

# TÓPICOS EN FÍSICA NO-LINEAL

René Gabriel Rojas Cortés

26 de octubre de 2001



# Índice General

I	El Potencial de No-Equilibrio	1
II	La Inestabilidad de Faraday	31
III	La Ecuación de Cahn-Hilliard	47
IV	Apéndice	97
V	Bibliografía	121



# Resumen

En la primera parte de esta memoria analizamos algunas propiedades del potencial de no-equilibrio, que es una técnica para encontrar la probabilidad estacionaria de un sistema perturbado estocásticamente en el límite de ruido débil, en específico se verá su no-diferenciabilidad, las condiciones de borde y la genericidad del modelo estudiado.

En la parte referida a la inestabilidad de Faraday se demuestra que, la ecuación no local derivada para la evolución lineal de la superficie de un fluido viscoso incompresible se reduce asintóticamente, para alta viscosidad, a una ecuación tipo Mathieu de segundo orden, propuesta recientemente por Cerda y Tirapegui. La ecuación describe un péndulo fuertemente amortiguado y las condiciones de validez del régimen asintótico son dadas en términos de los parámetros físicos relevantes.

En la última parte estudiamos la dinámica de burbujas en la ecuación de Cahn-Hilliard unidimensional. Para un gas de burbujas diluidas encontramos un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen las interacciones entre ellas, lo que nos permite describir la dinámica ulterior del sistema con un muy buen acuerdo con las simulaciones numéricas.



**Parte I**

**Propiedades del Potencial de  
No-Equilibrio**





# Introducción

Un sistema macroscópico puede ser caracterizado por un número muy pequeño de variables comparado con la cantidad casi inimaginable de grados de libertad que éste puede tener (usualmente del orden del número de Avogadro) [1], estas variables están gobernadas por leyes obtenidas de un "coarse graining" [2], que corresponde a tomar los modos más lentos del sistema y despreciar el resto por tener tiempos de relajación mucho más cortos. Sean  $q^\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\mu = 1, \dots, n$  estas variables macroscópicas, si consideramos el caso de sistemas homogéneos en el espacio, la dinámica del sistema estará gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{q}^\mu(t) = A^\mu(q) \tag{1}$$

donde el punto representa la derivada temporal y los  $A^\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones de clase  $C^\infty$  dadas. Esta descripción determinista no toma en cuenta el rol de las variables rápidas eliminadas en el proceso de coarse graining. Por otro lado el proceso de "coarse graining" nos muestra que las variables macroscópicas ( $q^1, \dots, q^n$ ) pueden ser interpretadas como un proceso estocástico y en este marco las ecuaciones (1) aparecen como ecuaciones para los valores medios en las cuales se han despreciado las fluctuaciones. En muchos casos de interés se puede argumentar que el efecto de las fluctuaciones pueden estudiarse aproximando el proceso estocástico por un proceso de difusión (ver sin embargo [1]) que se obtiene simplemente agregando a la ecuación (1) una perturbación estocástica que depende de ruidos blancos ( $\xi^1(t), \xi^2(t), \dots$ ). En esta descripción la ecuación (1) se reemplaza por

$$\dot{q}^\mu(t) = A^\mu(q) + \sqrt{\eta} g_i^\mu \xi^i(t) \tag{2}$$

En lo que sigue adoptaremos la regla de Einstein para índices repetidos<sup>1</sup>. En general  $g_i^\mu$  podría ser una función de los  $q$ , en ese caso se denomina ruido multiplicativo, pero para lo que sigue lo supondremos constante, es decir, ruido aditivo. La idealización más usual y simple para el ruido es tomar  $\xi$  como un ruido blanco gaussiano

$$\begin{aligned}\langle \xi^i(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi^i(t) \xi^j(t') \rangle &= \delta_{i,j} \delta(t - t')\end{aligned}$$

i.e  $\xi^i(t)dt = dW^i(t)$  donde  $W^i(t)$  es el proceso de Wiener.

Ahora  $\{q^\mu(t)\}$  ya no es una trayectoria determinista sino que un proceso estocástico y luego está determinado por una probabilidad, es decir, no podemos conocer la trayectoria que sigue el sistema en forma exacta y solo podemos aspirar a saber cual es la probabilidad que tienen cada trayectoria de realizarse. Como éste es un proceso estocástico Markoviano el está determinado por la probabilidad de transición  $P(q, t | q_o, t_o)$  que da la probabilidad de que el sistema esté en  $q$  en el tiempo  $t$  dado que estaba en  $q_o$  al tiempo  $t_o$ . Esta probabilidad está regida por la ecuación de Fokker-Planck [5, 6]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q^\mu} A^\mu(q)P + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial q^\nu} Q^{\mu\nu} P \quad (3)$$

donde  $Q^{\mu\nu} \equiv g_i^\mu g_i^\nu$ . Para problemas como el cálculo de los tiempos de escape en sistemas metaestables [1, 3, 7, 17], gran parte de la información relevante está almacenada en la probabilidad estacionaria del sistema ( $\partial_t P = 0$ )<sup>2</sup>. En el límite de ruido débil ( $\eta \rightarrow 0$ ) se puede usar la teoría de perturbaciones asintóticas que sugiere para la probabilidad estacionaria un ansatz tipo WKB [7, 8, 9]

$$\begin{aligned}P(q, \eta) &= e^{-\frac{1}{\eta} \phi(q, \eta)} \\ \phi(q, \eta) &= \phi^o(q) + \eta \phi^1(q) + \eta^2 \phi^2(q) + \dots\end{aligned} \quad (4)$$

Reemplazando esta expansión en (3) y separando en potencias de  $\eta$  se llega

---

<sup>1</sup>Cuando aparezca un índice repetido se subentiende que hay una suma sobre ese índice (a menos que se diga explícitamente lo contrario), por ejemplo  $a_i b_i = \sum_{i=1}^N a_i b_i$

<sup>2</sup>Por simplicidad se usará a veces la notación  $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$  y  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial q^\mu}$

a una jerarquía de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}\frac{\partial\phi^o}{\partial q^\mu}\frac{\partial\phi^o}{\partial q^\nu} + A^\mu\frac{\partial\phi^o}{\partial q^\mu} &= 0 \\ (A^\mu + Q^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^o)\partial_\mu\phi^1 &= \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\phi^o \\ (A^\mu + Q^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^o)\partial_\mu\phi^2 &= -\frac{1}{2}Q^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^1\partial_\nu\phi^1 + \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\phi^o \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5)$$

Se llama potencial de no-equilibrio [4, 8, 9, 11, 12, 13] al término de orden cero en la serie (4), es decir  $\phi^o(q)$ , el cual está parcialmente determinado por la primera ecuación de la jerarquía. Esta primera ecuación puede ser vista como una ecuación de Hamilton-Jacobi a energía cero con el Hamiltoniano [10]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + A^\mu p_\mu \quad (6)$$

donde  $p_\mu$  es la variable conjugada a  $q^\mu$  y

$$p_\mu = \frac{\partial\phi^o}{\partial q^\mu} \quad (7)$$

Las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}^\mu &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\mu} \\ \dot{p}_\mu &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q^\mu} \end{aligned}$$

nos conducen a las siguientes ecuaciones para las variables  $q$  y  $p$

$$\begin{aligned} \dot{q}^\mu &= A^\mu + Q^{\mu\nu}p_\nu \\ \dot{p}_\mu &= -\partial_\mu A^\nu p_\nu \end{aligned}$$

Para ver, en forma intuitiva, la interpretación de las curvas que definen estas ecuaciones, usaremos la representación de la solución de la ecuación de Fokker-Planck (3) en forma de integral funcional [4, 14]. Esta representación es

$$P(Q, t | Q_o, t_o) = \int \mathcal{D}q e^{-\int_{q(t_o)=Q_o}^{q(t)=Q} L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \eta) d\tau} \quad (8)$$

El lado derecho se interpreta como el límite de una expresión discretizada cuya forma explícita es

$$\lim_{N \rightarrow \infty, (\varepsilon \rightarrow 0)} \int_{q_o^\mu = Q_o^\mu}^{q_{N+1}^\mu = Q_{N+1}^\mu} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\varepsilon\eta)^n Q}} \prod_{i=1}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{Q}} \prod_{j=1}^n \frac{dq_i^\mu}{\sqrt{2\pi\varepsilon\eta}} \exp \left[ -\varepsilon \sum_{j=1}^{N+1} L(q_{j-1}, \frac{\Delta q_j}{\varepsilon}, \eta) \right] \quad (9)$$

En esta expresión  $t_j = t_o + j\varepsilon$ ,  $t_{N+1} = t$  y  $Q = \det(Q_{\mu\nu})$ , donde  $Q_{\mu\rho} Q^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$ , o sea  $Q_{\mu\nu}$  es la matriz inversa de  $Q^{\mu\nu}$  y podemos interpretar  $q_j$  como  $q(t_j)$ . El lagrangiano  $L$  que figura en (8,9) está dado por

$$L = \frac{1}{2\eta} Q_{\mu\nu} (\dot{q}^\mu - A^\mu(q)) (\dot{q}^\nu - A^\nu(q)) = \frac{1}{\eta} L_o \quad (10)$$

y la expresión (9) debe considerarse como la definición de la integral funcional (8) en la discretización del prepunto (ver [14] para todos los detalles). Otra notación usada para la expresión (8) es

$$P(Q, t | Q_o, t_o) = \int \mathcal{D}q e^{-\int_{t_o}^t L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \eta) d\tau} \delta(q(t) - Q) \delta(q(t_o) - Q_o)$$

Se ve directamente que el Hamiltoniano asociado al lagrangiano  $L_o$  dado por (10) corresponde al dado en (6) usando la transformación de Legendre usual

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_\mu \dot{q}^\mu - L_o(q, \dot{q}) \\ p_\mu &= \frac{\partial L_o}{\partial \dot{q}^\mu} \end{aligned}$$

Podemos entonces interpretar la trayectoria definida por las ecuaciones de Hamilton como la que minimiza la acción que aparece en la exponencial de la integral funcional, y la que correspondería al orden más bajo en  $\eta$ , a la trayectoria más probable de  $(Q_o, t_o)$  a  $(Q, t)$  (ver [15]).

Por otro lado de la relación entre el potencial de no-equilibrio y los momentos  $p$  dados en (7) se tiene que

$$\phi^o(q) = \int p_\mu dq^\mu$$

y entonces

$$\phi^o(q) = \int p_\mu \dot{q}^\mu dt$$

El potencial de no-equilibrio está definido en relación a la probabilidad estacionaria lo que corresponde a tomar el límite  $t_o \rightarrow -\infty$  en (8). Debido a que el sistema determinista (1) es autónomo y se le adicionó un ruido blanco gaussiano el proceso estocástico definido por (2) es estacionario y podemos tomar  $t = 0$  en (8) (lo anterior es consecuencia de que  $P(Q, t | Q_o, t_o)$  es aquí función de  $(t - t_o)$ ). Además como la ecuación de Hamilton-Jacobi es a energía cero,  $\mathcal{H} = 0$ , y las trayectorias son las que minimizan la acción se llega al final a que

$$\phi^o(Q) = \min_{q(-\infty)=Q_o} \int_{q(-\infty)=Q_o}^{q(0)=Q} L_o(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

Se puede aún notar que en la fórmula anterior la dependencia en  $Q_o$  ha desaparecido, lo que es una consecuencia de haber tomado el límite  $t \rightarrow -\infty$ . Si estudiamos el comportamiento de la integral  $\int_{t_o}^t L_o(q, \dot{q}) dt$ ,  $t \rightarrow -\infty$ ,  $q(t_o) = Q_o$ ,  $q(t) = Q$ , vemos que la trayectoria (solución de las ecuaciones de Hamilton) va primero de  $Q_o$  al atractor  $\mathcal{A}$  del sistema determinista en cuya cuenca está  $Q_o$ , y hace esto siguiendo la trayectoria determinista  $\dot{q}^\mu = A^\mu(q)$ , lo que da una contribución nula a la acción. Concluimos entonces que podemos escribir para el potencial de no equilibrio la expresión

$$\phi^o(Q) = \min_{q(-\infty)=\mathcal{A}} \int_{q(-\infty)=\mathcal{A}}^{q(0)=Q} L_o(q(t), \dot{q}(t)) dt. \quad (11)$$

Como un último comentario sobre el potencial de no-equilibrio mencionaremos brevemente los conceptos de sistemas potenciales y no potenciales. Un sistema se dice que es potencial si el drift  $A^\mu(q)$  se puede escribir como el gradiente de un potencial o más generalmente se puede escribir como

$$A^\mu(q) = -\frac{1}{2} \tilde{Q}^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{\phi}^o}{\partial q^\nu}$$

donde  $\tilde{Q}^{\mu\nu}$  es definido positivo y  $\tilde{\phi}^o(q)$  es acotada por debajo. En general los sistemas son no potenciales y una generalización de este concepto es decir que el drift se puede escribir como el gradiente de un cierto potencial más un

resto que cumple con ser ortogonal a la parte gradiente, es decir

$$A^\mu(q) = -\frac{1}{2}\tilde{Q}^{\mu\nu}\frac{\partial\tilde{\phi}^o}{\partial q^\nu} + R^\mu(q) \quad (12)$$

$$R^\mu\frac{\partial\tilde{\phi}^o}{\partial q^\mu} = 0 \quad (13)$$

La función  $\tilde{\phi}^o$  es un funcional de Lyapunov del sistema dinámico  $\dot{q}^\mu = A^\mu(q)$  ya que

$$\frac{d\tilde{\phi}(q(t))}{dt} = \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial q^\mu}\dot{q}^\mu(t) = -\frac{1}{2}\tilde{Q}^{\mu\nu}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial q^\mu}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial q^\nu} \leq 0$$

Si tomamos  $\tilde{Q}^{\mu\nu} = Q^{\mu\nu}$  vemos que la ecuación (13) coincide con la primera ecuación de la jerarquía (5) y entonces podemos utilizar el potencial de no equilibrio  $\phi^o$  en el rol de  $\tilde{\phi}^o$  en la descomposición (12).

# Modelos

Para estudiar las propiedades del potencial de no-equilibrio que nos interesan haremos uso de un modelo simple, que podemos interpretar como una forma normal de codimensión 2, sometido a perturbaciones estocásticas como las que hemos descrito. Las ecuaciones del modelo son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu_1 x - a_1 x^3 - b_1 x y^2 + \sqrt{\eta_1} \xi_1(t) \\ \dot{y} &= \mu_2 y - a_2 y^3 - b_2 x^2 y + \sqrt{\eta_2} \xi_2(t)\end{aligned}\tag{14}$$

donde  $\xi_1, \xi_2$  son ruidos blancos

$$\begin{aligned}\langle \xi_i(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle &= \delta_{i,j} \delta(t - t') \quad i, j = 1, 2\end{aligned}$$

La parte determinista de (14) es la forma normal de un sistema de 2 variables con un repelor en el origen y con la simetría  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ .

Si reescalamos (14) ( $x \rightarrow c_1 x, y \rightarrow c_2 y$ ) obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu_1 x - x^3 - \alpha x y^2 + \sqrt{\eta} \xi_1(t) \\ \dot{y} &= \mu_2 y - y^3 - \beta x^2 y + \sqrt{\eta\nu} \xi_2(t)\end{aligned}\tag{15}$$

en donde se ha impuesto que

$$a_1 c_1^2 = 1, \quad a_2 c_2^2 = 1$$

y se definieron los nuevos parámetros  $\alpha, \beta, \eta$  y  $\nu$

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv b_1 c_2^2, \quad \beta \equiv b_2 c_1^2 \\ \eta &\equiv \frac{\eta_1}{c_1^2}, \quad \eta\nu \equiv \frac{\eta_2}{c_2^2}\end{aligned}$$

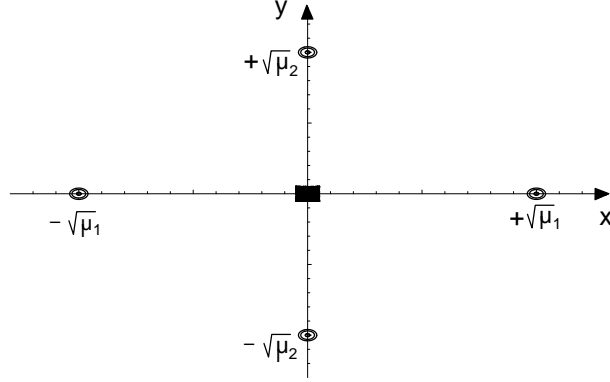


Figura 1: Estructura del espacio de fase de los modelos por estudiar, en el eje  $x$  hay dos atractores, en el eje  $y$  dos punto silla y en el centro un repelor.

La parte determinista de este modelo tiene cinco puntos críticos ( $\mu_1, \mu_2$  positivos) que son: un repelor en  $(0, 0)$ , dos atractores en  $(\pm\sqrt{\mu_1}, 0)$  bajo la condición de que  $\mu_2 - \beta \mu_1 < 0$  y dos puntos silla en  $(0, \pm\sqrt{\mu_2})$  siempre que  $\mu_1 - \alpha \mu_2 > 0$  y para que las cuencas de atracción cubran todo el espacio una condición suficiente es que  $\alpha + \beta + 2 > 0$  (ver figura (1)).

Consideremos el caso particular

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}$$

$$\beta = \frac{\mu_2}{\mu_1} + \nu \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

que reduce las ecuaciones (15) a

$$\dot{x} = \mu_1 x - x^3 - \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \right) x y^2 + \sqrt{\eta} \xi_1(t) \quad (16)$$

$$\dot{y} = \mu_2 y - y^3 - \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \nu \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) x^2 y + \sqrt{\eta\nu} \xi_2(t)$$

y que tiene un funcional de Lyapunov explícito (ver figuras (2) y (3))

$$\boxed{\phi^o(x, y) = -\mu_1 x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} x^2 y^2} \quad (17)$$



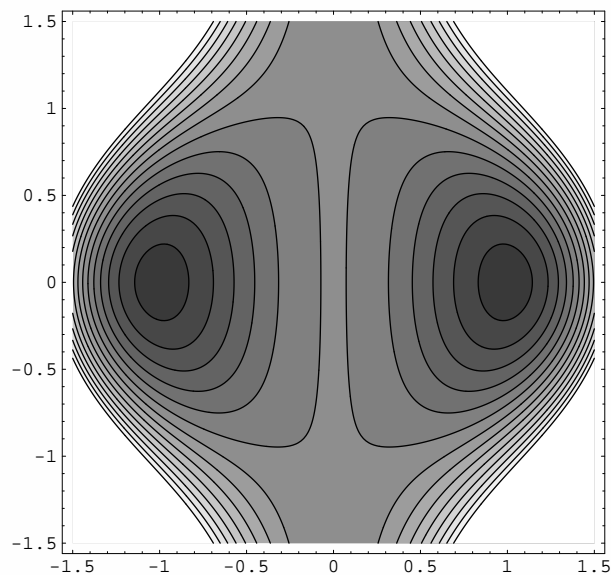


Figura 2: Gráfico de  $\phi^o(x, y)$  para  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , notese que en  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  se encuentran los atractores y es donde este funcional de Lyapunov es mínimo.

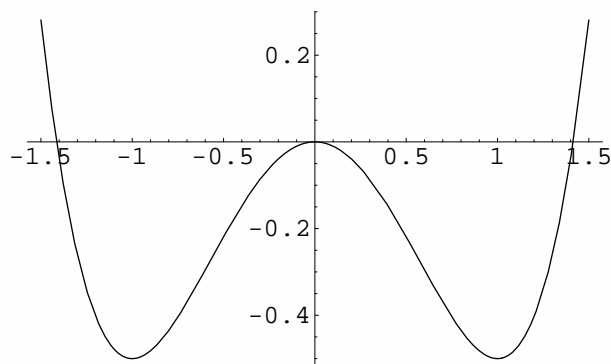


Figura 3: Corte transversal del funcional de Lyapunov de la figura anterior, para  $y = 0$ , i.e.  $\phi^o(x, y = 0)$ .

ya que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial \phi^o}{\partial x} &= \mu_1 x - x^3 - \frac{\mu_1}{\mu_2} x y^2 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \phi^o}{\partial y} &= -\frac{\mu_1}{\mu_2} x^2 y \end{aligned}$$

y en consecuencia  $(R^1, R^2)$  de (12) son

$$\begin{aligned} R^1 &= x y^2 \\ R^2 &= \mu_2 y - y^3 - \frac{\mu_2}{\mu_1} x^2 y \end{aligned}$$

Podemos particularizar aún más el modelo imponiendo

$$\nu = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2$$

En esta caso las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu_1 x - x^3 - \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \right) x y^2 + \sqrt{\eta} \xi_1(t) \\ \dot{y} &= \mu_2 y - y^3 - 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} x^2 y + \sqrt{\eta} \frac{\mu_2}{\mu_1} \xi_2(t) \end{aligned} \quad (18)$$

y este sistema, por ser un caso particular del sistema (16), también tiene a  $\phi^o(x, y)$  como un funcional de Lyapunov pero además posee otro funcional (ver figuras (4) y (5))

$$\boxed{\tilde{\phi}^o(x, y) = \frac{1}{2} \left( \mu_1 - x^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} y^2 \right)^2} \quad (19)$$

Utilizando estos modelos pondremos en evidencia algunas propiedades importantes del potencial de no-equilibrio [16].

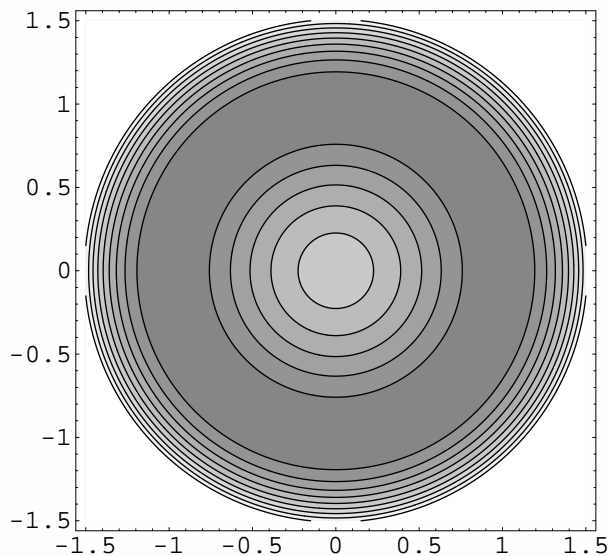


Figura 4: Gráfico de  $\tilde{\phi}^o(x, y)$  para  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , notese que en  $(0, 0)$  se encuentra el repeler y es donde este funcional de Lyapunov es máximo, luego  $-\tilde{\phi}^o(x, y)$  es mínimo en este punto..

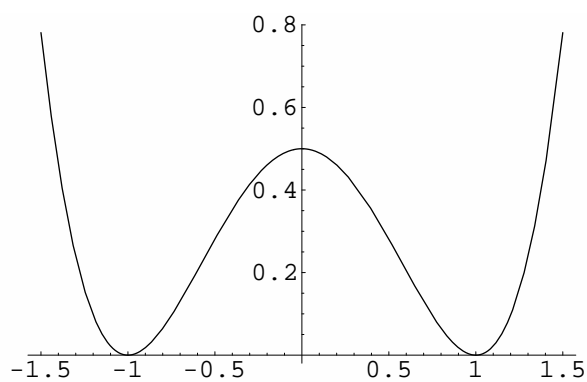


Figura 5: Corte transversal del funcional de lyapunov de la figura anterior, para  $y = \alpha x$ , i.e.  $\tilde{\phi}^o(x, y = \alpha x)$  para  $\alpha \in \mathfrak{R}$  La forma es una consecuencia de la simetría de rotación de  $\tilde{\phi}^o$ .



# Las Condiciones de Borde

Utilizando (5) se puede ver que el potencial de no equilibrio (que notaremos  $\phi(q)$  aquí) es decreciente sobre las trayectorias del sistema determinista pues (admitimos aquí que  $Q^{\mu\nu}$  sea una función de  $q$ )<sup>3</sup>

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu(t) = \frac{\partial\phi}{\partial q^\mu} A^\mu(q) = -\frac{1}{2}Q^{\mu\nu}(q)\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial q^\nu} \leq 0$$

y la igualdad se tiene solo para  $\partial\phi/\partial q^\mu = 0$ , luego  $\phi(q)$  debe ser mínimo en los atractores del sistema determinista (1) [4, 8]. De lo anterior también se llega a que el potencial de no-equilibrio debe ser extremal en los otros puntos fijos de (1) (i.e. puntos silla y repelores) pero no se puede decir nada de su naturaleza, es decir, si  $\phi(q)$  es máximo, silla o mínimo. Usualmente se argumenta que, dado que el sistema (1) es autónomo, si se hace una inversión temporal ( $t \rightarrow -t$ ) [8] los puntos críticos revierten su naturaleza, los atractores se transforman en repelores y los repelores en atractores (los puntos silla quedan como puntos silla pero cambia el sentido de sus variedades estables e inestables) y por lo tanto el nuevo potencial de no-equilibrio debe ser mínimo en los nuevos atractores del sistema (i.e. los antiguos repelores). Por otro lado como  $\phi(q)$  cumple con la ecuación de Hamilton-Jacobi para el sistema original

$$\frac{1}{2}Q^{\mu\nu}(q)\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial q^\nu} + A^\mu(q)\frac{\partial\phi}{\partial q^\mu} = 0$$

entonces  $-\phi(q)$  cumple con la ecuación de Hamilton-Jacobi para el sistema con inversión temporal pues

$$\frac{1}{2}Q^{\mu\nu}(q)\frac{\partial(-\phi)}{\partial q^\mu}\frac{\partial(-\phi)}{\partial q^\nu} + (-A^\mu(q))\frac{\partial(-\phi)}{\partial q^\mu} = 0$$

---

<sup>3</sup> Este caso corresponde a ruido multiplicativo, o sea cuando las cantidades  $g_i^\mu$  en (2) son funciones de  $q$ .

y de aquí deducen que si  $-\phi(q)$  es el nuevo potencial de no-equilibrio entonces debe ser mínimo en los atractores de este sistema y por lo tanto  $\phi(q)$  es máximo en los repelores del sistema original. El problema con este argumento es que, si bien  $-\phi(q)$  cumple con la nueva ecuación de Hamilton-Jacobi, nada asegura que este sea el nuevo potencial de no-equilibrio ya que un mismo sistema puede tener varios funcionales de Lyapunov pero solo uno de estos es escogido como potencial de no-equilibrio, el cual cumple con ser mínimo en los atractores. Lo anterior se ve claramente usando al sistema (18) como ejemplo, este sistema tiene dos funcionales de Lyapunov conocidos  $\phi^o(x, y)$  y  $\tilde{\phi}^o(x, y)$ , donde el primero cumple con la condición de ser mínimo en los atractores y por lo tanto es el potencial de no-equilibrio en el dominio  $-\infty < x < \infty$ ;  $-\sqrt{\mu_2} < y < \sqrt{\mu_2}$  (la causa de la restricción a este dominio se explicará en la siguiente sección), pero al invertir el tiempo los nuevos funcionales de Lyapunov son  $-\phi^o(x, y)$  y  $-\tilde{\phi}^o(x, y)$  en donde ahora el segundo es mínimo en los nuevos atractores y por lo tanto es el nuevo potencial de no-equilibrio (y no  $-\phi^o(x, y)$ ). Este nuevo potencial de no-equilibrio es válido en la región

$$\frac{x^2}{\mu_1} + \frac{y^2}{\mu_2} \leq 1,$$

y por lo tanto, en esta región, la verdadera transformación con inversión temporal es

$$\boxed{t \longrightarrow -t, \quad \phi^o \longrightarrow -\tilde{\phi}^o}$$

Como se vera más adelante esto ya aparece en modelos de codimensión 2 y no solo en modelos poco genéricos como el del ejemplo (sistema (18)) que es de codimensión 5 (se ajustaron 3 parámetros:  $\alpha, \beta$  y  $\nu$  en un modelo de codimensión 2)

# La No-Diferenciabilidad del Potencial de No-Equilibrio

Como se vio en la introducción, de la formulación con integral funcional de la solución de la ecuación de Fokker-Planck, se llega a una expresión para el potencial de no-equilibrio como una integral a través de un camino dado por la solución del sistema Hamiltoniano asociado a la minimización de la acción presente en la integral funcional, de esto se llega a la existencia de problemas de no-diferenciabilidad en la vecindad de la separatriz debido al comportamiento genérico de la variedad inestable del atractor cerca de la separatriz [4, 8, 9]. Esta propiedad está asociada a sistemas hamiltoniano no integrables (caso genérico). Otro motivo de posible no-diferenciabilidad es la co-existencia de atractores ya que al pasar de una cuenca de atracción a otra podrían presentarse saltos en la derivada del potencial debido a que el punto de partida de la integral pasa de ser un atractor a otro en las distintas cuencas de atracción, y otro motivo es la co-existencia entre un atractor puntual y un ciclo límite [7]. Por último, una causa de no diferenciabilidad que no ha sido mencionada en la literatura, es debido a que la variedad inestable del atractor del sistema determinista, que se ha transformado en un punto silla en el sistema Hamiltoniano, puede no recubrir completamente su cuenca de atracción (en el sistema determinista) con lo cual habrían puntos, en su cuenca de atracción, que no pueden ser alcanzados desde el atractor directamente y se debe pasar por algún otro punto crítico (puntos silla o repelores) para desde ahí llegar, a través de la variedad inestable de ese punto crítico, al punto en cuestión, es sobre esto último que nos extenderemos para mostrar con un ejemplo esta fuente de no-diferenciabilidad.

Consideremos el sistema (16) y su Hamiltoniano asociado

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + \nu p_y^2) + \left( \mu_1 x - x^3 - \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \right) x y^2 \right) p_x \\ + \left( \mu_2 y - y^3 - \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \nu \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) x^2 y \right) p_y$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{x} = \mu_1 x - x^3 - \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \right) x y^2 + p_x \\ \dot{y} = \mu_2 y - y^3 - \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \nu \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) x^2 y + \nu p_y \\ \dot{p}_x = - \left( \mu_1 - 3x^2 - \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \right) y^2 \right) p_x + 2 \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \nu \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) x y p_y \\ \dot{p}_y = 2 \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \right) x y p_x - \left( \mu_2 - 3y^2 - \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \nu \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) x^2 \right) p_y$$

Este sistema dinámico tiene un funcional de Lyapunov dado por (17)

$$\phi^o(x, y) = -\mu_1 x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} x^2 y^2$$

que podemos utilizar para construir una variedad invariante ( $p_x = \frac{\partial \phi^o}{\partial x}$ ,  $p_y = \frac{\partial \phi^o}{\partial y}$ ) en la cual la dinámica se reduce a

$$p_x = 2 \left( -\mu_1 x + x^3 + \frac{\mu_1}{\mu_2} x y^2 \right) \\ p_y = 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} x^2 y \\ \dot{x} = -\mu_1 x + x^3 + \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2} \right) x y^2 \\ \dot{y} = \mu_2 y - y^3 - \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} - \nu \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) x^2 y$$

Es inmediato que este sistema corresponde a la variedad inestable de los atractores del sistema determinista y debido a que los puntos silla mantienen su estructura de punto silla, en esta variedad invariante, se llega a que esta



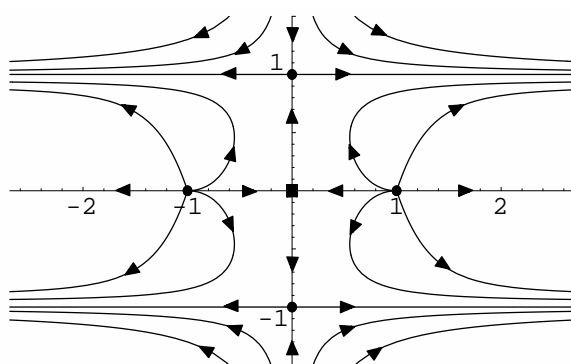


Figura 6: La proyección sobre el plano  $(x, y)$  de la variedad invariante del sistema Hamiltoniano asociado al funcional  $\phi^o$

variedad no recubre todo el espacio, o mejor dicho, desde el atractor no se pueden alcanzar todos los puntos correspondientes a su cuenca de atracción en el sistema determinista y por lo tanto la integral en (11) debe pasar por otro punto crítico para cubrir a aquellos puntos que no son cubiertos por la variedad inestable de los atractores, en nuestro ejemplo se debe pasar por los puntos silla para, a través de su variedad inestable, llegar a todos estos puntos que están fuera de la variedad inestable del atractor.

Si ahora nos restringimos al sistema (18) ( $\nu = (\mu_2/\mu_1)^2$ ) se obtiene una visión más clara de lo mencionado en el párrafo anterior ya que el sistema Hamiltoniano queda reducido a

$$\begin{aligned}
 p_x &= 2 \left( -\mu_1 x + x^3 + \frac{\mu_1}{\mu_2} x y^2 \right) \\
 p_y &= 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} x^2 y \\
 \dot{x} &= -\mu_1 x + x^3 + \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2} \right) x y^2 \\
 \dot{y} &= \mu_2 y - y^3
 \end{aligned}$$

luego, dentro de esta variedad invariante,  $y = \pm\sqrt{\mu_2}$  son variedades invariantes asociadas a la dirección inestable de los puntos silla y por lo tanto son las fronteras de la variedad inestable de los atractores ya que una trayectoria que parte muy cerca de los atractores no puede pasar esta frontera,

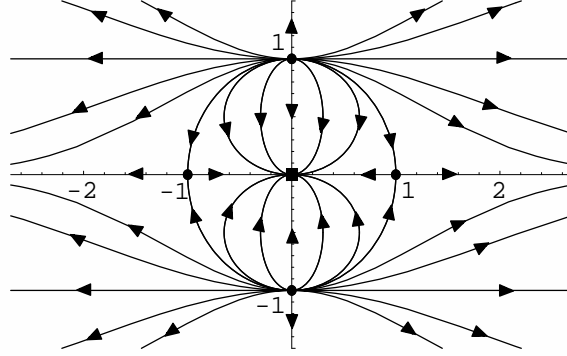


Figura 7: La proyección sobre el plano  $(x, y)$  de la variedad invariante del sistema Hamiltoniano asociado al funcional  $\tilde{\phi}^o$

luego la variedad inestable de los atractores está restringida a la región  $-\sqrt{\mu_2} < y < \sqrt{\mu_2}$ , luego el funcional de Lyapunov (17) es el potencial de no-equilibrio solo en esta región. Lo que ahora se necesita es la variedad inestable de los puntos silla que justo está dada por el funcional de Lyapunov (19)

$$\tilde{\phi}^o(x, y) = \frac{1}{2} \left( \mu_1 - x^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} y^2 \right)^2$$

Con  $\tilde{\phi}^o$  se construye la variedad invariante

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \tilde{\phi}^o}{\partial x} = 2 \left( -\mu_1 x + x^3 + \frac{\mu_1}{\mu_2} x y^2 \right) \\ p_y &= \frac{\partial \tilde{\phi}^o}{\partial y} = 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( -\mu_1 y + x^2 y + \frac{\mu_1}{\mu_2} y^3 \right) \\ \dot{x} &= -\mu_1 x + x^3 + \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2} \right) x y^2 \\ \dot{y} &= -\mu_2 y + y^3 \end{aligned}$$

que da la variedad inestable de los puntos silla y es, además, la variedad estable del repelot y recubre todo el espacio y por lo tanto sirve como el potencial de no-equilibrio en la región en que  $\phi^o$  no lo es, luego nuestro

potencial de no-equilibrio es dado por trazos

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -\mu_1 x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} x^2 y^2 & , |y| < \sqrt{\mu_2} \\ \frac{1}{2} \left( \mu_1 - x^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} y^2 \right)^2 & , |y| \geq \sqrt{\mu_2} \end{cases}$$

Luego el potencial de no-equilibrio es no-diferenciable en  $y = \pm\sqrt{\mu_2}$  pero es continuo en todo el espacio, en particular en  $y = \pm\sqrt{\mu_2}$  pues

$$\phi^o(x, \pm\sqrt{\mu_2}) = \tilde{\phi}^o(x, \pm\sqrt{\mu_2}) = \frac{x^4}{2}.$$



# Genericidad de las propiedades anteriores

En las secciones anteriores se mostraron propiedades presentes en modelos muy específicos de codimensiones 4 y 5 para los sistemas (16) y (18) respectivamente ya que a partir del modelo (15), de codimensión 2, se impusieron 2 y 3 igualdades respectivamente, pero ahora mostraremos que para que se den las propiedades descritas en las dos secciones anteriores solo se necesitan imponer desigualdades para los parámetros del sistema (15) lo cual no aumenta la codimensión del problema quedando así de codimensión 2 [22].

Como ya fue mencionado antes, las propiedades se presentan debido a que, en la variedad inestable del atractor, los puntos silla se mantienen como puntos silla, donde la variedad inestable sale en la dirección del eje  $x$ , y por lo tanto esta variedad no puede tocar al eje  $x$  con lo cual limita la región de validez de la variedad inestable del atractor ya que los puntos debajo de esa variedad no pueden conectarse con los que están sobre esa curva ya que es una variedad invariante.

Lo que haremos será resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi del sistema para obtener la variedad inestable del atractor en torno a la vecindad de los ejes y así obtener las condiciones sobre los parámetros para que se cumpla lo ya antes mencionado [18, 19, 20].

Sobre el eje  $x$  ( $|y| \ll 1$ ) hacemos una expansión del potencial en torno a  $y = 0$ , es decir

$$\boxed{\phi^o(x, y) = f_0(x) + f_1(x) y + f_2(x) y^2 + \mathcal{O}(y^3)} \quad (20)$$

y en el eje  $y$  ( $|x| \ll 1$ ) hacemos lo mismo para  $x$

$$\boxed{\phi^o(x, y) = g_0(y) + g_1(y) x + g_2(y) x^2 + \mathcal{O}(x^3)} \quad (21)$$

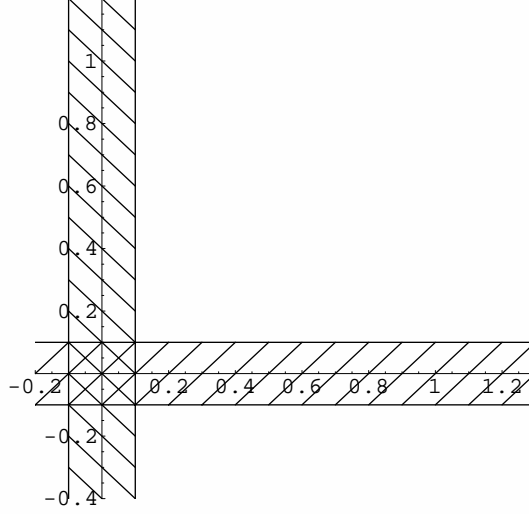


Figura 8: En la región achurada se resolverá la ecuación de Hamilton-Jacobi, primero sobre el eje  $x$  y luego sobre el eje  $y$  y en donde se intersectan se pegarán estas dos soluciones.

La ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi^o}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial \phi^o}{\partial y} \right)^2 + (\mu_1 x - x^3 - \alpha x y^2) \frac{\partial \phi^o}{\partial x} + \quad (22)$$

$$+ (\mu_2 y - y^3 - \beta x^2 y) \frac{\partial \phi^o}{\partial y}$$

Reemplazando (20) en (22) da el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} f_1(x)^2 + (\mu_1 x - x^3 + \frac{1}{2} f_0'(x)) f_0'(x) &= 0 \\ (\mu_2 - \beta x^2 + 2\nu f_2(x)) f_1(x) + (\mu_1 x - x^3 + f_0'(x)) f_1'(x) &= 0 \\ -\alpha x f_0' + \frac{1}{2} f_1'^2 + 2(\mu_2 - \beta x^2) f_2 + 2\nu f_2^2 + (\mu_1 x - x^3 + f_0') f_2' &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

por la simetría de  $y \longrightarrow -y$ ,  $p_y \longrightarrow -p_y$  se obtiene que  $f_1(x) = 0$ , luego para  $f_0$  se tiene que

$$(\mu_1 x - x^3 + \frac{1}{2} f_0'(x)) f_0'(x) = 0$$

y por lo tanto

$$f_0'(x) = 0 \quad \text{ó} \quad f_0'(x) = -2\mu_1 x + 2x^3 \quad (24)$$

Por otro lado el sistema Hamiltoniano, para la variedad invariante definida por  $\phi^o$ , es como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu_1 x - x^3 - \alpha x y^2 + \frac{\partial \phi^o}{\partial x} \\ \dot{y} &= \mu_2 y - y^3 - \beta x^2 y + \nu \frac{\partial \phi^o}{\partial y} \end{aligned}$$

y al linealizar este sistema en torno al punto  $(x_o, y_o)$  se obtiene la matriz Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - 3x_o^2 - \alpha y_o^2 + \frac{\partial^2 \phi^o}{\partial x^2}(x_o, y_o) & -2\alpha x_o y_o + \frac{\partial^2 \phi^o}{\partial y \partial x}(x_o, y_o) \\ -2\beta x_o y_o + \nu \frac{\partial^2 \phi^o}{\partial x \partial y}(x_o, y_o) & \mu_2 - 3y_o^2 - \beta x_o^2 + \nu \frac{\partial^2 \phi^o}{\partial y^2}(x_o, y_o) \end{pmatrix} \quad (25)$$

Reemplazando, en esta expresión el potencial dado en la expansión (20) y usando que  $f_1(x) = 0$  da

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - 3x_o^2 - \alpha y_o^2 + f_0''(x_o) + f_2''(x_o) y_o^2 & -2\alpha x_o y_o + 2f_2'(x_o) y_o \\ -2\beta x_o y_o + 2\nu f_2'(x_o) y_o & \mu_2 - 3y_o^2 - \beta x_o^2 + 2\nu f_2(x_o) \end{pmatrix}$$

Por el momento solo me interesa lo que está pasando en el eje x, luego tomaremos  $y_o = 0$  y observaremos que pasa en el atractor y en el repelor

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - 3x_o^2 + f_0''(x_o) & 0 \\ 0 & \mu_2 - \beta x_o^2 + 2\nu f_2(x_o) \end{pmatrix}$$

primero veamos que pasa en el atractor para lo cual tomamos  $x_o = \sqrt{\mu_1}$ , y como lo que queremos es la variedad inestable de este atractor impondremos que en esta variedad sea un repelor es decir

$$\begin{pmatrix} -2\mu_1 + f_0''(\sqrt{\mu_1}) & 0 \\ 0 & \mu_2 - \beta \mu_1 + 2\nu f_2(\sqrt{\mu_1}) \end{pmatrix}$$

debe ser definida positiva y por lo tanto se impone que

$$f_0''(\sqrt{\mu_1}) > 2\mu_1 > 0 \quad \text{y} \quad f_2(\sqrt{\mu_1}) > \frac{-\mu_2 + \beta \mu_1}{2\nu} > 0$$

y por lo tanto, de la condición (24), se deduce que

$$f_0(x) = -\mu_1 x^2 + \frac{x^4}{2}$$

notemos que entonces los valores para  $f_0''$  y  $f_2$  en  $x_o = \sqrt{\mu_1}$  son

$$f_0''(\sqrt{\mu_1}) = 4\mu_1 \quad \text{y} \quad f_2(\sqrt{\mu_1}) = \frac{-\mu_2 + \beta \mu_1}{\nu}$$

con lo que se cumple que el atractor sea un repelot en esta variedad invariante. Usando todo esto en la ecuación para  $f_2$  (23) se llega a

$$(\mu_1 x - x^3)f_2'(x) = 2\alpha x^2(\mu_1 - x^2) + 2(\mu_2 - \beta x^2)f_2(x) + 2\nu f_2(x)^2 \quad (26)$$

ahora nos trasladamos al repelot y por lo tanto evaluamos esta ecuación en  $x = 0$  lo que nos da

$$f_2(0) (\mu_2 + \nu f_2(0)) = 0$$

Esto implica que

$$f_2(0) = 0 \quad \text{ó} \quad f_2(0) = -\frac{\mu_2}{\nu} < 0$$

En el caso que resultase ser que  $f_2(0) = -\frac{\mu_2}{\nu} < 0$  y debido a que en  $x = \sqrt{\mu_1}$  se tiene que  $f_2(\sqrt{\mu_1}) = (-\mu_2 + \beta \mu_1)/\nu > 0$  y como  $f_2$  es una función continua se llega a que existe  $\bar{x} \in ]0, \sqrt{\mu_1}[$  tal que  $f_2(\bar{x}) = 0 \wedge f_2'(\bar{x}) > 0$  si ahora evaluamos en (26) con  $x = \bar{x}$  nos da que

$$f_2'(\bar{x}) = 2\bar{x} \alpha$$

en consecuencia una condición suficiente para que  $f_2(0) \neq -\mu_2/\nu$  es que  $\alpha < 0$  entonces  $f_2(0) = 0$ . De todo esto se deduce que el repelot  $(0, 0)$  en esta variedad es un punto silla pues evaluando la matriz Jacobiana en  $x_o = 0$ ,  $y_o = 0$  tenemos

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

en donde el eje x es la variedad estable y el eje y es la inestable. Calculando  $f_2$  cerca del repelot ( $|x| \ll 1$ ) y como  $f_2 \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$  en (26) se tiene

$$\mu_1 x f_2'(x) = 2\alpha \mu_1 x^2 + 2\mu_2 f_2(x)$$



$$\implies f_2(x) \simeq \frac{\mu_1 \alpha}{\mu_1 - \mu_2} x^2 + C x^{2\mu_2/\mu_1}$$

Si tomamos  $\mu_2 > \mu_1$  entonces tendremos para  $x$  pequeño que

$$f_2(x) \simeq \frac{\mu_1 \alpha}{\mu_1 - \mu_2} x^2 > 0$$

luego para  $|x| \ll 1 \wedge |y| \ll 1$  el potencial de no-equilibrio es

$$\phi^o(x, y) \simeq \mu_1 \left( -1 + \frac{\alpha}{\mu_1 - \mu_2} y^2 \right) x^2. \quad (27)$$

Repetiremos todo el mismo cálculo pero ahora en el eje  $y$  ( $|x| \ll 1$ ). Reemplazando (21) en (22) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\frac{1}{2} g_1(y)^2 + (\mu_2 y - y^3 + \frac{\nu}{2} g_0'(y)) g_0'(y) = 0 \quad (28)$$

$$(\mu_1 - \alpha y^2 + 2g_2(y)) g_1(y) + (\mu_2 y - y^3 + \nu g_0'(y)) g_1'(y) = 0$$

$$-\beta y g_0' + \frac{\nu}{2} g_1'^2 + 2(\mu_1 - \alpha y^2) g_2 + 2g_2^2 + (\mu_2 y - y^3 + \nu g_0') g_2' = 0 \quad (29)$$

Nuevamente por la simetría  $x \longrightarrow -x$ ,  $p_x \longrightarrow -p_x$  se obtiene que  $g_1(y) = 0$ , luego para  $g_0$  se tiene que

$$(\mu_2 y - y^3 + \frac{\nu}{2} g_0'(y)) g_0'(y) = 0$$

y por lo tanto

$$g_0'(y) = 0 \quad \text{ó} \quad g_0'(y) = -\frac{2}{\nu}(\mu_2 y - y^3) \quad (30)$$

Volviendo a la matriz Jacobiana (25) ahora sobre el eje  $y$ , evaluando para  $x = 0$ , tenemos

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - \alpha y_o^2 + 2g_2(y_o) & 0 \\ 0 & \mu_2 - 3y_o^2 + \nu g_0''(y_o) \end{pmatrix}$$

y esto evaluado en el repelot ( $y = 0$ )

$$\begin{pmatrix} \mu_1 + 2g_2(0) & 0 \\ 0 & \mu_2 + \nu g_0''(0) \end{pmatrix}$$

Al comparar esto con la matriz Jacobiana obtenida anteriormente en el repelor se llega a que

$$g_2(0) = -\mu_1 \quad \wedge \quad g_0''(0) = 0$$

y entonces de la ecuación (28) se deduce que

$$g_0(x) = 0$$

Luego la ecuación para  $g_2$  (29) se reduce a

$$2(\mu_1 - \alpha y^2)g_2 + 2g_2^2 + (\mu_2 y - y^3)g_2' = 0$$

cuya solución es

$$g_2(y) = \frac{(\mu_2 - y^2)^{\mu_1/\mu_2 - \alpha}}{C y^{2\mu_1/\mu_2} - 2y^{2\mu_1/\mu_2} \int_y^{\sqrt{\mu_2}} (\mu_2 - z^2)^{\mu_1/\mu_2 - \alpha - 1} z^{-2\mu_1/\mu_2 - 1}}$$

haciendo el cambio de variable  $u = z^2/\mu_2$  se llega a la siguiente expresión en términos de las funciones Beta e Hipergeométrica ( $B(a, b)$ ,  ${}_2F_1(a, b; c; z)$ ) [21]

$$g_2(y) = (\mu_2 - y^2)^{\mu_1/\mu_2 - \alpha} \left/ \left\{ \left( C - \mu_2^{-\alpha - 1} B\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_1}{\mu_2} - \alpha\right) \right) y^{2\mu_1/\mu_2} - \mu_1^{-1} \mu_2^{\mu_1/\mu_2 - \alpha} {}_2F_1\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2} + \alpha + 1, -\frac{\mu_1}{\mu_2}; -\frac{\mu_1}{\mu_2} + 1; \frac{y^2}{\mu_2}\right) \right\} \right.$$

como

$${}_2F_1(a, b; c; y^2/\mu_2) \simeq 1 + \frac{a b}{c \mu_2} y^2 + \mathcal{O}(y^4)$$

y además  $\mu_1 < \mu_2$  si

$$C - \mu_2^{-\alpha - 1} B\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_1}{\mu_2} - \alpha\right) \neq 0$$

entonces  $g_2(y) \simeq \tilde{C} + \bar{C} y^{2\mu_1/\mu_2}$  para  $|y| \ll 1$  solución que no calza con la obtenida sobre el eje x, luego la constante  $C$  debe valer

$$C = \mu_2^{-\alpha - 1} B\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_1}{\mu_2} - \alpha\right) < +\infty$$

Así la solución para  $g_2$  queda

$$g_2(y) = \mu_1 \frac{(1 - \frac{y^2}{\mu_2})^{\mu_1/\mu_2 - \alpha}}{{}_2F_1(-\frac{\mu_1}{\mu_2} + \alpha + 1, -\frac{\mu_1}{\mu_2}; -\frac{\mu_1}{\mu_2} + 1; \frac{y^2}{\mu_2})}$$

Expandiendo esta expresión para  $y$  pequeño da que

$$g_2(x) \simeq -\mu_1 \left( 1 + \frac{\alpha}{\mu_1 - \mu_2} y^2 \right) + \mathcal{O}(y^4)$$

luego el potencial evaluado en el eje y cerca del repelador ( $|x| \ll 1 \wedge |y| \ll 1$ ) da

$$\phi^o(x, y) \simeq -\mu_1 \left( 1 + \frac{\alpha}{\mu_2 - \mu_1} y^2 \right) x^2.$$

que coincide perfectamente con el obtenido desde el eje x (27). Lo último que nos falta es ver que ocurre en el punto silla. Para ello evaluamos la matriz Jacobiana en el punto silla ( $x_o = 0, y_o = \sqrt{\mu_2}$ ) lo cual da

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - \alpha\mu_2 + 2g_2(\sqrt{\mu_2}) & 0 \\ 0 & -2\mu_2 + \nu g_0''(\sqrt{\mu_2}) \end{pmatrix}$$

pero como  $g_0''(\sqrt{\mu_2}) = g_2(\sqrt{\mu_2}) = 0$  esta matriz se reduce a

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - \alpha\mu_2 & 0 \\ 0 & -2\mu_2 \end{pmatrix}$$

lo cual demuestra lo que queríamos, que el punto silla, en esta variedad invariante, es de nuevo un punto silla con la dirección "y" estable y la dirección "x" inestable y para llegar a esto solo fue necesario imponer las siguientes desigualdades

$$\boxed{\alpha < 0, \quad \mu_1 < \mu_2, \quad \frac{\mu_2}{\mu_1} < \beta, \quad \alpha + \beta + 2 > 0}$$

con lo cual la codimensión no aumenta dando que las propiedades descritas en las dos secciones anteriores se darán genericamente, por lo menos, en codimensión 2.

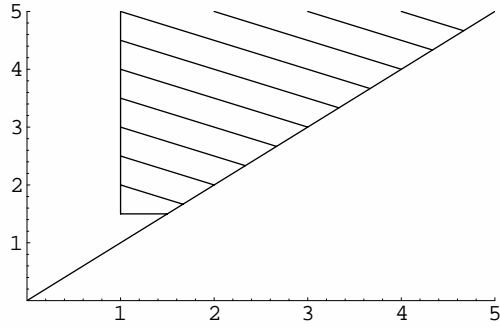


Figura 9: Gráfico  $\beta$  vs  $\mu_2/\mu_1$  las condiciones se cumplen en la región achurada.

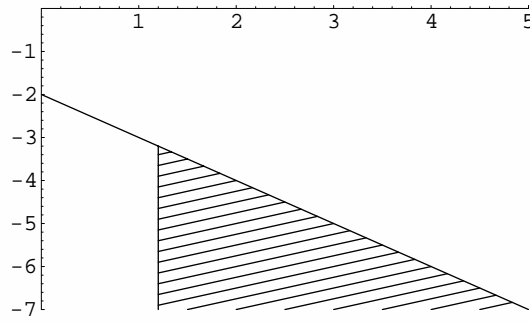


Figura 10: Gráfico  $\alpha$  vs  $\beta$  en la región achurada son válidas las condiciones para presentar el fenómeno.

## **Parte II**

# **Inestabilidad de Faraday en Fluidos Altamente Viscosos**



# Introducción

Cuando una capa de fluido de altura  $h$  que yace sobre un plano horizontal es vibrada verticalmente, para amplitudes sobre un umbral, aparecen ondas estacionarias en la superficie libre (inestabilidad de Faraday). Sean  $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  las coordenadas horizontales,  $z \in \mathbb{R}$  el eje vertical y elijamos el origen en la superficie libre, cuando el sistema está en reposo (el plano está en  $z = -h$ ). Llamamos  $\xi(\vec{x}, t)$  (i.e  $\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) al desplazamiento de la superficie libre y  $\xi_{\vec{k}}(t)$  ( $\vec{k} \in \mathbb{R}^2$ ) su transformada de Fourier horizontal (consideramos el sistema como infinitamente extendido en la dirección horizontal). Para un fluido no viscoso Benjamin y Ursell[23] derivaron, en la aproximación lineal, una ecuación de Mathieu para  $\xi_{\vec{k}}(t)$  de la forma (el punto representa la derivada con respecto al tiempo)

$$\ddot{\xi}_{\vec{k}}(t) + \omega_k^2 \xi_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (31)$$

donde  $\omega_k^2 = k \tanh(kh) (g + \tau k^2 / \rho)$  es la relación de dispersión usual para ondas de superficie ( $g$  es la gravedad,  $\tau$  la tensión superficial y  $\rho$  la densidad). La ecuación (31) corresponde a un péndulo no amortiguado y la viscosidad débil ha sido introducida fenomenológicamente agregando un término disipativo a la ecuación de Benjamin-Ursell (BU) (31). En estos últimos años el caso de viscosidad fuerte ha interesado a muchos autores. Estudios numéricos de las ecuaciones de Navier-Stokes han sido hechas [24, 25] y comparadas con experimentos. Sin embargo ninguna ecuación simple, que juegue aquí el rol de la ecuación de BU, ha sido propuesta. Recientemente Cerda y Tirapegui (CT) derivaron tal ecuación [26, 27, 28, 29] para condiciones de borde realistas. La ecuación CT es de nuevo una ecuación tipo Mathieu que corresponde a un péndulo fuertemente amortiguado con coeficientes que difieren de los de la ecuación BU, válida para viscosidad débil. La ecuación de Cerda-Tirapegui describe asintóticamente, para viscosidad fuerte, la evolución lineal de la su-

perficie libre del fluido y nuestro propósito aquí es dar una prueba formal de la validez de esta descripción asintótica[30].



# Derivación de la Ecuación de Cerda-Tirapegui

Primero mostraremos la derivación de la ecuación CT para  $\xi_{\vec{k}}(t)$  cuando el fluido está en reposo y entonces mostraremos como se agrega el efecto de la vibración del plato (todos los detalles pueden ser encontrados en los trabajos previos [28, 29]). El punto de partida es la derivación de una ecuación exacta para  $\xi_{\vec{k}}(t)$  que es no local en el tiempo debido al efecto de la memoria. Comenzamos con la ecuación de Navier-Stokes para la velocidad  $\vec{v}(\vec{x}, z, t) = (v_1, v_2, v_3)$  con las condiciones de borde correctas para un fluido viscoso. Insistimos en este punto puesto que una ecuación no local para  $\xi_{\vec{k}}(t)$  ha sido derivada recientemente [33] pero imponiendo condiciones de borde no físicas en el fondo del plato lo que restringe la validez de la ecuación al caso de agua profunda. Nosotros imponemos en la superficie superior las condiciones cinemáticas usuales que relacionan  $\vec{v}$  con  $\xi(\vec{x}, t)$  y la igualdad de fuerzas

$$\sum_{l=1}^3 T_{jl} n_l = (p_o + \tau (1/R_1 + 1/R_2)) n_j \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

donde  $p_o$  es la presión atmosférica,  $(R_1, R_2)$  los radios de curvatura en las dos direcciones horizontales,  $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$  la normal unitaria a la superficie y  $T_{jl}$  el tensor de stress que tiene la forma  $T_{jl} = p \delta_{jl} - \rho \nu (\partial_j v_l - \partial_l v_j)$  donde  $\nu$  es la viscosidad y  $p$  la presión. Sobre el plato imponemos la condición de borde no deslizante  $\vec{v}(\vec{x}, z = -h, t) = 0$ . Escribimos  $\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi + \vec{u}$  y llamamos a  $\vec{u}(\vec{x}, z, t) = (u_1, u_2, u_3)$  la velocidad difusiva puesto que contendrá los efectos de bordes dependientes de la viscosidad que no pueden ser realizados por un término potencial. Después de linealizar en torno a la solución estacionaria ( $\vec{v} = 0, p_{st} = p_o - \rho g z$ ) de la ecuación de Navier-Stokes probamos que

linealmente uno tiene

$$(\partial_t + 2\nu k^2)^2 \xi_{\vec{k}}(t) + \omega_k^2 \xi_{\vec{k}}(t) + \frac{(\partial_t + 2\nu k^2)}{\cosh kh} u_{3\vec{k}}(z, t) \Big|_{z=-h} + 2\nu k \tanh kh \partial_z u_{3\vec{k}}(z, t) \Big|_{z=0} = 0 \quad (32)$$

Esta ecuación exacta relaciona  $\xi_{\vec{k}}(t)$  a la transformada de Fourier horizontal  $u_{3\vec{k}}(z, t)$  de la componente vertical  $u_3(\vec{x}, z, t)$  de la velocidad difusiva. La función  $u_{3\vec{k}}$  satisface la ecuación

$$[\partial_t + \nu(\partial_z^2 - k^2)] u_{3\vec{k}}(z, t) = 0 \quad (33)$$

con las condiciones de borde

$$u_{3\vec{k}}(z, t) \Big|_{z=0} = -2\nu k^2 \xi_{\vec{k}}(t) \quad (34)$$

$$[\sinh kh u_{3\vec{k}}(z, t) + k \cosh kh u_{3\vec{k}}(z, t)] \Big|_{z=0} = -k(\partial_t + 2\nu k^2) \xi_{\vec{k}}(t)$$

La ecuación (32) será nuestra ecuación exacta para  $\xi_{\vec{k}}(t)$  cuando  $u_{3\vec{k}}(z, t)$  sea expresado como un funcional de  $\xi_{\vec{k}}(t)$  resolviendo las ecuaciones (33) y (34). La interpretación física de (32) es clara: los efectos de los dos bordes corresponden a los dos últimos términos en (32) y el otro término adicional, con respecto a la ecuación BU no disipativa (31), es la traslación  $\partial_t \rightarrow \partial_t + 2\nu k^2$  de la derivada temporal que podemos identificar con el efecto de disipación por fricción en la región del movimiento potencial del fluido [28]. Puesto que estamos interesados en el comportamiento a tiempo largo, resolvemos la ecuación (33) tomando la condición inicial en  $t_o \rightarrow -\infty$  y obtenemos

$$u_{3\vec{k}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp[-\nu k^2(t - t')] K(t - t', z) \xi_{\vec{k}}(t') \quad (35)$$

donde el kernel  $K(t, z)$  puede ser calculado exactamente [28, 29] y el caracter no local en el tiempo, debido a los efectos de memoria de la ecuación autónoma para  $\xi_{\vec{k}}(t)$  obtenida replazando (35) en (32), es ahora explícita. Podemos escribir esta ecuación no local exacta formalmente como una serie infinita en la derivadas temporales  $\partial_t^{(n)} = \partial^n / \partial t^n$ ,  $n \geq 1$ . El resultado es

$$\sum_{n \geq 1} \tilde{c}_n \partial_t^{(n)} \xi_{\vec{k}}(t) + \omega_k^2 \xi_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (36)$$

donde los coeficientes  $\tilde{c}_n$  serán especificados más adelante. Si el plato está vibrando verticalmente su coordenada  $z_p$  será  $z_p(t) = -h + A \varphi(u = \Omega t)$ , donde  $\varphi(u)$  tiene período  $2\pi$ ,  $\max |\varphi(u)| = O(1)$ . La gravedad efectiva  $g_e(t)$  en el sistema de referencia en el cual el plato está en reposo es (el punto representa derivadas con respecto al tiempo)

$$g_e(t) = g + \ddot{z}_p(t) = g(1 + \Gamma \chi(\Omega t))$$

donde  $\chi(u) = \varphi''(u)$  (primas son derivadas con respecto a  $u$ ) y  $\Gamma = A \Omega^2 / g$ . La ecuación para esta situación es obtenida de (32) o (36) reemplazando  $g$  por  $g_e(t)$  en la expresión de  $\omega_k^2$ . Esto cambia  $\omega_k^2$  a  $\omega_k(t)^2$  dado por

$$\omega_k(t)^2 = \omega_k^2 (1 + \Gamma_k \chi(\Omega t)), \quad \Gamma_k = \frac{\Gamma}{1 + \tau k^2 / \rho g} \quad (37)$$

Los coeficientes  $\tilde{c}_n$  en (36) son ( $v \equiv kh$ )

$$\tilde{c}_n = \frac{(-1)^n}{(\nu k^2)^{n-2}} c_n(v), \quad , n \geq 1 \quad (38)$$

$$c_n(v) = \sum_{p \geq 1} \frac{a_p(v)}{u_p(v)^{n-1}}, \quad , n \geq 3 \quad (39)$$

$$c_2(v) = 1 + \sum_{p \geq 1} \frac{a_p(v)}{u_p(v)} \equiv \mathcal{F}(v) \leq \frac{3}{2} \quad (40)$$

$$c_1(v) \equiv -2 \mathcal{G}(v) \quad (41)$$

Aquí  $\mathcal{F}(v)$  es de orden  $O(1)$  para todo  $v$  mientras que  $\mathcal{G}(v) \approx 1$  para  $v \gtrsim 1$ ,  $\mathcal{G}(v) \approx \frac{3}{2v^2}$  para  $v \ll 1$ ,  $a_p(v)$  son funciones positivas adimensionales acotadas de  $v$  y ( $p \geq 1$ )

$$u_p(v) = 1 + \frac{\alpha_p(v)}{v^2}, \quad p^2 \pi^2 < \alpha_p(v) < ((2p+1)/2)^2 \pi^2 \quad (42)$$

donde  $\alpha_p(v)$  son funciones de  $v$ . Las expresiones explícitas de todas las funciones anteriores pueden ser vistas en [28, 29]. Reemplazando  $\xi_k = \exp(st)$  en (36) los valores de  $s$  están determinados por la relación de dispersión (ver también [24, 31])  $DR(s) = \tilde{F}(s) + \omega_k^2$  donde

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) &= (s + 2\nu k^2)^2 \\ &+ \nu^2 k^2 \frac{q^2 + k^2}{\cosh v} \frac{4qk \sinh v - (q^2 + k^2) \sinh(qh)}{k \sinh(qh) \cosh v - q \sinh v \cosh(qh)} \\ &+ 4\nu^2 k^3 \tanh v \frac{q \sinh(qh) \sinh v - k \cosh(qh) \cosh v}{k \sinh(qh) \cosh v - q \sinh v \cosh(qh)} \end{aligned} \quad (43)$$

con  $q \equiv \sqrt{s/\nu + k^2}$ . En términos matemáticos tenemos en (36) un operador pseudo-diferencial y su símbolo es la función  $DR(s)$ [32] y notamos que las propiedades (38-42) son consecuencia directa de una expansión de Mittag-Leofler [28, 29] de  $\tilde{F}$ . Consideramos ahora la ecuación (36) con forzamiento ( $\omega_k^2$  es reemplazado por  $\omega_k(t)^2$  dado por (37)): reemplazando  $u = \Omega t$ ,  $\partial_t = \Omega \partial_u$ , y multiplicando por  $(\nu k^2)^{-2}$  podemos escribir (36) en la forma adimensional

$$\sum_{n \geq 1} (-\eta)^n c_n(v) \partial_u^{(n)} \xi_k(u) + c_o(u, v) \xi_k(u) = 0 \quad (44)$$

$$c_o(u, v) = \frac{\omega_k(t)^2}{(\nu k^2)^2} = \frac{\tanh v (1 + \beta v^2)}{\alpha v^3} (1 + \Gamma_k \chi(u)) \quad (45)$$

$$\varepsilon \equiv \frac{\Omega h^2}{\nu}, \quad \alpha \equiv \frac{\nu^2}{g h^3}, \quad \beta \equiv \frac{\tau}{\rho g h^2}, \quad \eta \equiv \frac{\varepsilon}{v^2} \quad (46)$$

En las ecuaciones la dependencia en los parámetros adimensionales ( $\varepsilon, \alpha, \beta, v, \Gamma$ ) es exhibida explícitamente. La ecuación Cerda-Tirapegui es obtenida de (44) manteniendo solo los primeros tres términos, i.e. hasta  $N = 2$  en la suma. En lo que sigue derivaremos las condiciones matemáticas que permiten el uso de la ecuación truncada cerca de la inestabilidad. Si ponemos  $p = -\eta \partial_u$  la ecuación (44) puede ser escrita

$$H(u, p = -\eta \partial_u) \xi_k(u) = 0$$

con

$$H(u, p) = \sum_{n \geq 1} c_n(v) p^n + c_o(u, v) \quad (47)$$

Nuestro interés está en el comportamiento asintótico para  $\eta \ll 1$ . Hacemos un ansatz tipo WKB

$$\begin{aligned} \xi_k &= e^{-\frac{1}{\eta} \phi(u, \eta)}, \\ \phi(u, \eta) &= \phi^{(0)}(u) + \eta \phi^{(1)}(u) + \eta^2 \phi^{(2)}(u) + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

Reemplazando en (44) obtenemos una jerarquía de ecuaciones para  $\{\phi^{(j)}(u)\}$ . El comportamiento dominante está dado por las funciones  $\phi^{(0)}(u)$  y  $\phi^{(1)}(u)$  que satisfacen las ecuaciones

$$H(u, \partial_u \phi^{(0)}(u)) = 0 \quad (49)$$

$$\left( \frac{\partial H(u, p)}{\partial p} \Big|_{p=\partial_u \phi^{(0)}} \right) \partial_u \phi^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 H(u, p)}{\partial p^2} \Big|_{p=\partial_u \phi^{(0)}} \right) \partial_u^{(2)} \phi^{(0)} \quad (50)$$

Los coeficientes  $c_n(v)$  en  $H(u, p)$  están dados por (39-41) y puesto que  $u_1(v) < u_2(v) < \dots < u_j(v) < \dots$  uno tiene ( $\mu \equiv u_1(v)^{-1}$ )

$$c_n(v) \leq \mu^{n-2} \sum_{p \geq 1} \frac{a_p(v)}{u_p(v)} \quad , n \geq 3 \quad (51)$$

Debido a (42)  $u_1(v) > 1 + \frac{\alpha_1^{min}}{v^2}$ , y entonces  $\mu < 1/(1 + \frac{\alpha_1^{min}}{v^2}) < 1$  para  $v \lesssim 1$ . Notemos que  $\mu$  crece si  $v$  crece pero siempre uno tiene  $\mu < 1$ . Consideraremos ahora  $\mu$  como parámetro de expansión pequeño y vemos entonces que podemos esperar que el término principal sea una buena aproximación cuantitativa para  $v \lesssim 1$  mientras que para  $v$  grande podemos esperar al menos un acuerdo cualitativo con la ecuación no local completa (44). Usando (51) podemos escribir

$$c_n(v) = \mu^{n-2} b_n(v) \quad , n \geq 3,$$

con  $0 < b_n(v) < 1/2$  debido a (51) y (40). Expandiendo  $\phi^{(j)}(u)$ ,  $j \geq 1$ , en la forma

$$\phi^{(j)}(u) = \phi_0^{(j)}(u) + \mu \phi_1^{(j)}(u) + \mu^2 \phi_2^{(j)}(u) + \dots$$

y reemplazando en las fórmulas (49,50) obtenemos para los términos principales  $(\phi_0^{(0)}(u), \phi_0^{(1)}(u))$  las ecuaciones

$$c_2(\partial_u \phi_0^{(0)})^2 + c_1(\partial_u \phi_0^{(0)}) + c_0(u, v) = 0 \quad (52)$$

$$(c_1 + 2c_2 \partial_u \phi_0^{(0)}) \partial_u \phi_0^{(1)} = \frac{1}{2} c_2 \partial_u^{(2)} \phi_0^{(0)} \quad (53)$$

La solución de (44) en esta doble asintótica ( $\eta$  y  $\mu$  pequeños) es entonces

$$\xi_{\bar{k}} = \exp \left[ -\frac{1}{\eta} (\phi_0^{(0)}(u) + \eta \phi_0^{(1)}(u)) \right]$$

Recordamos ahora que la ecuación Cerda-Tirapegui es obtenida truncando la ecuación (36) ó (44) hasta  $n = 2$ . De (44) uno obtiene la ecuación CT

$$\eta^2 c_2(v) \partial_u^{(2)} \xi_{\bar{k}} + \eta c_1(v) \partial_u \xi_{\bar{k}} + c_0(u, v) \xi_{\bar{k}} = 0 \quad (54)$$

Para (54) hacemos un ansatz WKB escribiendo

$$\xi_{\bar{k}} = \exp \left[ -\frac{1}{\eta} (\psi^{(0)}(u) + \eta \psi^{(1)}(u) + \dots) \right]$$

y reemplazando en (54) encontramos inmediatamente que las funciones  $\psi^{(0)}(u)$  y  $\psi^{(1)}(u)$  satisfacen las ecuaciones (52) y (53) demostrando así que la ecuación CT da el correcto comportamiento asintótico de la ecuación no local completa (36) cuando  $\eta$  y  $\mu$  son cantidades pequeñas (recordemos que  $\mu$  es siempre menor que 1 y se aproxima a este valor solo en el límite  $v \rightarrow \infty$ ). Esto finaliza entonces nuestra discusión de las condiciones de validez de la ecuación CT.

# Solución de la ecuación CT con Función Step

Vamos ahora a la segunda parte de este capítulo en el cual discutiremos como las condiciones de validez previas pueden ser expresadas en términos de parámetros físicos. La ecuación CT es

$$\ddot{\xi}_{\vec{k}}(t) + 2\bar{\gamma}_k \dot{\xi}_{\vec{k}}(t) + \bar{\omega}_k^2 (1 + \Gamma_k \chi(\Omega t)) \xi_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (55)$$

$$\bar{\gamma}_k = \frac{\nu k^2 \mathcal{G}(kh)}{2\mathcal{F}(kh)}, \quad \bar{\omega}_k = \frac{\omega_k^2}{\mathcal{F}(kh)}, \quad \Gamma_k = \frac{\Gamma}{1 + \frac{\tau k^2}{\rho g}} = \frac{\Gamma}{1 + \beta v^2} \quad (56)$$

Si escribimos (55) con los mismos parámetros  $(\varepsilon, \alpha, \beta, v, \Gamma)$  que aparecen en la ecuación (44) tenemos

$$\partial_u^{(2)} \xi_{\vec{k}} + \frac{v^2 \mathcal{G}(v)}{\varepsilon \mathcal{F}} \partial_u \xi_{\vec{k}} + \frac{v(1 + \beta v^2) \tanh v}{\alpha \varepsilon^2 \mathcal{F}(v)} \left( 1 + \frac{\Gamma}{1 + \beta v^2} \chi(u) \right) \xi_{\vec{k}} = 0 \quad (57)$$

Nuestra estrategia sera estudiar la ecuación CT (desde ahora siempre estaremos hablando de la ecuación CT) y determinar los parámetros  $(\varepsilon, \alpha, \beta)$  definidos en (46) para que la inestabilidad surja y el valor umbral  $\Gamma_c$  del parámetro de control y el número de onda crítico  $k_c$ . Una vez que  $k_c$  es conocido conocemos  $v_c = k_c h$  y podemos determinar  $\eta = \frac{\varepsilon}{v_c^2}$  y chequear las dos condiciones para la validez de (55), i.e.  $\eta = \frac{\varepsilon}{v_c^2} \ll 1$ ,  $\mu = (1 + \alpha_1(v_c)/v_c^2)^{-1} \ll 1$ , con  $\pi^2 < \alpha_1(v_c) < \frac{9}{4}\pi^2$ . Si  $\eta \lesssim 1$ , y puesto que  $\mu$  es estrictamente menor que uno para todo  $v_c$  finito, podemos esperar al menos validez cualitativa de

la ecuación CT para el propósito de la determinación del umbral de la inestabilidad. Consideremos primero la ecuación para un péndulo amortiguado escrito en la forma

$$\ddot{\xi}(t) + 2\gamma\dot{\xi}(t) + \omega^2(1 + \Gamma^{(o)}\chi(\Omega t))\xi(t) = 0 \quad (58)$$

Podemos obtener resultados exactos en el estudio de (58) si tomamos para  $\chi(u)$  una función step de período  $2\pi$  definido por  $\chi(u) = 1, -\pi/2 \leq u < \pi/2$ ;  $\chi(u) = -1, \pi/2 \leq u < 3\pi/2$ , y ciertamente podemos esperar que el escenario obtenido por esta elección especial de  $\chi(u)$  será el general. Definimos  $\hat{\gamma} \equiv \gamma/\omega$ ,  $\sigma \equiv \omega/\Omega$  y notamos que en el análisis del comportamiento de la ecuación (58) es útil distinguir dos casos:

a)  $\Gamma^{(o)} > |1 - \hat{\gamma}^2|$  que está relacionado a amortiguamiento fuerte (viscosidad fuerte en el problema de Faraday) puesto que  $\Gamma^{(o)} > 1$  para  $\hat{\gamma} = 0$ ;  
 b)  $\Gamma^{(o)} < |1 - \hat{\gamma}^2|$  en cuyo caso uno puede demostrar que cuando  $\hat{\gamma}$  va a cero el valor umbral de  $\Gamma^{(o)}$  también se anula como en amortiguamiento débil. Nos concentraremos en  $\Gamma^{(o)} > |1 - \hat{\gamma}^2|$ . La cantidad relevante en el análisis es  $(\tilde{\sigma} \equiv \sigma\sqrt{\Gamma^{(o)} - 1 + \hat{\gamma}^2}, \tilde{k} \equiv \sigma\sqrt{\Gamma^{(o)} + 1 - \hat{\gamma}^2})$

$$X = \cosh(\pi\tilde{\sigma}) \cos(\pi\tilde{k}) + \frac{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{k}^2}{2\tilde{\sigma}\tilde{k}} \sinh(\pi\tilde{\sigma}) \sin(\pi\tilde{k}) \quad (59)$$

donde  $(\tilde{\sigma}, \tilde{k})$  son cantidades reales puesto que  $\Gamma^{(o)} > |1 - \hat{\gamma}^2|$ . El análisis de Floquet de (58) nos dice que la condición para la inestabilidad es  $|X| \geq \cosh(2\pi\sigma\hat{\gamma})$ . Consideremos las "curvas resonantes"  $\tilde{\mathcal{C}}(n)$  definidas por  $\tilde{k} = n$  que serán representadas en el plano  $(\Gamma^{(o)}, \sigma)$  por las ecuaciones ( $n=1, 2, 3, \dots$ )

$$\Gamma^{(o)} = \frac{n^2}{\sigma^2} - 1 + \hat{\gamma}^2 \equiv \tilde{f}_n(\sigma) \quad (60)$$

En la curva  $\tilde{\mathcal{C}}(n)$  tenemos  $X = (-1)^n \cosh(\pi\tilde{\sigma})$  y la condición de inestabilidad  $|X| \geq \cosh(2\pi\sigma\hat{\gamma})$  nos dice que en cada curva resonante debemos tener

$$\Gamma^{(o)} \geq 1 + 3\hat{\gamma}^2 \equiv \tilde{f}(\sigma) \quad (61)$$



para ser inestable y puesto que  $\tilde{f}(\sigma)$  no depende de  $\sigma$  la curva marginal  $\tilde{\mathcal{C}}$  dada por  $\Gamma^{(o)} = 1 + 3\hat{\gamma}^2$  es una línea paralela al eje  $\sigma$  en el plano  $(\Gamma^{(o)}, \sigma)$ . Puesto que  $X$  cambia de signo entre las curvas  $\tilde{\mathcal{C}}_n$  y  $\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}$  debe haber una curva entremedio para la cual  $X = 0$ . Esto nos dice que tendremos lenguas de inestabilidades disjuntas entorno a cada curva resonante y puede ser verificado que el mínimo de las lenguas están casi en la línea  $\Gamma^{(o)} = 1 + 3\hat{\gamma}^2$  (por simplicidad diremos que ellas están sobre esta línea). Ahora usaremos estos resultados en la ecuación (55) donde  $(\bar{\gamma}_k/\bar{\omega}_k, \Gamma_k, \bar{\omega}_k/\Omega)$  juega el rol de  $(\hat{\gamma}, \Gamma^{(o)}, \sigma)$  con

$$\frac{\bar{\gamma}_k^2}{\bar{\omega}_k^2} = \frac{\alpha v^3 \mathcal{G}(v)^2}{\mathcal{F}(v) \tanh(v)(1 + \beta v^2)} \quad (62)$$

$$\frac{\Omega^2}{\bar{\omega}_k^2} = \alpha \varepsilon^2 \frac{\mathcal{F}(v)}{v \tanh(v)(1 + \beta v^2)} \quad (63)$$

Consideremos ahora en el plano  $(\Gamma, v)$  las curvas resonantes  $\mathcal{C}(n)$  (correspondientes a  $\Gamma^{(o)} = \tilde{f}_n(\sigma)$ ) y la curva marginal  $\mathcal{C}$  (correspondiente a  $\Gamma^{(o)} = 1 + 3\hat{\gamma}^2$ ). Uno tiene

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1 + \beta v^2)(n^2 \varepsilon^2 \frac{\alpha}{1 + \beta v^2} \frac{\mathcal{F}(v)}{v \tanh(v)} + \frac{\alpha}{1 + \beta v^2} \frac{v^3 \mathcal{G}(v)^2}{\mathcal{F}(v) \tanh(v)} - 1) \\ &\equiv f_n(v; \alpha, \beta, \varepsilon) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\Gamma = 1 + \beta v^2 + 2\alpha H(v) \equiv f(v; \alpha, \beta), H(v) \equiv \frac{3}{2} \frac{v^3 \mathcal{G}(v)^2}{\mathcal{F}(v) \tanh(v)} \quad (65)$$

donde (64) son las curvas  $\mathcal{C}(n)$  y (65) la curva  $\mathcal{C}$ . Estas curvas se muestran en la Figura 1 para los valores  $(\alpha = 0.133, \beta = 1.437, \varepsilon = 9.856)$ . El mínimo  $(v^*, \Gamma^*)$  de la curva marginal es obtenido de la ecuación  $f'(v) = 0$  que da

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{H'(v)}{v} \equiv \tilde{H}(v) \quad (66)$$

Resolviendo esta ecuación en que  $\tilde{H}(v)$  es una función solo de  $v$ , obtenemos el mínimo  $v^*(\frac{\beta}{\alpha})$  en la Figura 11. Hemos graficado la función  $v^*(\frac{\beta}{\alpha})$  en la Figura 12. Esta función decrece monotonamente y tiende a cero como  $(\beta/\alpha)^{-1/4}$  para  $(\beta/\alpha)$  grande.

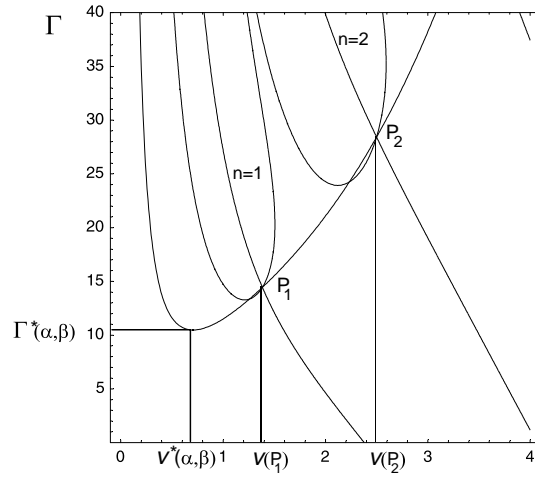


Figura 11: La curva marginal con su mínimo  $(v^*, \Gamma^*)$  y las dos primeras curvas resonantes.

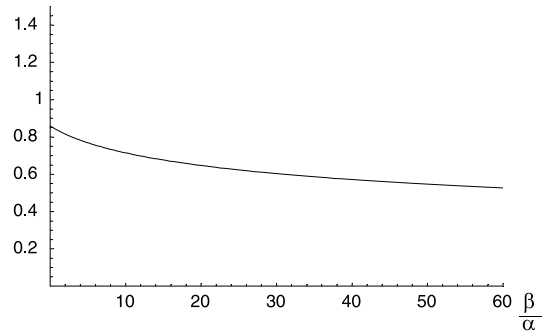


Figura 12: La curva  $v^*(\beta/\alpha)$

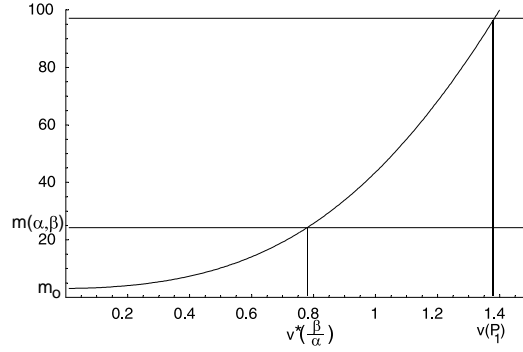


Figura 13: La función  $M(v; \alpha, \beta)$  para  $\alpha = 0.133$ ,  $\beta = 1.437$

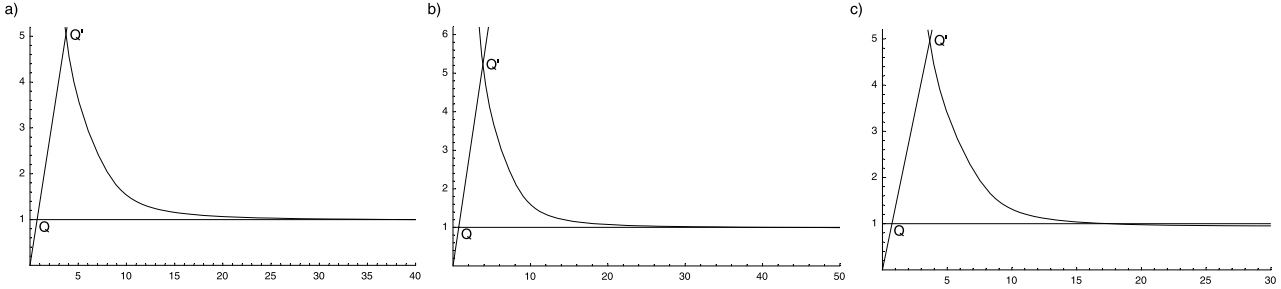


Figura 14: El parámetro  $\eta$  como una función de  $\varepsilon$  para a) ( $\alpha = 2.5, \beta = 1$ ), b) ( $\alpha = 10, \beta = 5$ ), c) ( $\alpha = 1000, \beta = 5$ )

Podemos determinar los valores  $(v(P_1), v(P_2), \dots)$  de la Figura 11 eliminando  $\Gamma$  entre (64) y (65). Esto da

$$\boxed{n^2 \varepsilon^2 = 2 \left[ \frac{v^4 \mathcal{G}(v)^2}{\mathcal{F}(v)^2} + \frac{1 + \beta v^2}{\alpha} \frac{v \tanh(v)}{\mathcal{F}(v)} \right]} \equiv M(v; \alpha, \beta) \quad (67)$$

Hemos dibujado esta función  $M(v; \alpha, \beta)$  para  $(\alpha = 0.133, \beta = 1.437)$  en la Figura 13. El valor  $m_0$  de  $M(v; \alpha, \beta)$  para  $v = 0$  y el comportamiento principal para  $v \rightarrow \infty$  son ambos independientes de  $(\alpha, \beta)$  y uno tiene  $m_0 = 25/8$  y  $M(v; \alpha, \beta) \approx \frac{9}{8}v^4$  cuando  $v \rightarrow \infty$ . Entonces cuando  $(\alpha, \beta)$  son dados calculamos  $v^*(\beta/\alpha)$  de la Figura 12 y usando la Figura 13 determinamos el valor importante  $m(\alpha, \beta)$ . Hemos distinguido dos casos:

a) Si  $\varepsilon^2 < m(\alpha, \beta)$  tenemos que  $v_c \approx v^*(\beta/\alpha) \leq 0.86$  y puesto que  $v^*(\beta/\alpha)$  decrece suavemente (como  $(\beta/\alpha)^{-1/4}$ ) tenemos que  $v_c = O(1)$  a

menos que  $(\beta/\alpha)$  sea muy grande, y entonces  $\eta = \varepsilon/v_c^2 \approx \varepsilon$  y la ecuación CT sera una aproximación cuantitativa si  $\varepsilon \ll 1$  y podemos esperar un acuerdo cualitativo cuando  $\varepsilon$  llega ser de  $O(1)$ . En este caso el segundo parámetro  $\mu < (1 + \alpha_1^{\min}/v_c^2) \approx (1 + \pi^2)^{-1} \approx 10^{-1}$  es siempre pequeño;

b) Si  $\varepsilon^2 > m(\alpha, \beta)$  tendremos  $v_c = v(P_1) > v^*(\beta/\alpha)$  (ésta es la situación dibujada en la Figura 13) y uno puede preguntar por el comportamiento de  $\eta = \varepsilon/v_c^2$  para  $\varepsilon$  grande. La respuesta está dada por la ecuación (66) que nos dice que  $(\varepsilon/v_c^2)^2 \approx 8/9$  cuando  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Vemos entonces que para  $\varepsilon$  grande el parámetro  $\eta \lesssim 1$  y también tendremos  $\mu < 1$  (aunque puede ser muy cercano a uno si  $v_c$  es suficientemente grande) y por lo tanto podemos esperar que la ecuación CT será válida al menos cualitativamente.

Podemos resumir nuestro análisis graficando  $\eta$  como una función de  $\varepsilon$  para diferentes valores de  $(\alpha, \beta)$  como está hecho en la Figura 14 donde podemos ver que la ecuación CT puede ser una descripción cualitativa para casi todos los valores de  $\varepsilon$  puesto que  $\eta$  es de  $O(1)$ , excepto para un pequeño intervalo en torno al punto  $Q'$ , o mucho más pequeño que uno cuando  $\varepsilon$  es muy pequeño. Los valores de  $(\alpha, \beta)$  para los cuales los puntos  $Q$  y  $Q'$  se aproximan entre sí son los más favorables para tener  $\eta \lesssim O(1)$  en casi todo el rango de variación de  $\varepsilon$ . Se dio una relación explícita entre  $\alpha$  y  $\beta$  para que esto ocurra en el marco de la solución WKB de la ecuación CT en [28]. En conclusión podemos tener  $\eta \lesssim 1$  y  $\mu < 1$  para cualquier  $\varepsilon$  pero la condición estricta para la validez de la ecuación CT, i.e.  $\eta \ll 1$ , es solo verificada para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. El parámetro  $\eta = \Omega/\nu k_c^2 = \varepsilon/v_c^2$  que controla la validez de la ecuación CT corresponde a  $(l/\delta)^2$  donde  $\delta = (\nu/\Omega)^{1/2}$  y  $l$  es la longitud de penetración del movimiento definido en [28, 29] puesto que cuando  $\varepsilon^2 < m(\alpha, \beta)$  uno tiene  $\eta \approx \varepsilon = \frac{\Omega h^2}{\nu}$  y  $l = h$  y cuando  $\varepsilon^2 > m(\alpha, \beta)$  se tiene  $v_c > v^*(\beta/\alpha) = 0.86$  y tan pronto como  $v_c > 1$  podemos estimar  $l \approx k_c^{-1}$  y entonces  $\eta = (l/\delta)^2$ .

## Parte III

# Dinámica de Burbujas en la Ecuación de Cahn-Hilliard Unidimensional



# Introducción

En esta parte estudiaremos la evolución de los sistemas descritos por la ecuación de Cahn-Hilliard unidimensional [41, 42].

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  el dominio espacial de un sistema físico. En general, la ecuación de Cahn-Hilliard surge en sistemas con un parámetro de orden conservado  $u : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (asociado a una cantidad "global conservada"  $\int_{\Omega} u dx$ ) que, por lo tanto, cumple una ecuación de continuidad

$$\partial_t u + \nabla \cdot J = 0$$

en donde  $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es el flujo asociado a este parámetro, en el caso de aleaciones binarias  $u$  es proporcional al número de partículas o a la densidad y el flujo es proporcional al gradiente de la diferencia de los potenciales químicos  $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$J = -m \nabla \mu$$

donde  $m \in \mathbb{R}_+$  es la constante de proporcionalidad, denominada la movilidad. La definición del potencial químico es dada a partir de una energía libre  $\mathcal{F} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $\Gamma \subset C^2(\Omega, \mathbb{R})$ )

$$\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u(x)}$$

Reescalando el tiempo podemos tomar  $m = 1$  con lo cual obtenemos la ecuación

$$\partial_t u = \nabla^2 \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u(x)} \quad (68)$$

Si  $\mathcal{F}$  es acotado inferiormente entonces resulta ser un funcional de Lyapunov para sistemas con condiciones de borde periódicas o de flujo nulo pues

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u(x)} \frac{du}{dt} dx = \int_{\Omega} \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u(x)} \nabla^2 \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u(x)} dx = - \int_{\Omega} \left( \nabla \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u(x)} \right)^2 dx \leq 0.$$

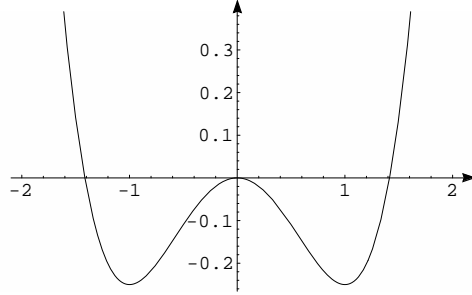


Figura 15: Gráfico de la función  $f(u)$  para  $\varepsilon = -1$ .

Además el funcional de Lyapunov  $\mathcal{F}$  más simple con dependencia espacial e isotropía es de la forma

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} (f(u) + \frac{1}{2}(\nabla u)^2) dx \quad (69)$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^\infty$ , con lo cual nos queda la ecuación siguiente

$$\partial_t u = \nabla^2(f'(u) - \nabla^2 u)$$

En el caso particular de sistemas biestables, la función  $f(u)$  más simple que los describe es

$$f(u) = \varepsilon \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ , que nos lleva a la clásica ecuación de Cahn-Hilliard

$$\partial_t u = \nabla^2(\varepsilon u + u^3 - \nabla^2 u) \quad (70)$$

Todo lo anterior puede ser generalizado para  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  [43]. La primera vez que apareció esta ecuación fue en 1958 en el estudio de separación de fases en aleaciones binarias debido a un brusco enfriamiento [48] y de ahí ha aparecido en varios otros sistemas como por ejemplo: en el crecimiento de cristales entre dos fases termodinámicas en competencia [49], en la dinámica de interfases de paredes de Ising en cristales líquidos [50, 51], en descarga en gases [52], etc. La razón de esto, como veremos, es la universalidad de este modelo.

El caso unidimensional de la ecuación de Cahn-Hilliard, contrariamente a lo que podría pensarse, resulta ser muy relevante ya que surge en forma



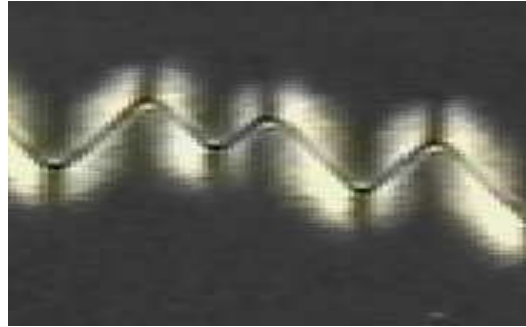


Figura 16: Interfase de paredes de Ising entre dos estados simétricos en un cristal líquido nemático sometido a un campo magnético homogéneo

genérica en sistema unidimensionales bajo algunas simetrías y suponiendo expansión en gradientes, como veremos a continuación [51].

Una forma característica de una ecuación de evolución de un sistema dinámico espacial unidimensional descrito por un parámetro  $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la siguiente

$$\partial_t P = F(t, x, P, P_x, P_{xx}, P_{xxx}, \dots)$$

( $P_x$  significa derivada parcial con respecto a  $x$ ) es decir, la evolución de la variable  $P$  en el tiempo, en general, depende del tiempo, de la posición, del valor de  $P$  y del valor de todas las derivadas espaciales de  $P$ . Ahora, si nos damos las siguientes simetrías

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow P + P_0 & P &\longrightarrow -P \\ x &\longrightarrow x + x_0 & x &\longrightarrow -x \\ t &\longrightarrow t + t_0 \end{aligned}$$

que son características de las interfases entre dos estados energéticamente iguales, vemos que la ecuación de evolución no puede depender explícitamente de  $t$ ,  $x$  ni de  $P$ , y que además el operador de derivadas espaciales debe aparecer en combinaciones pares. Si, por otro lado, hacemos una expansión en gradientes de la función  $F$ , i.e. suponemos que las derivadas espaciales de orden superior son cada vez más pequeñas ya que típicamente  $\partial_x \sim 1/L$  (donde  $L$  es el tamaño del sistema), obtenemos que los términos

más relevantes, hasta cuarto orden, son

$$\begin{aligned} \partial_t P = & \alpha P_x + \beta P_x^2 + \varepsilon P_{xx} + \gamma P_x^3 + \delta P_x P_{xx} + \eta P_{xxx} \\ & + \kappa P_x^4 + \sigma P_{xx}^2 + \lambda P_x^2 P_{xx} + \mu P_x P_{xxx} + \nu P_{xxxx} + \mathcal{O}(\partial_x^5) \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \varepsilon, \gamma, \delta, \eta, \kappa, \sigma, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ , combinando esto con las simetrías vemos que  $\alpha = \gamma = \delta = \eta = 0$  pues violan la simetría  $x \rightarrow -x$  y además  $\beta = \delta = \kappa = \sigma = \mu = 0$  pues violan la simetría  $P \rightarrow -P$ , con lo cual nos queda que

$$\partial_t P = \varepsilon P_{xx} + \lambda P_x^2 P_{xx} + \nu P_{xxxx} + \mathcal{O}(\partial_x^6)$$

Si el parámetro  $\varepsilon$  es positivo, de orden uno, y consideramos un sistema de talla finita, basta con considerar solo el primer término de la expansión con lo que nos queda la ecuación de difusión

$$\partial_t P = \varepsilon P_{xx}$$

lo que nos dice que genéricamente las interfases tienden relajar hacia la solución plana cualquier imperfección. En otras palabras, la solución plana es marginalmente estable. Por otro lado, si el coeficiente de difusión  $\varepsilon$  se vuelve negativo (una antidifusión) o pequeño, entonces se deben considerar los siguientes términos en la expansión y para que el sistema sature, se requiere que el parámetro  $\lambda$  sea positivo y que el parámetro  $\nu$  sea negativo, además reescalando  $P$  y  $x$  podemos dejar estos parámetros como  $\lambda = 3$  y  $\nu = -1$ . Luego la ecuación se escribe

$$\partial_t P = \varepsilon P_{xx} + 3P_x^2 P_{xx} - P_{xxxx}$$

En el caso  $\varepsilon < 0$  la solución plana deja de ser estable. Debido a la simetría  $P \rightarrow P + P_0$  resulta que  $P$  no es un buen parámetro de orden ya que no tiene sentido darse  $P$  pequeño, en cambio el gradiente de  $P$  si es un buen parámetro de orden por lo cual definimos  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $u \equiv P_x$  y derivando la ecuación anterior podemos deducir inmediatamente una ecuación para esta cantidad

$$\boxed{\partial_t u = \partial_x^2 (\varepsilon u + u^3 - \partial_x^2 u)} \quad (71)$$

la cual se puede escribir en términos de un funcional de Lyapunov  $\mathcal{F} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , como se ve en la ecuación (68)

$$\partial_t u = \partial_{xx} \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u(x)}$$

en donde

$$\mathcal{F}[u] = \int \varepsilon \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 dx \quad (72)$$

y, por lo tanto, tenemos la ecuación de Cahn-Hilliard unidimensional, lo cual dice que, después de la ecuación de difusión, la ecuación de Cahn-Hilliard unidimensional es lo siguiente más genérico que aparece en los sistemas con interfaces unidimensionales que respetan las simetrías.

Una exitosa estrategia para estudiar ecuaciones diferenciales parciales es fijarse en soluciones tipo defecto o partícula [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40], que tiene la propiedad de ser localizadas en el espacio. Si después de un transiente, una solución constituida de un cierto número de estas soluciones localizadas es establecida, podemos describir la dinámica ulterior del sistema a través de la evolución de estas soluciones debido a su mutua interacción y esta evolución resulta estar determinada, en muchos casos, por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias [35, 36]. Usaremos esta estrategia para estudiar la ecuación de Cahn-Hilliard unidimensional (71) [41, 42]. Recordemos algunos hechos bien conocidos de las soluciones tipo partículas. Estas soluciones aparecen como órbitas homoclinas o heteroclinas de un sistema dinámico espacial, que corresponden a soluciones inhomogéneas en la cual la simetría de invariancia traslacional es quebrada en una pequeña región localizada del espacio [38] y juegan un rol fundamental en la compleja dinámica espacio-temporal [44, 45, 46]. Algunos ejemplos son: kink, pulsos, solitones, burbujas y estructuras localizadas [35, 36, 37, 47].



# Análisis Lineal de las Soluciones Planas

## Condición de Borde Periódica

Trivialmente se ve que toda función de la forma  $u(x) = c$  con  $c \in \mathbb{R}$  constante es solución de la ecuación de Cahn-Hilliard, pero de todas las constantes, solo tres tienen especial interés (para  $\varepsilon = -|\varepsilon| < 0$ ) ya que extremizan el funcional de Lyapunov (72) y por lo tanto van a tener una participación relevante en la dinámica del sistema, estas constantes son

$$\begin{aligned}u_1 &= 0 \\u_2 &= -\sqrt{|\varepsilon|} \\u_3 &= +\sqrt{|\varepsilon|}\end{aligned}$$

Si hacemos una pequeña perturbación sobre estas soluciones ( $u(x, t) = u_i + v_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) obtenemos a primer orden para  $v_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\partial_t v_1 &= \partial_{xx}(-|\varepsilon| v_1 - \partial_{xx} v_1) \\ \partial_t v_2 &= \partial_{xx}(2|\varepsilon| v_2 - \partial_{xx} v_2) \\ \partial_t v_3 &= \partial_{xx}(2|\varepsilon| v_3 - \partial_{xx} v_3)\end{aligned}$$

Luego tomando

$$v_i(x, t) = e^{\sigma t + ipx}$$

$\sigma, p \in \mathbb{R}$ , llegamos a las relaciones de dispersión siguientes: para  $u_1$

$$\sigma = -p^2(-|\varepsilon| + p^2) \tag{73}$$

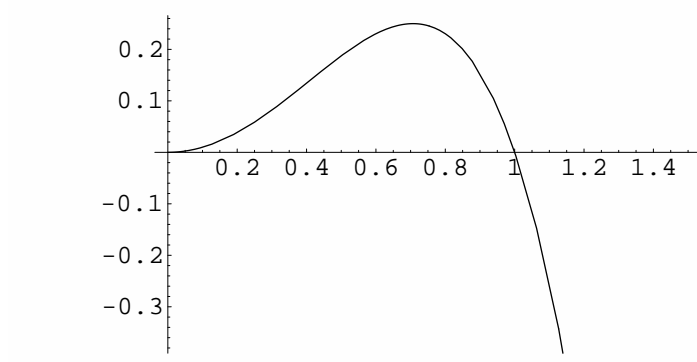


Figura 17: Relación de dispersión  $\sigma$  vs  $p$  para  $u_1$

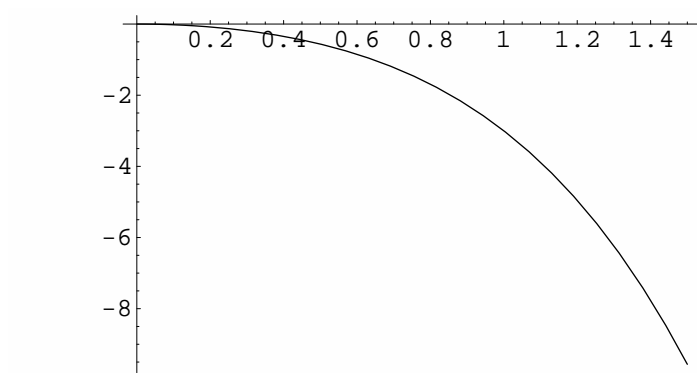


Figura 18: Relación de dispersión  $\sigma$  vs  $p$  para  $u_2$  y  $u_3$ .

y para  $u_2$  y  $u_3$

$$\sigma = -p^2(2|\varepsilon| + p^2) \quad (74)$$

Vemos de estas relaciones que  $u_2$  y  $u_3$  son marginalmente estables y los modos con que relaja, en una caja de largo  $L$  son

$$p_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\sigma_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(2|\varepsilon| + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)$$

$n \in \mathbb{N}$ , lo mismo ocurre con la parte plana que une a dos soluciones localizadas tipo kink (ver figura (21)) en donde ahí  $L$  es la distancia entre esos dos kink y ahí el modo más lento será

$$p_n = \frac{\pi}{L}$$

$$\sigma_n = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(2|\varepsilon| + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)$$

En el caso de  $u_1$  vemos que es inestable bajo la condición de que la caja debe ser lo suficientemente grande como para que pueda albergar, por lo menos, un modo inestable, es decir, debe existir

$$p_n < \sqrt{|\varepsilon|}$$

pues solo en este caso hay un  $\sigma$  positivo, por otro lado

$$p_n = \frac{n\pi}{L}$$

donde  $L$  es el largo de la caja,  $n$  es un entero y por lo tanto, para que  $u_1$  se inestabilice el largo mínimo de la caja debe cumplir que

$$L > \frac{\pi}{\sqrt{|\varepsilon|}}$$

además si la caja es muy grande habrán muchos modos inestables de los cuales el más inestable se impondrá, aquel que maximice  $\sigma$ , i.e. el más cercano a

$$p_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}$$

que corresponde a una longitud característica inicial entre kink

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}}$$

y que determina el número de burbujas que aparecerán inicialmente (ver figura (31))

$$L \approx N \lambda_c$$

$$N \approx \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}$$

La modulación que se observa en la aparición de las burbujas en la figura 31 se explica por que en caja finita los modos están discretizados luego, genéricamente, el máximo en la relación de dispersión (73) no es alcanzado y por lo tanto este máximo estará flanqueado por los dos modos más inestables

$$p_n < p_{\max} < p_{n+1}$$

entonces

$$v(x, t) \approx e^{\sigma_n t + i p_n x} + e^{\sigma_{n+1} t + i p_{n+1} x}$$

como los modos están justo a ambos lados del máximo  $\sigma_n \approx \sigma_{n+1} \lesssim \sigma_{\max} = \frac{|\varepsilon|^2}{4}$

$$\begin{aligned} v(x, t) &\approx e^{\sigma_{\max} t} (e^{i p_n x} + e^{i p_{n+1} x}) \\ &= e^{|\varepsilon|^2 t/4} (e^{i(p_n x + p_{n+1} x)/2} e^{i(p_n x - p_{n+1} x)/2} + e^{i(p_n x + p_{n+1} x)/2} e^{-i(p_n x - p_{n+1} x)/2}) \\ &= e^{|\varepsilon|^2 t/4} e^{i(p_n x + p_{n+1} x)/2} (e^{i(p_n x - p_{n+1} x)/2} + e^{-i(p_n x - p_{n+1} x)/2}) \\ &\approx e^{|\varepsilon|^2 t/4} e^{i p_{\max} x} 2 \cos((p_n x - p_{n+1} x)/2) \end{aligned}$$

y

$$p_n x - p_{n+1} x = \pi/L$$

entonces

$$v(x, t) \approx 2 e^{|\varepsilon|^2 t/4} e^{i \sqrt{|\varepsilon|/2} x} \cos\left(\frac{\pi}{2L} x\right).$$



## Condición de Borde Flujo Nulo

Las condiciones de borde de flujo nulo son las siguientes

$$\begin{aligned}\partial_x u(a) &= \partial_x u(b) = 0 \\ \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u(x)}(a) &= \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u(x)}(b) = 0\end{aligned}$$

que son equivalentes a

$$\begin{aligned}\partial_x u(a) &= \partial_x u(b) = 0 \\ \partial_{xxx} u(a) &= \partial_{xxx} u(b) = 0\end{aligned}$$

en donde  $a, b \in \mathbb{R}$  son los bordes de la caja. Para estas condiciones de borde el análisis hecho en la sección anterior sigue siendo válido salvo que ahora los modos que aparecen son

$$p_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}$$

y en el caso de interacción de un kink con alguna de las paredes,  $L$  es la distancia entre el kink y la pared.



# Una Burbuja

Para analizar la ecuación de Cahn-Hilliard empezaremos por lo más sencillo que es estudiar sus soluciones estacionarias ( $\partial_t u = 0$ )

$$\partial_{xx}(\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx}u) = 0$$

integrándola dos veces

$$\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx}u = \lambda + \alpha x$$

aquí  $\lambda, \alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ , y estamos interesados en encontrar las soluciones homoclinas. Como estaremos interesados en sistemas con condiciones de borde periódicas o de flujo nulo, en ambos casos el término lineal de la derecha de la última ecuación viola estas condiciones de borde por lo que  $\alpha = 0$ , así la ecuación que debemos resolver es

$$\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx}u = \lambda \tag{75}$$

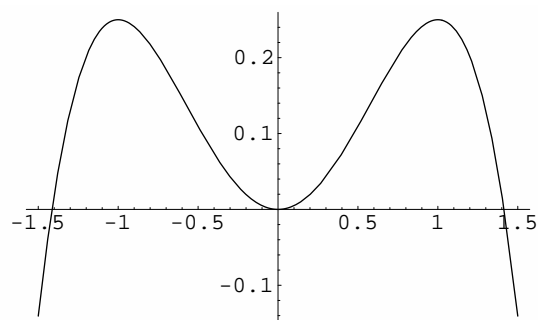
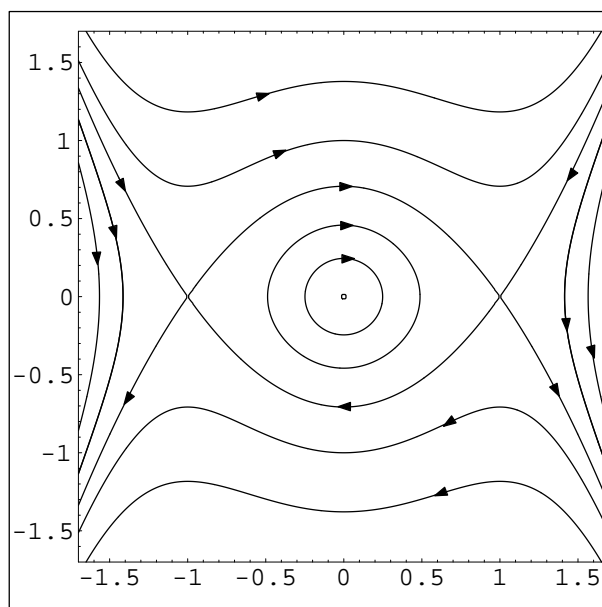
$\lambda$  es, por lo tanto, un parámetro relacionado a la condición inicial que determina el área bajo la curva de la solución, que, como se verá, es una cantidad conservada [50, 54]

Analicemos primero para  $\lambda = 0$ , es decir

$$\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx}u = 0$$

que resulta ser una ecuación tipo Newton en donde los puntos críticos, para  $\varepsilon < 0$ , son:  $0, \sqrt{|\varepsilon|}, -\sqrt{|\varepsilon|}$  e integrándola una vez obtenemos la siguiente función de energía potencial  $V_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$V_\varepsilon(u) = |\varepsilon| \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}$$

Figura 19: Gráfico de la función energía potencial para  $\lambda = 0$ .Figura 20: Diagrama del espacio de fase para  $\lambda = 0$ .

y luego la energía total  $E \in \mathbb{R}$  es

$$E = \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + |\varepsilon|\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}$$

que para algunos casos especiales se puede integrar en términos de funciones simples:

i) Si  $E = 0$ , se obtiene la solución exacta

$$u(x) = \sqrt{2|\varepsilon|} \sec(\sqrt{|\varepsilon|}(x - x_o))$$

en donde  $x_o$  es una constante de integración.

ii) Si  $E > 0$ , pero  $E \ll |\varepsilon|$ , entonces se pueden dar dos casos 1)  $|u| \lesssim \sqrt{\frac{2E}{|\varepsilon|}}$ , en este caso la solución es oscilatoria con velocidad angular  $\omega = \sqrt{|\varepsilon|}$  y la solución es aproximadamente

$$u(x) \approx \sqrt{\frac{2E}{|\varepsilon|}} \cos(\sqrt{|\varepsilon|}(x - x_o))$$

y 2)  $|u| \gtrsim \sqrt{2|\varepsilon|}$ , aquí la solución se parecerá más a la encontrada en el caso i) ( $E = 0$ ) y tendrá la forma aproximada

$$u(x) \approx \sqrt{2|\varepsilon|} \left(1 - \frac{E}{2|\varepsilon|^2}\right) \sec(\sqrt{|\varepsilon|}(x - x_o))$$

iii)  $E = |\varepsilon|^2/4$ , es decir toca tangencialmente los máximos del potencial  $E = V_{m\acute{a}x} = V_\varepsilon(u = \pm\sqrt{|\varepsilon|})$ , este caso da la trayectoria heteroclina

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 &= E - V_\varepsilon(u) \\ &= \frac{|\varepsilon|^2}{4} - \frac{|\varepsilon|u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \\ &= \frac{1}{4}(|\varepsilon| - u^2)^2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{|\varepsilon| - u^2} &= \int \frac{dx}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{u}{\sqrt{|\varepsilon|}}\right) &= \frac{x - x_o}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

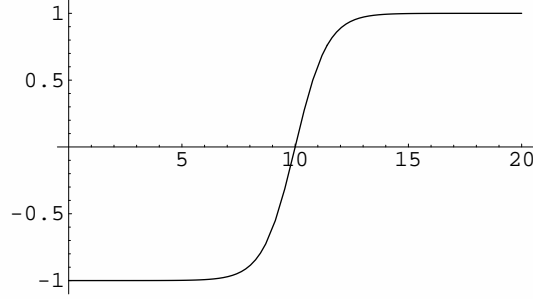


Figura 21: Gráfico de un kink con  $\varepsilon = 1$  y  $x_o = 10$ .

entonces

$$\boxed{u(x) = \sqrt{|\varepsilon|} \tanh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (x - x_o) \right]} \quad (76)$$

Esta es la trayectoria heteroclina. La solución (76) se obtuvo al usar la raíz positiva, pero también la raíz negativa da una solución válida, que es

$$u(x) = \sqrt{|\varepsilon|} \coth \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (x - x_o) \right]$$

Estas dos soluciones están conectadas por la invariancia de traslación, ya que si  $u(x)$  es solución entonces  $u(x + \bar{x})$  también es solución, luego tomando  $\bar{x} = \pi i / \sqrt{2|\varepsilon|}$  se llega que

$$\begin{aligned} u(x + \bar{x}) &= \sqrt{|\varepsilon|} \tanh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left( x + \frac{\pi i}{\sqrt{2|\varepsilon|}} - x_o \right) \right] \\ &= \sqrt{|\varepsilon|} \frac{e^{\sqrt{|\varepsilon|/2}(x-x_o)+i\pi/2} - e^{-\sqrt{|\varepsilon|/2}(x-x_o)-i\pi/2}}{e^{\sqrt{|\varepsilon|/2}(x-x_o)+i\pi/2} + e^{-\sqrt{|\varepsilon|/2}(x-x_o)-i\pi/2}} \\ &= \sqrt{|\varepsilon|} \frac{e^{\sqrt{|\varepsilon|/2}(x-x_o)} + e^{-\sqrt{|\varepsilon|/2}(x-x_o)}}{e^{\sqrt{|\varepsilon|/2}(x-x_o)} - e^{-\sqrt{|\varepsilon|/2}(x-x_o)}} \\ &= \sqrt{|\varepsilon|} \coth \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (x - x_o) \right] \end{aligned}$$

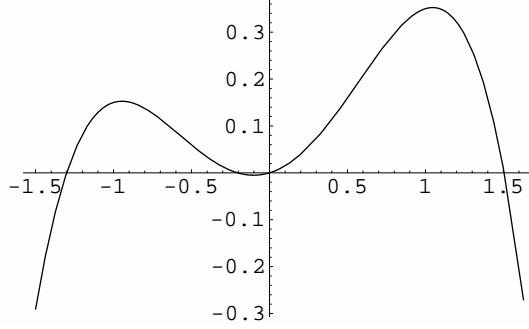


Figura 22: Gráfico de la función energía potencial para  $\lambda > 0$ .

Ahora consideremos  $\lambda > 0$  (se puede hacer un análisis equivalente para  $\lambda < 0$ ), entonces tenemos la siguiente ecuación de Newton

$$\lambda + |\varepsilon|u - u^3 + \partial_{xx}u = 0$$

en este caso los puntos críticos ( $\lambda + |\varepsilon|u - u^3 = 0$ ) son

$$\begin{aligned} u_1 &= -2\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{3}} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{3} \left( \arctan \left( \sqrt{\frac{4|\varepsilon|^3}{27\lambda^2} - 1} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ u_2 &= 2\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{3}} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{3} \left( \arctan \left( \sqrt{\frac{4|\varepsilon|^3}{27\lambda^2} - 1} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ u_3 &= 2\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{3}} \cos \left( \frac{1}{3} \arctan \left( \sqrt{\frac{4|\varepsilon|^3}{27\lambda^2} - 1} \right) \right) \end{aligned} \quad (77)$$

y para  $\lambda \ll |\varepsilon|^{3/2}$  son aproximadamente

$$\begin{aligned} u_1 &\approx -\sqrt{|\varepsilon|} + \frac{\lambda}{2|\varepsilon|} + \frac{3\lambda^2}{8|\varepsilon|^{5/2}} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ u_2 &\approx -\frac{\lambda}{|\varepsilon|} - \frac{\lambda^3}{|\varepsilon|^4} + \mathcal{O}(\lambda^4) \\ u_3 &\approx \sqrt{|\varepsilon|} + \frac{\lambda}{2|\varepsilon|} - \frac{3\lambda^2}{8|\varepsilon|^{5/2}} + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (78)$$

ahora la función energía potencial  $V_{\varepsilon,\lambda} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es

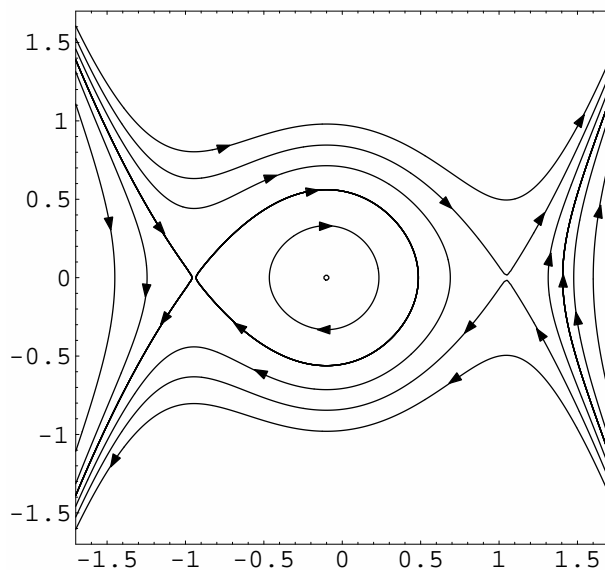


Figura 23: Diagrama del espacio de fase para  $\lambda > 0$ .

$$V_{\varepsilon,\lambda}(u) = \lambda u + |\varepsilon| \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}$$

y la energía total da

$$E = \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \lambda u + |\varepsilon| \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}$$

Si la energía es tangente a algún punto crítico, es decir,  $E = V_{\varepsilon,\lambda}(u_n)$ ,  $n = 1, 2 \vee 3$ , entonces

$$\begin{aligned} E - V_{\varepsilon,\lambda}(u) &= E - \lambda u - |\varepsilon| \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \\ &= \lambda u_n + |\varepsilon| \frac{u_n^2}{2} - \frac{u_n^4}{4} - \lambda u - |\varepsilon| \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \\ &= -(u - u_n) \left( \lambda + \frac{|\varepsilon|}{2} (u + u_n) - \frac{1}{4} (u^3 + u_n u^2 + u_n^2 u + u_n^3) \right) \end{aligned}$$



pero como  $u_n$  es un punto crítico

$$\begin{aligned} V'_{\varepsilon,\lambda}(u_n) &= 0 \\ \lambda + |\varepsilon|u_n - u_n^3 &= 0 \\ \lambda &= -|\varepsilon|u_n + u_n^3 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} E - V_{\varepsilon,\lambda}(u) &= -(u - u_n) \left( -|\varepsilon|u_n + u_n^3 + \frac{|\varepsilon|}{2}(u + u_n) - \frac{1}{4}(u^3 + u_n u^2 + u_n^2 u + u_n^3) \right) \\ &= \frac{1}{4}(u - u_n)^2 (u^2 + 2u_n u + (3u_n^2 - 2|\varepsilon|)) \end{aligned}$$

o

$$E - V_{\varepsilon,\lambda}(u) = \frac{1}{4}(u - u_n)^2 ((u + u_n)^2 + 2(u_n^2 - |\varepsilon|))$$

y como

$$\frac{1}{2}(\partial_x u)^2 = E - V_{\varepsilon,\lambda}(u)$$

entonces

$$\int \frac{du}{(u - u_n)\sqrt{(u + u_n)^2 + 2(u_n^2 - |\varepsilon|)}} = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2}}$$

con lo cual tenemos dos posibilidades  $|u_n| > \sqrt{|\varepsilon|}$  ó  $|u_n| < \sqrt{|\varepsilon|}$

i) si  $|u_n| > \sqrt{|\varepsilon|}$  (esto se da para  $n = 3$ ) luego de unos cuantos cambios de variable se llega a

$$u = u_n + \frac{4(3u_n^2 - |\varepsilon|)e^{\sqrt{3u_n^2 - |\varepsilon|}(x - x_o)}}{\left(e^{\sqrt{3u_n^2 - |\varepsilon|}(x - x_o)} - 2u_n\right)^2 - 2(3u_n^2 - |\varepsilon|)}$$

ii) si  $|u_n| < \sqrt{|\varepsilon|}$  (esto se da en  $n = 1, 2$ ) aquí se vuelven a presentar dos caso:  $|\varepsilon| - 3u_n^2 > 0$  ó  $|\varepsilon| - 3u_n^2 < 0$

a) Si  $|\varepsilon| - 3u_n^2 > 0$  (entonces  $n = 2$ ) después de una simple integración se llega a

$$u = -u_n + \frac{\sqrt{2(|\varepsilon| - u_n^2)} \left( 2(|\varepsilon| - 3u_n^2) + 4u_n \left( 2u_n + \sqrt{2(|\varepsilon| - u_n^2)} \right) \cos^2 \left( \frac{\sqrt{|\varepsilon| - u_n^2}}{2}(x - x_o) \right) \right)}{2(|\varepsilon| - 3u_n^2) \cos \left( \frac{\sqrt{|\varepsilon| - u_n^2}}{2}(x - x_o) \right) - 4u_n \left( 2u_n + \sqrt{2(|\varepsilon| - u_n^2)} \right) \cos^2 \left( \frac{\sqrt{|\varepsilon| - u_n^2}}{2}(x - x_o) \right)}$$

como observación, en el límite  $\lambda \rightarrow 0$ , se tiene  $u_2 \rightarrow 0$  y

$$u(x) = \sqrt{2|\varepsilon|} \sec(\sqrt{|\varepsilon|}(x - x_o)).$$

b) Si  $|\varepsilon| - 3u_n^2 < 0$  (entonces  $n = 1$ ), de nuevo, después de un par de integraciones se obtiene

$$u = u_n + \frac{2(3u_n^2 - |\varepsilon|)}{-2u_n - \sqrt{2(|\varepsilon| - u_n^2)} \cosh\left(\sqrt{3u_n^2 - |\varepsilon|}(x - x_o)\right)} \quad (79)$$

un límite interesante es cuando  $\lambda \rightarrow 2(|\varepsilon|/3)^{3/2}$  en este caso  $u_1 = u_2 = -\sqrt{|\varepsilon|/3}$  y

$$u = -\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{3}} \left(1 - \frac{4}{1 - 2/3 |\varepsilon|(x - x_o)^2}\right)$$

como la solución (79) es divergente, no es la homoclina que nos interesa pero haciendo el cambio  $x \rightarrow x - i\pi/\sqrt{3u_n^2 - |\varepsilon|}$ , gracias a la invariancia traslacional, se llega a la homoclina deseada

$$u = u_1 + \frac{2(3u_1^2 - |\varepsilon|)}{-2u_1 + \sqrt{2(|\varepsilon| - u_1^2)} \cosh\left(\sqrt{3u_1^2 - |\varepsilon|}(x - x_o)\right)} \quad (80)$$

definiendo

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \Delta_{\varepsilon,\lambda} \equiv \frac{2}{\sqrt{3u_1^2 - |\varepsilon|}} \operatorname{arccosh} \left[ \frac{-2u_1}{\sqrt{2(|\varepsilon| - u_1^2)}} \right] \\ x_1 &\equiv x_o - \frac{\Delta}{2} \\ x_2 &\equiv x_o + \frac{\Delta}{2} \end{aligned}$$

luego haciendo un poco de álgebra se puede reescribir la solución (80) como una combinación de tangentes hiperbólicas

$$\boxed{u = u_1 + \sqrt{\frac{3u_1^2 - |\varepsilon|}{2}} \left( \tanh \left[ \frac{\sqrt{3u_1^2 - |\varepsilon|}}{2} (x - x_1) \right] - \tanh \left[ \frac{\sqrt{3u_1^2 - |\varepsilon|}}{2} (x - x_2) \right] \right)} \quad (81)$$

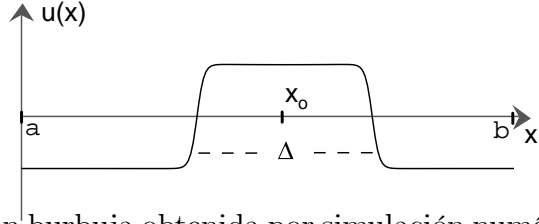


Figura 24: Solución burbuja obtenida por simulación numérica de la ecuación de Cahn-Hilliard con  $\varepsilon = -0.25$ . La posición del centro de la burbuja es  $x_o$  y el ancho  $\Delta$  está definido como la distancia entre los dos ceros de la burbuja.

por lo tanto  $\Delta = x_2 - x_1$  es el ancho de la función, que en lo sucesivo llamaremos burbuja (figura (24)), y

$$x_o = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

es la posición de su centro, luego la burbuja queda completamente determinada por su ancho y su posición  $u = u(x, x_o, \Delta)$ . Como, para  $\lambda \ll |\varepsilon|^{3/2}$ ,

$$\operatorname{arccosh} \left[ -2u_1 / \sqrt{2(|\varepsilon| - u_1^2)} \right] \sim \ln(|\varepsilon|^{3/2} / \lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \infty$$

podemos aislar la divergencia de  $\Delta$ , en este límite, haciendo

$$\Delta \equiv \frac{\ln \left( \frac{\lambda}{8|\varepsilon|^{3/2}} \right)}{\sqrt{3u_1^2 - |\varepsilon|}} + \frac{1}{\sqrt{3u_1^2 - |\varepsilon|}} \left( 2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{-2u_1}{\sqrt{2(|\varepsilon| - u_1^2)}} \right] + \ln \left( \frac{\lambda}{8|\varepsilon|^{3/2}} \right) \right)$$

en donde, en el lado derecho de la ecuación, el segundo término de la suma es una función expandible en serie de Taylor que da

$$\frac{1}{\sqrt{3u_1^2 - |\varepsilon|}} \left( 2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{-2u_1}{\sqrt{2(|\varepsilon| - u_1^2)}} \right] + \ln \left( \frac{\lambda}{8|\varepsilon|^{3/2}} \right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{2|\varepsilon|}} \left( \frac{7}{8} \frac{\lambda}{|\varepsilon|^{3/2}} + \frac{207}{128} \left( \frac{\lambda}{|\varepsilon|^{3/2}} \right)^2 + \dots \right)$$

luego guardando los dos primeros términos de la serie se llega a que

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{2|\varepsilon|}} \left( \ln \left[ \frac{\lambda}{8|\varepsilon|^{3/2}} \right] - \frac{3}{8} \frac{\lambda}{|\varepsilon|^{3/2}} \ln \left[ \frac{e^{7/3}}{8} \frac{\lambda}{|\varepsilon|^{3/2}} \right] \right) + \mathcal{O}(\lambda^2 \ln \lambda)$$

de esto se ve que, en el límite  $\lambda \rightarrow 0$ , solo el primer término es divergente y el resto se va a cero, luego en ese límite, solo basta considerar el término

dominante y por lo tanto

$$\Delta \approx -\frac{1}{\sqrt{2|\varepsilon|}} \ln \left[ \frac{\lambda}{8|\varepsilon|^{3/2}} \right]$$

ó a la inversa

$$\boxed{\lambda \approx 8 |\varepsilon|^{3/2} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta}} \quad (82)$$

Por otro lado, expandiendo la solución (81) en este límite ( $\lambda \ll |\varepsilon|^{3/2}$ ) se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, x_o, \Delta) \approx & -\sqrt{|\varepsilon|} + \sqrt{|\varepsilon|} \tanh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left( x - x_o + \frac{\Delta}{2} \right) \right] \\ & - \sqrt{|\varepsilon|} \tanh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left( x - x_o - \frac{\Delta}{2} \right) \right] + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta} f(x, x_o, \Delta) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x, x_o, \Delta) = & 1 - \frac{3}{2} \left[ \tanh \left( \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left( x - x_o + \frac{\Delta}{2} \right) \right) \right. \\ & \left. - \tanh \left( \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left( x - x_o - \frac{\Delta}{2} \right) \right) \right] \\ & - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left[ \left( x - x_o + \frac{\Delta}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left( x - x_o + \frac{\Delta}{2} \right) \right) \right. \\ & \left. - \left( x - x_o - \frac{\Delta}{2} \right) \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left( x - x_o - \frac{\Delta}{2} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

como se ve en la figura (25)  $f(x, x_o, \Delta)$  es una función acotada  $\forall x \in \mathbb{R}$ , además converge rápidamente a uno para  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Todas estas soluciones fueron calculadas para valores muy específicos de la energía y para caja infinita, en el caso de caja finita las soluciones también pueden ser escrita en término de funciones conocidas pero mucho menos usuales como son las funciones de Jacobi. Sean  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$  los ceros de

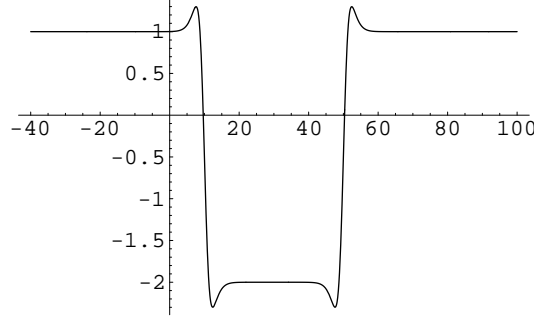


Figura 25: Gráfico de  $f(x, x_o, \Delta)$  con  $x_o = 30$  y  $\Delta = 40$ .

$E - V_{\varepsilon, \lambda}(u)$ , de esto y bajo algunos simples cambios de variables se llega a que la solución más general es de la forma

$$u(x; \varepsilon, \lambda, E) = u_4 - \frac{(u_4 - u_2)(u_4 - u_3)}{(u_4 - u_2) - (u_3 - u_2) \operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(u_3 - u_1)(u_4 - u_2)}}{2\sqrt{2}}(x - x_o) \sqrt{\frac{(u_4 - u_1)(u_3 - u_2)}{(u_4 - u_2)(u_3 - u_1)}}\right)}$$

en donde  $\operatorname{sn}(x|m)$  es la función seno de Jacobi que es periódica [21].

Para ver el efecto de los bordes (es decir, caja de largo finito) en la evolución de una burbuja debemos regresar a la ecuación de Cahn-Hilliard (71) e integrarla entre los extremos y después volver a tomar la ecuación de Cahn-Hilliard, multiplicarla por  $x$  e integrarla lo cual da dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \partial_t \int_a^b u(x) dx &= \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^b \\ \partial_t \int_a^b x u(x) dx &= x \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^b + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^b \end{aligned} \quad (83)$$

la primera ecuación está relacionada a la evolución del ancho de la burbuja y si asociamos el ancho de la solución localizada con la "masa de la partícula" vemos que la segunda ecuación describe el movimiento del centro de masa. Desarrollando el lado izquierdo de las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} \partial_t \int_a^b u(x) dx &= \partial_t \int_a^b (u(x) + \sqrt{|\varepsilon|}) dx \\ &= \partial_t (2\sqrt{|\varepsilon|} \Delta) \\ &= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t \Delta, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_a^b x u(x) dx &= \partial_t \int_a^b x \left( u(x) + \sqrt{|\varepsilon|} \right) dx \\
&= \partial_t \int_{y_1}^{y_2} x 2\sqrt{|\varepsilon|} dx \\
&= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t \left. \frac{x^2}{2} \right|_{y_1}^{y_2} \\
&= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t \left( (y_2 - y_1) \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
&= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t (\Delta x_o)
\end{aligned}$$

y usando condiciones de borde periódicas en el lado derecho de las ecuaciones (83) se tiene que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_b^a &= 0 \\
\partial_x \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_a^b &= 0 \\
x \partial_x \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_a^b &= (b - a) \partial_x \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_b
\end{aligned}$$

pero por simetría  $\partial_x \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_b = 0$ , por lo tanto las ecuaciones de evolución para la burbuja son

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta &= 0 \\
\partial_t x_o &= 0
\end{aligned} \tag{84}$$

luego una burbuja sola con condiciones de borde periódicas es una solución estacionaria.

Una situación muy distinta es si se cambia el tipo de condiciones de borde, por ejemplo con la condición de borde de flujo nulo  $\partial_x u = \partial_x \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_b = 0$  se llega al conjunto de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta &= 0, \\
\partial_t x_o &= \frac{1}{2\sqrt{|\varepsilon|} \Delta} \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_b^a
\end{aligned}$$

que muestra que el ancho de la burbuja no cambia y desarrollando el lado derecho de la última ecuación se obtiene que, aproximadamente, la evolución de la burbuja está gobernado por la diferencia de las alturas en los extremos

$$\partial_t x_o \approx \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{\Delta} (u|_a - u|_b)$$

de lo que se concluye que la burbuja se desplaza hacia el borde más cercano y desaparece siendo reemplazado por la solución heteroclina (76), tipo kink[53].





# Dos Burbujas

Las burbujas son soluciones estacionarias con dos modos de Goldstone (cantidades conservadas): uno asociado a su ancho y el otro a su posición. Si consideramos dos burbujas esperaríamos tener cuatro modos de Goldstone (dos por cada burbuja) pero dos burbujas juntas ya no es una solución estacionaria debido a su mutua interacción luego los modos asociados a sus anchos y sus posiciones van a dejar de ser marginales y por lo tanto, presentaran una dinámica, luego los anchos y las posiciones de las burbujas, que para una burbuja sola son cantidades conservadas, ahora serán promovidas a variables dependientes del tiempo (método de variación de parámetros), si además las burbujas están suficientemente lejos entre si, la dinámica global estará gobernada por estos modos inestables ya que los otros modos del sistema seguirán siendo modos de relajación. En lo que sigue deduciremos las ecuaciones que gobiernan la dinámica de estos modos.

## Condición de Borde Periódica

Consideremos dos burbujas, las ecuaciones (83), en este caso siguen siendo válidas pero los términos de la derecha e izquierda son distintos a los calculados para una burbuja

$$\begin{aligned}\partial_t \int_a^b u(x) dx &= \partial_t \int_a^b \left( u(x) + \sqrt{|\varepsilon|} \right) dx \\ &= \partial_t \left( 2\sqrt{|\varepsilon|} \Delta_1 + 2\sqrt{|\varepsilon|} \Delta_2 \right) \\ &= 2\sqrt{|\varepsilon|} (\partial_t \Delta_1 + \partial_t \Delta_2),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_a^b x u(x) dx &= \partial_t \int_a^b x \left( u(x) + \sqrt{|\varepsilon|} \right) dx \\
&= \partial_t \left( \int_{y_1}^{y_2} x 2\sqrt{|\varepsilon|} dx + \int_{y_3}^{y_4} x 2\sqrt{|\varepsilon|} dx \right) \\
&= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t \frac{x^2}{2} \Big|_{y_1}^{y_2} + 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t \frac{x^2}{2} \Big|_{y_3}^{y_4} \\
&= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t \left( (y_2 - y_1) \frac{y_1 + y_2}{2} + (y_4 - y_3) \frac{y_3 + y_4}{2} \right) \\
&= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t (\Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2)
\end{aligned}$$

donde  $y_1, y_2 : \mathbb{R} \rightarrow ]a, b[$  son los puntos donde interseca al eje  $x$  la primera burbuja e  $y_3, y_4 : \mathbb{R} \rightarrow ]a, b[$  son los ceros de la segunda burbuja y se definen  $\Delta_1, \Delta_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  y  $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow ]a, b[$  como

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &\equiv y_2 - y_1 \\
x_1 &\equiv \frac{y_1 + y_2}{2} \\
\Delta_2 &\equiv y_4 - y_3 \\
x_2 &\equiv \frac{y_3 + y_4}{2}
\end{aligned}$$

como el ancho y la posición de la primera y segunda burbuja respectivamente. Debido a la condición de borde periódica todavía se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_b^a &= 0 \\
\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^b &= 0 \\
x \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^b &= (b - a) \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_b
\end{aligned}$$

pero hay que estimar el valor de  $\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_b$  que ya no es nulo, pero antes de eso, vemos que tenemos cuatro cantidades  $(\Delta_1, x_1, \Delta_2, x_2)$  que dan la dinámica del sistema pero solo tenemos dos ecuaciones, para obtener las otras dos

ecuaciones debemos integrar (71) pero ahora entre el primer borde y un punto intermedio  $c$  entre las dos burbujas lo cual da las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\partial_t \int_a^c u(x) dx &= \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^c \\ \partial_t \int_a^c x u(x) dx &= x \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^c + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^c\end{aligned}$$

Del lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_t \int_a^c u(x) dx &= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t \Delta_1 \\ \partial_t \int_a^c x u(x) dx &= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t (\Delta_1 x_1)\end{aligned}$$

y el lado derecho da

$$\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^c = \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c - \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a$$

y

$$\begin{aligned}x \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^c - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^c &= \left( c \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c \right) - \left( a \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a \right) \\ &= \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a + (y_1 - a) \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a \right) - \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c + (y_2 - c) \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c \right) \\ &\quad + y_2 \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c - y_1 \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a \\ &\approx \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{y_1} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{y_2} + y_2 \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c - y_1 \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a\end{aligned}$$

pero por la simetría de las burbujas  $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{y_1} = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{y_2}$  y como  $y_1 = x_1 - \Delta_1/2$ ,  $y_2 = x_1 + \Delta_1/2$  obtenemos

$$x \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^c + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a^c = x_1 \left( \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c - \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a \right) + \frac{\Delta_1}{2} \left( \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a + \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c \right)$$

luego

$$\begin{aligned}2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t \Delta_1 &= \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c - \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a \\ 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t (\Delta_1 x_1) &= x_1 \left( \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c - \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a \right) + \frac{\Delta_1}{2} \left( \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a + \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c \right)\end{aligned}$$

finalmente el conjunto completo de ecuaciones queda

$$\begin{aligned}\partial_t (\Delta_1 + \Delta_2) &= 0 \\ \partial_t (\Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2) &= (b - a) \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_b \\ \partial_t \Delta_1 &= \frac{1}{2\sqrt{|\varepsilon|}} \left( \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c - \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a \right) \\ \partial_t x_1 &= \frac{\Delta_1}{4\sqrt{|\varepsilon|}} \left( \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a + \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c \right)\end{aligned}$$

Solo falta estimar los valores de  $\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_a$ ,  $\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_b$  y  $\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_c$ . De (72) tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} &= \partial_x (\varepsilon u + u^3 - \partial_{xx} u) \\ &= (3u^2 + \varepsilon) \partial_x u - \partial_{xxx} u\end{aligned}$$

pero en los puntos  $a, b$  ó  $c$  las derivadas de orden superior son cada vez más pequeñas por lo tanto se desprecia  $\partial_{xxx} u$  que es mucho menor que  $\varepsilon \partial_x u$  y además  $u|_{a,b,c} \approx -\sqrt{|\varepsilon|}$  por lo tanto

$$\boxed{\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \approx 2|\varepsilon| \partial_x u}$$

un hecho importante es que las burbujas toman diferentes valores cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  y la diferencia depende solo del ancho de la burbuja, es decir, una burbuja sola de ancho  $\Delta$ , y con los bordes suficientemente lejos, tiende rápidamente al valor límite  $u_1$  dado en (77) cuyo valor aproximado está dado en (78) luego  $u_1$  en función de  $\Delta$  es

$$\boxed{u_1 = -\sqrt{|\varepsilon|} + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta} + \mathcal{O}(\sqrt{|\varepsilon|} e^{-2\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta})}$$

sean, entonces,  $u_{1,1}$  y  $u_{1,2}$  estos valores límites para las burbujas uno y dos respectivamente, i.e.

$$\begin{aligned}u_{1,1} &\approx -\sqrt{|\varepsilon|} + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_1} \\ u_{1,2} &\approx -\sqrt{|\varepsilon|} + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_2}\end{aligned}$$

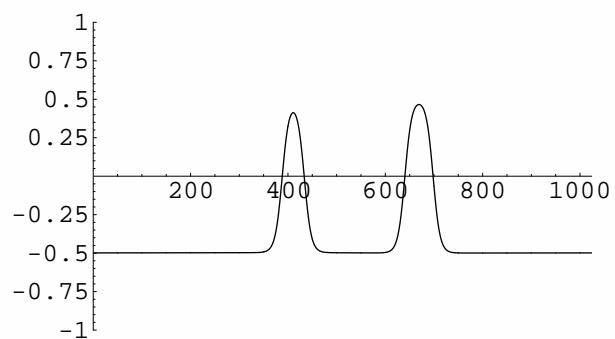


Figura 26: Dos burbujas

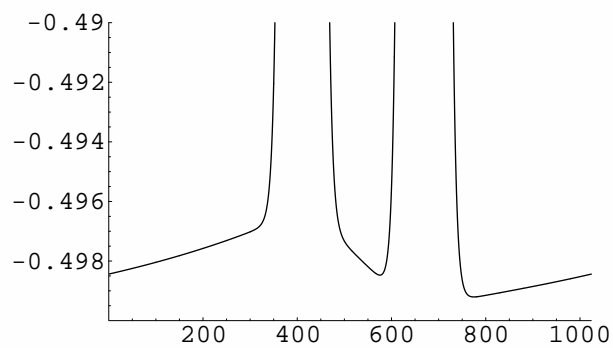


Figura 27: Zoom de las dos burbujas de la figura anterior, se ve como la burbujas más pequeña se encuentra más arriba de la más grande lo que produce una inclinación en la curva que las une.

como tenemos dos burbujas debemos conectar estos dos valores límites, al orden más bajo se pueden conectar por una recta cuya pendiente daría, en el punto  $c$

$$\begin{aligned}
\partial_x u|_c &= \frac{u_{1,2} - u_{1,1}}{y_3 - y_2} \\
&= \frac{\left(-\sqrt{|\varepsilon|} + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_2}\right) - \left(-\sqrt{|\varepsilon|} + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_1}\right)}{\left(x_2 - \frac{\Delta_2}{2}\right) - \left(x_1 + \frac{\Delta_1}{2}\right)} \\
&= \frac{4\sqrt{|\varepsilon|} \left(e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_2} - e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_1}\right)}{x_2 - x_1 - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}
\end{aligned}$$

luego

$$\boxed{\partial_x u|_c = \frac{8\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1 + \Delta_2)}}{x_2 - x_1 - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_1 - \Delta_2) \right]}$$

y en los puntos  $a$  y  $b$ , por la condición de borde periódica, las pendientes valen lo mismo en ambos puntos y usando esta condición de borde se crea una nueva burbuja uno más alla del borde derecho con  $y'_1 = y_1 + (b - a)$  e  $y'_2 = y_2 + (b - a)$ . Luego la pendiente en el borde da

$$\begin{aligned}
\partial_x u|_{a,b} &= \frac{u_{1,2} - u_{1,1}}{y'_1 - y_4} \\
&= \frac{\left(-\sqrt{|\varepsilon|} + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_2}\right) - \left(-\sqrt{|\varepsilon|} + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_1}\right)}{\left(x_1 + (b - a) - \frac{\Delta_2}{2}\right) - \left(x_2 + \frac{\Delta_2}{2}\right)} \\
&= \frac{4\sqrt{|\varepsilon|} \left(e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_2} - e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_1}\right)}{x_1 + (b - a) - x_2 - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} \\
&= \frac{8\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1 + \Delta_2)}}{(b - a) - (x_2 - x_1 + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2})} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_2 - \Delta_1) \right]
\end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}
 I_{2,1} &\equiv \frac{8|\varepsilon| e^{\left(-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1+\Delta_2)\right)}}{x_2 - x_1 - \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_1 - \Delta_2) \right] \\
 I_{1,2} &\equiv \frac{8|\varepsilon| e^{\left(-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1+\Delta_2)\right)}}{x_1 + (b-a) - x_2 - \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_2 - \Delta_1) \right]
 \end{aligned} \tag{85}$$

Con estas definiciones podemos escribir el conjunto de ecuaciones que dan la interacción entre dos burbujas

$$\begin{aligned}
 d_t (\Delta_1 + \Delta_2) &= 0, \\
 d_t (x_1 \Delta_1 + x_2 \Delta_2) &= (b-a) I_{1,2}, \\
 d_t \Delta_1 &= I_{2,1} - I_{1,2}, \\
 d_t (x_2 - x_1) &= -|\varepsilon|^{-1/2} (I_{2,1} + I_{1,2}) \frac{(\Delta_1 - \Delta_2)}{2\Delta_1 \Delta_2}.
 \end{aligned} \tag{86}$$

La primera ecuación indica la conservación del área, la segunda da el movimiento del centro de masa, la tercera indica como evoluciona el ancho de una de las burbujas y dice que la más ancha crece y la otra decrece y la última ecuación da el movimiento relativo de las dos burbujas, esta ecuación se obtiene haciendo un cálculo más preciso ya que es un par de ordenes de magnitud más pequeña que los términos de las otras ecuaciones.

## Resultados Numéricos

Para comprobar nuestros resultados se llevo a cabo una simulación de la ecuación de Cahn-Hilliard (71) en la cual se comprobó que la predicción cualitativa concordaba perfectamente con la simulación, pero además, se vio que cuantitativamente había, a pesar de todas las aproximaciones que se hicieron, un muy buen acuerdo con los resultados numéricos como se ve a continuación. Si en un instante cualquiera de tiempo detenemos la simulación y vemos los valores de la derivada espacial de  $u$  en el borde ( $x = a$ ) y el punto medio ( $x = c$ ) entre las burbujas y los comparamos con nuestras estimaciones analíticas observamos un muy buen acuerdo entre lo numérico y lo analítico

$$\partial_x u(a)|_{Numérico} = 7.5611 * 10^{-9}$$

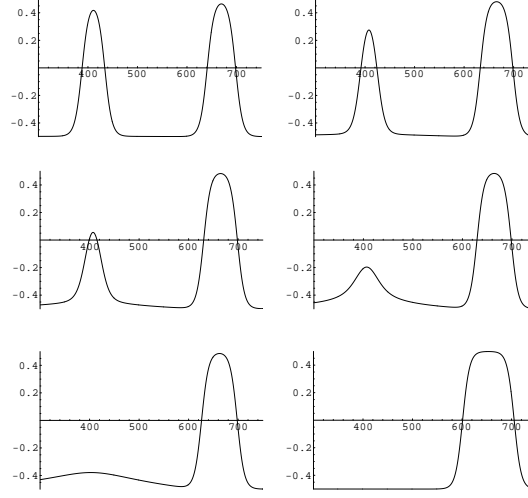


Figura 28: Dinámica entre dos burbujas con condiciones de borde periódicas, se ve claramente como las burbujas más grande crece y la más pequeña desaparece..

$$\partial_x u(c)|_{Numérico} = -2.6948 * 10^{-8}$$

$$\partial_x u(a)|_{Analítico} = -\frac{8\sqrt{|\varepsilon|} \sinh\left(\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1 - \Delta_2)\right)}{(b-a) - (x_2 - x_1 + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2})} e^{\left(-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1 + \Delta_2)\right)} = 7.5467 * 10^{-9}$$

$$\partial_x u(c)|_{Analítico} = \frac{8\sqrt{|\varepsilon|} \sinh\left(\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1 - \Delta_2)\right)}{(x_2 - x_1 - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2})} e^{\left(-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1 + \Delta_2)\right)} = -2.5993 * 10^{-8}$$

$$error|_{borde} = 0.2\%$$

$$error|_{pmedio} = 3.5\%$$



lo mismo hacemos para el ancho de la primera burbuja, comparamos los valores numerico y analitico de la derivada temporal de  $\Delta_1$

$$d_t \Delta_1|_{Numérico} = -1.7499 * 10^{-8}$$

$$d_t \Delta_1|_{Analítico} = \sqrt{|\varepsilon|} * (\partial_x u]_{pmedio} - \partial_x u]_{borde}) = -1.6770 * 10^{-8}$$

$$error(d_t \Delta_1) = 4.2\%$$

y lo mismo hacemos para el ancho de la segunda burbuja, comparamos los valores numerico y analitico de la derivada temporal de  $\Delta_1$

$$d_t \Delta_2|_{Numérico} = -1.7136 * 10^{-8}$$

$$d_t \Delta_2|_{Analítico} = \sqrt{|\varepsilon|} * (\partial_x u]_{borde} - \partial_x u]_{pmedio}) = 1.6770 * 10^{-8}$$

$$error(d_t \Delta_2) = 2.1\%$$

y de nuevo lo mismo para la derivada temporal de  $x_1$

$$d_t x_1|_{Numérico} = -5.5758 * 10^{-9}$$

$$d_t x_1|_{Analítico} = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{2} * (\partial_x u]_{pmedio} + \partial_x u]_{borde}) = -4.6116 * 10^{-9}$$

$$error(d_t x_1) = 17.3\%$$

y para la derivada temporal de  $x_2$

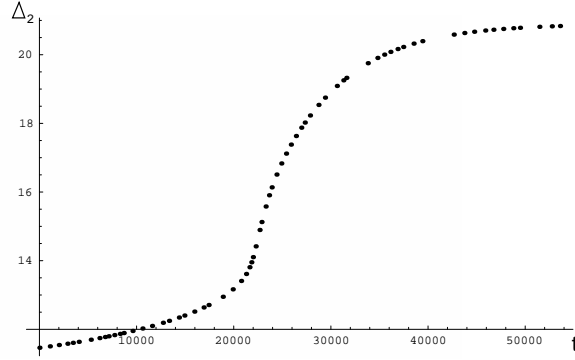


Figura 29: Resultado numérico de la evolución del ancho de la burbuja más grande  $\Delta_2$ .

$$d_t x_2|_{Numérico} = -5.6226 * 10^{-9}$$

$$d_t x_2|_{Analítico} = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{2} * (\partial_x u]_{pmedio} + \partial_x u]_{borde}) = -4.6112 * 10^{-9}$$

$$error(d_t x_2) = 18.0\%$$

Se ve que los errores porcentuales de las posiciones son más grandes que la de los anchos. Esto se debe a que la dinámica para estas cantidades es un orden de magnitud más lenta que la de los anchos y por lo tanto es más sensible a los errores numéricos.

## Solución Aproximada

Si consideramos, de las ecuaciones de interacción de dos burbujas, las que dicen relación con la suma de los anchos de las burbujas y la posición relativa de estas

$$d_t (\Delta_1 + \Delta_2) = 0,$$

$$d_t (x_2 - x_1) = -|\varepsilon|^{-1/2} (I_{2,1} + I_{1,2}) \frac{(\Delta_1 - \Delta_2)}{2\Delta_1\Delta_2}$$

y observamos que el lado derecho de la segunda ecuación es, por lo menos dos ordenes de magnitud inferior a los términos de las ecuaciones de las otras cantidades ( $\Delta_1, \Delta_2, x_1$  y  $x_2$ ), es decir, para la evolución del sistema se puede considerar que  $d_t(x_2 - x_1) \approx 0$ , y se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\Delta_1 + \Delta_2 &\equiv \Delta \\ x_2 - x_1 &\equiv R\end{aligned}$$

pueden ser consideradas constantes (de hecho  $\Delta$  es constante y solo  $R$  es aproximadamente constante). Luego en las ecuaciones de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ ,

$$\begin{aligned}d_t \Delta_1 &= I_{2,1} - I_{1,2} \\ d_t \Delta_2 &= -(I_{2,1} - I_{1,2})\end{aligned}$$

se puede ver de (85) que los factores que multiplican al sinh solo dependen de constantes ( $\varepsilon, \Delta, R, a, b$ ) por lo tanto se puede definir la contante

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &\equiv \frac{8|\varepsilon| e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1 + \Delta_2)}}{x_2 - x_1 - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} + \frac{8|\varepsilon| e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_1 + \Delta_2)}}{x_1 + (b - a) - x_2 - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} \\ &= \frac{8|\varepsilon| e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}\Delta}}{R - \frac{\Delta}{2}} + \frac{8|\varepsilon| e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}\Delta}}{(b - a) - R - \frac{\Delta}{2}} \\ &= \frac{8|\varepsilon| (b - a - \Delta) e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}\Delta}}{\left(R - \frac{\Delta}{2}\right) \left((b - a) - R - \frac{\Delta}{2}\right)}\end{aligned}$$

que multiplica al sinh en estas ecuaciones.

Por otro lado, definiendo  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\delta \equiv \Delta_1 - \Delta_2$$

y restando  $d_t \Delta_1 - d_t \Delta_2$

$$d_t (\Delta_1 - \Delta_2) = 2 (I_{2,1} - I_{1,2})$$

se llega a la ecuación diferencial de variable separable para  $\delta$

$$\dot{\delta} = 2\mathcal{C} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \delta \right]$$

que es facilmente soluble. Sea  $\delta_o = \Delta_1(t_o) - \Delta_2(t_o)$ , una condición inicial, luego

$$\int_{\delta_o}^{\delta} \frac{d\delta}{\sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \delta \right]} = 2\mathcal{C} \int_{t_o}^t dt$$

$$\sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \ln \left( \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \delta \right] \right) \Big|_{\delta_o}^{\delta} = 2\mathcal{C} (t - t_o)$$

$$\delta = 2 \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \operatorname{arctanh} \left( \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \delta_o \right] e^{\sqrt{2|\varepsilon|}\mathcal{C}(t-t_o)} \right)$$

y  $\Delta_1, \Delta_2$  se expresan en términos de  $\delta$  a través de

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{2} + \frac{\delta}{2}$$

$$\Delta_2 = \frac{\Delta}{2} - \frac{\delta}{2}$$

luego las expresiones aproximadas de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , como función del tiempo, son:

$$\Delta_1(t) = \frac{\Delta}{2} + \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \operatorname{arctanh} \left( \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \delta_o \right] e^{\sqrt{2|\varepsilon|}\mathcal{C}(t-t_o)} \right)$$

$$\Delta_2(t) = \frac{\Delta}{2} - \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \operatorname{arctanh} \left( \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \delta_o \right] e^{\sqrt{2|\varepsilon|}\mathcal{C}(t-t_o)} \right)$$

ahora, por simplicidad, supongamos  $\Delta_1 > \Delta_2$ , luego existe  $T > t_o$ , para el cual  $\Delta_1(T) = \Delta$  y  $\Delta_2(T) = 0$ , (el análisis es equivalente si  $\Delta_1 < \Delta_2$ ) y este valor lo podemos estimar de la solución anterior

$$T = t_o + \frac{1}{\sqrt{2|\varepsilon|}\mathcal{C}} \ln \left| \frac{\tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \Delta \right]}{\tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \delta_o \right]} \right|$$

o en forma más explícita, mostrando la dependencia en la diferencia de los anchos

$$T = t_o + \frac{1}{\sqrt{2|\varepsilon|}\mathcal{C}} \ln \left| \frac{\tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \Delta \right]}{\tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_1(t_o) - \Delta_2(t_o)) \right]} \right|$$

o aún más explícito, como depende de todas las constantes involucradas

$$T = t_o + \frac{\left(R - \frac{\Delta}{2}\right) \left((b-a) - R - \frac{\Delta}{2}\right) e^{\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \Delta}}{\sqrt{2} 8 |\varepsilon|^{3/2} (b-a-\Delta)} \ln \left| \frac{\tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \Delta \right]}{\tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_1(t_o) - \Delta_2(t_o)) \right]} \right|$$

De aquí se observa como este tiempo límite decrece a medida que los anchos se hacen más dispares, en el punto opuesto, este tiempo es infinito si los anchos son exactamente iguales, pero este estado es inestable. También se ve que el tiempo, que demora en desaparecer la burbuja más pequeña, crece si el ancho total es más grande.

Las otras cantidades relevantes, dentro del sistema, son las posiciones de las burbujas ( $x_1, x_2$ ) estas también pueden ser estimadas ya que sus derivadas temporales pueden ser expresadas en término de las derivadas temporales de los delta

$$\begin{aligned} d_t x_1 &= \frac{I_{2,1} + I_{1,2}}{2} \\ &= \frac{8|\varepsilon| (b-a-2R) e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \Delta}}{2 \left(R - \frac{\Delta}{2}\right) \left((b-a) - R - \frac{\Delta}{2}\right)} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_1 - \Delta_2) \right] \\ &= \frac{b-a-2R}{2(b-a-\Delta)} \frac{8|\varepsilon| (b-a-2R) e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \Delta}}{\left(R - \frac{\Delta}{2}\right) \left((b-a) - R - \frac{\Delta}{2}\right)} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_1 - \Delta_2) \right] \\ &= \frac{b-a-2R}{2(b-a-\Delta)} d_t \Delta_1 \end{aligned}$$

Luego, simplemente, integramos

$$x_1(t) = x_1(t_o) + \frac{b-a-2R}{2(b-a-\Delta)} (\Delta_1(t) - \Delta_1(t_o))$$

y reemplazando la expresión de  $\Delta_1(t)$ , se obtienen las fórmulas para  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_o) - \frac{b-a-2R}{2(b-a-\Delta)} \left\{ \frac{\delta_o}{2} - \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \operatorname{arctanh} \left( \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \delta_o \right] e^{\sqrt{2|\varepsilon|} \mathcal{C}(t-t_o)} \right) \right\} \\ x_2(t) &= x_2(t_o) - \frac{b-a-2R}{2(b-a-\Delta)} \left\{ \frac{\delta_o}{2} - \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \operatorname{arctanh} \left( \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \delta_o \right] e^{\sqrt{2|\varepsilon|} \mathcal{C}(t-t_o)} \right) \right\} \end{aligned}$$

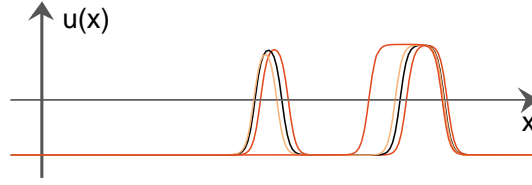


Figura 30: Simulación numérica de la evolución de dos burbujas en la ecuación de Cahn-Hilliard para  $\varepsilon = -0.25$ . La burbuja a la derecha incrementa su ancho mientras la otra decrece. Finalmente la burbuja de la izquierda desaparece y la burbuja que permanece es el estado estacionario del sistema.

## Condición de Borde Flujo Nulo

Como vimos en la sección anterior, en el caso de condición de borde de flujo nulo una burbuja sola es inestable desplazándose hacia el borde más cercano para luego desaparecer dejando solo un kink. Ahora podemos calcular la velocidad a la cual se desplaza ya que si usamos las simetrías podemos invertir el cuadro y usando las condición de borde reflejamos la burbuja (método de las imágenes) y nuestro problema se transforma en la interacción de dos burbujas, si integramos (71) desde un extremo hasta un punto  $c$  fijo al interior de la burbuja

$$\partial_t \int_a^c u(x) dx = \partial_x \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_c$$

pero el lado derecho lo podemos aproximar

$$\partial_x \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_c \approx 2|\varepsilon| \partial_x u|_c$$

y el lado izquierdo da

$$\partial_t \int_a^c u(x) dx = -2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t y_1 = -2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t x$$

en donde  $y_1$  es el primer punto de intersección de la burbuja con el eje  $y$  y  $x$  es el centro de la burbuja, dado que el área se conserva, su velocidad es la misma que es la velocidad de la burbuja, luego

$$\partial_t x = -\sqrt{|\varepsilon|} \partial_x u|_c$$

luego la velocidad de la burbuja esta dada por la inclinación al interior de la burbuja la cual podemos estimar de la forma usual la cual nos da

$$\partial_t x = \frac{8|\varepsilon| e^{-\sqrt{2|\varepsilon|(b-a-\Delta)}}}{\Delta} \sinh \left( \sqrt{2|\varepsilon|} \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \right)$$

De esto vemos, ya que  $(a + b)/2$  es el punto medio de nuestra caja, si la burbuja se encuentra a la derecha de este punto se desplazará hacia el borde derecho y análogamente si se encuentra a la izquierda del punto medio. Hay que hacer notar que solo una burbuja ubicada en el punto central de la caja es una solución estacionaria del sistema con condiciones de borde de flujo nulo. y como acabamos de ver es una solución estacionaria inestable.





# N Burbujas

Como se vio en el análisis lineal de la solución estacionaria  $u(x, t) = 0$ , esta es inestable para  $\varepsilon < 0$  y en este caso aparece para una condición inicial dada un gas de burbujas con una longitud de onda promedio característica que determina, en caja finita, la cantidad de burbujas que habrán en el gas inicialmente luego de lo cual las burbujas empezarán a interactuar eliminándose algunas y aumentando el ancho de otras (ver figura (31)). Aquí daremos la dinámica que gobierna a este sistema generalizando a  $n$  burbujas el cálculo del capítulo anterior.

Sea  $\Omega = ]a, b[$  el dominio del sistema, luego  $L \equiv b - a$  es el tamaño del sistema, sean  $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  y  $\Delta_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, L]$  la posición y el ancho de la burbuja  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) respectivamente e  $y_{i,1}, y_{i,2} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  los puntos donde esa burbuja intersecta al eje (i.e.  $\Delta_i = y_{i,2} - y_{i,1}$  y  $x_i = (y_{i,1} + y_{i,2})/2$ ), definamos los intervalos  $[a_{i-1}, a_i]$  (donde  $a_{i-1}, a_i \in \Omega$ ), que contiene a la burbuja  $i$ , en donde  $a_i$  es un punto intermedio entre la burbuja  $i$  y la  $i + 1$ ,  $a_0 = a$  y  $a_n = b$  ( $a, b$  son los bordes del sistema). Siguiendo el procedimiento usado anteriormente para encontrar la evolución del sistema, integramos (71) en el intervalo  $[a_{i-1}, a_i]$  y luego multiplicamos por  $x$  a (71) y volvemos a integrar en  $[a_{i-1}, a_i]$ , es decir,

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{a_{i-1}}^{a_i} u(x) dx &= \partial_x \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_{a_{i-1}}^{a_i} \\ \partial_t \int_{a_{i-1}}^{a_i} x u(x) dx &= x \partial_x \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_{a_{i-1}}^{a_i} - \left. \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right|_{a_{i-1}}^{a_i} \end{aligned}$$

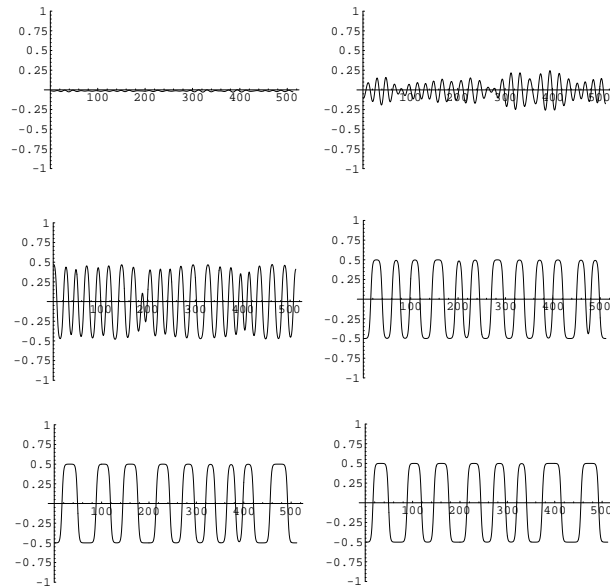


Figura 31: Descomposición espínodal de la solución plana  $u(x, t) = 0$  para  $\varepsilon < 0$ .

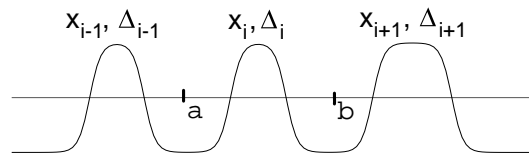


Figura 32: Representación esquemática de un gas de burbujas diluidas.

El lado izquierdo da

$$\begin{aligned}\partial_t \int_{a_{i-1}}^{a_i} u(x) dx &= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t \Delta_i \\ \partial_t \int_{a_{i-1}}^{a_i} x u(x) dx &= 2\sqrt{|\varepsilon|} \partial_t (x_i \Delta_i)\end{aligned}$$

y el lado derecho es

$$\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}}^{a_i} = \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} - \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}}$$

y

$$\begin{aligned}x \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}}^{a_i} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}}^{a_i} &= \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} - a_{i-1} \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} \right) - \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} - a_i \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} \right) \\ &= \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} + (y_{i,1} - a_{i-1}) \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} + (y_{i,2} - a_i) \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} \right) \\ &\quad + y_{i,2} \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} - y_{i,1} \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} \\ &\approx \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{y_{i,1}} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{y_{i,2}} + y_{i,2} \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} - y_{i,1} \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} \\ &\approx x_i \left( \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} - \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} \right) + \frac{\Delta_i}{2} \left( \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} + \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} \right)\end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto de ecuaciones se reduce a

$$\boxed{\begin{aligned}d_t \Delta_i &= \frac{1}{2\sqrt{|\varepsilon|}} \left[ \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} - \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} \right] \\ d_t x_i &= \frac{1}{4\sqrt{|\varepsilon|}} \left[ \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i} + \partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_{i-1}} \right]\end{aligned}}$$

con  $i = 1, \dots, n$ . el cálculo de  $\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \Big|_{a_i}$  es el mismo de la sección anterior, como vimos  $\partial_x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \approx 2|\varepsilon| \partial_x u$  y, si  $u_{1,i}$  es el valor límite al que tendería la

burbuja  $i$  en ausencia de las otras, entonces

$$\begin{aligned}
\partial_x u|_{a_i} &= \frac{u_{1,i+1} - u_{1,i}}{y_{i+1,1} - y_{i,2}} \\
&= \frac{\left(-\sqrt{|\varepsilon|} + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_{i+1}}\right) - \left(-\sqrt{|\varepsilon|} + 4\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_i}\right)}{\left(x_{i+1} - \frac{\Delta_{i+1}}{2}\right) - \left(x_i + \frac{\Delta_i}{2}\right)} \\
&= \frac{4\sqrt{|\varepsilon|} \left(e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_{i+1}} - e^{-\sqrt{2|\varepsilon|}\Delta_i}\right)}{x_{i+1} - x_i - \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2}}
\end{aligned}$$

luego

$$\partial_x u|_{a_i} = \frac{8\sqrt{|\varepsilon|} e^{-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}}{x_{i+1} - x_i - \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2}} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_i - \Delta_{i+1}) \right]$$

con  $i = 0, \dots, n$  y donde, por condiciones de borde periódicas,

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= \Delta_1 \\
x_{n+1} &= x_1 + (b - a) \\
\Delta_0 &= \Delta_n \\
x_0 &= x_n - (b - a)
\end{aligned}$$

es decir  $\partial_x u|_a = \partial_x u|_b$ . Definiendo

$$I_{i+1,i} = \frac{8|\varepsilon| e^{\left(-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_i + \Delta_{i+1})\right)}}{\left(x_{i+1} - x_i - \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2}\right)} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_i - \Delta_{i+1}) \right], \quad i = 0, \dots, n$$

en particular

$$I_{n+1,n} = I_{1,0} = \frac{8|\varepsilon| e^{\left(-\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}(\Delta_n + \Delta_1)\right)}}{\left(x_1 + (b - a) - x_n - \frac{\Delta_n + \Delta_1}{2}\right)} \sinh \left[ \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} (\Delta_n - \Delta_1) \right]$$

el sistema de ecuaciones de interacción de  $n$  burbujas es

$$\boxed{
\begin{aligned}
d_t \Delta_i &= I_{i+1,i} - I_{i,i-1} \\
d_t x_i &= \frac{I_{i+1,i} + I_{i,i-1}}{2}
\end{aligned}
} \quad (87)$$

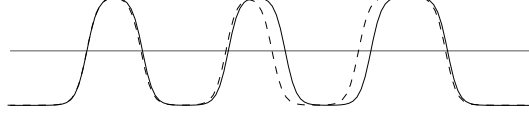


Figura 33: Simulación numérica de la ecuación de Cahn-Hilliard para  $\varepsilon = -0.25$ . La condición inicial es la línea sólida la línea segmentada representa el estado del sistema en un tiempo posterior.

La interacción de las burbujas depende del inverso de la distancia entre ellas que es diferente de la interacción de los kinks que forman la burbuja, los que contribuyen con una interacción exponencial ( $\exp -\sqrt{|\varepsilon|/2}(x_i - x_{i-1} - (\Delta_i + \Delta_{i-1})/2)$ ), como se muestra en la referencia [40]. Esta interacción es obtenida a través del estudio del operador no-Hermitiano asociado a la perturbación de una burbuja por la presencia de las otras o por el estudio de un operador Hermitiano equivalente a través de la inclusión de dos funciones relacionadas a la conservación del área y al centro de masa [40]. Es importante remarcar que estos términos exponenciales son relevantes cuando la distancia entre las burbujas es más pequeña o igual al promedio de los anchos de estas  $(\Delta_i/2 + \Delta_{i-1}/2)$ . Cuando las burbujas están diluidas ( $x_i - x_{i-1} \gg \Delta_i + \Delta_{i-1}$ ) el término dominante de la interacción tiene su origen en la diferencia de los valores asintóticos de cada burbuja.

Algunas cantidades interesantes que se pueden definir y dar su dinámica son:

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{i=1}^n \Delta_i \\ X &= \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \Delta_i x_i \\ R_i &= x_{i+1} - x_i\end{aligned}$$

y sus ecuaciones son

$d_t \Delta$	$= 0$
$\Delta d_t X$	$= (b - a) I_{1,0}$
$d_t R_i$	$= \frac{I_{i+2,i+1} + 2I_{i+1,i} + I_{i,i-1}}{2}$

La primera da la conservación del área, la segunda da la evolución del centro de masa y la última es la evolución de las posiciones relativas de las burbujas.

En resumen, hemos considerado la ecuación universal que describe la interfase entre dos estados simétricos que es una ecuación tipo Cahn-Hilliard. Esta ecuación tiene estructuras localizadas que se presentan como soluciones burbuja las que son parametrizadas por dos cantidades: la posición y el ancho. Para un gas de burbujas diluidas hemos encontrado un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la interacción entre ellas y esto nos ha permitido dar una descripción simple de la dinámica ulterior del sistema en términos de la posición y del ancho de las burbujas. En el caso de dos burbujas diluidas con condiciones de borde periódicas hemos encontrado, también, un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en que la dinámica ocurre principalmente a través del ancho de las burbujas. La evolución dada por el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene un muy buen acuerdo con las simulaciones numéricas. También encontramos, para el caso de condiciones de borde de flujo nulo, la velocidad a la cual una burbuja sola se desplaza hacia el borde más cercano para luego convertirse en un kink, que es la solución energéticamente más favorable en sistemas con este tipo de condiciones de borde y también se observa un muy buen acuerdo con los resultados numéricos.

## **Parte IV**

## **Apéndice**





**Artículo Publicado en la  
Journal of Statistical Physics**



# Artículo Publicado en la Physics Review Letters













**Parte V**  
**Bibliografía**



# Bibliografía

- [1] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North Holland, Amsterdam, 1981).
- [2] G. Nicolis, S. Martínez and E. Tirapegui, *Chaos, Solitons and Fractals*, **1**, 25 (1991).
- [3] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems* (Springer, New York 1984).
- [4] R. Graham in *Instabilities and Nonequilibrium Structures*, eds. E. Tirapegui and D. Villarroel, (Reidel 1987).
- [5] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin 1983).
- [6] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (Springer, Berlin 1984).
- [7] M. Clerc, *Tiempos de Vida de un Estado Metaestable*, tesis de Magister en Física, U. de Chile (1996).
- [8] R. Graham and T. Tel, *Phys. Rev A*, **35** (1987) 1328.
- [9] R. Graham and T. Tel, *Phys. Rev A*, **31** (1985) 1109.
- [10] R. Graham and T. Tel, *Phys. Rev A*, **31** (1985) 3364.
- [11] O. Descalzi, *Gradient Expansion of the Nonequilibrium Potential for the Supercritical Ginzburg-Landau Equation*, Tesis de Doctorado, U. de Essen (1993).
- [12] O. Descalzi and E. Tirapegui in *Instabilities and Nonequilibrium Structures II*, eds. E. Tirapegui and D. Villarroel, (Kluwer 1989).

- [13] O. Descalzi and E. Tirapegui, *J. Stat. Phys.*, **57** 993 (1989).
- [14] F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui, *Functional Integration and Semiclassical Expansion* (Reidel, Dordrecht 1982).
- [15] F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui, *J. Phys.*, **11A**, L263 (1978).
- [16] M. Clerc, R. Rojas and E. Tirapegui, to be submitted to *Journal of Statistical Physics*.
- [17] N. G. van Kampen in *Instabilities and Nonequilibrium Structures*, eds. E. Tirapegui and D. Villarroel, (Reidel 1987).
- [18] R. S. Maier and D. L. Stein, *Phys. Rev. Lett.* **79**, (1997) 3109.
- [19] R. S. Maier and D. L. Stein, *Phys. Rev. Lett.* **82**, (1999) 1806.
- [20] R. S. Maier and D. L. Stein, arXiv: adap-org/9407003 (1994).
- [21] *Handbook of Mathematical Functions*, eds. M. Abramowitz and I. A. Stegun (Dover, New York 1968).
- [22] C. Elphick and E. Tirapegui in *Instabilities and Nonequilibrium Structures*, eds. E. Tirapegui and D. Villarroel, (Reidel 1987).
- [23] T. B. Benjamin and F. Ursell, *Proc. Roy. Soc. London A* **225** (1954) 505.
- [24] K. Kumar, *Proc. Roy. Soc. London A* **452**, (1996) 1113.
- [25] K. Kumar and L. S. Tuckerman, *J. Fluid Mech.* **279** (1994) 49.
- [26] E. Cerda, *Inestabilidad de Faraday en Fluidos y Arenas*, Tesis de Doctorado, U. de Chile (1996)
- [27] E. Cerda and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **78**, (1997) 859.
- [28] E. Cerda and E. Tirapegui, *Journal of Fluid Mechanics* **368** (1998) 195.
- [29] E. Cerda and E. Tirapegui, *Bull. Acad. R. Belgique* **7** (1996) 301.
- [30] E. Cerda, R. Rojas and E. Tirapegui, *Journal of Statistical Physics*, **101**, Nos. 1/2, (2000).

- [31] H. W. Müller, H. Wittmer, C. Wagner, J. Albers and K. Knorr, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 2357.
- [32] V. P. Maslov and M. V. Fedorink, Semiclasical approximation in Quantum Mechanics (Reidel, 1981).
- [33] J. Beyer and R. Friedrich, Phys. Rev. E **51** (1995) 1162.
- [34] Solitons and coherent structures, edited by D.K. Campbell, A.C. Newell, R.J. Schreiffer, and H. Segur, Physica **D 18** (1986).
- [35] M. Cross and P. Hohenberg, Rev. Modern Phys. **65**, 581 (1993).
- [36] C. Elphick, G.R. Ierley, O. Regev, E. A. Spiegel, Phys. Rev. **A 44**,1110 (1991).
- [37] B. Malomed, A. Nepomnyashchy, Phys. Rev. **A 42**,6009 (1990).
- [38] D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51**, 591 (1979).
- [39] K. Kawasaki , Prog. Theor. Phys. **79**, 161 (1984), Prog. Theor. Phys. **80**, 123 (1984).
- [40] K. Kawasaki and Otha, Physica A **116**, 573 (1982). T. Nagi, K. Kawasaki, Physica A **139**, 438 (1986).
- [41] H. Calisto, M. Clerc, R. Rojas and E. Tirapegui, Phys. Rev. Lett., **85** (2000) 3805.
- [42] M. Argentina, M. Clerc. R. Rojas and E. Tirapegui, to be submitted to Physica D.
- [43] R. Teman, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, (Springer, New York 1997).
- [44] "Pattern, Defect and Materials instabilities", edited by D. Walgraef and N. M. Ghoniem, Kluwer, 1990.
- [45] P. Couillet, C. Elphick, D. Repaux, Phys. Rev Lett. **58**, 431 (1987).
- [46] C.Elphick, E. Meron, E. A. Spiegel, Phys. Rev. lett. **61**, 496 (1988).

- [47] M. Argentina, Dynamique des Systèmes Bistables Spatialement étendus, Tesis de Doctorado, U. de Nice-Sophia Antipolis (1999).
- [48] J. W. Cahn, J. E. Hilliard, *J. Chem. Phys.* **28**, 258 (1958).
- [49] A. A. Golovin, S. H. Davis, A. A. Nepomnyashchy, *Physica D* **122**, 202 (1998).
- [50] C. Chevallard, C. Clerc, P. Coulet, G. J. Gilli, *Eur. Phys. J. E* **1**, 179 (2000).
- [51] M. Clerc, Intabilités des Systèmes Quasi-Réversibles, Tesis de Doctorado, U. de Nice-Sophia Antipolis (1999).
- [52] Astrov Yu. A., Ammelt E. and Purwins H. G., *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 3129
- [53] N. Alikakos, P. W. Bates, G. Fusco, *J. Differential equations* **90**, 81 (1991).
- [54] C. M. Elliot, D. French, *IMA Journal Appl. Math.* **38**, 97 (1987). J.C. Eilbeck, J.E. Furter, M. Grinfeld, *Phys. Lett. A* **135**, 272 (1989).