3.154)$$

$$= \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{e^{\sqrt{\varepsilon}(X - \frac{\Delta}{2})}} \frac{1}{\left(1 + e^{-2\sqrt{\varepsilon}(X - \frac{\Delta}{2})} \right)} \quad (3.155)$$

Dado que la función secante hiperbólica es una función par, lo que importa en el argumento de dicha función es el valor absoluto, es decir, la distancia entre el punto de observación y el corazón del solitón. Así rescribimos la última ecuación

$$R_+ \left(\left| X - \frac{\Delta}{2} \right| \right) = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{e^{\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|}} \frac{1}{\left(1 + e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \right)} \quad (3.156)$$

pero dado que $|X - \frac{\Delta}{2}| \gg 1$, tenemos que $e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \ll 1$, es decir, este términos se denomina exponencialmente pequeño. Así expandimos en serie de Taylor hasta primer orden en $\mathcal{O} \left(e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \right)$, tenemos

$$\left(1 + e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \right)^{-1} \approx 1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \quad (3.157)$$

luego

$$R_+ \left(\left| X - \frac{\Delta}{2} \right| \right) \approx \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{e^{\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|}} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \right) \quad (3.158)$$

$$\approx \sqrt{2\varepsilon} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \right) \quad (3.159)$$

Reemplazando la ecuación (3.159), en la ecuación (3.151), tenemos

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_- - 6\sqrt{2\varepsilon} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \right) R_- - 6\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \right)^2 \quad (3.160)$$

conservando términos hasta orden $\mathcal{O} \left(e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \right)$, tenemos

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_- - 6\sqrt{2\varepsilon} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \right) R_- - 6\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X - \frac{\Delta}{2}|} \quad (3.161)$$

Ahora haremos expansiones sobre la función R_- .

$$R_- \left(\left| X + \frac{\Delta}{2} \right| \right) = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{e^{\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|} + e^{-\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|}} \quad (3.162)$$

$$= \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{e^{\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|}} \frac{1}{\left(1 + e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|} \right)} \quad (3.163)$$

suponiendo que la distancia entre el punto de observación y el corazón del solitón es muy grande ($|X + \frac{\Delta}{2}| \gg 1$), tenemos que el término $e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|} \ll 1$, así podemos aproximar como sigue

$$R_- \left(\left| X + \frac{\Delta}{2} \right| \right) = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{e^{\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|}} \left(1 + e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|} \right)^{-1} \quad (3.164)$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{e^{\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|}} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|} \right) \quad (3.165)$$

$$\approx \sqrt{2\varepsilon} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X + \frac{\Delta}{2}|} \right) \quad (3.166)$$

reemplazando la ecuación (3.166), en la ecuación (3.161), tenemos

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_- - 12\varepsilon e^{-\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|}\right) e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right) - 6\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|} \quad (3.167)$$

conservando términos hasta orden $\mathcal{O}\left(e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|}\right)$ ó orden $\mathcal{O}\left(e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right)$, tenemos

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_- - 12\varepsilon e^{-\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} - 12\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|} \quad (3.168)$$

cuando el punto de observación está muy alejado del corazón de los solitones, tenemos que $e^{-\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}$ y $e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|}$ son del mismo orden, así tenemos

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_- + \mathcal{O}\left(e^{-2\sqrt{2}|X-\frac{\Delta}{2}|}\right), \quad (3.169)$$

es decir, el operador del sistema (dos solitones seprados por una distancia Δ) se puede aproximar como el operador de un solitón ubicado en la posición $(X = -\frac{\Delta}{2})$ más un término exponencialmente pequeño.

Ahora hacemos el mismo cálculo, pero contruyendo el operador para un solitón ubicado en la posición $(X = \frac{\Delta}{2})$ a partir del operador, para ello, realizamos el mismo procedimiento a partir de la ecuación (3.147)

$$\mathcal{L} = \varepsilon - 3\mathcal{R}^2 - \partial_{XX} \quad (3.170)$$

$$= \varepsilon - 3(R_- + R_+)^2 - \partial_{XX} \quad (3.171)$$

$$= \varepsilon - 3(R_-^2 + 2R_-R_+ + R_+^2) - \partial_{XX} \quad (3.172)$$

$$= (\varepsilon - 3R_+^2 - \partial_{XX}) - 6R_-R_+ - 3R_-^2 \quad (3.173)$$

recordando el términos entre paréntesis como el operador del solitón ubicado en la posición $X = \frac{\Delta}{2}$ como se definió en la ecuación (3.104), tenemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ - 6R_-R_+ - 3R_-^2 \quad (3.174)$$

reemplazando la aproximación para la función R_- , ecuación (3.166)

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_+ - 6 \left[\sqrt{2\varepsilon} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right) \right] R_+ - 3 \left[\sqrt{2\varepsilon} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right) \right]^2 \quad (3.175)$$

$$\approx \mathcal{L}_+ - 6\sqrt{2\varepsilon} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right) R_+ - 6\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right)^2 \quad (3.176)$$

Conservando términos hasta orden $\mathcal{O}\left(e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right)$, tenemos

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_+ - 6\sqrt{2\varepsilon} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right) R_+ - 6\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \quad (3.177)$$

reemplazando la aproximación para la función R_+ , ecuación (3.159), en la ecuación (3.176), tenemos

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_+ - 12\varepsilon e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right) e^{-\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|} \left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|}\right) - 6\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \quad (3.178)$$

conservando términos hasta orden $\mathcal{O}\left(e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|}\right)$ y $\mathcal{O}\left(e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right)$, tenemos

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_+ - 12\varepsilon e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|} - 6\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} \quad (3.179)$$

Cuando el punto de observación está muy alejado del corazón del solitón los términos $e^{-\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|} e^{-\sqrt{\varepsilon}|X-\frac{\Delta}{2}|}$ y $e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}$ son del mismo orden. Luego, tenemos que el operador del sistema se puede escribir como el operador del solitón ubicado en la posición $X = \frac{\Delta}{2}$ más un término exponencialmente pequeño, es decir,

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_+ + \mathcal{O}\left(e^{-2\sqrt{\varepsilon}|X+\frac{\Delta}{2}|}\right) \quad (3.180)$$

En resumen, tenemos que el operador del sistema dado por la ecuación (3.170) se puede escribir como el operador de un solitón ubicado en la posición $X = \pm \frac{\Delta}{2}$ más un término exponencialmente pequeño cuando el punto de observación está muy alejado del corazón de los solitones, es decir, $|X - \frac{\Delta}{2}| \gg 1$ y $|X + \frac{\Delta}{2}| \gg 1$. Al despreciar los términos exponencialmente pequeños, tenemos el siguiente resumen

$$\mathcal{L} \approx \begin{cases} \mathcal{L}_- \\ \mathcal{L}_+ \end{cases} \quad (3.181)$$

Como ya mostramos anteriormente, el operador del sistema es autoadjunto y el operador de los operadores individuales también lo son, es decir, $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\dagger$ y $\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-^\dagger$. Tenemos también dos pseudovectores pertenecientes al kernel del operador del sistema $|\partial_X R_- \rangle$ y $|\partial_X R_+ \rangle$. Finalmente, hemos mostrado que el operador del sistema \mathcal{L} lo siguiente: el operador del sistema es autoadjunto y el cual se puede escribir como el operador de un solitón ubicado en la posición $X = -\frac{\Delta}{2}$ ó como el operador de un solitón ubicado en la posición $X = \frac{\Delta}{2}$. Y el operador del sistema tiene dos pseudovectores

$$\mathcal{L}|\partial_X R_\pm \rangle \approx 0 \quad (3.182)$$

y por lo tanto podemos aplicar la alternativa de Fredholm para establecer una condición de solubilidad a la ecuación (3.88). Reescribiendo la ecuación (3.88), tenemos

$$\mathcal{L}|\rho \rangle = \mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} |\partial_Z (R_- - R_+) \rangle \ddot{\Delta} \mp \frac{\mu}{2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} |\partial_Z (R_- - R_+) \rangle \dot{\Delta} + |3R_-^2 R_+ \rangle + |3R_- R_+^2 \rangle \quad (3.183)$$

aplicando el pseudovector $|\partial_X R_- \rangle$ por la izquierda, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \partial_X R_- | \mathcal{L}|\rho \rangle = & \mp \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \langle \partial_X R_- | \partial_Z (R_- - R_+) \rangle \ddot{\Delta} \mp \frac{\mu}{2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \langle \partial_X R_- | \partial_Z (R_- - R_+) \rangle \dot{\Delta} \\ & + \langle \partial_X R_- | 3R_-^2 R_+ \rangle + \langle \partial_X R_- | 3R_- R_+^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$0 \approx \mp \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \langle \partial_X R_- | \partial_Z (R_- - R_+) \rangle \left(\frac{\ddot{\Delta}}{4} + \frac{\mu}{2} \dot{\Delta} \right) + \langle \partial_X R_- | 3R_-^2 R_+ \rangle + \langle \partial_X R_- | 3R_- R_+^2 \rangle \quad (3.185)$$

esta ecuación representa la dinámica de interacción entre los solitones. Para encontrar dicha ecuación, debemos calcular las integrales definida con el producto interno en la ecuación (3.109).

3.1.5. Cálculo de las integrales de la ecuación de interacción

■

$$\langle \partial_X R_- | \partial_Z (R_- - R_+) \rangle = \langle \partial_X R_- | \partial_Z R_- \rangle - \langle \partial_X R_- | \partial_Z R_+ \rangle \quad (3.186)$$

para calcular esta integral $\langle \partial_X R_- | \partial_Z R_- \rangle$, debemos pasar a la misma variable de integración, a decir, X , con el cambio de variable definido al principio de este capítulo $Z \equiv X \mp \frac{\Delta}{2}$. Para aplicar la derivada espacial con respecto a la variable Z debemos aplicar la regla de la cadena así, la regla de la cadena con respecto a la variable espacial queda $\partial_Z = \partial_X$. Por otro lado, para la función R_- , tenemos el siguiente es así la derivada parcial con respecto a la variable X de la función R_- se puede expresar como

$$\partial_X R_- = \frac{\partial R_-}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X} = \partial_Z R_-, \quad (3.187)$$

entonces $\partial_X R_- = \partial_Z R_-$. Luego la integral toma la forma

$$\langle \partial_X R_- | \partial_Z R_- \rangle = \langle \partial_X R_- | \partial_X R_- \rangle \quad (3.188)$$

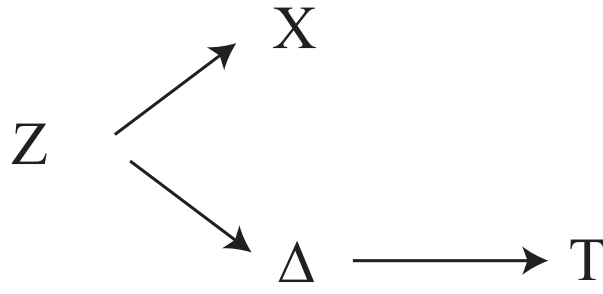


Figura 3.8: Producto de las funciones R_- y R_+ .

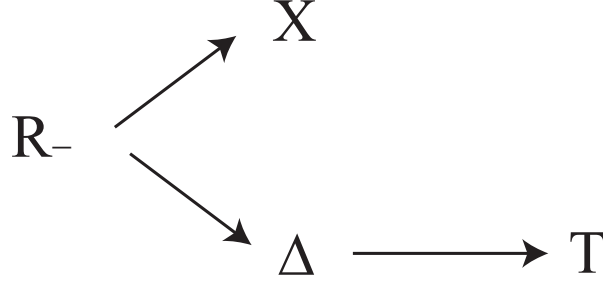


Figura 3.9: Producto de las funciones R_- y R_+ .

Ahora recordamos la forma de un solitón ubicado en la posición $X = -\frac{\Delta}{2}$, calculamos la derivada

$$\partial_X R_- = \sqrt{\varepsilon} \frac{d}{dX} \left[\cosh^{-1} \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right) \right] \quad (3.189)$$

$$= -\sqrt{\varepsilon} \cosh^{-2} \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right) \sinh \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right) \sqrt{\varepsilon} \quad (3.190)$$

$$= -\sqrt{2\varepsilon} \operatorname{sech} \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right) \tanh \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right) \quad (3.191)$$

luego la integral toma la forma

$$\langle \partial_X R_- | \partial_X R_- \rangle = 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right) \tanh^2 \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right) dX \quad (3.192)$$

realizando el siguiente cambio de variable, $u = \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right)$, entonces $dX = \frac{du}{\sqrt{\varepsilon}}$ y cuando $X \rightarrow \pm\infty$, $u \rightarrow \pm\infty$. Así la integral se puede escribir de manera más compacta como

$$2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right) \tanh^2 \sqrt{\varepsilon} \left(X + \frac{\Delta}{2} \right) dX = 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 u \tanh^2 u \frac{du}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (3.193)$$

y ocupando las siguientes identidades

$$1 - \tanh^2 X = \operatorname{sech}^2 X \quad (3.194)$$

tenemos

$$\langle \partial_X R_- | \partial_X R_- \rangle = 2\varepsilon^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 u \{1 - \operatorname{sech}^2 u\} du \quad (3.195)$$

$$= 2\varepsilon^{3/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 u - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 u \right] du \quad (3.196)$$

integrando con Maple, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 u du = 2 \quad (3.197)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 u du = \frac{4}{3} \quad (3.198)$$

así tenemos

$$\langle \partial_X R_- | \partial_X R_- \rangle = 2\varepsilon^{3/2} \left(\frac{6}{3} - \frac{4}{3} \right) = 2\varepsilon^{3/2} \frac{2}{3} \quad (3.199)$$

finalmente tenemos

$$\langle \partial_X R_- | \partial_X R_- \rangle = \frac{4}{3} \varepsilon^{3/2} \quad (3.200)$$

Por otro lado la integral

$$\langle \partial_X R_- | \partial_Z R_+ \rangle = \langle \partial_X R_- | \partial_X R_+ \rangle \quad (3.201)$$

$$\approx 0 \quad (3.202)$$

pues cuando los solitones están muy alejado, sus corazones también lo están y sus funciones están haciendo evaluados en puntos lejanos. Por el momento nos enfocaremos cuando los solitones están muy alejados $\Delta \gg 1$, así la integral de la ecuación (3.186) queda como

$$\langle \partial_X R_- | \partial_Z (R_- - R_+) \rangle = \langle \partial_X R_- | \partial_Z R_- \rangle - \langle \partial_X R_- | \partial_X R_+ \rangle \quad (3.203)$$

$$\approx \langle \partial_X R_- | \partial_Z R_- \rangle \quad (3.204)$$

$$\approx \frac{4}{3} \varepsilon^{3/2} \quad (3.205)$$

■ Ahora debemos calcular la siguiente integral

$$\langle \partial_X R_- | 3R_-^2 R_+ \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \quad (3.206)$$

3.1.6. Estudio de la Dinámica en la región II

Consideremos la ecuación (7.12) y multiplequemósla a ambos lados por $(R_- + R_+)$, entonces tenemos

$$\frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) = (R_- + R_+)^2 \partial_{xx} \varphi + 2(R_- + R_+) \partial_x (R_- + R_+) \partial_x \varphi - 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} (R_- + R_+)^2 \varphi$$

donde podemos ver que los dos primeros términos del lado derecho se pueden escribir como

$$\partial_x \{ (R_- + R_+)^2 \partial_x \varphi \} = 2(R_- + R_+) \partial_x (R_- + R_+) \partial_x \varphi + (R_- + R_+)^2 \partial_{xx} \varphi \quad (3.207)$$

luego rescribiendo la ecuación, tenemos

$$\frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) = \partial_x \{ (R_- + R_+)^2 \partial_x \varphi \} - 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} (R_- + R_+)^2 \varphi \quad (3.208)$$

$$\partial_x \{ (R_- + R_+)^2 \partial_x \varphi \} = \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) + 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} (R_- + R_+)^2 \varphi \quad (3.209)$$

Ahora integraremos entre $[-\infty, x']$, donde el valor de la cota superior x' debe contener a las dos soluciones en estudio.

$$\int_{-\infty}^{x'} \partial_x \{ (R_- + R_+)^2 \partial_x \varphi \} dx = \frac{\dot{\Delta}}{2} \int_{-\infty}^{x'} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) dx + 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \int_{-\infty}^{x'} (R_- + R_+)^2 \varphi dx$$

$$(R_- + R_+)^2 \partial_x \varphi = \frac{\dot{\Delta}}{2} \int_{-\infty}^{x'} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) dx + 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \int_{-\infty}^{x'} (R_- + R_+)^2 \varphi dx$$

$$\partial_x \varphi = \frac{1}{(R_- + R_+)^2} \left\{ \frac{\dot{\Delta}}{2} \int_{-\infty}^{x'} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) dx + 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \int_{-\infty}^{x'} (R_- + R_+)^2 \varphi dx \right\}$$

integrando nuevamente, entre $[-\infty, x'']$

$$\varphi = \frac{\dot{\Delta}}{2} \int_{-\infty}^{x''} \frac{dx'}{(R_- + R_+)^2} \int_{-\infty}^{x'} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) dx + 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \int_{-\infty}^{x''} \frac{dx'}{(R_- + R_+)^2} \int_{-\infty}^{x'} (R_- + R_+) dx \quad (3.210)$$

acá podemos observar que tenemos una ecuación de recurrencia para φ , la cual se puede resolver usando el método de la jerarquía. Donde proponemos la solución de la ecuación como una serie de potencia

$$\varphi(x, t) = \alpha^0 \varphi_0 + \alpha^1 \varphi_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \varphi_n \quad (3.211)$$

donde dicha solución converge sí y sólo sí, si los coeficientes de la serie de potencia son mucho menores que la unidad, donde definimos el siguiente parámetro de control

$$\alpha \equiv 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \ll 1 \quad (3.212)$$

es decir, estamos en la región del espacio de parámetro cerca de la punta de la lengua de Arnold ($\gamma = \mu$). Reemplazando en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \alpha^0 \varphi_0 + \alpha^1 \varphi_1 + \dots = & \frac{\dot{\Delta}}{2} \int_{-\infty}^{x''} \frac{dx'}{(R_- + R_+)^2} \int_{-\infty}^{x'} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) dx \\ & + 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \int_{-\infty}^{x''} \frac{dx'}{(R_- + R_+)^2} \int_{-\infty}^{x'} (R_- + R_+)^2 \varphi dx, \end{aligned} \quad (3.213)$$

para resolver esta ecuación debemos resolver orden por orden del parámetro de control. Nosotros para simplificar nuestro trabajo, resolveremos nuestra ecuación a $\mathcal{O}(\alpha^0)$, entonces tenemos la siguiente solución para la perturbación de la fase

$$\varphi_0 = \frac{\dot{\Delta}}{2} \int_{-\infty}^{x''} \frac{dx'}{(R_- + R_+)^2} \int_{-\infty}^{x'} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) dx \quad (3.214)$$

ahora con esta solución a orden cero para la función de perturbación, debemos reemplazarla en la ecuación (7.14)

$$\mathcal{L}\rho = (R_- + R_+) \partial_t \varphi_0 + 2\mu (R_- + R_+) \varphi_0 + 3R_-^2 R_+ + 3R_- R_+^2 \quad (3.215)$$

en principio debemos resolver esta ecuación para ρ , pero sólo aplicaremos una condición de solubilidad para obtener una ecuación que caracterize la dinámica del sistema. Para ello, utilizaremos uno de los pseudovectores del operador de interacción $\{\partial_X R_+, \partial_X R_-\}$, utilizando el segundo elemento, tenemos

$$0 = \langle \partial_X R_- | (R_- + R_+) \partial_t \varphi_0 \rangle + 2\mu \langle \partial_X R_- | (R_- + R_+) \varphi_0 \rangle + \langle \partial_X R_- | 3R_-^2 R_+ + 3R_- R_+^2 \rangle \quad (3.216)$$

para resolver esta ecuación, mostraremos qué términos podremos despreciar pues en principio tenemos que la distancia entre las dos estructuras localizadas es muy grande ($\Delta \gg 1$). Al igual que en la región anterior, tenemos los siguientes resultados

$$\langle \partial_X R_- | 3R_-^2 R_+ \rangle = -8\varepsilon^2 e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (3.217)$$

$$\langle \partial_X R_- | 3R_- R_+^2 \rangle \approx 0 \quad (3.218)$$

por otro lado, para el primer término, el que contiene la variación espacial de la perturbación en la fase con respecto al tiempo, la podemos escribir como

$$\partial_t \varphi_0 = \partial_t \left\{ \frac{\dot{\Delta}(t)}{2} f(x, t) \right\} \quad (3.219)$$

$$= \frac{\ddot{\Delta}}{2} f(x, t) + \frac{\dot{\Delta}}{2} \partial_t f(x, t) \quad (3.220)$$

pero $f(x, t)$ tiene argumentos del estilo $(x \pm \frac{\Delta(t)}{2})$, luego $\partial_t f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \pm \frac{\dot{\Delta}}{2} \frac{\partial f}{\partial \Delta}$, luego nuestra ecuación se puede escribir como

$$\partial_t \varphi_0 = \frac{\ddot{\Delta}}{2} f(x, t) + \left(\frac{\dot{\Delta}}{2} \right)^2 \partial_t f(x, t) \quad (3.221)$$

donde sabemos que la distancia entre las estructura obedece la siguiente ecuación $\dot{\Delta} = -ae^{-\sqrt{\epsilon}\Delta}$, donde que $\ddot{\Delta}$ es del mismo rango que $\dot{\Delta}^2$ y además $\dot{\Delta} \ll \Delta$, por ende podemos despreciar estos dos términos. Luego la primer integral la despreciamos. Nos queda el segundo término de la ecuación (3.96), donde despreciamos el término que es de la forma $\partial_X R_- R_+$ es despreciado pues son funciones que viven regiones distintas. Luego nos queda la siguiente integral

$$\langle \partial_X R_- | R_- \varphi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dX'' \partial_X R_- \cdot R_- \varphi_0 \quad (3.222)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dX'' \partial_X R_- \cdot R_- \frac{\dot{\Delta}}{2} \int_{-\infty}^{x''} \frac{dx'}{(R_- + R_+)^2} \int_{-\infty}^{x'} \partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) dx \quad (3.223)$$

donde, despreciaremos algunos términos debido a que viven en regiones distintas del espacio

$$\partial_z (R_- - R_+) (R_- + R_+) = (\partial_z R_-) R_- + (\partial_z R_-) R_+ - (\partial_z R_+) R_- - (\partial_z R_+) R_+ \quad (3.224)$$

$$\approx (\partial_z R_-) R_- - (\partial_z R_+) R_+ \quad (3.225)$$

por otro lado,

$$(R_- + R_+)^2 = R_-^2 + 2R_- R_+ + R_+^2 \quad (3.226)$$

$$\approx R_-^2 + R_+^2 \quad (3.227)$$

por otro lado, tenemos que $\partial_X R_-^2 = 2R_- \partial_X R_-$. Luego reescribimos la integral como

$$\langle \partial_X R_- | R_- \varphi_0 \rangle = \dot{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dX'' \partial_X R_-^2 \int_{-\infty}^{x''} \frac{dx'}{R_-^2 + R_+^2} \int_{-\infty}^{x'} \{(\partial_z R_-) R_- - (\partial_z R_+) R_+\} dx \quad (3.228)$$

3.1.7. Estudio de la dinámica en la regin I

Si suponemos que la fase perturbativa del sistema varía de manera lenta en el espacio, es decir, $\partial_{xx} \varphi \ll \partial_x \varphi \ll \varphi$, podemos encontrar la solución de φ para la ecuación (7.12)

$$\varphi = -\frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \dot{\Delta} \quad (3.229)$$

No debemos olvidar que nuestra misión es saber si existe alguna especie de interacción entre estos solitones, para ello debemos encontrar alguna dinámica la variable que caracteriza la interacción (Δ). Entonces cuando reemplacemos esta ecuación en la ecuación (7.14) nuestra misión no es resolver la parte radial de la solución sino encontrar condiciones para establecer ecuaciones para caracterizar la dinámica de dichas soluciones. Antes de reemplazar la expresión en la ecuación (7.16) en la ecuación (7.14), debemos calcular algunos términos

$$\partial_t \left(\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \dot{\Delta} \right) = \partial_t \left(\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right) \dot{\Delta} + \left(\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right) \ddot{\Delta} \quad (3.230)$$

donde

$$\partial_t \left(\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right) = \left(\frac{\partial_z^2 (R_- + R_+)}{(R_- + R_+)} - \left[\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right]^2 \right) \frac{\dot{\Delta}^2}{2} \quad (3.231)$$

así tenemos que la variación temporal de φ se puede escribir como

$$\partial_t \varphi = -\frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \left(\frac{\partial_z^2 (R_- + R_+)}{(R_- + R_+)} - \left[\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right]^2 \right) \frac{\dot{\Delta}^2}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \left(\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right) \ddot{\Delta} \quad (3.232)$$

pero si suponemos que las variaciones espaciales de las soluciones estacionarias son pequeñas debido a que suponemos que a que los términos que bota son de la forma..., podemos despreciar estos términos y finalmente podemos reescribir la ecuación (7.19) como

$$\partial_t \varphi = -\frac{1}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \left(\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right) \ddot{\Delta} \quad (3.233)$$

Al reemplazar esta ecuación en la ecuación (7.14), tenemos

$$\mathcal{L}\rho = -\frac{(R_- + R_+)}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \left(\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \right) \ddot{\Delta} - \frac{2\mu(R_- + R_+)}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \frac{\partial_z (R_- - R_+)}{(R_- + R_+)} \dot{\Delta} + 3R_-^2 R_+ + 3R_- R_+ \quad (3.234)$$

$$\mathcal{L}\rho = -\left(\frac{\partial_z (R_- - R_+)}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \right) \ddot{\Delta} - \frac{\mu \partial_z (R_- - R_+)}{2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \dot{\Delta} + 3R_-^2 R_+ + 3R_- R_+ \quad (3.235)$$

Como dijimos anteriormente no queremos encontrar la solución para la parte radial de la perturbación, es decir, resolver esta última ecuación. Si no que queremos encontrar una ecuación cinemática para Δ que de cuenta de la interacción de los solitones. Para ello podemos aplicar la alternativa de Fredholm que dice lo siguiente: Sea E que esta definido por $\mathcal{L}W = A$, con un operador \mathcal{L} , entonces $\mathcal{L}|W\rangle = |A\rangle$ tiene solución (condición de solubilidad) sí y sólo sí para todo $|v\rangle \in \text{Ker}(\mathcal{L}^\dagger)$ se cumple que $\langle v|A\rangle = 0$ la cual se conoce como condición de solubilidad. El operador que debemos estudiar es dado en la ecuación (7.15) y podemos demostrar fácilmente que este operador es autoadjunto bajo un producto interno para dicho espacio⁴.

Como se calculó en otras ocasiones este operador tiene dos pseudovectores⁵ pertenecientes al kernel ellos son

$$\{\partial_x R_-, \partial_x R_+\} \in \text{Ker}(\mathcal{L}^\dagger) \quad (3.236)$$

Ahora aplicamos uno de estos pseudovectores a la ecuación (7.22)⁶. Notar que aplicar un pseudovector a dicha ecuación implica calcular integrales del producto de funciones. Por ello a continuación mostraremos graficamente algunas de las formas de dichas funciones como podemos observar, hay varias integrales que son prácticamente

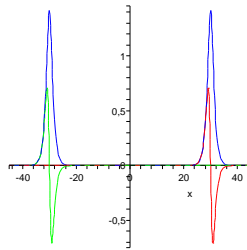


Figura 3.10: $R_- + R_+$ and $\partial_x R_+ + \partial_x R_-$ respectively.

⁴El producto interno definido en este espacio es $\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} fg^* dx$ donde g^* es el complejo conjugado de g .

⁵Se llama pseudovectores a los vectores que cumplen casi con la condición de solubilidad, es decir, $\langle v|A\rangle \approx 0$

⁶Aplicamos el pseudovector $\{\partial_x R_-\}$

nulas. Lo cual se redece a calcular

$$0 = \langle \partial_x R_- | \partial_x R_- \rangle \left(\frac{\ddot{\Delta}}{8\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} + \frac{\mu \dot{\Delta}}{4\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}} \right) + \langle \partial_x R_- | 3R_-^2 R_+ \rangle \quad (3.237)$$

al calcular las integrales obtenemos

$$\langle \partial_x R_- | \partial_x R_- \rangle = \frac{4}{3} \varepsilon^{3/2} \quad (3.238)$$

y para la segunda integral debemo aproximar R_+ cerca de $x = -\frac{\Delta}{2}$ pues es ahi donde el producto de funciones es distinto de cero, asi obtenemos

$$\langle \partial_x R_- | 3R_-^2 R_+ \rangle = -8\varepsilon^2 e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (3.239)$$

asi al reemplazar en la ecuación (7.25), obtenemos la siguiente ecuación cinemática para la interacción

$$\ddot{\Delta} = -2\mu \dot{\Delta} - 48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \sqrt{\varepsilon} e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (3.240)$$

Capítulo 4

Análisis de la interacción

4.1. Análisis de la interacción

Ahora podemos distinguir dos regiones para la ecuación.

- i) Sistema muy disipativo: bajo esta región de parámetros podemos despreciar el término de la inercia y obtenemos la siguiente ecuación

$$2\mu\dot{\Delta} = -48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (4.1)$$

- ii) Sistema debilmente disipativo: en esta situación asumimos que la disipación es muy pequeña, así obtenemos la siguiente ecuación para la interacción

$$\ddot{\Delta} = -8\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (4.2)$$

- iii) Si por alguna razón nos olvidamos de nuestra principal hipótesis $\Delta \gg 1$ (diluido), y nos enfocamos cuando los solitones estan muy cerca, entonces podemos reescribir la ecuación como

$$\ddot{\Delta} + 2\mu\dot{\Delta} + 48\varepsilon\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\Delta = 48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \quad (4.3)$$

la cual corresponden a una ecuación de un oscilador armónico amortiguado, es decir, cuando los solitones se encuentran demasiado juntos ellos se empiezan a atraer y repeler de manera oscilatoria y que es lo que se muestra en la siguiente figura espacio temporal.

4.1.1. Sistema muy disipativo

Tenemos que en esta región de parámetros la ecuación de interacción es de la forma

$$2\mu\dot{\Delta} = -48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (4.4)$$

cuya ecuación renormalizada se puede escribir como

$$\dot{\Delta} = -\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (4.5)$$

Del análisis de la figura podemos observar que la interacción para dos solitones es siempre atractiva y que decese considerablemente cuando la separación entre ellas es grande pues decese exponencialmente. Por lo tanto se dice que un solitón siente la interacción con solamente con sus primero vecinos.

Espacio de Fase

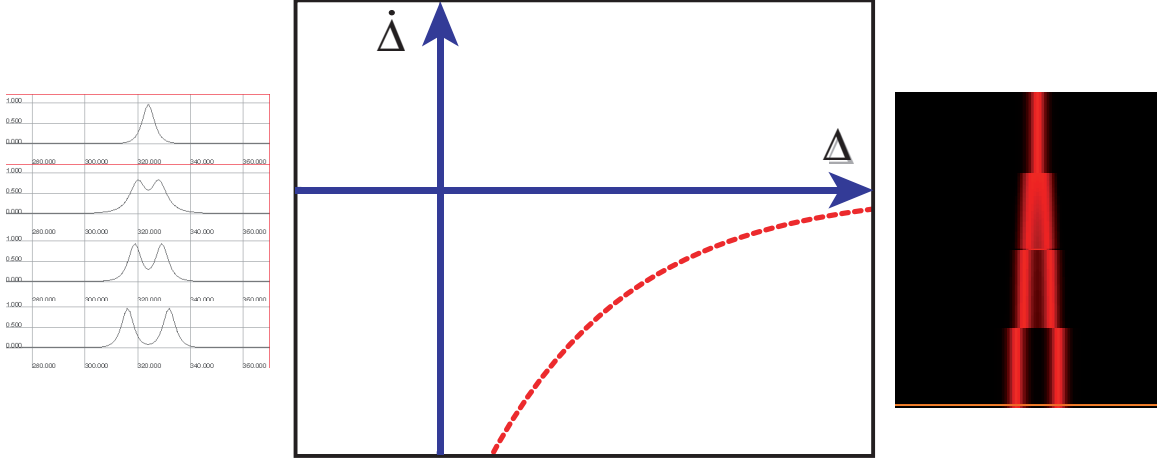


Figura 4.1: Diagrama esquemático del espacio de fase para la variable de interacción (sistema muy disipativo).

4.1.2. Análisis de la interacción entre $0 - \pi$ -solitones

En esta subsección analizaremos numéricamente la interacción entre $0 - \pi$ -solitones y la compararemos con la ecuación de interacción en la muy disipativa. La ecuación es

$$\dot{\Delta} = \alpha\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (4.6)$$

donde hemos definido $\alpha = \frac{48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}{2\mu}$, luego en este caso la interacción es repulsiva. Resolviendo la ecuación

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\alpha\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (4.7)$$

$$\frac{d\Delta}{e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta}} = -\alpha\sqrt{\varepsilon}dt \quad (4.8)$$

$$e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta}d\Delta = -\alpha\sqrt{\varepsilon}dt \quad (4.9)$$

integrando entre una distancia inicial y final (Δ_0 y Δ) respectivamente y un tiempo inicial y final (t_0 y t), tenemos

$$\int_{\Delta_0}^{\Delta} e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta}d\Delta = -\alpha\sqrt{\varepsilon} \int_{t_0}^t dt \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\{e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta} - e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta_0}\} = -\alpha\sqrt{\varepsilon}(t - t_0) \quad (4.11)$$

$$e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta} - e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta_0} = -\alpha\varepsilon(t - t_0) \quad (4.12)$$

$$e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta} = e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta_0} - \alpha\varepsilon(t - t_0) \quad (4.13)$$

$$\sqrt{(\varepsilon)}\Delta = \ln\left(e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta_0} - \alpha\varepsilon(t - t_0)\right) \quad (4.14)$$

$$\Delta(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \ln\left(e^{\sqrt{\varepsilon}\Delta_0} - \alpha\varepsilon(t - t_0)\right) \quad (4.15)$$

En la figura se ilustra el resultado de la interacción en este caso. La línea continua da cuenta de la fórmula anterior.

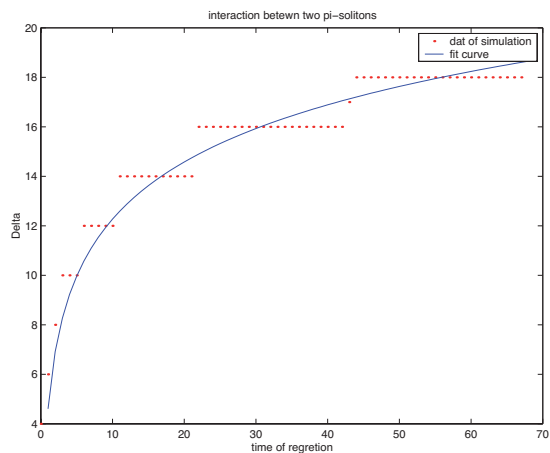


Figura 4.2: Simulación versus teoría.

Capítulo 5

Gas de Solitones

5.1. Gas 0-solitones

A continuación estudiaremos la dinámica de un gas de 0-solitones. Escribiremos dinámica del i -ésimo solitón en la región sobre amortiguada, donde sólo consideraremos los efectos de primeros vecinos (debido a que la interacción decae exponencialmente)¹.

De la figura tenemos las siguientes dos ecuaciones de movimiento

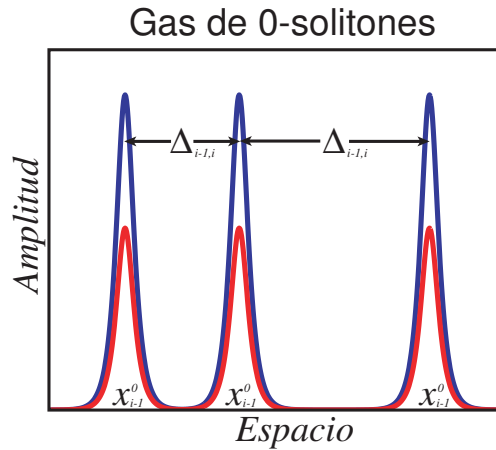


Figura 5.1: Diagrama del gas de solitones con interacción a primeros

$$\dot{\Delta}_{i+1,i} = -48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta_{i+1,i}} \quad (5.1)$$

$$\dot{\Delta}_{i,i-1} = -48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta_{i,i-1}} \quad (5.2)$$

donde podemos ver que la interacción del corazón x_i está gobernado por

$$\dot{\Delta}_{i,i-1} - \dot{\Delta}_{i+1,i} = -48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta_{i+1,i}} + 48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta_{i,i-1}} \quad (5.3)$$

del cual podemos observar que el corazón x_i sufre una atracción hacia la derecha debido a la presencia del soliton x_{i+1} y una atracción hacia la izquierda debido a la atracción del soliton x_{i-1} .

¹en analogía a la interacción que empleo Heisengber para el hamiltoniano de la interacción de espines a primero vecinos

5.2. Coarsening

5.2.1. Caso sobreamortiguado

El *Coarsening* se define como un *Comportamiento Global del Sistema* (Comportamiento a grandes escalas) dado un *Comportamiento Local del Sistema* (Comportamiento a pequeñas escalas), es decir, en otras palabras, el comportamiento local o a *primeros vecinos*², define el comportamiento global del sistema, con lo cual podemos predecir el comportamiento de todo el sistema sólo encontrando dicha transformación que deja invariante la evolución microscópica del sistema.

Nos preguntamos que sucede con la interacción si el tiempo como la distancia sufren alguna contracción ó dilatación. La idea es saber si podemos encontrar alguna transformación de las variables para las cuales la ley de interacción permanezca invariante. La respuesta es sí y es la siguiente

$$\Delta \longrightarrow \Delta + \delta \quad , \quad t \longrightarrow te^{\sqrt{\varepsilon}\delta} \quad (5.4)$$

donde podemos ver que la distancia de los solitones sufre una expansión mientras que el tiempo sufre un contracción con δ alguna conatante en efecto probemos primero para la ecuación (4.1)

$$2\mu \frac{d(\Delta + \delta)}{d(te^{\sqrt{\varepsilon}\delta})} = 48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}(\Delta + \delta)} \quad (5.5)$$

$$\frac{2\mu}{e^{\sqrt{\varepsilon}\delta}} \frac{d\Delta}{dt} = 48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta}e^{-\sqrt{\varepsilon}\delta} \quad (5.6)$$

$$2\mu \frac{d\Delta}{dt} = 48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\Delta} \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

con lo cual reobtenemos la misma ecuación de interacción pero con la distancia y el tiempo dilatados. Esto se conoce como *Coarsening*, es decir, que al dilatar el tiempo y el espacio observamos la misma dinámica de interacción. Si uno calcula la distancia promedio entre solitones, es decir

$$\Delta(t) = \frac{\sum_i \Delta_i}{n},$$

donde n es el número de solitones. La $\sum_i \Delta_i$ es igual al tamaño del sistema L , es decir

$$\Delta(t) = \frac{L}{n}$$

por lo tanto esta cantidad da cuenta de como estan evolucionando en el tiempo el numero de solitones disipativos. Si uno asume que para un gas diluido de solitones

$$\Delta(t) = f(t),$$

dado que la ecuación de cada distancia es invariante en $\Delta \rightarrow \Delta + \delta$ y $t \rightarrow te^{\sqrt{\varepsilon}\delta}$, entonces la única función $f(t)$ que es invariante con esta simetría es

$$\Delta(t) = \frac{\ln(t)}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Por lo tanto la distancia promedio entre solitones crece logarímicamente con el tiempo y el numero de solitones desaparece como

$$n = \frac{L\sqrt{\varepsilon}}{\ln(t)}.$$

En la proxima seccion se analizara numericamente Δ y n .

²A primeros vecinos, nos referimos al igual que en mecánica estadística como en el modelo de Ising, es decir, para un elemento i -ésimo en estudio, consideramos interacciones sólo con el vecino i -ésimo -1 y el vecino i -ésimo $+1$.

Capítulo 6

Simulaciones

6.1. Simulaciones

En esta sección se estudiará numericamente la cadena de péndulos forzada verticalmente y la ecuación paramétrica de Schrodinger no lineal. Para tener una buena estadística hay dos posible estrategia de trabajo: Una que realizemos una simulación con un tamaño de sistema muy grande, para asi poder tener una gran cantidad de solitones o realizar muchas simulaiones en paralelo y depues hacer ensambles estadístico. La estrategia considerada aqui es la primera. Hemos, escogido el tamaño del sistema de modo que al menos inicialmente tengamos varias centenas de solitones disipativos. Como se ilustra en la figura 6.1 inicialmente hemos considerado una gran numero de solitones que rapidamente se aniquilan y posteriormente el sistema exhibe un proceso de aniquilación cada vez más lento, es decir, la curva de ceros cada vez es más plana (ver figura).

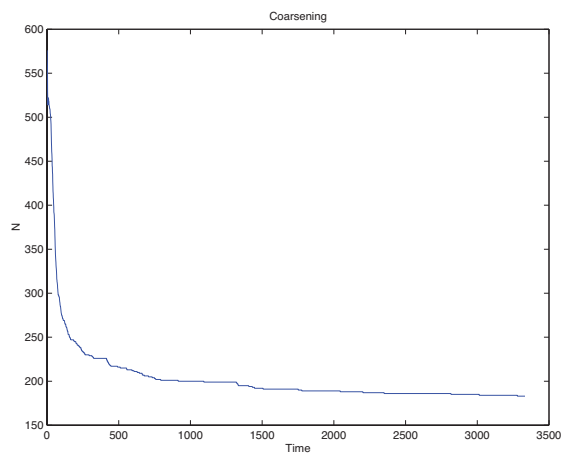


Figura 6.1: Numero de Solitones disipativos como función del tiempo

Diversas enfoques

Bajo nuestra hipótesis podemos observar que en el gráfico semilogx, del largo promedio se comporta como una aproximación lineal para tiempos suficientemente grandes. Es importante notar que inicialmente hay otra línea recta (tiempos menores que 40 unidades temporales), la cual describe el proceso de establecimiento de el gas de solitones (ver figura 6.2). Posteriormente hay un crossover que conecta los diferentes regímenes del sistema, es decir el proceso de establecimiento de solitones disipativos y el posterior establecimiento de interacción de estas soluciones tipo partícula.

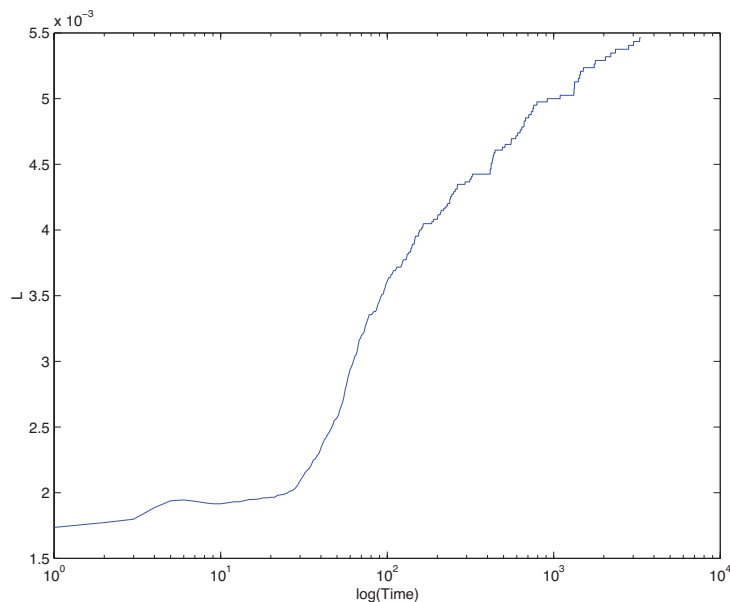


Figura 6.2: Simulacion 1

A partir del gráfico observamos que este se comporta de manera lineal desde el la unidad temporal 10^2 hasta el final de la simulación. Por lo tanto haremos una aproximación lineal de dicha región. La idea de despreciar los primero 1400 puntos en gráfico. Ahora mostraremos una región donde se muestra la región en estudio

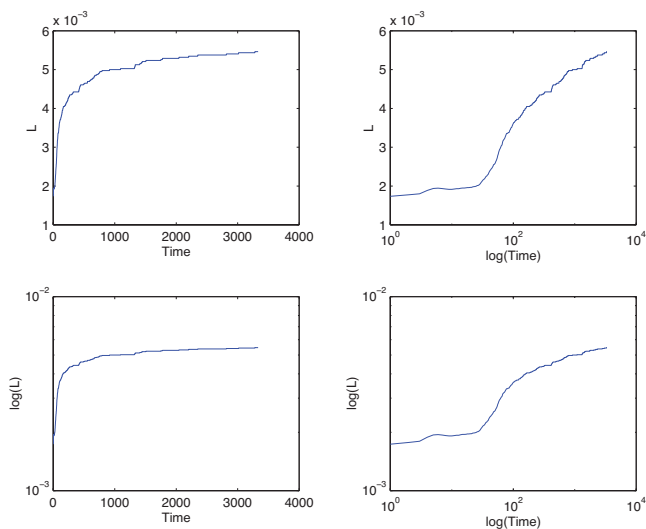


Figura 6.3: Simulacion 1

Diversas enfoques

acá no hay que dejar engañar pues la región es mayor que la mitad de la totalidad de los datos.

Ahora sobre esta región realizamos un ajuste lineal Donde podemos ver que el ajuste es casi perfecto. Finalmente graficamos el largo promedio de la simulación con el ajuste encontrado (ver figura 6.8).

Luego encontramos un gran acuerdo entre la teoría y las simulaciones numéricas, por lo tanto el gas de solitones sigue la ley de comportamiento logarítmica predicha por la teoría.

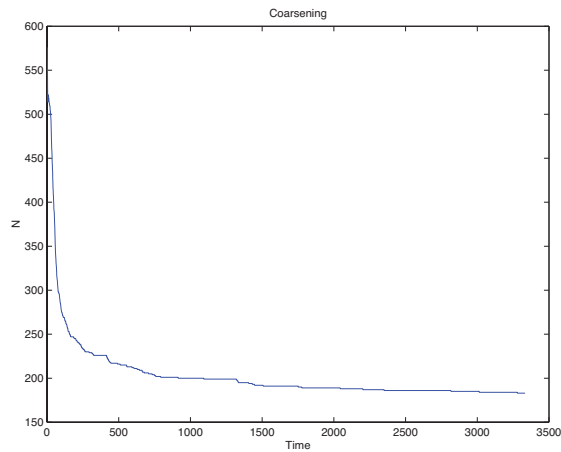


Figura 6.4: Simulacion 1

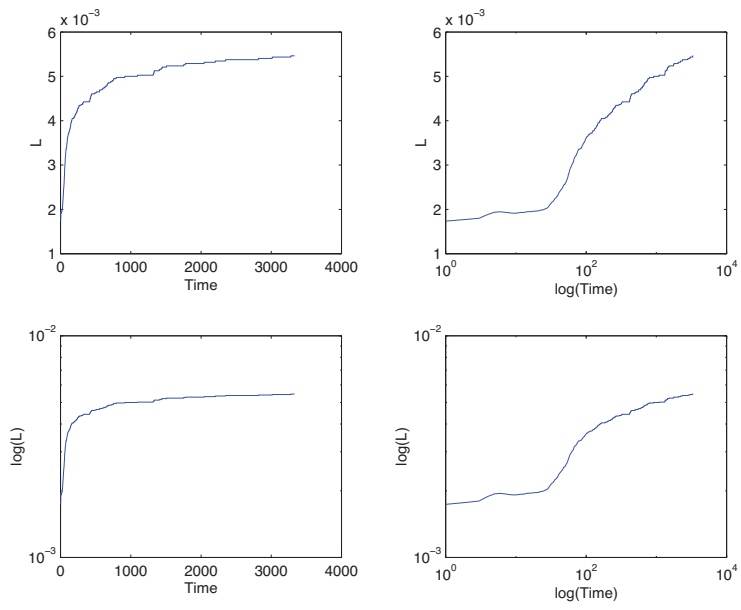


Figura 6.5: Simulacion 1

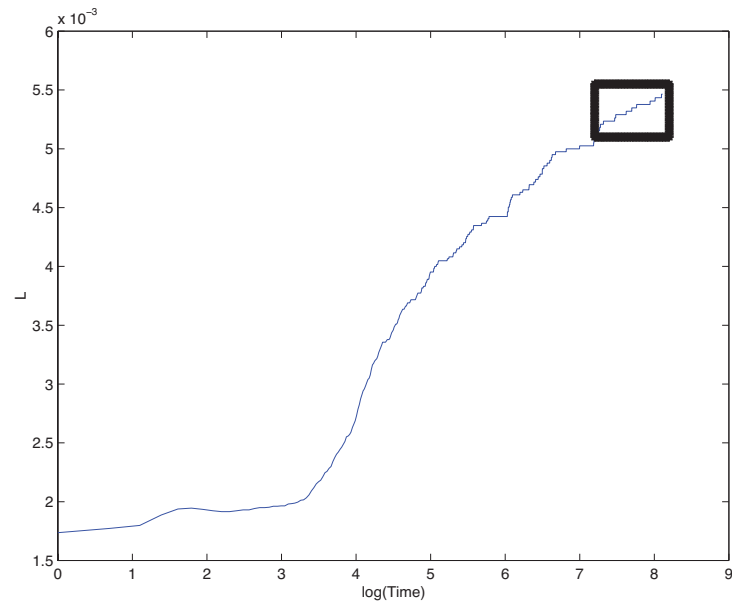


Figura 6.6: Simulacion 1

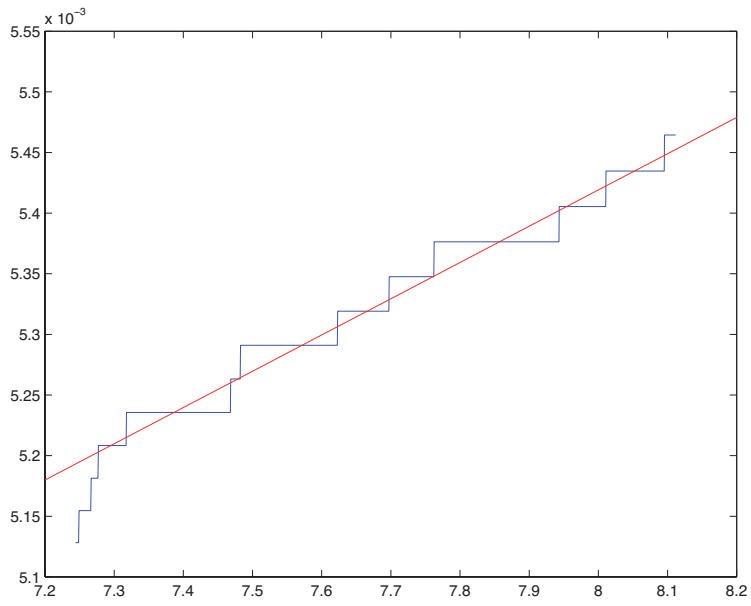


Figura 6.7: Simulacion 1

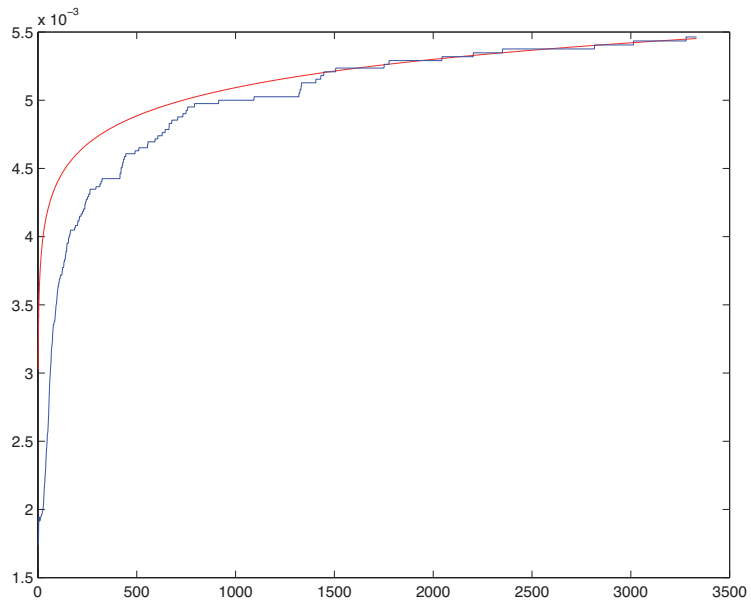


Figura 6.8: Simulacion 1

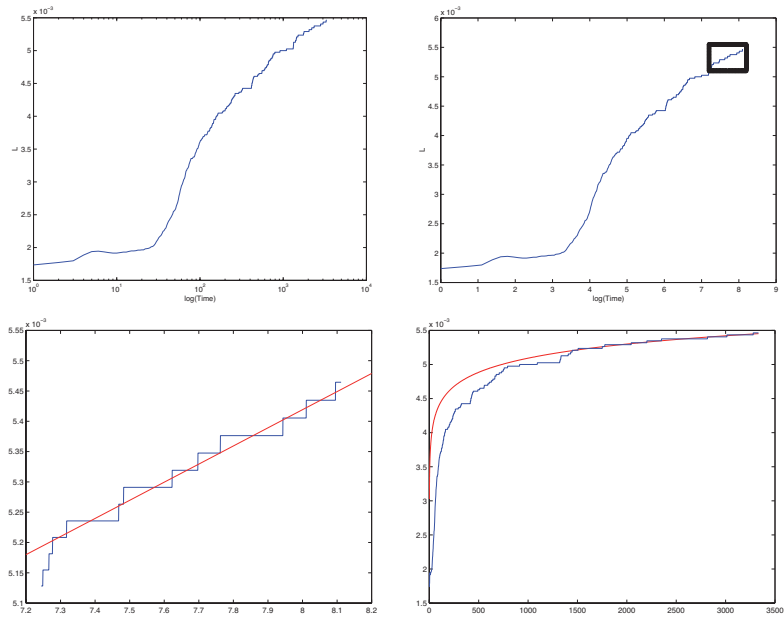


Figura 6.9: 0-solitón y π -solitón respectivamente. La curva de azul representa la parte real de la solución y la roja la imaginaria.

Capítulo 7

Formación de estructuras en sistemas fuera del equilibrio: solitones y coarsening

7.1. Interacción entre dos π -solitones

7.1.1. Análisis de las regiones permitidas en el problema de la cadena de péndulos

En esta sección realizaremos un análisis completo de la interacción de dos π -solitones, en la región del espacio de parámetros donde el sistema se considera muy disipativo. (colocar una figura donde se cumple esta condición). La ecuación que rige esta interacción en una región donde el sistema es muy disipativo es:

$$\dot{\Delta}_{\mp} = - \left(\frac{48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}{2\mu} \right) \sqrt{\varepsilon_{\mp}} \exp(-\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta) \quad (7.1)$$

donde γ es proporcional a la amplitud del forzamiento vertical sobre la cadena de péndulos, μ es proporcional a la disipación de sistema, ν es proporcional a la frecuencia del forzamiento, también llamado *detuning* y Δ es la distancia entre los solitones. Definimos las siguientes constantes $\alpha = \frac{48\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}{2\mu}$ y $\varepsilon_{\mp} = \nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}$. Así la ecuación de interacción queda reescrita como

$$\dot{\Delta}_{\mp} = -\alpha\sqrt{\varepsilon_{\mp}}e^{-\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta} \quad (7.2)$$

para que esta ecuación tenga significado físico, debemos exigir que el argumento que está dentro de la raíz de la ecuación de los parámetros α y ε_{\mp} sea mayor o igual a cero, es decir,

$$\gamma^2 - \mu^2 \geq 0 \quad (7.3)$$

$$\gamma^2 \geq \mu^2 \quad / \sqrt{\quad} \quad (7.4)$$

$$|\gamma| \geq |\mu| \quad (7.5)$$

La región permitida se muestra en la siguiente figura. Cabe notar que $\mu < 0$ no tiene significado físico pues es un parámetro proporcional a la disipación del sistema con respecto al medio.

Por otro lado, analizaremos el parámetro ε_{\mp} , donde nuevamente exigimos que $\varepsilon_{\mp} \geq 0$, para que la ecuación de interacción tenga significado físico, es decir, sea un valor real. Para ello debemos exigir que

$$\nu \mp \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} > 0 \quad (7.6)$$

$$\nu > \pm \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \quad / ()^2 \quad (7.7)$$

$$\nu^2 > \gamma^2 - \mu^2 \quad (7.8)$$

$$\gamma^2 - \nu^2 \leq \mu^2 \quad (7.9)$$

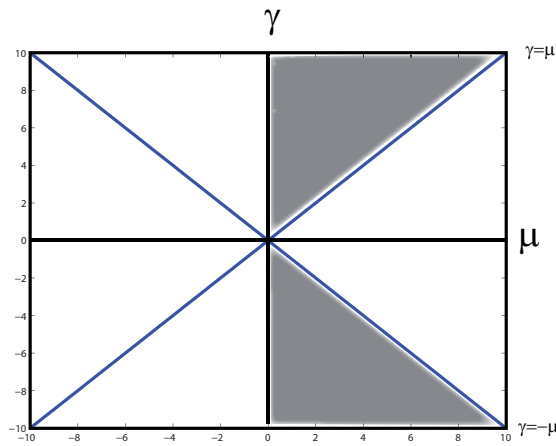


Figura 7.1: Región permitida en el espacio de parámetros de la *amplitud de forzamiento* ν /s *disipación de energía*.

, cuya última ecuación, para un valor constante para la disipación, esta representa una ecuación de una hipérbola en un gráfico γ ν /s ν . Acá, la región sombreada representa la región física donde se puede apreciar la interacción entre los solitones. En la región para el parámetro *detuning* negativo se observa la interacción entre los solitones, mientras que en la región positiva para el *detuning* se observa la *Inestabilidad de Faraday*¹.

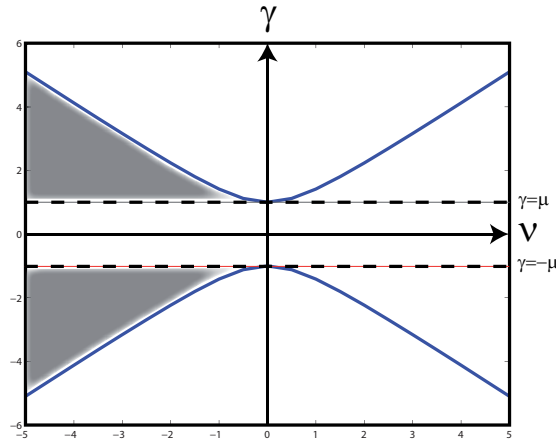


Figura 7.2: Región permitida, donde se observa la interacción de solitones en el espacio de parámetros γ ν /s ν .

En la figura (7.3), se observa un visión global en 3-D de la región de parámetros.

7.1.2. Análisis del espacio de fase de la interacción

Tenemos que la ecuación de interacción la podemos escribir como

$$\dot{\Delta}_{\mp} = f_{\mp}(\Delta) \quad (7.10)$$

, donde $f_{\mp}(\Delta) = -\alpha\sqrt{\varepsilon_{\mp}}e^{-\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta}$ es una función que depende de la distancia entre dos solitones.

¹Explicar qué es la Inestabilidad de Faraday

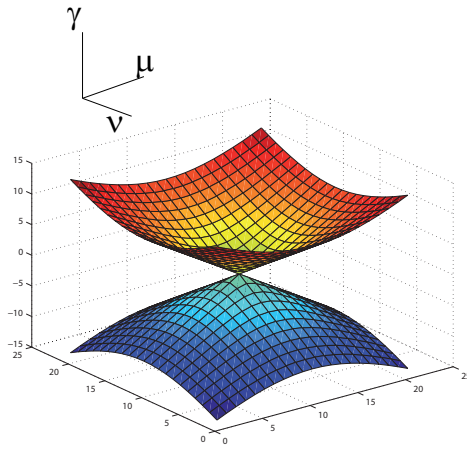


Figura 7.3: Región de parámetros tridimensional

Análisis de la función $f_{\mp}(\Delta)$

Ahora analizaremos algunos casos límites importantes de la función $f_{\mp}(\Delta)$:

- $\lim_{\Delta \rightarrow 0} f_{\mp}(\Delta) \rightarrow -\alpha\sqrt{\varepsilon}$
- $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} f_{\mp}(\Delta) \rightarrow 0$

, de la siguiente figura podemos concluir que la interacción entre dos π -solitones es siempre atractiva, pues al colocar un punto de fase (partícula imaginaria en el espacio de fase, Δ_0) este siempre se mueve hacia la izquierda debido a la forma del *campo vectorial*² dado por la ecuación de interacción entre dos π -solitones. Análisis que explicamos en el primer capítulo³.

Análisis de los puntos fijos en la interacción entre dos π -solitones.

Los *puntos fijos* Δ^* como se explicó en el capítulo I, están dados por la condición

$$f_{\mp}(\Delta^*) = 0 \quad (7.11)$$

, para esta ecuación de interacción, tenemos que la condición dada por la ecuación (7.11) se cumple sólo cuando $\Delta \rightarrow \infty$. Por lo tanto, esta ecuación de interacción NO TIENE PUNTOS FIJOS FIJOS DEFINIDOS.

Análisis de la estabilidad de los puntos fijos.

Sea Δ^* un punto fijo mensurable y sea $\delta(t) = \Delta(t) - \Delta^*$ una pequeña perturbación sobre dicho punto. Para entender la estabilidad de este punto fijo, debemos ver como es el crecimiento o decrecimiento de la perturbación en dicho punto con respecto al tiempo. Para ello, derivamos la perturbación con respecto al tiempo.

$$\dot{\delta} = \frac{d}{dt} (\Delta - \Delta^*) = \dot{\Delta}, \quad \text{pues el punto fijo es constante} \quad (7.12)$$

luego tenemos que $\dot{\delta} = \dot{\Delta} = f(\Delta) = f(\delta + \Delta^*)$, expandiendo en serie de Taylor⁴. Así la expansión en serie de Taylor de la función se puede escribir como

$$f(\delta + \Delta^*) = f(\Delta^*) + f'(\Delta^*)\delta + \frac{1}{2}f''(\Delta^*)\delta^2 + \dots \quad (7.13)$$

²Un campo vectorial está definido por la ecuación $\dot{x} = f(x)$. Al dibujar \dot{x} v/s x podemos dibujar flechas que indican la dirección de movimiento de un punto de fase. Cuando $\dot{x} > 0$, las flechas son hacia la derecha as como el movimiento de la partícula imaginaria mientras que las flechas son hacia la izquierda cuando $\dot{x} < 0$ as como el movimiento de la partícula imaginaria

³Explicar el flujo unidimensional para analizar el diagrama de fase

⁴Serie de Taylor alrededor x_0 , $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$, realizando un pequeño cambio de variable $u = x - x_0$, podemos reescribir la serie de Taylor como $f(u + x_0) = f(x_0) + f'(x_0)u + \frac{1}{2}f''(x_0)u^2 + \dots$.

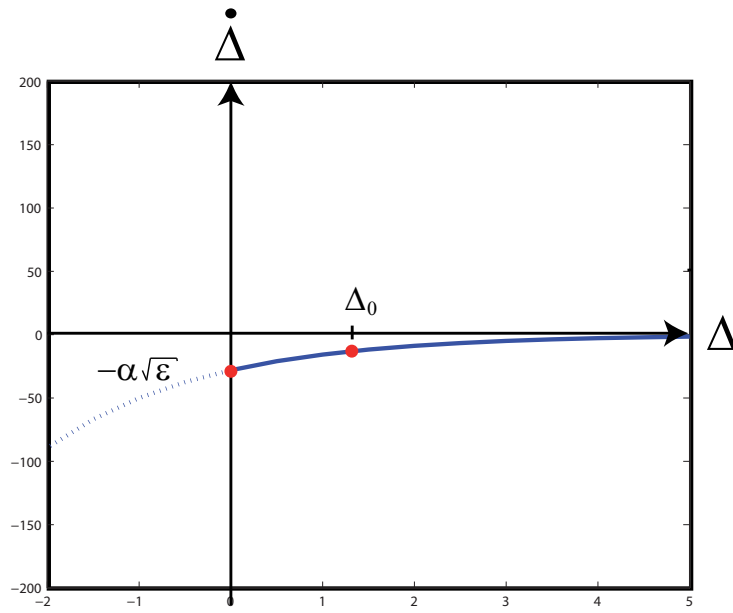


Figura 7.4: Espacio de Fase para la interacción de dos solitones

pero por definición tenemos que $f(\Delta^*) = 0$, así la última ecuación queda como

$$f(\delta + \Delta^*) = f'(\Delta^*)\delta + \frac{1}{2}f''(\Delta^*)\delta^2 + \dots \quad (7.14)$$

calculando hasta la n -ésima derivada de la ecuación de interacción, tenemos

$$f'(\Delta) = \alpha\varepsilon_{\mp} e^{-\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta} \quad (7.15)$$

$$f''(\Delta) = -\alpha\varepsilon_{\mp}^{3/2} e^{-\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta} \quad (7.16)$$

$$\vdots \quad (7.17)$$

$$f^{(n)}(\Delta) = (-1)^{n+1} \alpha\varepsilon_{\mp}^{\frac{n+1}{2}} e^{-\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta} \quad (7.18)$$

De donde podemos observar que $f'(\Delta^*) = 0$, y como se vio en el primer capítulo. Cuando la primer término de la expansión de Taylor es nulo, no se puede concluir nada con respecto a la estabilidad del punto fijo. Luego debemos seguir con el segundo término de la expansión de Taylor, pero nuevamente el segundo término en la expansión de Taylor es nulo evaluado en el punto fijo y as sucesivamente hasta la n -ésima derivada. Por lo tanto, no se puede concluir nada matemáticamente con respecto a la estabilidad del punto fijo, porque es inexistente o no es mensurable. Pero dada la topología del diagrama de fase, el punto fijo ubicado en el infinito es un repulsor pues al colocar cualquier punto de fase sobre la trayectoria de fase, este se alejará de él siempre.

7.1.3. Resolución de la ecuación diferencial de interacción entre dos π -solitones

La ecuación diferencial a resolver es la siguiente

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\alpha\sqrt{\varepsilon_{\mp}} e^{-\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta} \quad (7.19)$$

$$\frac{d\Delta}{e^{-\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta}} = -\alpha\sqrt{\varepsilon_{\mp}} dt \quad (7.20)$$

$$e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta} d\Delta = -\alpha\sqrt{\varepsilon_{\mp}} dt \quad (7.21)$$

para resolver la ecuación de manera sencilla, realizamos el siguiente cambio de variable:

$$u = e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta} \implies du = \sqrt{\varepsilon_{\mp}} e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta} d\Delta \implies d\Delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}} \frac{1}{e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta}} du = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}} \frac{1}{u} du \quad (7.22)$$

luego, reemplazando en la ecuación (7.21), tenemos

$$e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}} \frac{1}{u} du = -\alpha \sqrt{\varepsilon_{\mp}} dt \quad (7.23)$$

$$u \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}} \frac{1}{u} du = -\alpha \sqrt{\varepsilon_{\mp}} dt \quad (7.24)$$

$$du = -\alpha \varepsilon_{\mp} dt \quad (7.25)$$

integrando entre un estado inicial u_0 y un estado final u , en un intervalo de tiempo inicial t_0 y un tiempo final t , final, tenemos

$$\int_{u_0}^u du = -\alpha \varepsilon_{\mp} \int_{t_0}^t dt \quad (7.26)$$

$$u - u_0 = -\alpha \varepsilon_{\mp} (t - t_0) \quad (7.27)$$

$$u(t, t_0) = u_0 - \alpha \varepsilon_{\mp} (t - t_0) \quad (7.28)$$

Luego para esta cambio de variable tenemos una solución lineal, lo cual hace el trabajo mucho más simple cuando queramos comparar datos numéricos, experimentales con esta teoría. Volviendo a las variables originales, tenemos

$$e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}} \Delta_{\mp}(t, t_0)} = -\alpha \varepsilon_{\mp} (t - t_0) + e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}} \Delta_0} \quad / \ln \quad (7.29)$$

$$\ln \left(e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}} \Delta_{\mp}(t, t_0)} \right) = \ln \left(-\alpha \varepsilon_{\mp} (t - t_0) + e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}} \Delta_0} \right) \quad (7.30)$$

$$\Delta_{\mp}(t, t_0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}} \ln \left(-\alpha \varepsilon_{\mp} (t - t_0) + e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}} \Delta_0} \right) \quad (7.31)$$

, donde Δ_0 representa la distancia inicial para $t = t_0$.

Ahora haremos un estudio más detallado de la ecuación (A.2), renormalizamos la ecuación (A.2), definiendo las siguientes cantidades: $\bar{\Delta}_{\mp}(t) = \Delta_{\mp} \sqrt{\varepsilon_{\mp}}$, $a = \alpha \varepsilon_{\mp}$ y $b = e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}} \Delta_0}$. Reescribiendo la ecuación (A.2), tenemos

$$\bar{\Delta}_{\mp}(t, t_0) = \ln \left(-a (t - t_0) + b \right) \quad (7.32)$$

Para la ecuación (A.3), existen cuatro puntos interesantes para analizar, ellos son: $t = 0$ que representa el estado anterior al estado inicial, $t = t_0$ que es estado inicial del sistema, $t = t^*$ que es el tiempo para el cual los solitones colapsan, y por último, $t = \tilde{t}$ que es el tiempo para el cual el argumento del logaritmo se hace nulo. Este último tiempo no tiene ningún significado físico, pues la distancia entre los solitones no sería mensurable, es decir, infinita, pero lo consideremos sólo como una cantidad matemática para tener una mejor comprensión del gráfico que se puede construir a partir de la ecuación (A.3).

Análisis de los puntos relevantes.

1. Estado anterior al estado inicial, $t = 0$.

$$\bar{\Delta}_{\mp}(0, t_0) = \ln (a t_0 + b) \quad (7.33)$$

2. Tiempo para el cual el sistema tiene la distancia inicial (Δ_0)

$$\bar{\Delta}_{\mp}(t_0, t_0) = \ln (b) \quad (7.34)$$

3. Tiempo para el cual los solitones colapsan ($\overline{\Delta}_{\mp}(t^*, t_0) = 0$)

$$\overline{\Delta}_{\mp}(t^*, t_0) = \ln(-a(t^* - t_0) + b) \quad (7.35)$$

$$0 = \ln(-a(t^* - t_0) + b) \quad / \exp() \quad (7.36)$$

$$1 = -a(t^* - t_0) + b \quad (7.37)$$

$$-a(t^* - t_0) = b - 1 \quad / \cdot -1 \quad (7.38)$$

$$a(t^* - t_0) = -(1 - b) \quad (7.39)$$

$$t^* - t_0 = -\frac{(1 - b)}{a} \quad (7.40)$$

$$t^* = t_0 - \frac{(1 - b)}{a} \quad (7.41)$$

A continuación mostraremos que el término $(1 - b)/a$ es menor que cero. En efecto, tenemos que $b = e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta_0}$. Primero, tenemos que $\Delta_0 > 0$ por definición de distancia. Segundo elegimos signo positivo⁵ para el parámetro ε_{\mp} , pues queremos que nuestra solución de la ecuación diferencial tenga significado físico. Luego como $\sqrt{\varepsilon_{\mp}} > 0$ y $\Delta_0 > 0$, entonces tenemos que $b = e^{\sqrt{\varepsilon_{\mp}}\Delta_0} > 1$. Luego el término $(1 - b) < 0$. Entonces la cantidad

$$t^* = t_0 - \left[\frac{(1 - b)}{a} \right] > t_0 \quad (7.42)$$

lo cual es bastante esperable, pues $t = t_0$ es el tiempo inicial, donde se tiene una distancia inicial del sistema. Luego debido a la interacción atractiva entre ellos hace que ellos copalsen en un tiempo posterior a t_0 , es decir, $t^* > t_0$.

4. Tiempo para el cual sistema tiene distancia infinita Este punto sólo se calcula sólo por un fin matemático para proporcionar información en que lugar se encuentra este punto y no tiene ninguna relevancia física. para ellos exigimos que el argumento del logaritmo de la ecuación (A.3) sea nulo, es decir,

$$-a(\tilde{t} - t_0) + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\Delta}_{\mp} = -\infty \quad (7.43)$$

$$a(\tilde{t} - t_0) = b \quad (7.44)$$

$$\tilde{t} = t_0 + \frac{b}{a} \quad (7.45)$$

pero de la ecuación (A.9) podemos escribir como

$$t^* = \left(t_0 + \frac{b}{a} \right) - \frac{1}{a} \quad (7.46)$$

$$t^* = \tilde{t} - \frac{1}{a} \quad (7.47)$$

$$\tilde{t} = t^* + \frac{1}{a} \quad (7.48)$$

de esta última ecuación podemos inferir que \tilde{t} es mayor que t^* por una cantidad $1/a$.

Finalmente, tenemos la siguiente jerarquía de tiempos relevantes en la interacción entre dos solitones $0 < t_0 < t^* < \tilde{t}$, es decir, primero partimos de un cierto estado anterior al estado inicial, $t = 0$, luego pasamos a un estado inicial t_0 con una distancia inicial Δ_0 , el sistema interactúa de manera atractiva bajo la ecuación de interacción (A.3) hasta alcanzar un colapso ($\overline{\Delta}_{\mp}(t^*, t_0) = 0$). Finalmente en un tiempo posterior y sólo con relevancia matemática, el sistema tiene una distancia infinita negativa posterior a t^* .

⁵aclarar el signo de ε_{\mp}

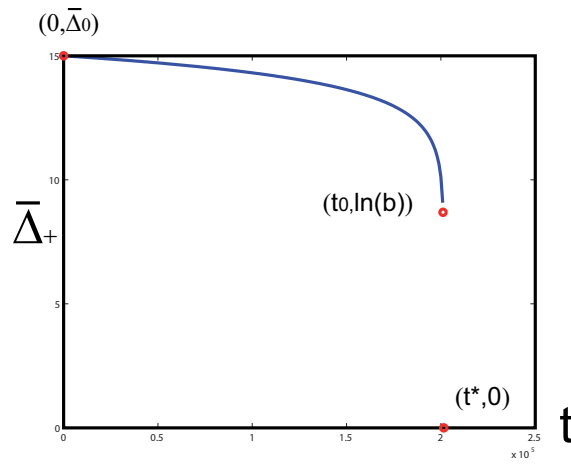


Figura 7.5: Gráfico de la interacción de los solitones indicando los puntos ms relevantes de la interacción. *nota: dada la precisión de la computadora, ella no puede graficar puntos que sobrepasan dicha precisión, es por ellos que el gráfico de la figura no toda la línea azul para todo valor del parámetro temporal.*

Para comprender mejor este análisis de la interacción de los solitones, haremos un cambio de variable de manera de llevar la ecuación (A.3) a una ecuación lineal. Para ello utilizamos el siguiente cambio de variable en la ecuación (A.3),

$$u_{\mp}(t, t_0) = e^{\overline{\Delta}_{\mp}(t, t_0)} \Rightarrow \ln(u_{\mp}(t, t_0)) = \overline{\Delta}_{\mp}(t, t_0) \quad (7.49)$$

Luego, reemplazando en la ecuación (A.3), tenemos

$$\ln(u_{\mp}(t, t_0)) = \ln(-a(t - t_0) + b) \quad (7.50)$$

$$u_{\mp}(t, t_0) = -a(t - t_0) + b \quad (7.51)$$

Cuya ecuación es una representación lineal con el cambio de variable que utilizamos. Ahora analizamos los mismos puntos relevantes ya estudiados con este nuevo cambio de variable para tener una mejor representación gráfica de la interacción de dos solitones.

1. **Estado anterior al estado inicial** $t = 0$.

$$u_{\mp}(0, t_0) = at_0 + b \quad (7.52)$$

2. **diatancia inicial:** la distancia inicial se encuentra en el tiempo inicial $t = t_0$

$$u_{\mp}(t = t_0, t_0) = b \quad (7.53)$$

3. **Tiempo de colapso de los solitones:**El tiempo de colapso de los solitones ocurre cuando $\overline{\Delta}_{\mp}(t^*, t_0) = 0$, es decir, $u_{\mp}(t^*, t_0) = 1$.

$$1 = -a(t^* - t_0) + b \quad (7.54)$$

$$(1 - b) = -a(t^* - t_0) \quad (7.55)$$

$$-\frac{(1 - b)}{a} = (t^* - t_0) \quad (7.56)$$

$$t^* = t_0 - \frac{(1 - b)}{a} \quad (7.57)$$

4. **Tiempo de distancia infinita:** el tiempo de distancia infinita es cuando la nueva variable $u(\tilde{t}, t_0) = 0$, es

decir, cuando $\Delta_{\mp} = -\infty$. Luego tenemos

$$0 = -a(\tilde{t} - t_0) + b \quad (7.58)$$

$$a(\tilde{t} - t_0) = \frac{b}{a} \quad (7.59)$$

$$\tilde{t} = t_0 + \frac{b}{a} \quad (7.60)$$

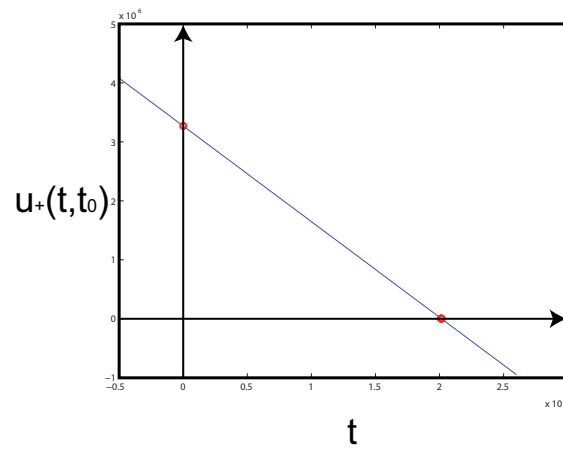


Figura 7.6: Gráfico de la interacción de los solitones indicando los puntos ms relevantes de la interacción para este cambio de variable $u_+(t, t_0) = \exp(\Delta_+(t, t_0))$.

Bibliografía

- [1] M. C. Cross & P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [2] H. A. Eschenfelder. *Magnetic Bubble Technology*. Springer Verlag, Berlin, 1981.
- [3] S. Pirkel, P. Ribiere & P. Oswald. *Liq. Cryst.* **13**, 413 (1993).
- [4] Y. A. Astrov & Y. A. Logvin. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2983 (1997).
- [5] K-Jin Lee, W. D. McCormick, J. E. Pearson & H. L. Swinney. *Nature* **369**, 215 (1994).
- [6] W. S. Edwards & S. Fauve. *J. Fluid Mech.* **278**, 123 (1994).
- [7] P. B. Umbanhowar, F. Melo & H. L. Swinney, *Nature* **382**, 793 (1996).
- [8] R. Heinrichs, G. Ahlers & D. S. Cannell. *Phys. Rev.* **A35**, R2761 (1987).
- [9] P. Kolodner, D. Bensimon & C. M. Surko. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1723 (1988).
- [10] M. G. Clerc, S. Residori, & A. Petrossian. *Phys. Rev.* **E71**, 015205-1 (2005)
- [11] S. Residori, A. Petrossian, T. Nagaya & M. G. Clerc. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6**, S169 (2004).
- [12] M. G. Clerc, P. Coulet & E. Tirapegui. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3820 (1999).
- [13] L. Landau & E. M. Lifshitz. *Curso de Física Teórica Vol.1 "Mecánica"*
- [14] A. Fetter & J. Walecka. *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*. McGraw-Hill, 1980.

Apéndice A

Detalle del paso del discreto al continuo en la cadena de resortes

Ahora revisaremos los cálculos que nos permitieron pasar de la ecuación de movimiento de partículas discretas (1.66), a la ecuación de onda (1.82), esta vez sin usar la formulación lagrangiana (en la cual, de hecho, asumimos relaciones que aquí serán explicadas).

Retomemos el lagrangiano (1.60) donde tomaremos el límite $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, conservando el largo de la cadena. Para esto, como vimos, es conveniente reescribir el lagrangiano (1.60), como sigue

$$L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N a \left(\frac{m}{a}\right) \dot{q}_l^2 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N ka^2 \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a}\right)^2 \quad (\text{A.1})$$

$$= a \sum_{l=1}^N \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{a}\right) \dot{q}_l^2 - ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a}\right)^2 \right] \quad (\text{A.2})$$

$$= a \sum_{l=1}^N L_l, \quad (\text{A.3})$$

donde

$$L_l = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m}{a}\right) \dot{q}_l^2 - ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a}\right)^2 \right]. \quad (\text{A.4})$$

representa el lagrangiano de la partícula l reescrito de manera de hacer más conveniente el tomar el límite al continuo.

Ahora desarrollamos la ecuación de *Euler-Lagrange* para el lagrangiano (A.1), de modo de encontrar la ecuación de movimiento de la partícula l .

■

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) = \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{m}{a}\right) \dot{q}_l \right) = \frac{m}{a} \ddot{q}_l \quad (\text{A.5})$$

■

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = - \left(ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a}\right) (-1) + ka \left(\frac{q_l - q_{l-1}}{a}\right) \right) \quad (\text{A.6})$$

$$= - \left(-ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a}\right) + ka \left(\frac{q_l - q_{l-1}}{a}\right) \right). \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, tenemos

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_l - ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a}\right) + ka \left(\frac{q_l - q_{l-1}}{a}\right) = 0, \quad (\text{A.8})$$

la cual corresponde a la **ecuación de onda discreta** para la partícula l . Para llegar a la ecuación de onda continua, usaremos la definición de derivada simétrica.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad (\text{A.9})$$

donde esta derivada ha sido evaluada en la posición x . Asumiremos que la coordenada de posición pasa a una

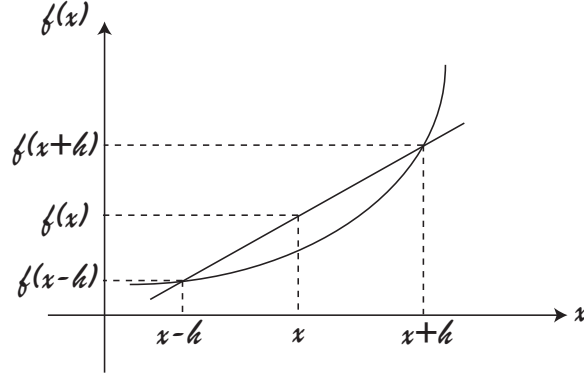


Figura A.1: Bosquejo de la derivada simétrica.

variable continua que depende explícitamente del espacio, es decir, $q_l \rightarrow q(x)$, $q_{l-1} \rightarrow q(x-a)$ y $q_{l+1} \rightarrow q(x+a)$ cuando $a \rightarrow 0$. Así tenemos,

■

$$\frac{q_{l+1} - q_l}{a} \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \frac{q(x+a) - q(x)}{a} \quad (\text{A.10})$$

reescribiendo la última ecuación

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{q(x+a) - q(x)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{q(x + 2(\frac{a}{2})) - q(x)}{2(\frac{a}{2})} \quad (\text{A.11})$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{q(x + (\frac{a}{2}) + (\frac{a}{2})) - q(x + (\frac{a}{2}) - (\frac{a}{2}))}{2(\frac{a}{2})} \quad (\text{A.12})$$

sea $u = x + \frac{a}{2}$ y $h = (\frac{a}{2})$, entonces

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{q(x+a) - q(x)}{a} = \frac{q(u+h) - q(u-h)}{2h} \quad (\text{A.13})$$

de la definición de derivada simétrica obtenemos

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{q(x+a) - q(x)}{a} = \frac{\partial q}{\partial u} \Big|_u \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x+\frac{a}{2}} \quad (\text{A.15})$$

■ para el otro término realizamos el mismo procedimiento y obtenemos

$$\frac{q_l - q_{l-1}}{a} \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \frac{q(x) - q(x-a)}{a} = \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x-\frac{a}{2}} \quad (\text{A.16})$$

luego seguimos con el proceso del límite con el segundo término de la ecuación (A.8)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\partial q}{\partial x}|_{x+\frac{a}{2}} - \frac{\partial q}{\partial x}|_{x-\frac{a}{2}}}{a} \right) \quad (\text{A.17})$$

donde definimos $g(x) = \frac{\partial q}{\partial x}|_x$, entonces

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{g(x + \frac{a}{2}) - g(x - \frac{a}{2})}{2(\frac{a}{2})} = \frac{\partial g}{\partial x}|_x \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}|_x \quad (\text{A.19})$$

Así la ecuación (A.8) la podemos reescribir en su forma continua.

$$\left(\frac{m}{a}\right) \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - ka \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{A.20})$$

la cual corresponde a la ecuación de onda para la cadena de resortes en el límite hacia el continuo. Ahora analizaremos el significado de las cantidades físicas que acompañan a las derivadas parciales en el límite hacia el continuo.

El límite al continuo simula una barra sólida elástica. Es claro que la cantidad $\left(\frac{m}{a}\right)$ tiende a una densidad lineal de masa (masa por unidad de longitud) ρ . Por otro lado, recordamos que la extensión de una barra por unidad de longitud es directamente proporcional a la fuerza o tensión que es sometida la barra, la cual se escribe como $F = Y\xi$, donde ξ es la elongación de la barra y la constante de proporcionalidad Y es conocida como módulo de *Young*. La extensión por unidad del longitud en el caso discreto se puede escribir como $\xi = \frac{q_{l+1} - q_l}{a}$, la fuerza necesaria para el estiramiento de un resorte es

$$F = k(q_{l+1} - q_l)a = ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a} \right), \quad (\text{A.21})$$

que en el límite continuo resulta

$$\lim_{a \rightarrow 0} ka \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{a} \right) = ka\xi = Y\xi. \quad (\text{A.22})$$

Por lo tanto, reconocemos a ka cuando $a \rightarrow 0$ como el módulo de *Young*. Luego la ecuación (A.20) en su forma continua puede ser reescrita como

$$\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{A.23})$$

la cual representa la ecuación de onda unidimensional. En el caso discreto, el índice l da la ubicación de una masa puntual. En el caso continuo cada punto de la barra queda determinado por la posición x y ahora la variable q queda determinada por la posición y el tiempo, es decir, se transforma en una variable tipo campo $q \rightarrow q(x, t)$. Así tenemos siguientes cantidades pasan del discreto al continuo.

caso discreto		caso continuo
$\left(\frac{m}{a}\right)$	\rightarrow	ρ
ka	\rightarrow	Y
q_l	\rightarrow	$q(x)$
\dot{q}_l	\rightarrow	$\frac{\partial q}{\partial t}$
\sum_l	\rightarrow	$\int dx$

Manuscrito