



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
ESCUELA DE POSTGRADO

“EFECTOS ROBUSTOS DEL RUIDO EN SISTEMAS EXTENDIDOS”

CLAUDIO MOISÉS FALCÓN BEAS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN EVALUADORA

Sr. Marcel Clero G.	Profesor Guía
Sr. Enrique Tirapegui Z.	Profesor Co-guía
Sr. Felipe Barra D.	
Sr. Orazio Descalzi M.	
Sr. Nicolás Mujica G.	
Sr. Sergio Rica M.	

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS
MENCIÓN FÍSICA

SANTIAGO DE CHILE
AGOSTO 2005

RESUMEN

Este trabajo de tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias, mención Física, se ha centrado en el estudio de los comportamientos robustos del ruido en sistemas extendidos. El objetivo principal ha sido estudiar y caracterizar el mecanismo de un nuevo fenómeno robusto del ruido: la propagación de un frente estacionario entre un estado homogéneo estable y un estado periódico estable en presencia de ruido aditivo. También se ha estudiado la existencia, dinámica y estabilidad de estructuras localizadas, y su evolución en presencia de ruido aditivo.

En la primera parte de esta tesis, se da una pequeña introducción al tema y a las herramientas para describir el fenómeno que se pretende estudiar. En la primera parte se estudiará que son los fenómenos robustos y se darán algunos ejemplos. En la parte central se introducirán los conceptos de sistemas simples y sistemas extendidos. En la parte final del capítulo se darán a conocer propiedades básicas de los procesos estocásticos, y, en particular, del ruido.

La segunda parte de esta tesis está dividida en 3 capítulos. En el Capítulo 2 se explican las transiciones inducidas por el ruido en sistemas simples que será fundamentales para entender el nuevo fenómeno que queremos explicar. En particular se discute las tasas de transición de Kramers. En el Capítulo 3 se da una breve introducción a la propagación de frentes y la formación de estructuras localizadas en sistemas extendidos unidimensionales, mediante análogos mecánicos. Se da especial preocupación al tratamiento de la interacción de defectos para entender la existencia y estabilidad de estructuras localizadas. En el Capítulo 4 se explica el fenómeno de la propagación inducida por ruido aditivo. Para ello, hemos usado un modelo prototipo de Swift-Hohenberg subcrítico, del cual hemos deducido una ecuación adecuada para la evolución de una coordenada, llamada corazón del frente, que describe el movimiento de éste. Se explica la propagación del frente como un motor browniano, donde las fluctuaciones son convertidas en movimiento dirigido. También se estudia la formación de estructuras localizadas en este modelo, y su evolución en presencia de ruido, de donde concluimos que éstas son intrínsecamente inestables.

En la tercera parte de esta tesis se entregan las conclusiones del trabajo, las limitaciones de la investigación y las perspectivas futuras a seguir.

La cuarta y última parte de este trabajo de tesis son los apéndices A y B. En el Apéndice A se incluyen los trabajos que se han realizado en este tema. El primero de ellos trata sobre la propagación de frentes en presencia de ruido aditivo, el segundo, sobre la existencia, estabilidad, diagramas de bifurcación y dinámica de patrones localizados, el tercero sobre estructuras localizadas bipatrónicas y el cuarto sobre la generalidad del fenómeno de la propagación de frentes en presencia de ruido. Finalmente, en el Apéndice B se trata el cálculo de la interacción de defectos en la ecuación de Swift-Hohenberg subcrítica para explicar la existencia de estructuras localizadas.

ÍNDICE GENERAL

Parte I	Introducción	5
1.	Introducción al problema	6
1.1.	Motivación	6
1.2.	Fenómenos robustos	8
1.2.1.	Bifurcación de Nodo-Silla (<i>Saddle-Node</i>)	10
1.2.2.	Bifurcación de Horquilla (<i>Pitchfork</i>)	11
1.3.	Sistemas extendidos	13
1.4.	Fluctuaciones y Procesos estocásticos: Ruido	16
Parte II	Desarrollo	19
2.	Fenómenos Robustos del ruido en Sistemas Simples: Transiciones inducidas por ruido	20
2.1.	Introducción	20
2.2.	Transiciones inducidas por ruido	20
3.	Fenómenos Robustos en Sistemas Extendidos: Frentes y Estructuras localizadas	25
3.1.	Sistemas extendidos	25
3.2.	Análisis de Estabilidad	26
3.3.	Propagación de Frentes y Sistemas Dinámicos espaciales	29
3.3.1.	Frente FKPP	35
3.3.2.	Frentes Normales	36
3.4.	Estructuras Localizadas	37

4. Propagación de Frentes en Presencia de Ruido Aditivo	43
4.1. Introducción al fenómeno	43
4.1.1. Modelo de Swift-Hohenberg	43
4.2. Propagación inducida por ruido	47
4.2.1. Generalización del modelo	50
4.3. Patrones localizados en presencia de ruido	50
Parte III Conclusiones	54
5. Conclusiones	55
5.1. Conclusiones del trabajo de tesis	55
5.2. Limitaciones y Perspectivas	56
Bibliografía	57
Parte IV Apéndices	60
A. Publicaciones	61
B. Cálculo de Interacción de defectos en la ecuación de Swift-Hohenberg subcrítica	94

Parte I

INTRODUCCIÓN

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

1.1. Motivación

La descripción de la materia macroscópica, esto es, materia compuesta por un número grande de constituyentes, es usualmente tratada por un número pequeño de variables llamadas *macroscópicas*[1]. Estas variables macroscópicas son resultado de promedios realizados sobre diferentes configuraciones de un gran número partículas microscópicas, que interactúan de manera compleja entre sí. Así es como, por ejemplo, nos referimos a la medición de la temperatura de un sistema macroscópico (como la de un fluido[2] en reposo o un sólido en equilibrio termodinámico[3, 4]) en vez de tratar de referirnos a la energía cinética de cada una de las partículas microscópicas constituyentes de la materia macroscópica. Usualmente, en medios homogéneos e isótropos, estas variables son cantidades que no evolucionan, es decir, se mantienen constantes en el tiempo y en el espacio.

Esta descripción estática puede cambiar cuando se toman en cuenta inhomogeneidades dentro de la materia macroscópica. En este caso, estas variables se tratan como campos espacio-temporales cuya evolución es determinada por ecuaciones deterministas a derivadas parciales (EDP). Para ejemplificar esto, podemos tomar el caso de un fluido newtoniano. Cuando está en equilibrio termodinámico y mecánico, es decir, cuando es completamente homogéneo e isótropo y no presenta ninguna dinámica macroscópica, es usual describir su estado por variables macroscópicas que se mantienen constantes en el tiempo y en el espacio, como la temperatura, presión y densidad. Pero cuando lo sacamos del equilibrio, ya sea aplicando una diferencia de temperatura grande [5]o agitándolo bruscamente[6], inhomogeneidades aparecen en él, como disclinaciones o vórtices, presentando una rica dinámica espacio-temporal. Esta reducción de un número grande a un número pequeño de variables es posible debido a la separación de escalas espacio-temporales en la evolución del sistema. Esto significa que mientras un gran número de grados de libertad relajarán al equilibrio y no tendrán dinámica relevante, un número pequeño de ellos evolucionarán lentamente y serán las variables que determinarán la evolución del sistema bajo estudio[7].

Al realizar estos promedios sobre configuraciones para describir la evolución de un sistema macroscópico, un gran número de variables que evolucionan rápidamente al equilibrio es eliminado de la dinámica dominante. Para dar cuenta de estas variables de evolución rápida, uno puede incluir en las ecuaciones deterministas términos estocásticos, modelizados de manera conveniente, transformando los campos espacio-temporales de-

terministas en campos fluctuantes tanto en el espacio como en el tiempo. Estos términos estocásticos son conocidos como ruido[8].

Un objetivo de esta tesis será caracterizar un nuevo fenómeno robusto del ruido interno en estos sistemas macroscópicos, que llamaremos extendidos. Mediante simulaciones numéricas, se ha encontrado que el ruido aditivo puede inducir la propagación de un estado del sistema extendido sobre otro. Para entender y caracterizar este fenómeno diversos conceptos serán explicados en esta introducción (en la Figura 1.1 se ilustra este fenómeno en 1 y 2 dimensiones espaciales, para dos sistemas distintos, mostrando como este comportamiento aparece sin importar el modelo bajo estudio).

La influencia del ruido en sistemas no-lineales ha sido sujeto de estudio tanto experimental como teórico durante los últimos años[8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Lejos de ser meramente una perturbación a la evolución determinista de un sistema, una fuente indeseable de desorganización o una fluctuación innecesaria de un sistema en equilibrio, el ruido puede inducir comportamientos dinámicos específicos y contraintuitivos. Los ejemplos más conocidos en sistemas de dimensión cero en el espacio son las transiciones inducidas por ruido[8] y las resonancias estocásticas[9]. Recientemente en sistemas extendidos se han estudiado y caracterizado nuevos comportamientos de este tipo. Ejemplos de estos comportamientos han sido descubiertos en diversas experiencias: transiciones de fase inducidas por ruido[10], patrones inducidos por ruido[11], intermitencia espacio temporal estocástica[9] y ondas viajeras sustentadas por ruido[15].

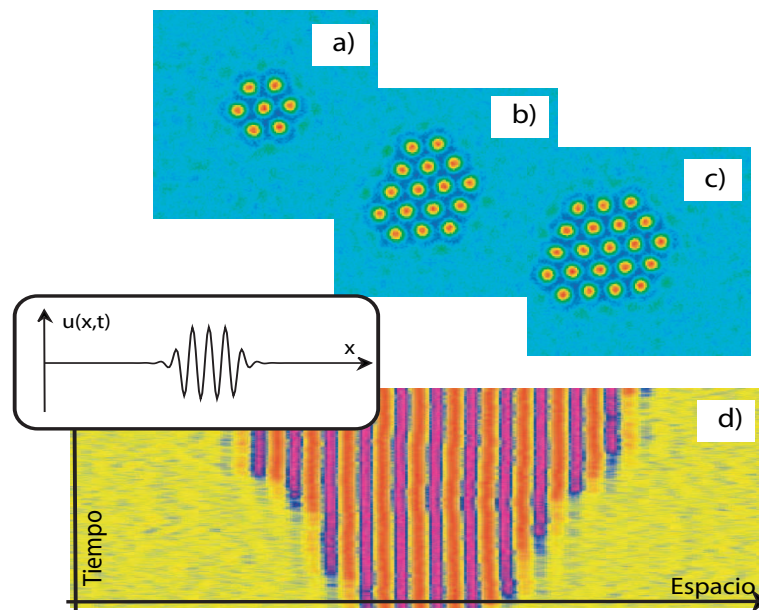


Fig. 1.1: Simulaciones numéricas de la propagación de frentes inducida por ruido en 1 y 2 dimensiones de un estado periódico sobre un estado homogéneo para diversos sistemas, patrones y condiciones iniciales. En las figuras a), b) y c) se muestra la evolución de un patrón hexagonal para tiempos $t_1 < t_2 < t_3$. En la figura d) se muestra la propagación de una estructura localizado por efecto del ruido aditivo, donde el eje horizontal representa el espacio y en vertical, el tiempo. En el recuadro, la condición inicial. Todas las simulaciones de esta tesis fueron realizadas con el software *DimX* desarrollado por Pierre Coulet y colaboradores en el Instituto No Lineal de Niza, Francia.

El concepto de frentes, es decir, la propagación de un estado sobre otro en un sistema extendido, y en especial, el problema de la velocidad de su propagación, emergió en la década del '30 en la dinámica de poblaciones [16], y el interés en este tipo de problemas ha crecido consistentemente tanto en Física, como en Química y en Matemática. En Física, la propagación de frentes juega un papel primordial en una gran variedad de situaciones, desde modelos de reacción-difusión, transiciones de fase, a sistemas genéricos que presentan patrones (para más referencias, ver [7]).

Tanto el ruido como la dinámica de frentes han sido estudiados por separado de manera exhaustiva. En esta tesis, trataremos de abordar la dinámica de frentes en presencia de ruido y los efectos robustos que las fluctuaciones producen sobre su evolución determinista. Es importante notar que la influencia del ruido en un estado globalmente estable que invade a otro estado metaestable o inestable, propiamente conocido como solución frente, ha sido extensivamente estudiado en la literatura, particularmente el problema de la selección de una velocidad de propagación[17].

El objetivo principal de esta Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias, mención Física, es estudiar los efectos robustos de los sistemas extendidos en presencia de ruido, en particular, presentar un nuevo caso: la propagación de un frente estacionario entre un estado estable homogéneo y un estado estable inhomogéneo (en este caso periódico), en presencia de ruido aditivo. Esta tesis planea estudiar y caracterizar el mecanismo que produce su propagación. También será objetivo de esta tesis estudiar la estabilidad, existencia y dinámica de estructuras localizadas vistas como interacción de frentes, en particular, en presencia de ruido.

Para comenzar a desarrollar el tema de este trabajo y tratar de hacerlo autocontenido, debemos sentar las bases conceptuales sobre las cuales se explicarán los resultados de este trabajo. En particular, es necesario aclarar que son los fenómenos robustos, el ruido y los sistemas extendidos.

1.2. Fenómenos robustos

Cuando tratamos diversos fenómenos en diversas ramas de la Física, notamos que existen elementos comunes que definen la dinámica del sistema bajo estudio: Oscilaciones, propagación de pulsos, ondas, equilibrios, transientes, etc. Cada uno de estos comportamientos *no depende de la Física subyacente bajo estudio*. Que un péndulo físico alterne periódicamente entre dos ángulos en torno a un equilibrio estable o que la concentración de algún reactivo en una reacción química varíe regularmente entre dos valores en el tiempo pueden parecer completamente distantes, pero son entendidos mediante un concepto simple: el sistema estudiado (tanto el péndulo como la reacción química) presenta oscilaciones en torno a un equilibrio estable.

El estudio y la caracterización de este tipo de fenómenos, llamados *robustos*, es uno de los objetivos principales de la física no-lineal. Una de las herramientas más importantes de esta rama de la Física es la teoría de bifurcaciones[18], de la que hablaremos a continuación.

Usualmente para modelar los comportamientos de diversas variables que describen la dinámica en los diversos sistemas físicos (el ángulo θ en el péndulo físico), químicos

(la concentración c_A del reactivo A) o biológicos (la población de células en una planta), es necesario usar parámetros que describan las características del sistema bajo estudio (el largo del péndulo y la gravedad, la temperatura del sistema y los reactantes, la cantidad de agua y de sales minerales, respectivamente). Al cambiar estos parámetros, los comportamientos cualitativos del sistema estudiado pueden cambiar: nuevos equilibrios y dinámicas permanentes, como oscilaciones, pueden aparecer o equilibrios existentes pueden desaparecer. Estos parámetros, que controlan el comportamiento del sistema, se llaman *parámetros de control*.

La manera de entender este cambio es en el espacio de fases, es decir, el espacio de las trayectorias del sistema bajo estudio[19]. Un ejemplo claro de este tipo de representación de las trayectorias es el que se presenta a continuación en la figura 1.2.a. Este es el espacio de fases de un oscilador armónico de frecuencia ω_o , cuya dinámica se describe por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_o^2 x - \nu y, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

donde ν describe la disipación por el roce con un fluido[2], que puede ser el aire. En el eje vertical está su velocidad, $\dot{x} = y$, y en el horizontal su posición x . Cuando un cambio cualitativo ocurre en el espacio de fases, es decir, las trayectorias en el espacio de fases sufren alteraciones drásticas, decimos que el sistema sufre una *bifurcación*. Por ejemplo, cuando una oscilación se amortigua, las trayectorias en el espacio de fases dejan de ser curvas cerradas, y llegan todas al punto de equilibrio, como se muestra en la figura 1.2.b. Esto es lo que ocurre cuando movemos un poco un péndulo desde su posición de equilibrio vertical en el aire: poco a poco se amortigua, hasta llegar al reposo. Si se aumenta aún más la disipación, las oscilaciones desaparecerán. Ocurre así, una transición desde un comportamiento subamortiguado (con oscilaciones que se amortiguan) a uno sobreamortiguado (donde no hay oscilaciones). Ahora el péndulo no oscila y las trayectorias en el espacio de fase no son espirales (figura 1.2.c).

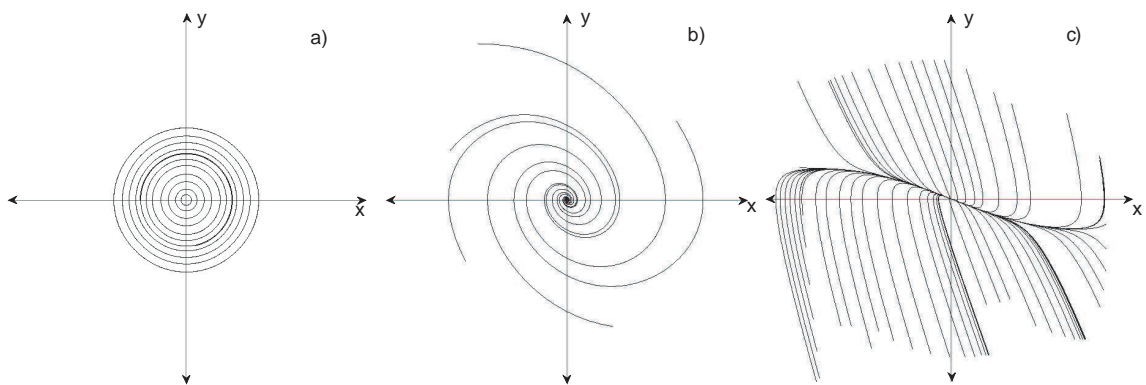


Fig. 1.2: Espacio de fases de un a)oscilador, b)oscilador subamortiguado y c)oscilador sobreamortiguado.

Ahora, mostraremos algunas bifurcaciones elementales en sistemas unidimensionales, en particular, la aparición y desaparición de puntos de equilibrio y el cambio cualitativo

de la estabilidad de éstos. Para analizar el cambio en la estabilidad de los equilibrios, haremos un análisis lineal en torno a ellos. Esto quiere decir que, conociendo la ecuación de movimiento autónoma

$$\dot{x} = f(x),$$

y un equilibrio x_o que satisface $f(x_o) = 0$, una perturbación en torno a él de la forma $x = x_o + \delta x$ evolucionará siguiendo la ecuación de movimiento

$$\dot{\delta x} = f(x_o)' \delta x,$$

donde $f(x_o)'$ es la derivada de f evaluada en x_o . Si suponemos soluciones de la forma $\delta x \sim e^{\lambda t}$, encontramos que si $f(x_o)' > 0$, el equilibrio es inestable, ya que las perturbaciones crecen exponencialmente y si $f(x_o)' < 0$, el equilibrio es estable, ya que las perturbaciones decrecen exponencialmente. Si $f(x_o)' = 0$, es necesario un análisis no-lineal para poder decir algo sobre su estabilidad.

Las bifurcaciones que estudiaremos y muchas otras más pueden ser vistas también en sistemas de más grados de libertad.

1.2.1. Bifurcación de Nodo-Silla (Saddle-Node)

Consideremos el siguiente sistema dinámico

$$\dot{x} = \epsilon - x^2 \equiv -\frac{\partial U[x]}{\partial x}, \quad (1.2.2)$$

donde x es la variable dinámica y ϵ es el parámetro de control. Un ejemplo que puede ser descrito por este tipo de modelo es la evolución de una especie biológica. Asumamos que la cantidad de individuos de esta especie en un instante de tiempo es n . Su tasa de crecimiento, \dot{n} , depende de la cantidad de alimento existente y puede ser modelada por tres contribuciones. La primera de ellas es un crecimiento lineal con la cantidad de individuos, ya que mientras más individuos hayan y haya alimento para que puedan vivir, más se reproducirán. La segunda de ellas es una saturación no-lineal, ya que al haber muchos individuos, el alimento se acaba, por lo que la tasa de reproducción decrece. La tercera es una tasa de crecimiento constante, que significará un ingreso constante de individuos por unidad de tiempo. El modelo más simple que puede describir este crecimiento es

$$\dot{n} = \alpha + \epsilon' n - n^2. \quad (1.2.3)$$

Reescalando $z = n - \epsilon/2$, $\epsilon = \alpha - \epsilon^2/4$, encontramos que la ecuación que describe el crecimiento de la especie biológica es idéntica al modelo 1.2.2. Como el sistema es unidimensional y el vector de campo o fuerza es continuo, siempre podemos encontrar un potencial asociado al lado derecho de la ecuación. Esto nos puede ayudar a ver los equilibrios como máximos o mínimos del potencial, haciendo una analogía mecánica. Para este caso, el potencial es

$$U[x] = -\epsilon x + \frac{x^3}{3}.$$

Podemos ver que si $\epsilon > 0$ existen dos equilibrios, uno estable y el otro inestable, y si $\epsilon < 0$, no hay equilibrios en el sistema (ver figura 4.1). Moviendo ϵ desde los reales

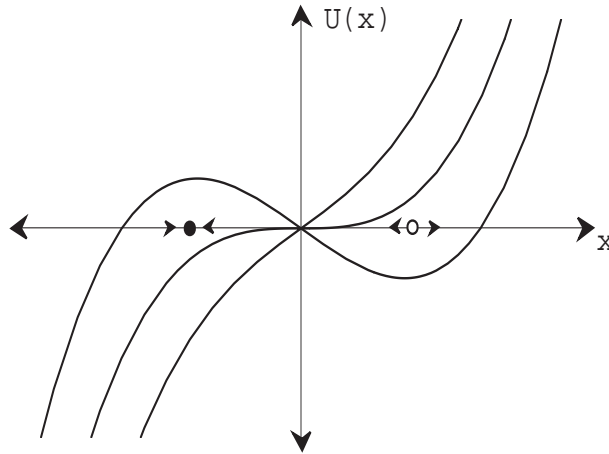


Fig. 1.3: Potencial $U[x]$ para diversos valores de ϵ . Cuando $\epsilon > 0$, el cero deja de ser estable y aparece un par de puntos de equilibrio, uno estable y el otro inestable. Las flechas indican hacia donde se dirigen las trayectorias cuando se encuentran en las respectivas tinas de atracción. El punto blanco es el equilibrio inestable y el negro, el estable, que existen cuando $\epsilon > 0$

negativos a los positivos vemos como el sistema se comporta de la misma manera, es decir todas las trayectorias hacen decrecer x y en torno a $x = 0$ se tornan más lentas, hasta que $\epsilon = 0$ se hace 0. Es en este punto donde el sistema bifurca, ya que las trayectorias cambian cualitativamente. Aparece un equilibrio en $x = 0$, que es no-linealmente inestable. Cuando $\epsilon > 0$, aparecen dos equilibrios en $x = \pm\sqrt{\epsilon}$, donde $x = -\sqrt{\epsilon}$ es estable (llamado *atractor*) y $x = \sqrt{\epsilon}$ es inestable (llamado *repelidor*). Cualquier condición inicial que esté en el intervalo $[-\infty, -\sqrt{\epsilon}]$ será repelida a $-\infty$ y cualquier condición inicial que esté en el intervalo $[-\sqrt{\epsilon}, \infty]$ llegará asintóticamente al atractor. Este conjunto de valores se denomina *cuenca o tina de atracción*.

1.2.2. Bifurcación de Horquilla (Pitchfork)

Consideremos ahora el sistema dinámico

$$\dot{x} = \epsilon x - x^3. \tag{1.2.4}$$

Al contrario de la bifurcación anterior, siempre habrá un equilibrio en $x = 0$. Su estabilidad está dada por el signo del parámetro de bifurcación ϵ . Cuando éste es negativo, el único equilibrio del sistema es el cero y es un atractor. El sistema bifurca cuando $\epsilon = 0$ y aparecen otros dos equilibrios en $x = \pm\sqrt{\epsilon}$, como se muestra en la figura 1.4. Ahora, éstos son atractores y el cero deviene inestable. Cualquier condición inicial que se ubique en los reales negativos será atraída asintóticamente a $-\sqrt{\epsilon}$. Es decir, para $-\sqrt{\epsilon}$, su tina o cuenca de atracción son los reales negativos. De la misma manera, para $\sqrt{\epsilon}$, los reales positivos son su cuenca de atracción. Este es el primer ejemplo donde un fenómeno propio de la física no-lineal y de los sistemas fuera del equilibrio aparece: la coexistencia de estados estables. Cuando diversos estados estables coexisten, se les suele llamar estados *metaestables*, para resaltar el hecho de que el sistema no presenta un único equilibrio,

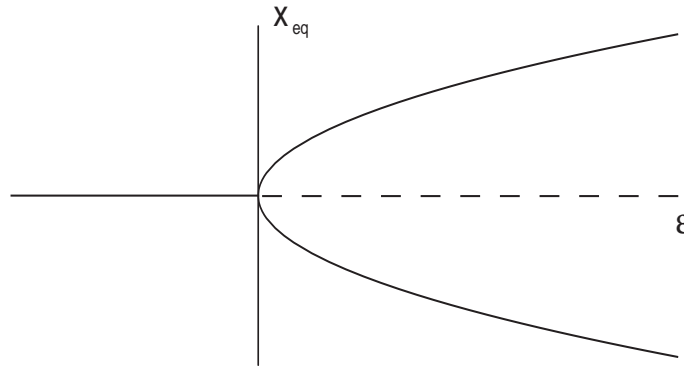


Fig. 1.4: Diagrama de bifurcación para la bifurcación de horquilla $x_{eq} = x_{eq}(\epsilon)$. Las curvas continuas representan los equilibrios estables y las discontinuas los equilibrios inestables.

lo que ocurriría en un análisis lineal, como por ejemplo, en sistemas en equilibrio termodinámico. Un ejemplo físico que puede ilustrar esta bifurcación es el siguiente[4, 20]: cuando sobre una barra larga de madera en posición vertical aplicamos un peso pequeño, esperamos que esta no se pandee, es decir, no se doble ni a la derecha ni a la izquierda, sino que se mantenga vertical y realice pequeñas oscilaciones amortiguadas en torno a este equilibrio. Pero, cuando el peso es suficientemente grande, ocurrirá un rompimiento espontáneo de simetría, es decir, el sistema dejará de preferir encontrarse en la vertical y se doblará a la derecha o a la izquierda, dependiendo de las condiciones iniciales del problema: la velocidad inicial del peso que se le coloca, pequeñas inclinaciones de la barra con respecto a la vertical, etc.

Un cambio que puede realizarse a la ecuación anterior, es romper la simetría $x \rightarrow -x$, al añadir un término constante η . Esta puede ser la modelización del sistema de la barra vertical, pero en presencia de una inclinación leve a la derecha o a la izquierda. La ecuación es entonces,

$$\dot{x} = \eta + \epsilon x - x^3. \quad (1.2.5)$$

Esta nueva ecuación presenta otro fenómeno propio de los sistemas no-lineales o fuera del equilibrio: histéresis. Usando un método gráfico, que se presenta en la figura 1.5, podemos ver que cuando η está entre las curvas $\eta = \pm 2(\frac{\epsilon}{3})^{3/2}$ existen dos equilibrios estables distintos. Cuando se cruza alguna de las curvas, dos equilibrios aparecen o desaparecen. A estos valores de η a ϵ fijo se les llama puntos de nacimiento o de destrucción de la biestabilidad. Cuando nos encontramos fuera de las curvas, existe un único equilibrio. Partiendo de algún valor de η negativo, podemos ver que, aumentando η hasta cruzar la curva de nacimiento de la biestabilidad, sólo existe un equilibrio. Dentro de la curva de biestabilidad, hay dos equilibrios, que son energéticamente iguales para $\eta = 0$. Este es el llamado punto de Maxwell. A medida que seguimos aumentando η y cruzamos la curva de destrucción de la biestabilidad, dos equilibrios desaparecen y el sistema nuevamente presenta un único equilibrio, que es distinto al inicial. Si procedemos de manera inversa, encontraremos que nuevamente habrá un único equilibrio, pero diferente al inicial. La diferencia entre los equilibrios radica en que el valor que toma el parámetro η al saltar de un equilibrio a otro es distinto al aumentarlo o disminuirlo. A la curva que recor-

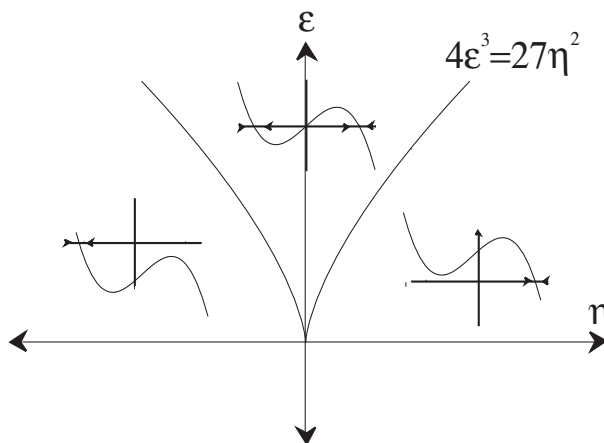


Fig. 1.5: Representación gráfica de los equilibrios para la bifurcación de tenedor imperfecta. La curva descrita por la ecuación $4\epsilon^3 = 27\eta^2$ representa la curva de nacimiento de la bistabilidad para η negativo y de destrucción para η positivo. Para $\eta_m = 0$, se recupera la ecuación 1.2.4, por lo que ambos estados $x_{eq} = \pm\sqrt{\epsilon}$ son igualmente estables, es decir el putno de Maxwell. Los pequeños dibujos representan algunos retratos de fase unidimensionales.

ren los equilibrios del sistema al variar los parámetros entre las curvas de nacimiento y destrucción de la biestabilidad se le llama *curva de histéresis*.

Un caso de histéresis que veremos más adelante es aquel que tiene simetría $x \rightarrow -x$. La ecuación más simple que lo describe es

$$\dot{x} = \epsilon x + \nu x^3 - x^5. \quad (1.2.6)$$

Este sistema posee una serie de soluciones estacionarias que aparecen y desaparecen en un ciclo de histéresis al igual que antes. La gran diferencia está en que en este modelo podemos calcular explícitamente como nacen y desaparecen las soluciones, y su estabilidad. El diagrama de bifurcación para las soluciones de esta ecuación se presenta en la figura 1.6

1.3. Sistemas extendidos

Como explicamos en el comienzo de este capítulo, cuando queremos describir la evolución de la materia macroscópica, usamos un número pequeño de variables. Para poder llegar a esta descripción simplificada es necesario entender primero como se acoplan sistemas de pocos grados de libertad con sus vecinos cercanos. Este acoplamiento puede deberse a interacciones de diverso tipo: electromagnéticas, moleculares, fuerzas de van der Waals, etc., que pueden ser locales o no-locales, es decir, pueden acoplar a vecinos cercanos, o tener una talla de interacción macroscópica. Cuando acoplamos diversos sistemas con sus vecinos, llamamos al sistema completo, *extendido*, y a los sistemas que conforman este sistema extendido, *simples* [21]. Los comportamientos robustos de cada uno de los sistemas individuales generan comportamientos robustos del sistema extendido. Así, un conjunto de osciladores generan ondas con distintas relaciones de dispersión,

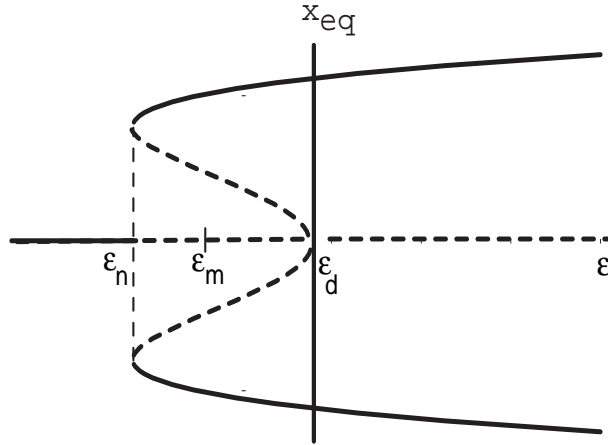


Fig. 1.6: Diagrama de bifurcación para la bifurcación subcrítica quintica. En las líneas continuas se muestran los equilibrios estables y en las discontinuas los inestables. También se representan los puntos de nacimiento de la biestabilidad (ϵ_n), el punto de Maxwell ($\epsilon = 0$) y destrucción de la biestabilidad (ϵ_d)

equilibrios metaestables pueden generar frentes y estructuras localizadas, etc. Veamos ahora el tipo de modelos que trataremos en esta tesis.

Un sistema simple con m grados de libertad desacoplados, usualmente tiene una evolución temporal que puede ser representada por

$$\dot{u}_i(t) = f_i(u_i(t), t, \{\lambda_j\}), \quad i = 1 \dots m, \quad (1.3.1)$$

donde $\{\lambda_j\} = \{\lambda_1 \dots \lambda_N\}$ son un conjunto de parámetros que determinan la estabilidad y dinámica del sistema, y $\{u_i\}_{i=1}^m$ son las variables que describen la evolución del sistema simple. Cuando diversos sistemas simples interactúan entre ellos, la evolución de cada uno de ellos se describe por

$$\dot{u}_i(t) = f(u_i(t), t, \{\lambda_j\}) + g_i(\{u_j\}, t, \{\gamma_j\}), \quad i, j = 1 \dots m, \quad (1.3.2)$$

donde $\{\gamma_1 \dots \gamma_N\}$ son parámetros que describen la interacción entre vecinos cercanos y $g_i(\{u_j\})$ son funciones que acoplan unas variables con otras. En muchos sistemas físicos, los acoplamientos usualmente sólo dependen de los vecinos más cercanos a distancias pequeñas, por lo tanto, uno espera que este tipo de sistemas se describan por gradientes y operadores diferenciales. Cuando esto ocurre, una descripción en el límite continuo es adecuada, por lo que uno puede esperar tratar con un campo $u(\vec{r}, t)$, que satisface una ecuación a derivadas parciales de la forma

$$\partial_t u(\vec{r}, t) = h(u, \vec{r}, t, \nabla, \{\alpha_j\}), \quad i, j = 1 \dots m, \quad (1.3.3)$$

donde la función $h(u, \vec{r}, t, \nabla, \{\alpha_j\})$ se denomina función de reacción y $\{\alpha_1 \dots \alpha_N\}$ son parámetros que describen la estabilidad y dinámica del sistema. Un ejemplo de este tipo de sistemas es una cadena de péndulos. El sistema simple en este caso es un péndulo físico de largo l en presencia de un campo gravitatorio en el aire. Su conocida ecuación de movimiento es

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \mu \dot{\theta}, \quad (1.3.4)$$

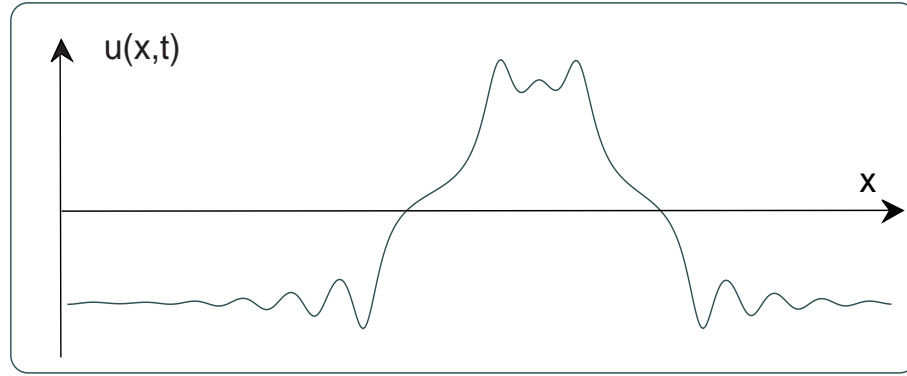


Fig. 1.7: Solución oscilatoria $u(x, t)$ de la ecuación de Sine-Gordon. Podemos notar las oscilaciones que decaen cuando llegan a los estados estacionarios homogéneos. Este tipo de fenómenos serán estudiados en capítulos posteriores.

donde μ es la viscosidad reducida en el límite de baja velocidad, siguiendo la ley de Stokes para fluidos viscosos y θ es ángulo que forma el péndulo con la vertical.

Ahora, cuando colocamos muchos de estos sistemas simples y los acoplamos unos a otros, por ejemplo, con resortes, las ecuaciones de movimientos para cada uno de estos péndulos serán

$$\ddot{\theta}_i = -\frac{g}{l} \sin\theta_i - \mu\dot{\theta}_i + \kappa(\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i), \quad i = 1..N, \quad (1.3.5)$$

donde κ es la constante reducida de los resortes, que suponemos por simplicidad igual para cada uno de ellos. Tomaremos el límite continuo, es decir,

$$\begin{aligned} \kappa &\rightarrow \infty, \\ \epsilon &\rightarrow 0, \\ \theta_i(t) &\rightarrow \theta(\epsilon i = x_i, t), \\ \theta_{i+1}(t) &\rightarrow \theta(x_i + \epsilon, t), \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

con ϵ la distancia entre cada uno de los péndulos, que acercamos tanto como queramos, siempre y cuando el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \kappa(\epsilon)\epsilon^2 = \tau,$$

con τ constante (esto significa que a medida que acercamos los péndulos, la constante elástica se hace más rígida). Expandiendo en serie de Taylor $\theta_{i+1}(t) = \theta_i(t) + \epsilon\partial_x\theta_i(t) + \frac{\epsilon^2}{2}\partial_{xx}\theta_i(t) + o(\epsilon^2)$, la ecuación de la cadena de péndulos puede ser escrita como

$$\partial_{tt}\theta = -\Omega^2 \sin\theta - \mu\partial_t\theta + \tau\partial_{xx}\theta. \quad (1.3.7)$$

Hemos llamado a $\sqrt{g/l} = \Omega$ la frecuencia natural de oscilación. Esta ecuación es llamada *Sine-Gordon*, en referencia a la ecuación de Klein-Gordon[22] conocida en física

de partículas, y que aparece también en física del estado sólido[23]. Podemos ver en este sencillo ejemplo que la interacción entre vecinos cercanos, en el límite continuo, explica la aparición de derivadas espaciales. Cuantos más vecinos aparezcan acoplándose unos con otros, mayor será el orden de las derivadas en la ecuación a derivadas parciales. En el caso que la interacción sea de largo alcance, es decir, acople un gran número de vecinos, la evolución deberá describirse mediante ecuaciones integro-diferenciales. En la figura 1.7 se muestra una solución oscilatoria $u(x, t)$ típica de la ecuación 1.3.7. En particular nos interesará estudiar las soluciones estacionarias, es decir, aquellas soluciones que no poseen dependencia temporal, y su estabilidad. Ésto se analizará en capítulos posteriores.

1.4. Fluctuaciones y Procesos estocásticos: Ruido

Siguiendo la discusión anterior, al describir la materia macroscópica y focalizar el estudio de un número pequeño de variables, las fluctuaciones aparecen naturalmente. El estudio de las fluctuaciones comenzó con la termodinámica, donde éstas tomaban el rol de pequeñas perturbaciones indeseables del equilibrio. Sólo con la teoría atomista y la mecánica estadística a comienzos del siglo XX, se le dió importancia, al entregar información del sistema en equilibrio, mediante el teorema de Fluctuación-Disipación y el movimiento browniano[24]. Cabe resaltar que este tratamiento asume un equilibrio global del sistema bajo estudio, o leves cambios de este equilibrio bajo perturbaciones. Para un tratamiento de las fluctuaciones en sistemas fuera del equilibrio, fue necesario esperar la teoría de tasa de reacción de Kramer[12], que explicaba como las fluctuaciones pueden provocar transiciones desde un equilibrio hacia otro y el tiempo que le tomaba al sistema realizar esta transición en presencia de fluctuaciones. En la literatura, este tipo de grandes fluctuaciones reciben el nombre de transiciones inducidas por ruido[8]. Debido a que las escalas de tiempo y de espacio de estas fluctuaciones son muy pequeñas comparadas con la evolución de las variables macroscópicas, se les da el carácter de aleatorias, es decir, se modelan como procesos estocásticos, usando la teoría de probabilidades. Definamos algunos de los conceptos básicos de los procesos estocásticos que usaremos en la descripción de las fluctuaciones de un sistema.

Un proceso estocástico $\zeta(t)$ es una familia de variables aleatorias $\{\zeta(t), t \in I\}$ indexadas por un parámetro t que pertenece a algún intervalo I , que toman valores en un espacio muestral Ω . En el caso en que el parámetro t tome valores continuos, llamaremos a la trayectoria $\zeta(t)$, *realización*. Es por esto que a los procesos estocásticos se les asocia la definición de trayectorias que toman valores con probabilidad. Otra forma de entender un proceso estocástico $\zeta(t)$ es asociarle un serie de variables aleatorias, o lo que es mejor, un vector aleatorio $\vec{\zeta} = \{\zeta(t_i)\}_i^N$, para alguna discretización del parámetro t , que asociaremos con el tiempo. En este sentido, la teoría de probabilidades puede ser utilizada de inmediato. Podemos preguntarnos entonces por las probabilidades condicionales o marginales, es decir, conociendo la probabilidad

$$P_N(\vec{\zeta}) = P_N(\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_N)), \quad (1.4.1)$$

con t_1, \dots, t_N la discretización del tiempo, podemos calcular las probabilidades conjuntas y marginales como usualmente se hace para variables aleatorias. Un punto importante es que, debido a que el proceso estocástico toma valores $\zeta(t_i) = \zeta_i$ en tiempos t_i , podemos

permutar diferentes estados del proceso. En el caso de realizaciones, también se cumple la propiedad

$$\lim_{t_j \rightarrow t_{j-1}} P_N(\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_j), \zeta(t_{j-1}), \dots, \zeta(t_N)) = \delta(\zeta_j - \zeta_{j-1}) P_{N-1}(\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_j), \zeta(t_{j-2}), \dots, \zeta(t_N)). \quad (1.4.2)$$

En el límite continuo, la probabilidad $P_N(\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_N))$ puede escribirse como un funcional $P[\zeta(\cdot)]$.

Cuando el proceso estocástico posee la propiedad

$$P_{1|N-1}(\zeta_N | \zeta_{N-1}, \zeta_{N-2}, \dots, \zeta_1) = P_{1|1}(\zeta_N | \zeta_{N-1}), \quad (1.4.3)$$

donde $P_{m|n-m}$ es la probabilidad condicional definida por

$$P_{m|n-m}(\zeta_1, \dots, \zeta_m | \zeta_{m+1}, \dots, \zeta_n) = \frac{P_n(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{P_{n-m}(\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_n)},$$

se le llama *proceso de Markov*. Por esto un proceso de Markov está completamente determinado por dos funciones $P_1(\zeta_1)$, la condición inicial, y por $P_{1|1}(\zeta_2 | \zeta_1) = P(\zeta_2 | \zeta_1)$, la probabilidad de transición. Con esto, la probabilidad $P_N(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ está dada por

$$P_N(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = P_1(\zeta_1) \prod_{k=1}^{N-1} P(\zeta_{k+1} | \zeta_k). \quad (1.4.4)$$

Esta relación, junto con la identidad de Chapman-Kolmogorov

$$P(\zeta_3 | \zeta_1) = \int_{\Omega} d\zeta_2 P(\zeta_3 | \zeta_2) P(\zeta_2 | \zeta_1), \quad (1.4.5)$$

que satisfacen los procesos de Markov y que se obtiene al usar la relación anterior para $N=3$, entrega la ecuación de evolución de la probabilidad de transición. Existe un caso particular muy importante de este tipo ecuaciones de evolución: la ecuación de Fokker-Planck[26]. Ésta tiene la forma

$$\partial_t P(\zeta, t | \zeta_o, t_o) = \partial_\mu (-A^\mu(\zeta) + \frac{\eta}{2} \partial_\nu G^{\mu\nu}(\zeta)) P(\zeta, t | \zeta_o, t_o), \quad (1.4.6)$$

donde $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Este tipo de ecuación también puede encontrarse de manera más intuitiva a través de ecuaciones tipo Langevin[27]. Langevin explicó la partícula browniana de una manera alternativa a la de Einstein, modelando las fluctuaciones del sistema como una fuerza estocástica de manera que la velocidad $v(t)$ de la partícula browniana está sujeta a la ecuación estocástica

$$\dot{v}(t) = -\alpha v(t) + \zeta(t), \quad (1.4.7)$$

donde $-\alpha v(t)$ representa la fuerza viscosa de Stokes de carácter macroscópico y $\zeta(t)$ una fuerza pequeña no controlable de carácter y naturaleza microscópico, que estamos obligados a asociar alguna característica aleatoria. Lo que supuso Langevin, al igual que Einstein, es que al ser un medio macroscópico constituido por muchos elementos microscópicos, la distribución de probabilidades de esta fuerza, y por tanto, del sistema,

debe ser descrito por una ley gaussiana (la justificación de esta suposición está en notar que ella es una consecuencia del teorema del límite central). Asumiendo que la fuerza aleatoria es gaussiana y cumple

$$\begin{aligned}\langle \zeta(t) \rangle &= 0 \\ \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle &= \eta\delta(t-t'),\end{aligned}\tag{1.4.8}$$

es decir, tiene promedio nulo y que las colisiones modeladas por esta fuerza están completamente descorreladas, le asignamos el nombre de *ruido blanco gaussiano* o sencillamente *ruido*. El parámetro η , en este caso, puede conocerse usando relaciones termodinámicas (el teorema de Fluctuación-Disipación). En general, cuando un sistema físico se modele por ecuaciones de la forma

$$\dot{q}^\mu = A^\mu(q) + \sqrt{\eta}\sigma^\mu(q)\zeta(t),\tag{1.4.9}$$

donde A^μ y σ^μ son funciones de las variables q^μ , y $\zeta(t)$ un ruido, llamaremos al ruido *aditivo*, cuando $\sigma^\mu(q) = \sigma_o^\mu$ constante. En otro caso, se llamará ruido *multiplicativo*. Es en este caso, cuando debemos elegir una interpretación de la discretización del tiempo para el ruido, ya que diversas discretizaciones definen procesos estocásticos distintos. La interpretación adecuada debe estar dada por la física del sistema que se está modelizando. En la mayoría de los casos se debe elegir la interpretación de Stratonovich[28], que corresponde a discretizar $\sigma^\mu(q)\zeta(t)$ en el punto medio del intervalo temporal. La razón es que si consideramos la distribución $\delta(t-t')$ de la ecuación 1.4.8 como el límite de distribuciones

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta_\tau(t-t') = \delta(t-t'),\tag{1.4.10}$$

con $\Delta_\tau(t)$ una función par y positiva con un máximo en $t=0$ y normalizada como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_\tau(t) dt = 1,$$

entonces el resultado de esta operación de límites, que corresponde en la mayoría de los casos a la situación física, es la interpretación de Stratonovich[28]. La interpretación de Ito corresponde a discretizar al comienzo del intervalo temporal y es la más usada en la literatura matemática.

Parte II

DESARROLLO

Capítulo 2

FENÓMENOS ROBUSTOS DEL RUIDO EN SISTEMAS SIMPLES: TRANSICIONES INDUCIDAS POR RUIDO

2.1. Introducción

Estudiaremos ahora fenómenos robustos del ruido en sistemas simples, esto es, fenómenos donde el ruido genera comportamientos que provienen de su naturaleza aleatoria y que no dependen de la rama física que se esté estudiando. Principalmente las investigaciones en los últimos años se han concentrado en dos de estos fenómenos, que han captado el interés de los científicos teóricos y experimentales: las transiciones inducidas por ruido y las resonancias estocásticas (para más referencias ver [9, 29]). Ambas tienen como elemento operativo a la presencia de ruido en sistemas no-lineales, y, es por esto, que presentan gran importancia en sistemas fuera del equilibrio. En este capítulo estudiaremos e ilustraremos el primero de ellos, que será importante para entender el mecanismo del fenómeno que queremos explicar.

2.2. Transiciones inducidas por ruido

La disciplina de las transiciones inducidas por ruido fue comenzada por Svante Arrhenius[30], dando una gran discusión sobre como las tasas de transición en reacciones químicas variaban de manera logarítmica con el inverso de la energía térmica, de tal modo que la tasa de transición κ de un estado a otro varía de la forma

$$\kappa = \nu e^{-\frac{E_o}{k_B T}} \quad (2.2.1)$$

donde ν es un prefactor con unidades de frecuencia, E_o la energía de activación, k_B la constante de Boltzmann y T la temperatura del termostato, también llamado intensidad del ruido. El trabajo de Arrhenius fue continuado por la teoría de fluctuaciones, primeramente por Lord Rayleigh (1896)[31] y luego por Einstein en física (1905) y Smoluchowski en química (1906)[32].

Supongamos que tenemos un sistema físico descrito por una ecuación de evolución estocástica (ya que alguno de sus componentes es estocástico) para un número finito de variables macroscópicas q^μ . Estas variables pueden ser concentraciones de algún

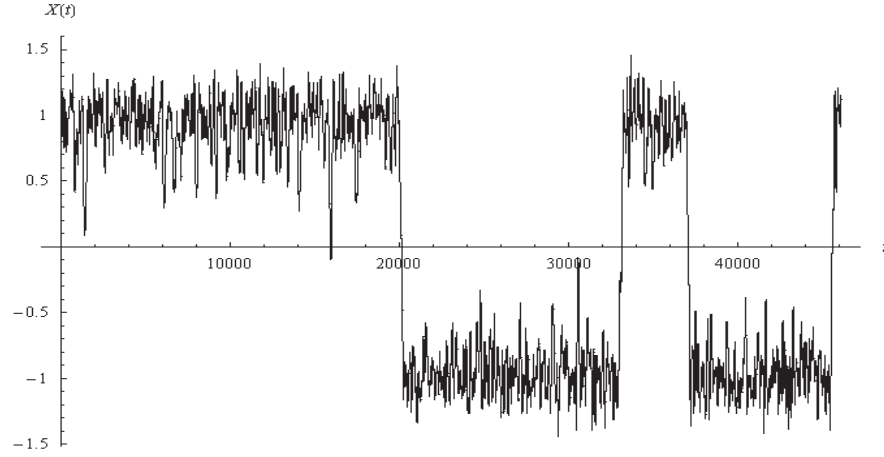


Fig. 2.1: Realización que presenta transiciones inducidas por ruido en un sistema biestable con dos mínimos, descrito por la ecuación 2.2.4 (en este caso $\epsilon = 1$). El tiempo de escape es el promedio de los tiempos de estadía en cada una de las cuencas de atracción de los mínimos del potencial $x_{\pm} = \pm 1$, siendo respectivamente los reales negativos para $x_- = -1$ y los reales positivos para $x_+ = 1$.

compuesto químico reactivo, o partículas brownianas sujetas a algún potencial, por mencionar algunos ejemplos. La ecuación genérica tiene la forma

$$\dot{x}^{\mu} = A^{\mu}(x^{\nu}) + \sqrt{\eta} \sum_{\lambda} \sigma_{\lambda}^{\mu}(x^{\nu}) \zeta^{\lambda}(t), \quad (2.2.2)$$

donde A^{μ} es el vector de evolución del sistema dinámico determinista, llamado *drift*, y el otro término, $\sqrt{\eta} \sum_{\lambda} \sigma_{\lambda}^{\mu}(x^{\nu}) \zeta^{\lambda}(t)$, corresponde al ruido en la ecuación macroscópica.

Nos plantearemos, por simplicidad, el caso particular de ruido blanco gaussiano, lo que significa que

$$\begin{aligned} \langle \zeta^k(t) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta^k(t) \zeta^l(t') \rangle &= C^{kl} \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Con esto, se puede calcular la matriz $G^{\mu\nu} = \sum_{k,l} \sigma_k^{\mu} C^{kl} \sigma_l^{\nu}$, que es una matriz semi-definida positiva, que usaremos para la ecuación de evolución de la probabilidad condicional. Esta ecuación nos servirá para conocer los tiempos de escape de alguna región cerca de un atractor, ya que asociará la probabilidad condicional estacionaria de encontrarse en x dentro de una región cerca del atractor para algún tiempo t con la distribución de tiempos de escape de esta región. El tiempo promedio que se demora el sistema en salir de una región cerca del atractor (que usualmente será la tina de atracción del atractor) es lo que llamaremos *tiempo de escape*. A la vez, la frecuencia de escapes o de transiciones fuera de una región cerca del atractor, la llamaremos *tasa de transición*.

Para entender el tiempo de escape de manera intuitiva, podemos usar un ejemplo. Supongamos que tenemos un sistema físico que puede ser descrito por una ecuación de la forma

$$\dot{x} = \epsilon x - x^3 + \sqrt{\eta} \zeta. \quad (2.2.4)$$

donde x es la variable que describe la dinámica del sistema y ζ es un ruido blanco gaussiano con promedio cero y correlación $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \delta(t - t')$.

En ausencia de ruido, es decir, para $\eta = 0$, cuando nos colocamos en la tina de atracción de algún atractor, el sistema relajará asintóticamente al equilibrio correspondiente. En presencia de ruido, uno puede preguntarse que trayectoria saldrá de la tina de atracción, ya que al haber ruido por pequeño que este sea, las trayectorias toman valores con probabilidad. Es por esto, que existen diversos tiempos para salir de la tina de atracción, por lo que tomaremos el promedio de éstos como tiempo de escape, o de primera salida. Una realización del sistema descrito por la ecuación 2.2.4 puede verse en la figura 2.1, donde se aprecia que los tiempos de salida son distintos.

Usando la ecuación de Fokker-Planck, podemos dar condiciones de borde para calcular la probabilidad condicional y con ello calcular el tiempo de primera salida por un borde $\partial\Omega$ de una región Ω , donde se encuentra el atractor y de donde queremos salir. Partiendo de un punto de esta región, x_o y saliendo por alguno del borde $\partial\Omega$, calculamos la probabilidad condicional usando la ecuación de Fokker-Planck

$$\partial_t P(x, t|x_o, t_o) = \partial_\mu(-A^\mu(x) + \frac{\eta}{2}\partial_\nu G^{\mu\nu}(x))P(x, t|x_o, t_o), \quad (2.2.5)$$

con condiciones de borde, llamadas absorbentes,

$$\begin{aligned} P(x, t|x_o, t_o) &= 0, \quad x_o \in \partial\Omega, \\ \lim_{t \rightarrow t_o} P(x, t|x_o, t_o) &= \delta(x - x_o). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Queremos que el tiempo de salida, es decir, el tiempo de escape sea finito, por lo que pediremos que $G^{\mu\nu} \neq 0$ en Ω y $\partial\Omega$. Esto significa, que, para intensidad de ruido η nula, el tiempo de escape es infinito, ya que la dinámica determinista relaja al atractor.

Relacionemos la probabilidad condicional $P(x, t|x_o, t_o)$ con el tiempo de escape. La probabilidad de encontrar la partícula al interior de Ω en un instante t es

$$\tilde{P}(t|x_o, t_o) = \int_{\Omega} dx P(x, t|x_o, t_o), \quad (2.2.7)$$

donde

$$\tilde{P}(t_o|x_o, t_o) = 1, \quad (2.2.8)$$

que proviene de la normalización de la probabilidad y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}(t|x_o, t_o) = 0, \quad (2.2.9)$$

es decir, la partícula abandona la región en un tiempo finito.

Necesitamos una relación entre la probabilidad de encontrar la partícula en la región Ω y la distribución de probabilidad de los tiempos de salida de la región Ω por el borde $\partial\Omega$. Dado que la probabilidad $\tilde{P}(t|x_o, t_o)$ es la probabilidad de encontrar la partícula en el interior de la región Ω en un tiempo t , $1 - \tilde{P}(t|x_o, t_o)$ es la probabilidad de encontrar de encontrar la partícula fuera de la región Ω en el tiempo t . Es por esto que la distribución de probabilidad de que la partícula escape de Ω por el borde $\partial\Omega$ en un intervalo de tiempo $(t, t + dt)$

$$\rho(t) = \frac{d(1 - \tilde{P}(t|x_o, t_o))}{dt} = -\frac{d\tilde{P}(t|x_o, t_o)}{dt}, \quad (2.2.10)$$

Usando la ecuación de Fokker-Planck para esta probabilidad, podemos calcular el tiempo promedio

$$\langle \tau(x_o) \rangle = \int_{t_o}^{\infty} (t - t_o) \rho(t) dt = \int_{t_o}^{\infty} (t - t_o) \frac{d(1 - \tilde{P}(t|x_o, t_o))}{dt} dt$$

donde $\rho(\tau)$ es la densidad de probabilidad de que la partícula escape en un tiempo $(\tau, \tau + d\tau)$ de la región Ω . Esto entrega la ecuación de evolución del promedio $\langle \tau(x_o) \rangle$, llamada ecuación de Dynkin[33].

$$-1 = (A^\mu(x_o) \partial_\mu + \frac{\eta}{2} G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu) \langle \tau(x_o) \rangle, \quad (2.2.11)$$

con la condición de borde $\langle \tau(x_o \in \partial\Omega) \rangle = 0$. Es importante notar que en el caso multiplicativo, el drift A^μ será renormalizado por un término que proviene del ruido, por lo que cambiarán los equilibrios y la estabilidad de ellos. Este tipo de cálculos, debido a que son largos y engorrosos, serán abordados en los artículos que aparecerán en los artículos del Apéndice A.

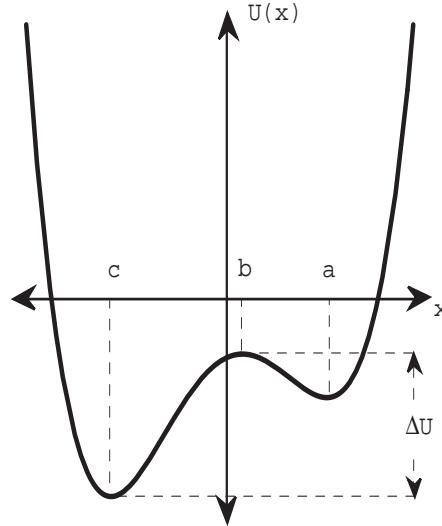


Fig. 2.2: Potencial típico del sistema unidimensional. a y c son dos atractores y b es un máximo. Aparece también representado la diferencia de potencial ΔU para un mínimo de potencial y el máximo del mismo.

Para una dimensión, siempre podemos escribir el sistema con un potencial $V(x)$, como el que se ve en la figura 2.2. Si a esto le agregamos ruido aditivo, la ecuación del tiempo de escape, esto entrega

$$-1 = \frac{dV(x_o)}{dx_o} \frac{d\tau}{dx_o} + \frac{\eta}{2} \frac{d^2\tau}{dx_o^2}, \quad (2.2.12)$$

La integración directa del tiempo de escape, para un potencial como el de la figura 2, donde las tinas de atracción para los equilibrios a y c son $\{-\infty, b\}$ y $\{b, \infty\}$ respectivamente, entrega los tiempos de salida

$$\langle \tau(a) \rangle = \frac{1}{\eta} \int_a^b e^{\frac{V(y)}{\eta}} dy \int_{-\infty}^y e^{-\frac{V(z)}{\eta}} dz. \quad (2.2.13)$$

para salir de la cuenca de atracción del atractor a y

$$\langle \tau(c) \rangle = \frac{1}{\eta} \int_c^b e^{\frac{V(y)}{\eta}} dy \int_{-\infty}^y e^{\frac{-V(z)}{\eta}} dz. \quad (2.2.14)$$

para salir de la cuenca de atracción del atractor c . Estos cálculos estarán explicitados en los artículos del apéndice A.

Para ruido pequeño, podemos evaluar ambas expresiones por medio del método de *steepest descent* para tiempos de salida. Para la cuenca de atracción del atractor a encontramos.

$$\langle \tau(a) \rangle = \frac{\pi}{\sqrt{|V''(a)||V''(b)|}} e^{\frac{V(b)-V(a)}{\eta}} = \frac{1}{\nu} e^{\frac{E_o}{k_B T}}. \quad (2.2.15)$$

donde $()''$ significa segundas derivadas. Así podemos ver que encontramos las tasas de transición ya encontradas por Kramer, donde $V(b) - V(a) > 0$ es la energía de activación y η toma el rol de $k_B T$, la energía térmica. Esta fórmula tan sencilla posee información sobre el proceso de transición desde un estado hacia otro, dependiendo de algunas características particulares del potencial. Cuando la intensidad del ruido se hace cada vez más pequeña, el tiempo crece exponencialmente. En el límite singular de $\eta = 0$, es decir, el sistema determinista, notamos que el tiempo de salida diverge, lo que ya esperábamos. Cuando la diferencia de energía $V(b) - V(a)$ se hace cada vez más grande, para intensidad de ruido pequeño, se hace cada vez más difícil que una realización del ruido produzca una fluctuación suficientemente grande para producir una excursión de la partícula sobre el máximo del potencial. Por ello, para barreras de potencial grandes comparadas con la intensidad del ruido, el tiempo de escape es mucho más grande que las escalas de relajación del sistema determinista.

La forma del potencial cerca de los atractores y del máximo también entrega información. Para potenciales cuyo radio curvatura es muy grande cerca de los mínimos, el sistema demora muy poco en alejarse del equilibrio cuando hay fluctuaciones, lo que hace decrecer el tiempo de escape. Si el máximo tiene también curvatura pequeña, ocurre algo similar, ya que el sistema demora menos en acercarse al máximo del potencial, y por tanto, en escapar de su cuenca de atracción, por lo que el tiempo de escape decrece también.

Es importante notar que, a pesar de existir, en el caso unidimensional, dos tiempos de salida, la razón de ellos es

$$\frac{\langle \tau(c) \rangle}{\langle \tau(a) \rangle} = \frac{\sqrt{V''(a)}}{\sqrt{V''(c)}} e^{\frac{V(a)-V(c)}{\eta}}, \quad (2.2.16)$$

lo que nos dice que si $V(a) - V(c) < 0$, entonces $\langle \tau(c) \rangle$ es despreciable (ya que es exponencialmente pequeño) comparado con $\langle \tau(a) \rangle$, por lo que es éste último el tiempo de escape dominante. Si $V(a) - V(c) > 0$, el tiempo dominante es $\langle \tau(c) \rangle$.

Capítulo 3

FENÓMENOS ROBUSTOS EN SISTEMAS EXTENDIDOS: FRENTE Y ESTRUCTURAS LOCALIZADAS

3.1. *Sistemas extendidos*

La evolución de los sistemas físicos puede ser descrita, en ciertos casos simplificados, por un número pequeño de variables, cuya evolución se describe con ecuaciones diferenciales ordinarias. Ejemplo claro de esto son las ecuaciones de Lorenz, cuyo origen histórico fue una truncatura de las ecuaciones de Navier-Stokes de la hidrodinámica, que hacían intervenir sólo algunas de las componentes de Fourier de los campos de velocidad y temperatura. Los sistemas con pocos grados de libertad descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias los llamamos *simples*.

En sistemas físicos simples diversos fenómenos ocurren sin importar la rama de la física a la cual correspondan: oscilaciones, equilibrios, equilibrios relativos, transientes y comportamientos aperiódicos o caóticos. Estos comportamientos son llamados *fenómenos robustos*, en el sentido que no dependen de la física subyacente. Han sido estudiados extensivamente en los últimos tiempos y la teoría que los describe está bien entendida.

Cuando diversos sistemas simples son conectados unos a otros mediante acoplamientos de vecinos cercanos, la evolución no puede ser descrita de la misma forma, es decir, por ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que además de la evolución temporal local de cada uno de los sistemas simples, también existe una evolución dada por como se acoplan a la dinámica local los vecinos cercanos. Estos sistemas son llamados *sistemas extendidos*. De la misma manera que en los sistemas simples, fenómenos que no dependen del área de la física bajo estudio pueden ser encontrados: ondas, frentes, soluciones tipo partícula, patrones, y muchos más. De este tipo de fenómenos hablaremos en este capítulo. Para ello, comenzaremos estudiando la estabilidad de soluciones homogéneas e introduciremos las definiciones de frente y de estructuras localizadas. En la figura 3.1 podemos ver comportamientos típicos de los sistemas extendidos en 1 y en 2 dimensiones espaciales, en particular soluciones tipo frente para diversos sistemas. En todos los resultados obtenidos en este capítulo, se supondrá que las condiciones de borde en las simulaciones de estas conexiones tipo frente son de flujo nulo, es decir, todas las derivadas espaciales superiores son, típicamente, cero.

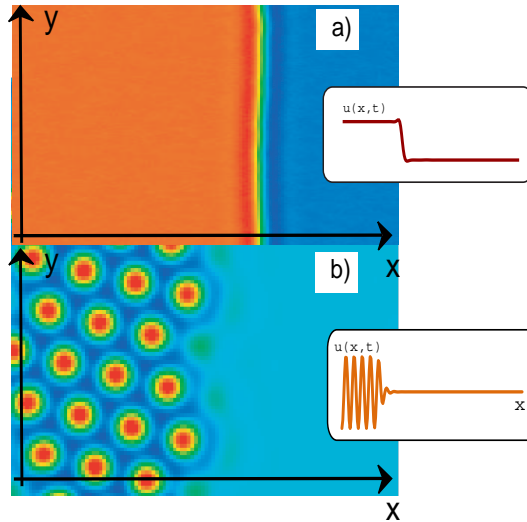


Fig. 3.1: Solución frente entre diversos estados de un sistema extendido en 2 dimensiones espaciales. En la figura a) se representa un frente entre dos estados homogéneos en 2 dimensiones y en el recuadro, un frente entre dos estados homogéneos en 1 dimensión. En la figura b), un frente entre un estado periódico y un estado homogéneo en 2 dimensiones y en el recuadro correspondiente, un frente de las mismas características en 1 dimensión.

3.2. Análisis de Estabilidad

En el caso de sistemas extendidos unidimensionales, se tendrán ecuaciones diferenciales a derivadas parciales de la forma

$$\partial_t \vec{u} = \vec{f}(\vec{u}, x, t, \partial_x, \vec{\lambda}), \quad (3.2.1)$$

donde $\vec{\lambda} = \{\lambda_1 \dots \lambda_N\}$ son un conjunto de parámetros de control. Nos colocaremos en un caso sencillo, en el cual el sistema simple de partida se encuentra en un medio muy viscoso, por lo que los términos inerciales pueden ser despreciados o eliminados adiabáticamente, es decir, nos colocamos en la variedad central[34]. Por ello, el modelo que utilizaremos de ahora en adelante, sin pérdida de generalidad, será

$$\partial_t u = f(u, x, t, \partial_x, \vec{\lambda}). \quad (3.2.2)$$

Para uniformar aún más los criterios, supondremos que la función $f(u, t, x, \{\vec{\lambda}\})$ tendrá varios equilibrios, es decir, el sistema puede presentar biestabilidad o multiestabilidad. Supondremos también que el sistema posee una simetría especular $u \rightarrow -u$. Además, supondremos isotropía del espacio, por lo que el sistema presenta la simetría $x \rightarrow -x$ e invariancia traslacional $x \rightarrow x + x_o$. Aún más, también supondremos que el acoplamiento será con los vecinos más cercanos, por lo que la ecuación prototipo que buscamos tiene la forma

$$\partial_t u = \epsilon u - u^3 + \kappa \partial_{xx} u, \quad (3.2.3)$$

donde $u(x, t)$ es un parámetro de orden[1]. Esta ecuación describe muchos fenómenos de transiciones de fase de segundo orden como la transición de Fredericksz[36] y la magnetización de diamagnéticos. En este último caso, $\epsilon \propto (T - T_c)$, donde T es la temperatura

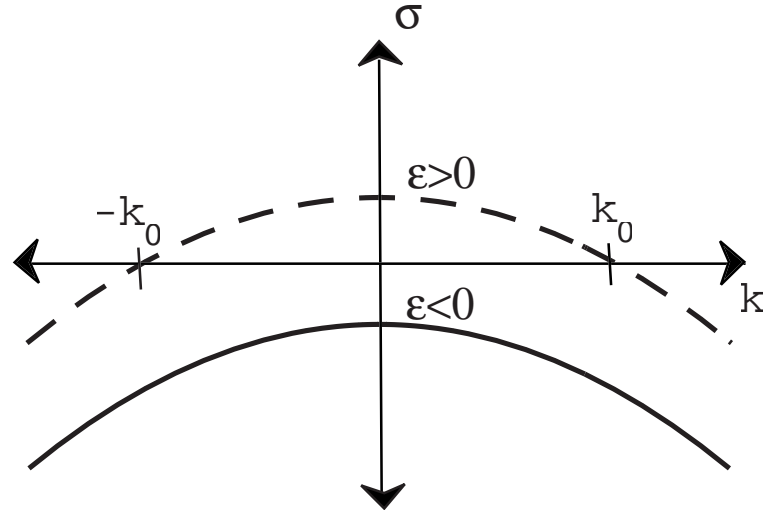


Fig. 3.2: Relación de estabilidad $\sigma = \sigma(k)$ para distintos valores de ϵ de la solución $u = 0$ de la ecuación 3.2.3. Para $\epsilon < 0$ (curva continua) todos los valores propios son negativos, excepto para $\epsilon = 0$. Para $\epsilon > 0$ (curva discontinua), hay un intervalo de valores propios inestables entre $[-k_0, k_0]$, con $k_0 = \sqrt{\epsilon}$.

del termostato y T_c la temperatura de Curie[1]. Usando este modelo, realizaremos un análisis de estabilidad para las soluciones estacionarias del sistema, es decir, aquellas que no poseen dinámica temporal. Este tipo de análisis es completamente independiente del sistema físico estudiado, siempre y cuando el sistema sea homogéneo y estacionario, es decir, los coeficientes que describen los parámetros físicos del sistema no dependan del espacio y del tiempo. Como ya habíamos notado en la introducción, nos interesará conocer de sobremanera las soluciones estacionarias del sistema dinámico y su estabilidad. En general las soluciones estacionarias pueden clasificarse en 4 categorías[35]:

- ◊ Las *soluciones homogéneas o uniformes* u_e , que corresponden a soluciones estacionarias que no dependen del espacio.
- ◊ Las *soluciones Periódicas* u_p , que corresponden a soluciones estacionarias que dependen del espacio con un período espacial τ , de tal manera que $u_p(\tau + x) = u_p(x)$
- ◊ Los *frentes*, que son soluciones que conectan dos soluciones estacionarias del sistema bajo estudio. En particular, nos interesarán los frentes de Pomeau, que son soluciones estacionarias que tienden por un lado del espacio a una solución homogénea, y por el otro a una solución periódica. Desde un punto de vista de sistemas dinámicos, son soluciones heteroclinas.
- ◊ Las *Estructuras Localizadas*, que son soluciones que por ambos lados tienden asintóticamente a la misma solución de base y que desde un punto de vista de sistemas dinámicos, las podemos entender como homoclinas. Estas podemos a su vez subdividir las en dos tipos:
 - Defectos homogéneos o *hoyos*, que son estructuras localizadas que tienden asintóticamente a una solución periódica

- *Pulsos*, que son estructuras localizadas que tienden asintóticamente a una solución homogénea.

En este capítulo nos preocuparemos, primeramente, de las soluciones homogéneas estacionarias y luego de las soluciones no-homogéneas estacionarias, en particular, los frentes. En el sistema anterior, las soluciones estacionarias son aquellas que satisfacen

$$\partial_t u = \epsilon u - u^3 + \kappa \partial_{xx} u = 0, \quad (3.2.4)$$

y de estas soluciones, podemos analizar aquellas soluciones que además de ser estacionarias son homogéneas, es decir aquellas soluciones del sistema simple. Cuando $\epsilon < 0$, la única solución del sistema es $u = 0$. Cuando $\epsilon > 0$, es decir cuando el sistema bifurca, aparecen dos otras soluciones $u = \pm\sqrt{\epsilon}$, donde la solución $u = 0$ coexiste con ellas. En este caso, el sistema es biestable. Estas soluciones persisten en el sistema espacialmente extendido. En general, si tenemos un sistema extendido que puede ser descrito por una ecuación de la forma

$$\partial_t u = f(u, \{\vec{\lambda}\}) + g(u, \partial_x), \quad (3.2.5)$$

donde $f(u, \{\vec{\lambda}\})$ es la función de reacción y $g(u, \partial_x)$ la función de interacción, el análisis anterior se mantiene: las soluciones del sistema sin espacio u_o , es decir, aquellas que satisfacen $f(u_o)$, también son soluciones del sistema espacial. La pregunta que nos atañe ahora es la estabilidad de estas soluciones en el sistema extendido.

En el caso de las soluciones homogéneas estacionarias de la ecuación (3.2.3), podemos realizar un análisis lineal en torno a ellas. Tendremos entonces dos casos:

◊ $\epsilon < 0$.

En este caso, la única solución del sistema simple estacionario es la solución cero. Perturbando la solución de manera que $u = 0 + v(x, t)$, con $v(x, t)$ pequeño. Linealizando la ecuación encontramos que

$$\partial_t v = \epsilon v + \partial_{xx} v, \quad (3.2.6)$$

Debido a que el lado derecho es homogéneo en el espacio, podemos plantear soluciones en modos de Fourier de la forma

$$v(x, t) = v_o e^{\sigma(k)t + ikx};$$

Esto entrega una relación, a la que llamaremos *relación de estabilidad*[18], entre σ y k

$$\sigma(k) = \epsilon - k^2; \quad (3.2.7)$$

Esto nos dice que para todo k , cualquier perturbación de la solución cero es estable en el tiempo. Podemos trazar la curva $\sigma = \sigma(k)$ (ver figura 3.2), y ver que el máximo ocurre para $k = 0$. Esto significa que las longitudes de onda más grandes, es decir, las del estado homogéneo son las que decaen más lentamente que todas las demás, de manera que

$$v(x, t) \sim e^{\sigma(k)t} < e^{-|\epsilon|t} \rightarrow 0;$$

Por ello, el estado cero es asintóticamente estable.

◊ $\epsilon > 0$

En el caso en que $\epsilon > 0$, además del estado cero, aparecen las soluciones $u_{\pm} = \{\pm\sqrt{\epsilon}\}$. Para el estado cero, podemos realizar el mismo análisis, con lo que encontramos que en este caso, la solución se vuelve inestable cuando

$$k = k_o = \pm\sqrt{\epsilon};$$

Cuando los vectores de onda $k \in [-k_o, k_o]$, la solución $u = 0$ desarrolla una inestabilidad, como se puede ver en la figura 3.2. Ahora, para las soluciones u_{\pm} , podemos realizar el mismo análisis $u = \pm\sqrt{\epsilon} + v(x, t)$. Linealizando nuevamente, tenemos

$$\partial_t v = -2\epsilon v + \partial_{xx} v, \quad (3.2.8)$$

Suponiendo soluciones en modos de Fourier $v(x, t) = v_o e^{\sigma(k)t + ikx}$, encontramos que

$$\sigma(k) = -2\epsilon - k^2; \quad (3.2.9)$$

Con esto podemos ver que ambas soluciones son asintóticamente estables.

Es más, las relaciones de estabilidad para ambas soluciones son las mismas. Esto explica la aparición de dominios en este sistema, es decir, regiones donde el sistema se encuentra en la solución u_+ y otras donde se encuentra en u_- . Debido a que el sistema es extendido, podemos conectar ambas soluciones. A esta conexión la llamaremos *defecto* o *frustración*. Otros nombres, provenientes de diversas áreas de la física son: kinks, antikinks (magnetismo), burbujas (transiciones de fase) y paredes (física del estado sólido). Es importante notar que aunque ambas soluciones presenten las mismas relaciones de estabilidad, en general una de ellas dominará sobre la otra.

3.3. Propagación de Frentes y Sistemas Dinámicos espaciales

El sistema estudiado anteriormente, puede también ser entendido desde la teoría de sistemas dinámicos. Recordando la ecuación anterior, podemos reescribirla de la forma

$$\partial_t u = \epsilon u - u^3 + \partial_{xx} u = -\frac{\delta F[u]}{\delta u}, \quad (3.3.1)$$

con

$$F[u] = -\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \epsilon \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{(\partial_x u)^2}{2} \right\}$$

donde $F[u]$ es un funcional de Lyapunov del sistema, ya que

$$\frac{dF[u]}{dt} = \frac{\delta F[u]}{\delta u} \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \left(\frac{\delta F[u]}{\delta u} \right)^2 \leq 0,$$

es decir, $F[u]$ se minimiza en las funciones $u(x)$ estacionarias que cumplen la ecuación (3.3.1). Sabemos que cuando $\epsilon > 0$, existen soluciones homogéneas u_{\pm} que minimizan el funcional $F[u]$ y también existen conexiones entre ellas, a las cuales llamamos, por ahora, defectos. Estas conexiones $u(x, t) = u(x)$ no triviales satisfacen el sistema estacionario,

y podemos entenderlas como una ecuación de Newton, donde el espacio ocupa el lugar del tiempo, es decir,

$$\partial_{xx}u = u^3 - \epsilon u \equiv -\frac{\partial W[u]}{\partial u}; \quad (3.3.2)$$

con

$$W[u] = \epsilon \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}$$

Para entender que es lo que son estas conexiones, podemos verlas en el espacio de fases del sistema dinámico espacial. Nos interesará de sobremanera la curva heteroclina o separatriz, ya que esta curva conecta la solución u_+ en $x \rightarrow -\infty$ con la u_- en $x \rightarrow \infty$. También existe, por la simetría $u \rightarrow -u, x \rightarrow -x$ la conexión entre la solución u_- en $x \rightarrow -\infty$ con la u_+ en $x \rightarrow \infty$. Una curva heteroclina es la curva en el espacio de fase que conecta dos puntos de equilibrio, partiendo desde la variedad inestable de uno de ellos para llegar al otro a través de su variedad estable. Un sistema físico que posee este tipo de curvas en su espacio de fase es el péndulo físico. Cuando soltamos el péndulo desde su posición vertical invertida con velocidad nula, este demorará tiempo infinito en alejarse de esta posición de equilibrio. Pero luego de alejarse, éste volverá a la posición anterior al haber dado una vuelta completa. La curva en el espacio de fase que describe el sistema para estas condiciones iniciales, es una heteroclina, como se pueden ver en la figura 3.3.

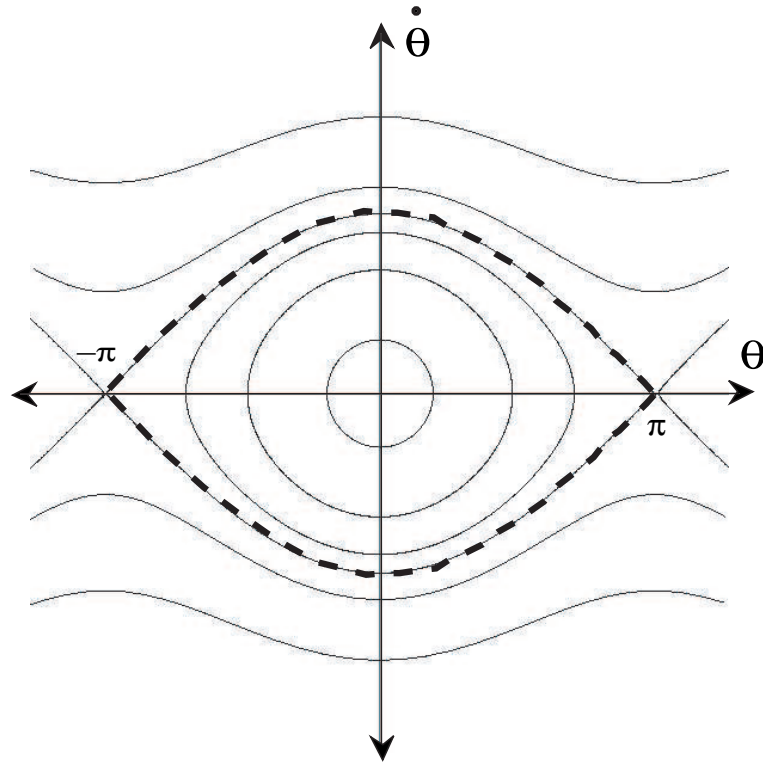


Fig. 3.3: Espacio de fases del péndulo físico sin disipación. En el eje vertical está la velocidad angular $\dot{\theta}$ y en el horizontal el ángulo θ . En las curvas discontinuas se muestran las dos heteroclinas. La curva heteroclina con velocidad angular positiva conecta $-\pi$ partiendo en $t \rightarrow -\infty$ llegando a $\pi \rightarrow \infty$ en $t \rightarrow \infty$ y la curva heteroclina con velocidad angular negativa conecta π partiendo en $t \rightarrow -\infty$ llegando a $-\pi \rightarrow \infty$ en $t \rightarrow \infty$

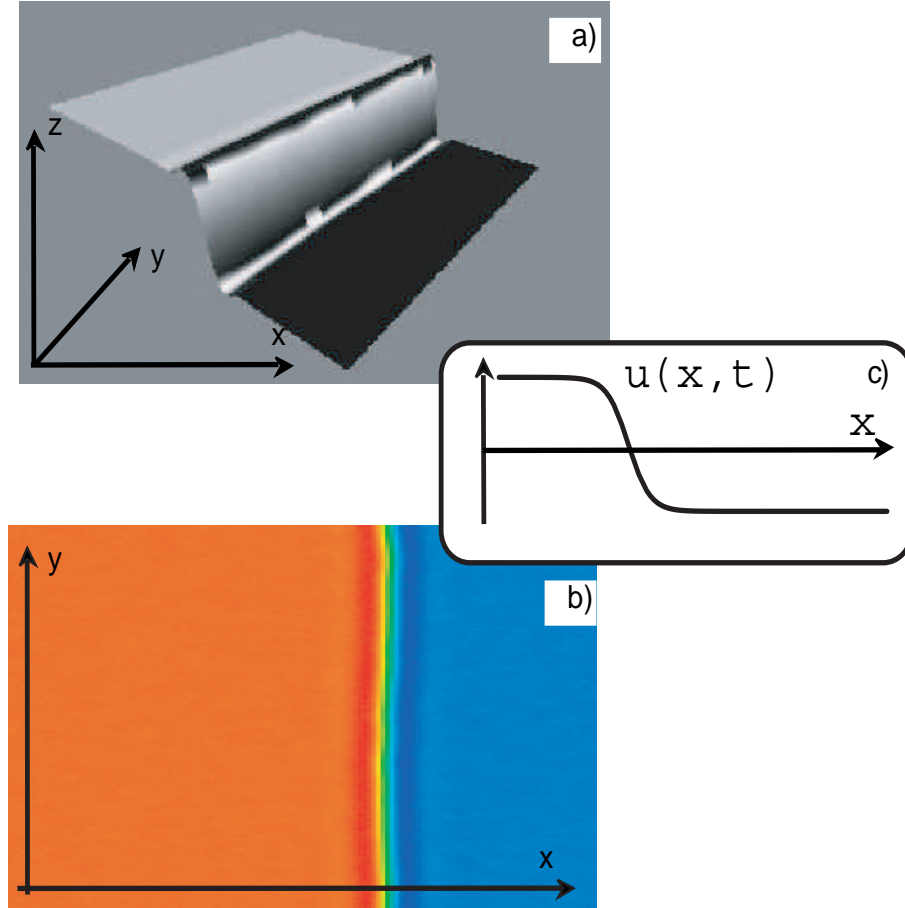


Fig. 3.4: Solución kink del sistema (3.3.2) en 1 y 2 dimensiones. En la figura a) se ve una representación tridimensional del kink $u(x, y)_k$ y en b) una representación dos dimensional de la misma solución. En c), una representación unidimensional de la solución kink $u(x)_k$.

En muchos casos una solución homogénea estable deviene inestable para el sistema espacial. Esto se puede ver de manera sencilla de la ecuación (3.2.6), donde, en el sistema estacionario, las soluciones espaciales devienen inestables. Esto nos dice que importan, para analizar las conexiones espaciales, las curvas inestables del sistema extendido.

Un candidato natural a solución estable en el sistema extendido es la heteroclina que conecta u_+ con u_- . Otro es, por las simetrías del sistema, la heteroclina que conecta u_- con u_+ . Para la primera heteroclina, que llamaremos $u_k(x)$, el sistema espacial es

$$\partial_{xx}u_k + \epsilon u_k - u_k^3 = 0. \quad (3.3.3)$$

Haciendo una analogía a la ecuación de Newton, le podemos calcular una energía a este sistema. Esta es

$$E = \frac{(\partial_x u_k)^2}{2} + \epsilon \frac{u_k^2}{2} - \frac{u_k^4}{4},$$

con la condición inicial en el espacio

$$u_k(x \rightarrow \pm\infty) = \pm\sqrt{\epsilon}.$$

Esto significa que una primera integral de movimiento es

$$\frac{\epsilon^2}{4} = \frac{(\partial_x u_k)^2}{2} - \epsilon \frac{u_k^2}{2} - \frac{u_k^4}{4}, \quad (3.3.4)$$

con lo que podemos encontrar rápidamente la solución

$$u_k(x, x_o) = \sqrt{\epsilon} \tanh\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}(x - x_o)\right). \quad (3.3.5)$$

A esta solución la denotaremos solución *kink*. De la misma manera podemos encontrar la otra heteroclina

$$u_a(x, x_o) = -\sqrt{\epsilon} \tanh\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}(x - x_o)\right), \quad (3.3.6)$$

a la que llamaremos solución *antikink*. En la figura 3.4 podemos observar este tipo de conexiones en sistemas de 1 y 2 dimensiones espaciales. Es importante notar que la coordenada x_o está asociada a la simetría de traslación, es decir, podemos elegir donde queramos el origen de coordenadas. Las soluciones kink y antikink están caracterizadas por un grupo continuo parametrizado por x_o , que es consecuencia de la invariancia espacial[37]. A este punto, donde además la derivada de la función u_a es máxima, lo llamaremos *corazón del frente*, como se puede apreciar en la figura 3.5. Ahora realizaremos un análisis de estabilidad de las soluciones kink o antikink, pertur-

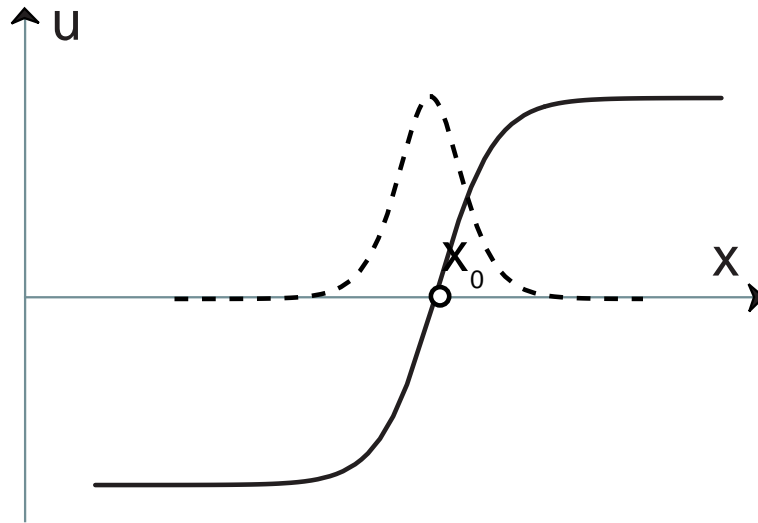


Fig. 3.5: Solución frente entre dos estados homogéneos. En línea continua la solución frente u_f y en línea discontinua la derivada espacial de la solución frente $\partial_x u_f$. El corazón del frente, x_o , es donde esta derivada alcanza su valor máximo.

bando $u(x, t) = u_{k,a}(x, x_o) + \varphi(x, t)$. Linealizando la ecuación (3.2.3) para las soluciones $u_{k,a}$ encontramos

$$\partial_t \varphi = (\epsilon - 3u_{k,a}^2 + \partial_{xx})\varphi, \quad (3.3.7)$$

que puede entenderse como un problema de valores propios, muy similar al problema de autoenergías en la ecuación de Schrödinger. Separando variables $\varphi = \varphi_o(x)e^{\sigma t}$, podemos

encontrar un operador de Sturm-Liouville para un problema de valores propios

$$\sigma\varphi_o = L\varphi_o, \quad (3.3.8)$$

donde $L = \epsilon - 3u_{k,a}^2 + \partial_{xx}$ es el operador de Sturm-Liouville del problema con condiciones de borde $\partial_x\varphi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$. Un operador de este tipo tiene un espectro con características muy importantes: está ordenado y es numerable[38]. Es fácil demostrar que si las soluciones kink y antikink satisfacen

$$0 = \epsilon u_{k,a} - u_{k,a}^3 + \partial_{xx}u_{k,a},$$

entonces, tomando la derivada espacial,

$$0 = (\epsilon - 3u_{k,a}^2 + \partial_{xx})\partial_x u_{k,a}.$$

Esto quiere decir que las derivadas de las soluciones kink y antikink satisfacen la ecuación (3.3.8) para $\sigma = 0$. Además podemos comprobar, tomando la segunda derivada sobre el operador L , que este es semidefinido negativo, es decir, todos sus valores propios están en los reales negativos. Por esto todas las otras soluciones, salvo aquellas con $\sigma = 0$ son estables. Las derivadas de la solución kink o antikink, al poseer $\sigma = 0$, representan la invariancia de traslación, es decir, son el vector propio asociado a esta simetría. Si sumamos a cualquier función $u(x)$ la derivada espacial de $u_{k,a}$ entonces, como satisfacen (3.3.8) para $\sigma = 0$, no afectan el operador lineal. A estos vectores propios, asociados a la simetría de traslación, se les llama modos de Nambu-Goldstone [37].

Para comenzar a analizar la propagación de un estado sobre otro, es necesario que uno de estos estados sea más favorable para el sistema. Del modelo anterior, debido a la simetría de inversión $u \rightarrow -u$, ambos estados son igualmente favorables al sistema, que en este caso posee un funcional de Lyapunov. Pero, si el sistema pierde esta simetría, entonces uno de estos dos estados será el mínimo global del sistema extendido. Para romper la simetría, simplemente agregamos un término constante a la ecuación de evolución. La ecuación que describirá el sistema será

$$\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 + \partial_{xx}u \equiv -\frac{\delta F[u]}{\delta u}. \quad (3.3.9)$$

con

$$F[u] = -\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \eta u + \epsilon \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{(\partial_x u)^2}{2} \right\}$$

El término constante puede ser entendido, en el caso de la magnetización de los diamagnéticos como la presencia de un campo magnético constante paralelo a la magnetización, el cual quiebra la simetría entre los dos estados. En el caso de la transición de Fredericks, se puede entender como un campo magnético constante ortogonal al campo eléctrico que genera la transición.

Este rompimiento de la simetría provoca que un estado sea energéticamente más favorable que el otro. Si $\eta > 0$, u_+ será más favorable que u_- , y si $\eta < 0$, será viceversa. Al ser un sistema extendido, la conexión entre uno de estos estados es posible, por lo que el sistema tenderá a buscar colocarse en el estado que más le convenga. Esta sencilla idea es la usaremos para entender la propagación de un *frente*

Un frente es la conexión entre dos estados de un sistema extendido. Engloba los conceptos antes referidos de defecto, kink, pared y burbuja. El estudio de la propagación de frentes y la selección de su velocidad ha sido materia de estudio desde los trabajos seminales de Fisher en Estados Unidos y Kolmogorov, Piskunov y Petrosky en la ex-Unión Soviética. El sistema puede conectar diversos tipos de estados entre sí: homogéneos, periódicos, estructuras localizadas, regiones caóticas, patrones periódicos u oscilatorios, etc. Este tipo de conexiones aparecen también en sistemas que no presentan energía libre o funcionales de Lyapunov, dinámicas no locales o no variacionales[7].

Trataremos ahora el problema de la velocidad de propagación del frente, que invadirá un estado sobre otro. Para poder calcular la velocidad de propagación nos colocaremos en el caso en que $\eta \ll 1$, es decir, el rompimiento de simetría es muy débil. Para ello usaremos coordenadas co-moviles con el frente que se propaga (esto es $\xi = x - ct$, con c la velocidad de propagación). Usando este cambio de variables, podemos encontrar que

$$-c\partial_\xi u = \eta + \epsilon u - u^3 + \partial_\xi \epsilon u. \quad (3.3.10)$$

Con estas coordenadas nos colocamos con el frente que se mueve, es decir, es estacionario. Podemos notar que la ecuación (3.3.10) es la ecuación de movimiento de una partícula en un medio viscoso con una fuerza no-lineal, donde la coordenada ξ toma el rol del tiempo. Así podemos calcular, al igual que en mecánica clásica, como cambia la primera integral de movimiento en el tiempo. Multiplicando a ambos lados por $\partial_\xi u$, podemos notar que la ecuación tiene la forma

$$-c(\partial_\xi u)^2 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta u + \frac{\epsilon}{2} u^2 - \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} (\partial_\xi u)^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} (\partial_\xi u)^2 + U[u] \right) \equiv \frac{\partial E}{\partial \xi}. \quad (3.3.11)$$

donde $-c\partial_\xi u$ es la función de Rayleigh del análogo mecánico. Si integramos en toda la recta, usando la condición de borde $\partial_\xi u \rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, encontramos que, para $\eta \ll 1$, la velocidad de propagación puede ser aproximada por

$$c = -\frac{U[\infty] - U[-\infty]}{\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_\xi u)^2} \equiv \eta \frac{u_- - u_+}{\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_\xi u)^2}, \quad (3.3.12)$$

por lo que para $\eta > 0$ el estado u_+ se propaga sobre el estado u_- y para $\eta < 0$ el estado u_- se propaga sobre el estado u_+ . Podemos notar también que el problema de la velocidad es un problema de valores propios no-lineales, ya que para conocer la velocidad es necesario conocer la solución frente $u_f(x - ct)$.

En general, para cualquier sistema dinámico que presenta multiestabilidad, se puede usar el mismo tipo de enfoque. En el sistema dinámico anterior, donde la variable ξ toma el rol del tiempo, podemos tener diversos comportamientos asintóticos para la partícula, de los cuales destacan dos: el caso sub-amortiguado, es decir, cuando $c \ll 1$, o el caso sobreamortiguado $c \gg 1$. Necesitamos saber en que caso el frente será estable, es decir, cuando la propagación de un estado sobre otro se mantendrá en el tiempo o no. Para ello, pasaremos al sistema dinámico espacial, en particular, lo veremos en el espacio de fases.

Un frente que conecta dos estados lo puede hacer entre dos estados estables o entre un estado estable y otro inestable. El primer tipo de frente se denomina *frente normal*, y el segundo se denomina frente de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov o *frente FKPP*. Analizaremos ambos casos por separado.

3.3.1. Frente FKPP

Cuando conectamos un estado metaestable con un estado inestable en un sistema extendido, es natural pensar en que el sistema preferirá colocarse en el estado más favorable. Lo que no es natural es pensar con que velocidad se propagará la invasión del estado más favorable en todo el sistema, y si esta es única o si está bien definida.

Veamos como se ven este tipo de frentes en el modelo (3.2.3). Como hemos visto antes, para $\epsilon > 0$, los estados u_{\pm} son estables y el estado cero es inestable. Al colocarnos en una de las coordenadas de D'Alembert, encontramos la ecuación (3.3.10), como vimos antes. En este sistema dinámico, hay dos casos importantes de distinguir: el caso subamortiguado $c \ll 1$ y el caso superamortiguado $c \gg 1$. Podemos usar una analogía con una partícula en presencia de roce viscoso, con un potencial con un máximo y un mínimo, donde la viscosidad toma el rol de c y la velocidad de la partícula está dada por $\partial_{\xi}u$. Suponiendo que la condición inicial es $\partial_{\xi}u = 0$, es decir, velocidad inicial cero, desde el máximo hasta el mínimo, podemos tener dos comportamientos. Si la partícula está subamortiguada, entonces se producirán oscilaciones antes de llegar al punto de equilibrio. Esto significa, en el sistema extendido, que habraán oscilaciones espaciales, y, como el estado al que se llega es inestable, harán que el frente devenga inestable. Si la partícula está sobreamortiguada, la partícula llegará monótonamente al equilibrio, lo que hará que el frente se devenga estable. Lo que este análisis no nos entrega es un criterio para conocer la velocidad del frente, porque podemos notar que la velocidad del frente siguiendo este análisis no es única. Para ello, volveremos al sistema dinámico espacial, y nos colocaremos en las coordenadas de D'Alembert. En estas coordenadas la ecuación del sistema dinámico es

$$-c\partial_{\xi}u = \eta + \epsilon u - u^3 + \partial_{\xi\xi}u, \quad (3.3.13)$$

donde las condiciones iniciales son que

$$\begin{aligned} u(\xi \rightarrow -\infty) &= \pm\sqrt{\epsilon}, u(\xi \rightarrow \infty) = 0, \\ \partial_{\xi}u(\xi \rightarrow -\infty) &= \partial_{\xi}u(\xi \rightarrow -\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

El símbolo \pm en la condición inicial está asociado a la simetría $u \rightarrow -u$, ya que ambos estados pueden conectarse con la solución cero. Lo que analizaremos será la velocidad asintótica de propagación del frente. Para ello, escribiremos el sistema dinámico espacial, donde podemos ver que para el caso subamortiguado, los valores propios son complejos con parte real negativa lo que significa oscilaciones que se transformarán en una cadena de kinks y antikinks en el sistema extendido, mientras para el caso sobreamortiguado son reales negativo puros, lo que significa que el sistema extendido presentará un frente estacionario.

En el sistema dinámico anterior, podemos realizar un análisis asintótico de la solución frente, que se acerca exponencialmente a cero. Linealizando (3.3.10) en torno a cero, encontramos

$$\partial_{\xi\xi}u = -\epsilon u - c\partial_{\xi}u, \quad (3.3.15)$$

lo que nos dice que, planteando soluciones de la forma $u \sim u_0 e^{-\alpha\xi}$, encontramos que

$$\alpha = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\epsilon}}{2} \quad (3.3.16)$$

o lo que es lo mismo

$$c_\alpha = \alpha + \frac{\epsilon}{\alpha} \quad (3.3.17)$$

donde α es el decaimiento exponencial del frente, por lo tanto, de acuerdo a la cola del frente (que decae de la forma $\sim e^{-\alpha\xi}$), este se propaga con distintas velocidades. Este simple análisis nos dice que existe un conjunto infinito de velocidades posibles para el frente, cuya velocidad mínima es $c_{min} = \sqrt{\epsilon}$. Además nos dice que para el caso sobreamortiguado se cumpla, es necesario que $c \geq 2\sqrt{\epsilon}$, lo que da una cota inferior para la velocidad de propagación. Matemáticamente se ha comprobado que para perturbaciones compactas, la velocidad de propagación es la mínima. Además, para otro tipo de perturbaciones, donde los términos no-lineales son más importantes, otros criterios se han propuesto, mediante principios variacionales[39].

3.3.2. Frentes Normales

Ahora abordaremos el caso en que ambos estados de la conexión son metaestables. En este caso, uno podría esperar, al igual que en termodinámica, que la velocidad de propagación sea proporcional a la diferencia de energía (cuando es posible definirla), y que, cuando éstas sean iguales, es decir, en el punto de Maxwell, la velocidad de propagación sea cero. Romperemos levemente la simetría $u \rightarrow -u$ como en la ecuación (3.3.9), a lo que podemos asociar, debido a que el sistema es variacional, una diferencia de energía entre el estado u_+ y u_- . Cuando η sobrepasa el valor $\eta_N = -2(\frac{\epsilon}{3})^{3/2}$, la biestabilidad aparecerá (a este punto lo llamaremos punto de *nacimiento de la biestabilidad*), y cuando η sobrepasa el valor $\eta_D = 2(\frac{\epsilon}{3})^{3/2}$, la biestabilidad se destruirá. Para calcular la velocidad del frente, podemos realizar un cálculo similar al que realizó Otha y Kawasaki[40], promoviendo al punto x_o (que llamamos corazón del frente) a una variable dinámica en el tiempo. Para esto, usaremos el ansatz

$$u(x, t) = u(x - x_o(t))_{a,k} + W(x_o(t)),$$

donde $W(x_o)$ es una perturbación de orden η y el índice k, a corresponde al kink o antikink. En la ecuación (3.3.9) el ansatz entrega, linealizando en $W(x_o)$,

$$-\dot{x}_o \partial_z u_{k,a} - \eta u_{k,a} = (\epsilon - 3u_{k,a}^2 + \partial_{zz})W. \quad (3.3.18)$$

con $z = x - x_o$. Esta ecuación puede o no tener solución, dependiendo de si la igualdad se cumple o no, por lo que reducimos el problema a un problema de álgebra lineal[38] para un operador

$$L = \epsilon - 3u_{k,a}^2 + \partial_{zz}.$$

Para que exista solución el lado derecho de la ecuación debe ser parte de la imagen del operador L . Esto es muy complicado, ya que debemos caracterizar todo el conjunto Imagen de L . Otra forma de garantizar la existencia de W es la llamada alternativa de Fredholm, donde buscamos aquellos elementos que sean ortogonales a Kernel del adjunto de L^\dagger . Para ello necesitamos definir un producto interno (para definir la ortogonalidad), caracterizar el operador L^\dagger , y su Kernel, es decir aquellos elementos que satisfacen $L^\dagger W = 0$.

Usaremos el producto interno de Hilbert, $\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}g dx$, con \bar{f} representando el complejo conjugado de f . El operador L es auto-adjunto, y posee un Kernel no trivial. Podemos encontrar un vector de este Kernel, usando que la derivada de la solución kink o antikink, es decir, el modo de Nambu-Goldstone, satisface $L\partial_z u_{k,a}(z - z_o) = 0$. Al proyectar ambos lados sobre el modo de Goldstone, usando el producto interno de Hilbert, encontramos

$$0 = \dot{x}_o \langle \partial_z u_{k,a} | \partial_z u_{k,a} \rangle + \eta \langle \partial_z u_{k,a} | u_{k,a} \rangle, \quad (3.3.19)$$

donde el segundo corchete es igual a $\pm 2\eta\sqrt{\epsilon}$, con $+$ para la solución kink o $-$ para la solución antikink, y el primer corchete es igual a la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{2} \text{sech}^4(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}z) dz = 3\epsilon/\sqrt{2}$, tanto para el kink como para el antikink. A esto lo llamamos condición de solubilidad. Esto significa que la ecuación para el corazón del frente es

$$\dot{x}_o(t) = \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (3.3.20)$$

que es lo que uno esperaría, es decir, que sea proporcional a la diferencia de energía. Cuando η crece, esta formula deja de ser válida y, para conocer la velocidad del frente, debemos solucionar un problema de valores propios no-lineales.

3.4. Estructuras Localizadas

Ahora nos abocaremos al problema de estudiar la existencia, estabilidad y dinámica de las estructuras localizadas en sistemas extendidos[41]. Al referirnos a estructuras localizadas nos referimos, en el lenguaje de sistemas dinámicos, a conexiones homoclinas, es decir, una curva en el espacio de fase que conecta un punto consigo mismo al alejarse de él por de su variedad inestable y regresar a él por su variedad estable. Estas soluciones tipo partícula son de gran importancia en Física, Química, Biología y Matemática. En Física estas soluciones son utilizadas en Mecánica Cuántica para describir partículas elementales y en Mecánica de Fluidos para describir soluciones propagativas localizadas en ondas de superficie, en ondas de choque, y en general, en ondas no-lineales. Existen varios tipos de estructuras localizadas, pero en este capítulo nos interesarán aquellas llamadas *disipativas*, ya que el sistema físico donde existen es disipativo, y también estacionarias, ya que no presentan dinámica permanente.

Veamos que ingredientes necesitamos para poder tener estructuras localizadas. Para ello veamos que ocurre en el caso de la ecuación (3.3.9). Esta ecuación ya presenta bi-estabilidad, lo que parecería una condición necesaria para la existencia de las estructuras localizadas. Para analizar la existencia de éstas, usamos el ansatz

$$u(x, t) = u(x - x_1(t))_k + u(x - x_2(t))_a - \sqrt{\epsilon} + W(x_1(t), x_1(t), t), \quad (3.4.1)$$

donde x_1 y x_2 son los corazones de un kink y un antikink respectivamente, tal que $|x_1 - x_2| \gg 1/\sqrt{\epsilon}$, y $W(x_1(t), x_1(t), t)$ es una perturbación de orden η . En la figura 3.6 se puede ver la forma de $u(x, t)$. Linealizando en W , encontramos dos condiciones de solubilidad, similares a (3.3.19), usando un operador

$$L_{a,k} = \epsilon - 3(u_k + u_a - \sqrt{\epsilon})^2 + \partial_{xx}. \quad (3.4.2)$$

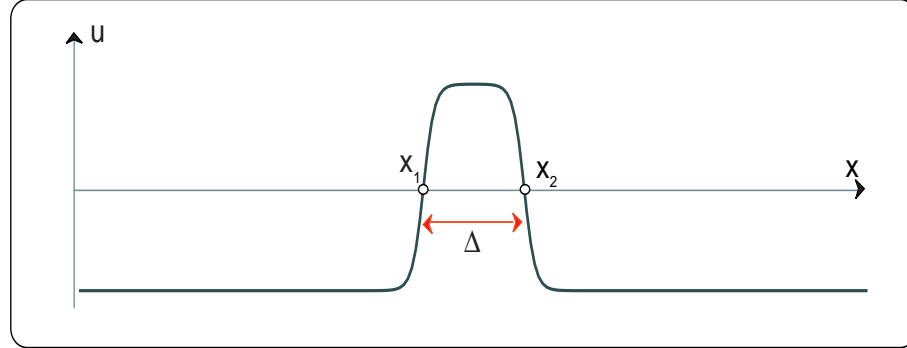


Fig. 3.6: Representación de una estructura localizada en la ecuación 3.3.9. Se pueden apreciar en la figura los corazones del kink x_1 y del antikink x_2 . También se muestra la talla de la estructura Δ

Este operador tiene la propiedad siguiente: cuando $x \gg x_1$ es idéntico al operador L_a , salvo una corrección exponencialmente pequeña, y cuando $x \ll x_2$ es idéntico al operador L_a , salvo una corrección exponencialmente pequeña. Por esto, podemos argumentar que el operador $L_{a,k}$ tiene dos "seudo-autovectores", correspondientes a $\partial_x u_k(x - x_1)$ y a $\partial_x u_a(x - x_2)$. Usando esto, proyectamos en los seudovectores, dejando en ambos lados términos exponencialmente pequeños. Un cálculo rápido nos entrega dos condiciones de solubilidad

$$\dot{x}_1 = -3\sqrt{\epsilon} \frac{\langle u_a(u_a - \sqrt{\epsilon}) | \partial_x u_k \rangle}{\langle \partial_x u_k | \partial_x u_k \rangle} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (3.4.3)$$

$$\dot{x}_2 = -3\sqrt{\epsilon} \frac{\langle u_k(u_k - \sqrt{\epsilon}) | \partial_x u_a \rangle}{\langle \partial_x u_a | \partial_x u_a \rangle} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (3.4.4)$$

donde, asintóticamente, $u_a \approx -\sqrt{\epsilon}(1 - e^{-\sqrt{\epsilon/2}(x-x_2)})$ para $x \gg x_2$ y $u_k \approx \sqrt{\epsilon}(1 - e^{\sqrt{\epsilon/2}(x-x_1)})$ para $x \ll x_1$. Con estas aproximaciones, encontramos para ambas coordenadas las ecuaciones

$$\dot{x}_1 = \alpha e^{-\sqrt{\epsilon/2}(x_2-x_1)} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (3.4.5)$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha e^{-\sqrt{\epsilon/2}(x_2-x_1)} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (3.4.6)$$

$$(3.4.7)$$

donde

$$\alpha = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\sqrt{\epsilon/2}z} \operatorname{sech}^4(\sqrt{\epsilon/2}z)}{\int_{-\infty}^{\infty} dz \operatorname{sech}^4(\sqrt{\epsilon/2}z)} \equiv \frac{9\pi\sqrt{\epsilon}}{4}$$

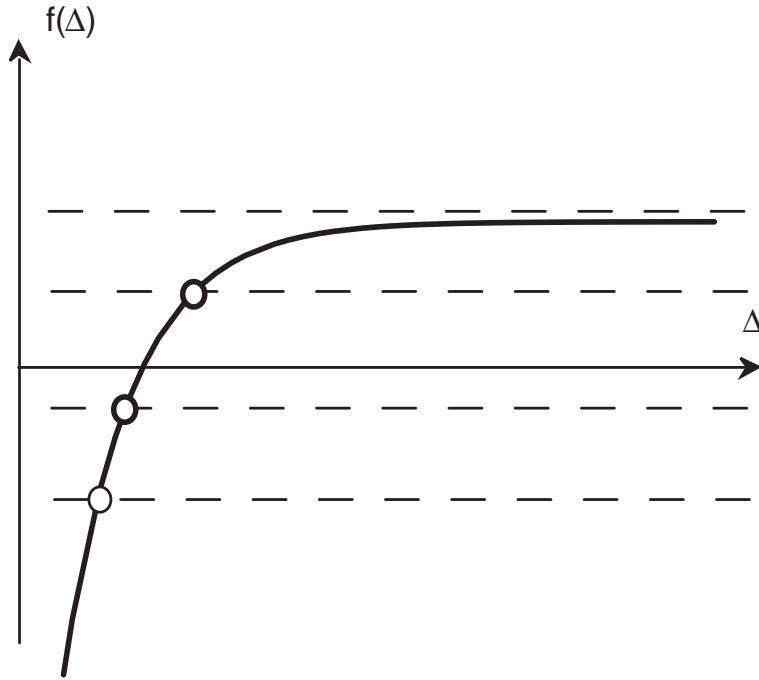


Fig. 3.7: Representación de la interacción kink-antikink de la ecuación 3.3.9. Los puntos blancos son los puntos de equilibrio Δ^* de la interacción $f(\Delta^*) = 0$. Estos equilibrios son inestables ya que $f'(\Delta^*) > 0$, por lo que ninguna estructura localizada es estable.

es un número positivo. Estas dos ecuaciones se pueden resumir, usando nuevamente una analogía mecánica, a las ecuaciones de las coordenadas centro de masa $R = \frac{x_1+x_2}{2}$ y distancia relativa $\Delta = x_2 - x_1$,

$$\begin{aligned} \dot{R} &= 0, \\ \dot{\Delta} &= -2\alpha e^{-\sqrt{\epsilon/2}\Delta} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon}}, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Esto nos dice que, el centro de masa del sistema no evoluciona, es decir, no cambia en el tiempo su posición. En cambio, la distancia relativa, o lo que es lo mismo, la *talla de la estructura localizada*, disminuye en el tiempo constantemente cuando $\eta \leq 0$, o posee un equilibrio inestable en $\Delta_o = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon\alpha}}\right)$ cuando $\eta > 0$, es decir, no hay estructuras localizadas disipativas en este tipo de sistemas, a pesar de tener biestabilidad (ver figura 3.8).

El ingrediente que falta en el sistema para explicar la existencia de estructuras localizadas estables es la aparición de una longitud intrínseca, es decir, una longitud propia del sistema, distinta la longitud difusiva. La existencia de una longitud intrínseca implica la competencia entre procesos difusivos, que tiende a homogeneizar el sistema, con procesos focalizantes que intenta localizar el sistema en una región finita. Esta longitud debe ser la talla o del orden de la talla de las estructuras localizadas que aparecen en el sistema bajo estudio[7]. Ésta puede provenir de una inestabilidad espacial cuando aparece, por ejemplo, antidifusión, o al coexistir dos especies químicas con diferentes

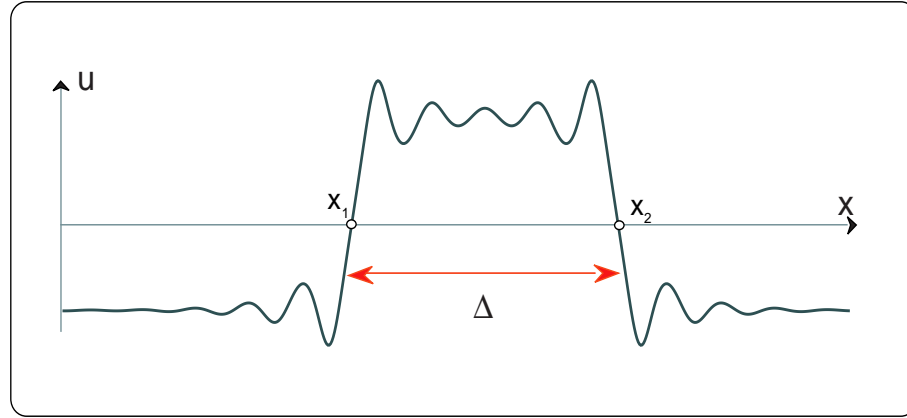


Fig. 3.8: Representación de una estructura localizada en la ecuación 3.4.9. Se pueden apreciar en la figura los corazones del kink x_1 y del antikink x_2 . También se muestra la talla de la estructura Δ . Se puede notar también el decaimiento no monotónico de la solución al estado de equilibrio homogéneo. Esta oscilación es la responsable de la estabilización de la estructura localizada.

coeficientes de difusión, como propuso Turing en su morfogénesis[42]. Desde un punto de vista de sistemas dinámicos, podemos entender esta longitud característica como medio de estabilización de las estructuras localizadas[35]: los valores propios son complejos conjugados, por lo que el decaimiento, en vez de ser netamente exponencial, es, también, oscilatorio. Esto significa que la interacción entre kink y antikink tendrá una serie de equilibrios ya que su interacción será oscilatoria.

Un modelo sencillo en una dimensión que tiene este elemento además de la biestabilidad es

$$\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 + \nu \partial_{xx} u - \partial_{xxxx} u, \quad (3.4.9)$$

donde ν asume el rol de difusión o antidifusión si es positivo o negativo. Este modelo recibe el nombre de modelo de Swift-Hohenberg generalizado[7]. Cuando ν es negativo, que es caso que nos interesa, el sistema puede presentar una inestabilidad espacial, junto con presentar biestabilidad entre estados homogéneos. Nuevamente, η representa el rompimiento "débil" de la simetría $u \rightarrow -u$. Además, este sistema mantiene las simetrías $x \rightarrow -x$ y $x \rightarrow x + x_0$.

Para conocer las soluciones estacionarias, se procede de la misma manera. En este caso, debido a que la dimensión de las derivadas espaciales es elevada, el cálculo de las soluciones explícitas es más complicado. Aún así, podemos usar el argumento anterior, es decir, suponiendo que conocemos la solución $u_k(x - x_1)$ y que su forma asintótica para $\eta = 0$ es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_k(x) = \sqrt{\epsilon} - a e^{-\lambda x} \cos(\beta x),$$

podemos calcular la interacción kink-antikink. En la figura 3.8 se puede observar una de estas estructuras. La forma asintótica de $u_k(x)$ viene dada tanto por el decaimiento exponencial a la solución homogénea (el rol que cumple λ), como por una contribución oscilatoria. Al igual que antes, esta conexión es una heteroclina, y por lo tanto se acerca exponencialmente a la solución homogénea en el sistema dinámico espacial, pero, a diferencia del caso anterior, ahora presenta una contribución oscilatoria. Esta contribución

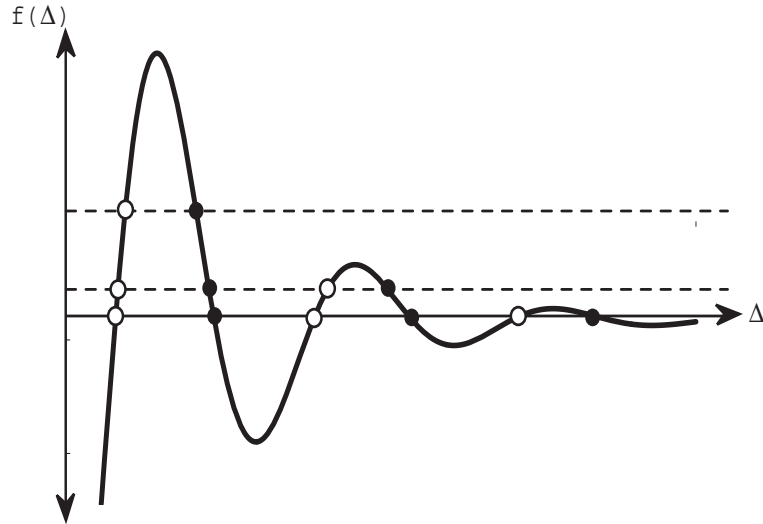


Fig. 3.9: Interacción oscilatoria $f(\Delta)$ para estructuras localizadas entre estados homogéneos como en la ecuación (3.4.9). Los equilibrios son las intersecciones del eje horizontal. En negro, los puntos de equilibrio estables ($f(\Delta^*)' < 0$), y en blanco, los equilibrios inestables ($f(\Delta^*)' > 0$). En las líneas punteadas, se muestran distintos valores de $\eta < 0$.

puede ser entendida en el sistema dinámico espacial de la siguiente manera: los valores propios de las soluciones homogéneas ahora son complejos conjugados, por lo que presentan una parte imaginaria. Esta parte imaginaria, en el sistema dinámico espacial, toma el rol de una longitud de onda (el rol que cumple β), que se atenúa al acercarse a la solución homogénea[43].

Tomando, entonces, una solución de la forma

$$u(x, t) = u_k(x - x_1) + u_a(x - x_2) + W(x, x_1, x_2) \quad (3.4.10)$$

y realizando el cálculo de la misma manera, uno encuentra que para la coordenada distancia relativa Δ

$$\dot{\Delta} = f(\Delta) \equiv -2\alpha e^{\lambda\Delta} \cos(\beta\Delta) + \gamma, \quad (3.4.11)$$

donde α y γ se calculan de la misma forma que en el caso sin inestabilidad espacial. Esto significa que existen ahora, a diferencia del caso anterior, una serie infinita numerable de equilibrios estables para la conexión kink-antikink dados por

$$\Delta_n = (2k + 1) \frac{\pi}{2\lambda}$$

para $\gamma = 0$, como puede verse en la figura 3.9. Cada uno de estos equilibrios estables, corresponde a una talla estacionaria de la estructura localizadas. Cuando $\gamma \neq 0$, lo que corresponde mover el eje de horizontal, los equilibrios cambian, es decir, la talla de las estructuras localizadas cambia. A medida que γ decrece o crece, los equilibrios comienzan a desaparecer por una serie de bifurcaciones de nodo-silla. Cuando $|\gamma| > 2\alpha$, el último de estos puntos de equilibrios, el más cercano al origen y por lo tanto, el menor, desaparece.

Esto significa que el último equilibrio en desaparecer es la estructura localizada de menor talla.

Capítulo 4

PROPAGACIÓN DE FRENTE EN PRESENCIA DE RUIDO ADITIVO

4.1. Introducción al fenómeno

Este capítulo tratará un nuevo fenómeno robusto del ruido en sistemas extendidos: un frente que conecta un estado periódico con un estado homogéneo se propaga en presencia de ruido aditivo. Para ello, usaremos los tópicos tratados en anteriores capítulos. Es conocido que cuando un frente que conecta un estado homogéneo y un estado inhomogéneo, este frente puede ser estacionario en una región del espacio de parámetros, que tomará el nombre de región de fijación (*pinning range*).

A partir de un modelo prototipo que describe la formación de patrones, el de Swift-Hohenberg subcrítico[7], logramos dar una explicación a la propagación del frente, encontrando una ecuación para el corazón del frente. Esta ecuación presenta un potencial asimétrico periódico y ruido aditivo, ingredientes necesarios para entender el fenómeno como un motor browniano[29], es decir, el ruido genera continuamente transiciones de estados metaestables en una dirección dada o equivalentemente la conversión de fluctuaciones del sistema en movimiento dirigido. Se ha encontrado este fenómeno en diversos sistemas, descritos con diversos modelos, desde modelos no-variacionales[44] a no-locales[45], como se muestra en los artículos del Apéndice . En cada uno de estos modelos, la presencia de ruido aditivo induce la propagación de un frente que conecta un estado homogéneo y un estado inhomogéneo, que, dependiendo de la región del espacio de parámetros, se propagará sobre un estado o sobre el otro, como se puede ver en la figura 4.1. Incluso esta propagación inducida por ruido aditivo es posible al conectar dos estados inhomogéneos[46], como se ve en el Apéndice A.

4.1.1. Modelo de Swift-Hohenberg

Para explicar el mecanismo, usaremos un modelo prototipo para explicar la formación de patrones y estructuras fuera del equilibrio, conocido como el modelo de Swift-Hohenberg subcrítico. El modelo original fue por primera vez deducido y utilizado por Swift y Hohenberg[47], y luego promovido a paradigmático por una serie de artículos de formación de patrones fuera del equilibrio (para más referencias, ver [7]). La generalización de este modelo es usualmente utilizada en convección. El modelo que utilizaremos

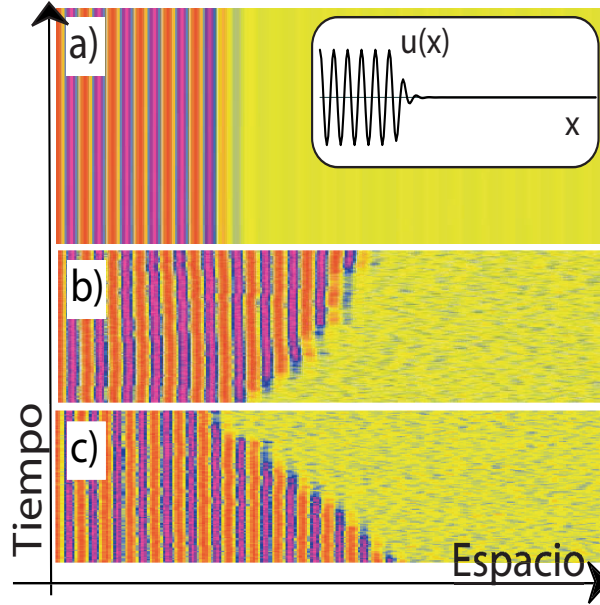


Fig. 4.1: Evolución espacio-temporal de la ecuación (4.1.1), donde el tiempo corre hacia arriba. El recuadro es la condición inicial. Los parámetros han sido escogidos como $\epsilon = -0,16$, $\nu = 1,0$, $q = 0,7$ a) $\eta = 0,0$, y b) $\eta = 0,4$. En c), para $\epsilon = -0,155$, $\nu = 1,0$, $q = 0,7$ y $\eta = 0,4$. Se observa la propagación tanto del estado homogéneo sobre el estado periódico en b), como el estado periódico sobre el homogéneo en c).

es

$$\partial_t u = \epsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2)u + \sqrt{\eta}\zeta, \quad (4.1.1)$$

donde $u(x, t)$ es un parámetro de orden, que en el caso de convección representa la componente vertical del campo de velocidad, $\epsilon - q^4$ es el parámetro de bifurcación, ν el es parámetro de control del orden de la bifurcación (si es supercrítica o subcrítica) y $\zeta(x, t)$ es un ruido blanco gaussiano con valor medio cero y correlación $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$ de intensidad η . Este modelo tiene la confluencia de una inestabilidad espacial junto con el estado homogéneo, cuando los parámetros escalan de la forma $u \sim \epsilon^{1/4}$, $\nu \sim \epsilon^{1/2}$, $q \sim \epsilon^{1/4}$, $\partial_t \sim \epsilon$ y $\partial_x \sim \epsilon^{1/4}$ ($\epsilon \ll 1$), por lo tanto ese modelo describe la dinámica en torno a un punto de codimensión dos y además el sistema tiene una simetría especular $u \rightarrow -u$.

Este modelo presenta la coexistencia de un estado patrón con el estado homogéneo. Planteando la solución patrón estacionaria

$$u(x) = A_o e^{iqx} + c.c.$$

encontramos que la amplitud compleja A_o satisface la ecuación

$$0 = \epsilon A_o + 3\nu |A_o|^2 |A_o - 10|A_o|^4 |A_o. \quad (4.1.2)$$

De aquí podemos encontrar las soluciones $u = 0$, que es el estado homogéneo, y $u = \sqrt{6\nu/10} \left(\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 40\epsilon/9\nu^2})} \cos(qx) \right) + o(\nu^{5/2})$. Es decir, la solución patrón coexiste con el estado homogéneo cuando ν es pequeño y negativo tal que $9\nu^2/40 < \epsilon < 0$. Es

en esta región donde realizaremos la conexión frente entre el estado homogéneo y el estado patrón. Para ello, plantearemos un nuevo ansatz en función de una amplitud o envolvente

$$u = \sqrt{\frac{2\nu}{10}} \varepsilon^{1/4} \left\{ A \left(y = \frac{3\sqrt{|\varepsilon|}}{2\sqrt{10}q} x, \tau = \frac{9\nu^2 |\varepsilon|}{10} t \right) e^{iqx} + w_1(x, y, \tau) + c.c. \right\}, \quad (4.1.3)$$

donde hemos separado escalas espaciales y temporales. El cálculo de la separación de escalas está explicitados en el Apéndice A. Esta separación permite establecer como cambia lentamente la amplitud $A(y, \tau)$, sin tomar en cuenta la oscilación rápida del patrón. Acá, $w_1(x, y, \tau)$ es una corrección pequeña de orden ε y hemos considerado que q es de orden 1 o superior al orden de los otros parámetros. Introduciendo este ansatz en la ecuación (4.1.1) y linearizando en w_1 , encontramos la condición de solubilidad

$$\begin{aligned} \partial_\tau A &= \varepsilon A + |A|^2 A - |A|^4 A + \partial_{yy} A \\ &+ \left(\frac{A^3}{9\nu} - \frac{A^3 |A|^2}{2} \right) e^{\frac{2iqy}{a\sqrt{|\varepsilon|}}} - \frac{A^5}{10} e^{\frac{4iqy}{a\sqrt{|\varepsilon|}}} + \frac{\sqrt{\eta} b}{|\varepsilon|^2} e^{\frac{iqy}{a\sqrt{|\varepsilon|}}} \zeta(y, \tau), \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

donde $\varepsilon \equiv 10\varepsilon/9\nu^2$, $a \equiv 3\nu/2\sqrt{10}q$, y $b \equiv 10^{9/4}/81\nu^4$. Cabe destacar que los términos deterministas proporcionales a la exponencial son no-resonantes, es decir, pueden ser eliminados usando un cambio de variables asintótico no-singular[48]. Es más, pueden ser entendidos como forzamientos paramétricos con oscilaciones rápidas, que en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ que pueden ser promediadas en el espacio, dando correcciones exponencialmente pequeñas. Es por esto que son comúnmente eliminadas de la ecuación de amplitud. Ahora el ruido, como será explicado en el Apéndice A, siempre será resonante, pero, debido a que usualmente tiene pequeña intensidad, no es tomado en cuenta para la condición de solubilidad.

Tomando en cuenta sólo los términos deterministas y resonantes, encontramos la solución estacionaria que satisface,

$$0 = \varepsilon A + |A|^2 A - |A|^4 A + \partial_{yy} A \equiv -\frac{\delta F[A, \bar{A}]}{\delta \bar{A}}, \quad (4.1.5)$$

con

$$F[A, \bar{A}] = - \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{\varepsilon}{2} |A|^2 - \frac{1}{4} |A|^4 - \frac{1}{6} |A|^6 + \frac{1}{2} |\partial_y A|^2 \right)$$

un funcional de Lyapunov del problema. Para las soluciones homogéneas del problema, 0 y $\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})}/2$, cuando $\varepsilon < 0$, podemos encontrar la solución frente que los conecta en el sistema dinámico espacial. Al igual que antes, esta conexión se propaga desde el estado metaestable hasta el equilibrio global y es estacionaria solamente en un único punto, el punto de Maxwell, que se alcanza cuando $\varepsilon = \varepsilon_M = -\frac{3}{16}$, como se puede ver en la figura B.1. Es en este punto cuando los mínimo del funcional $F[A, \bar{A}]$ tienen igual energía. La solución es encontrada integrando directamente la ecuación (4.1.5), usando condiciones de borde

$$\partial_y A(y \rightarrow \pm\infty) = 0, \quad (4.1.6)$$

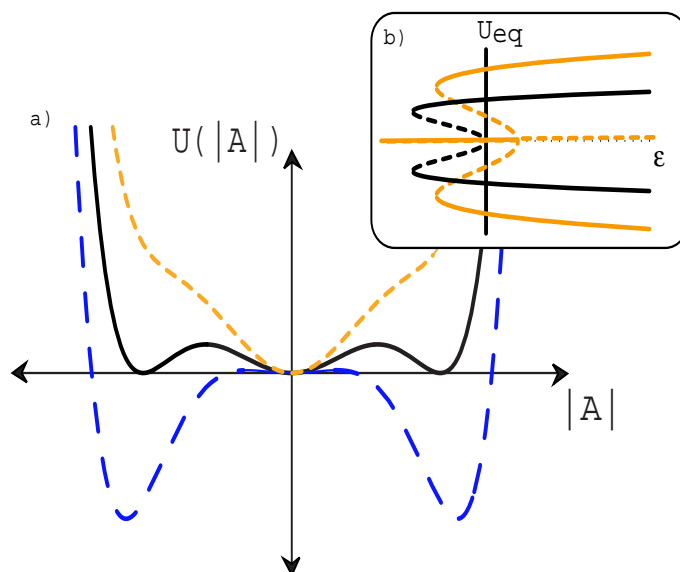


Fig. 4.2: Equilibrios relativos del sistema. a) Potencial $U(|A|)$ para los estados homogéneos para distintos valores de ϵ , donde la curva continua representa los equilibrios en el punto de Maxwell para $\epsilon_m = -\frac{3}{16}$. b) Diagrama de bifurcación. La curva negra continua (discontinua) representa las soluciones periódicas estables (inestables) de amplitud u_{eq} , y la curva gris continua (discontinua), las soluciones homogéneas estables (inestables).

y que las soluciones asintóticas son los mínimos del potencial en el punto de Maxwell, 0 y $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

La solución estacionaria es integrada de manera inmediata y tiene la forma,

$$A_{\pm} = \sqrt{\frac{3/4}{1 + e^{\pm\sqrt{3/4}(y-y_o)}}} e^{i\theta},$$

donde y_o es el corazón del frente (ver figura 3.5 en el capítulo anterior) y tiene relación con la simetría de traslación del problema reducido a la ecuación de amplitud, y θ es un número real cualquiera. El corazón del frente lo podemos definir como aquel punto de la solución frente donde la variación espacial es máxima. Como vimos antes, en la vecindad del punto de Maxwell ϵ_m , la velocidad del frente puede ser calculada como $\Delta = 3d/8(\epsilon - \epsilon_M)$, donde $d = \int (\partial_y A_{\pm})^2 dy$. Pero, como fue remarcado por Pomeau[49] en simulaciones numéricas y luego en diversos sistemas experimentales, frentes estáticos entre estados homogéneos y periódicos pueden persistir en una región finita cerca del punto de Maxwell. Esta región es llamada región de fijación (del inglés *pinning range*), y fenómeno de la aparición de esta región es conocido como fenómeno de bloqueo (del inglés *locking phenomenon*). Pomeau conjeturó que este fenómeno se podría deber a efectos de las variables eliminadas por ser no-resonantes o promediadas debido a oscilaciones rápidas, por ello el nombre de efectos no-adiabáticos. Esto fue mostrado luego por Bensimon[50] y recientemente discutido en un marco general por Coulet y compañía[41], donde se concluye que el fenómeno de bloqueo resulta de la interacción (contenida en los términos no-resonantes) de la gran escala de la envolvente A con pequeña escala de la solución periódica subyacente[50].

4.2. Propagación inducida por ruido

Usando esto como base para describir la dinámica exhibida por el modelo de Swift-Hohenberg subcrítico, tomamos en cuenta ahora los términos no-resonantes como perturbación en la ecuación de la envolvente en torno al punto de Maxwell, ya que nos entregarán información de la interacción de ambas escalas, y por lo tanto, del fenómeno de bloqueo. Usamos el ansatz

$$A(y, \tau) = (A_+(y - y_o(\tau)) + \delta\rho)e^{i\delta\Theta},$$

donde δ es un parámetro pequeño de orden $(\epsilon - \epsilon_m)$, ρ y Θ son perturbaciones a la solución frente estacionario. Introduciendo este ansatz en la ecuación (4.1.4) y linealizando en $\{\rho, \Theta\}$ encontramos la condición de solubilidad

$$\begin{aligned} \dot{y}_o &= -\frac{\partial U(y_o)}{\partial y_o} + \frac{ab}{|\epsilon|^2} \sqrt{\frac{\eta}{2d}} \zeta(\tau) \\ &= \Delta + \Gamma \cos\left(\frac{2q}{d\sqrt{|\epsilon|}} y_o - \varphi\right) + \frac{ab}{|\epsilon|^2} \sqrt{\frac{\eta}{2d}} \zeta(\tau) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv \sqrt{k_1 + k_2} e^{-\sqrt{4/3}\pi q/d\sqrt{|\epsilon|}}, \\ \tan \varphi &= k_1/k_2, \\ k_1 &\equiv -9d\pi/2048(8q/a\sqrt{3|\epsilon|})^3 - (8 + d\pi/32\nu)(8q/a\sqrt{3|\epsilon|}) + \sqrt{3}d^2\beta^2q^3\eta\pi/2^3a^3|\epsilon|^{11/2}, \\ k_2 &\equiv (27/1024 - 1/128\nu)d\pi(8q/a\sqrt{3|\epsilon|})^2 - 3d^2\beta^2q^2\eta\pi/2^6a^2|\epsilon|^5. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

$U(y_o)$ es el potencial que caracteriza la dinámica del corazón del frente, y una representación de éste aparece en la figura 4.3. $\zeta(\tau)$ es un ruido blanco gaussiano, esto es, con promedio cero y correlación $\langle \zeta(\tau) \zeta(\tau') \rangle = \delta(\tau - \tau')$. Los cálculos que llevaron a deducir estas expresiones analíticas son presentados en el Apéndice A.

Debido a la interacción de la gran escala con la escala subyacente de la solución periódica, la dinámica del corazón del frente es modificada con términos que son exponencialmente pequeños y periódicos en el espacio. El sistema determinista anterior está caracterizado por la invasión del estado periódico sobre el estado homogéneo con una velocidad bien definida cuando $\Delta < 0$ y $|\Delta| > |\Gamma|$. Aumentando Δ el sistema exhibe una transición simulatánea a infinitos puntos que bifurcan como nodo-silla. Para $\Delta > \Delta_-$ y $|\Delta| < |\Gamma|$, el sistema presenta un número infinito de estados de equilibrio estables. Cada uno de estos estados representa al frente estático en un nuevo equilibrio con un número entero de oscilaciones espaciales, como se muestra en la figura 4.3. Incrementando aún más Δ , todos los puntos de equilibrio desaparecen por bifurcaciones de nodo-silla cuando $\Delta > 0$ y $|\Delta_+| = |\Gamma|$. Para $\Delta > \Delta_+$, el estado homogéneo invade al estado periódico con una velocidad bien definida. Es por esto que para $\Delta_- < \Delta < \Delta_+$, el sistema presenta el fenómeno de bloqueo del frente en la región de fijación. Ahora podemos considerar el efecto del ruido en este sistema reducido del corazón del frente. Debido a la asimetría del potencial el sistema no presenta un equilibrio global, por lo que continuamente convierte las fluctuaciones en propagación dirigida, es decir, *el ruido*

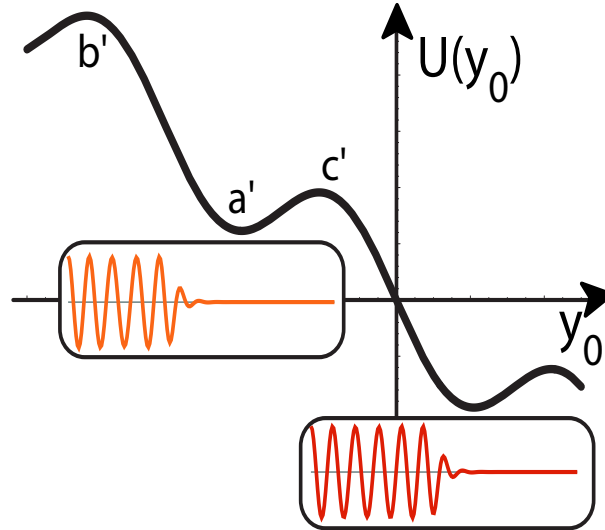


Fig. 4.3: Representación del potencial $U(y_0)$. $\{a, b, c\}$ son puntos fijos. El recuadro representa dos equilibrios sucesivos del potencial $U(y_0)$ y por tanto de la ecuación (4.1.1).

induce la propagación del frente [51, 52]. Para más referencias, se pueden ver los artículos del Apéndice A. En la figura 4.4 se puede ver el efecto del ruido aditivo en la velocidad de propagación en presencia de ruido. A pesar de encontrarse en el límite de intensidad de ruido pequeño, existe una velocidad bien definida, por lo tanto, movimiento dirigido. Este tipo de fenómeno descrito por un modelo simple como el anterior es bien conocido como motor browniano, o en el contexto biológico, como motor molecular. Podemos dar una explicación sencilla al origen de la propagación mediante transiciones inducidas por ruido: si inicialmente el corazón del frente y_0 está en la cuenca de atracción Ω de un punto fijo del potencial $U(y_0)$, entonces el frente fluctúa en torno al punto fijo por un tiempo del orden del tiempo de primera salida por $\partial\Omega$, el borde de Ω . Después de este tiempo el sistema realiza una transición a la cuenca de atracción de alguno de los otros puntos fijos cercanos, en particular, el que posea la menor barrera de energía. Este comportamiento se repite continuamente en cada una de las tinajas de atracción y el resultado final es movimiento dirigido del frente, inducido por el ruido. Debido a que la energía umbral para saltar hacia un lado o hacia el otro es diferente, la probabilidad de saltar hacia el lado con la barrera de potencial más grande es exponencialmente más pequeña, y esto determina, por ende, la dirección de la propagación.

Es por esto que podemos estimar la velocidad promedio del corazón del frente como

$$\langle v \rangle = \frac{\pi\sqrt{|\epsilon|}}{qa} \left(\frac{1}{\tau_+} - \frac{1}{\tau_-} \right)$$

donde $\pi\sqrt{|\epsilon|}/qa$ es la distancia entre dos mínimos sucesivos del potencial y $\{\tau_-, \tau_+\}$ son los tiempos de primera salida o de escape a las cuencas de atracción de la izquierda o de la derecha respectivamente. Usando la ecuación de Dynkin del capítulo 2, podemos

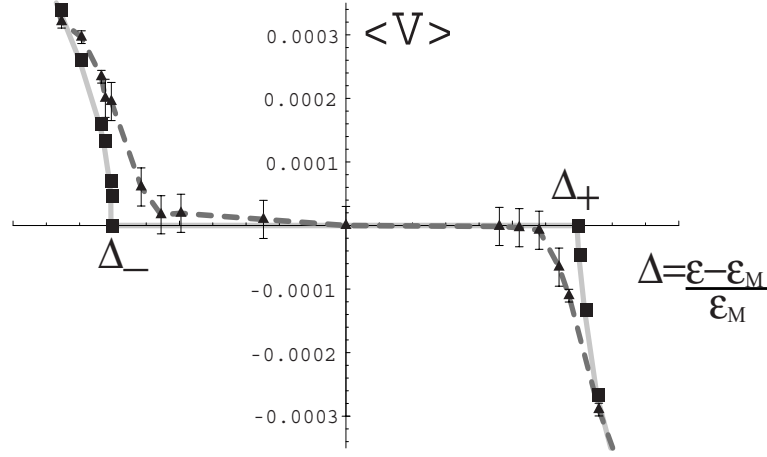


Fig. 4.4: Velocidad media de propagación del frente. La línea continua es la fórmula determinista para $\eta = 0$ y los puntos son medidas numéricas de la velocidad media del frente. La línea discontinua es la interpolación de la velocidad media en presencia de ruido. Los puntos son las medidas numéricas de la velocidad media para $\eta = 0,01$. Los parámetros del sistema han sido escogidos como $\epsilon = -0,16$, $\nu = 1,0$ y $q = 0,7$.

encontrar que los tiempos de escape tienen la forma

$$\left(\frac{1}{\tau_+} - \frac{1}{\tau_-} \right)^{-1} = \frac{2}{\theta} \int_{c'}^{b'} \int_{c'}^y e^{2[U[y]-U[z]]/\theta} dy dz - \frac{2}{\theta} \int_{c'}^{a'} \int_{c'}^y e^{2[U[y]-U[z]]/\theta} dy dz \left[\frac{\int_{c'}^{a'} e^{2U[y]/\theta} dy}{\int_{c'}^{b'} e^{2U[y]/\theta} dy} \right] \quad (4.2.3)$$

donde a' , b' , y c' son, respectivamente, un mínimo y dos máximos sucesivos del potencial $U(y_o)$, y $\theta \equiv ab/|\epsilon|^2 \sqrt{\eta/2d}$, la intensidad renormalizada del ruido. En el límite de intensidad de ruido pequeña usamos la técnica de *steepest descent*, al igual que en el Capítulo 2. Así, podemos aproximar la velocidad por

$$\langle v \rangle = \frac{\sqrt{|\epsilon| |\partial_{yy} U(a')| |\partial_{yy} U(c')|}}{2qa} e^{-\frac{(U(c')-U(a'))}{\theta}} \left(1 - \sqrt{\frac{|\partial_{yy} U(c')|}{|\partial_{yy} U(b')|}} e^{-\frac{(U(b')-U(c'))}{\theta}} \right).$$

De la expresión anterior podemos ver que, en este límite, la velocidad de propagación es proporcional a la tasa de Kramers. Numéricamente, medimos la velocidad de propagación para diferentes valores de la intensidad del ruido, como se puede apreciar en la figura 4.5. Se ha encontrado buena concordancia con el resultado teórico. Es importante resaltar que el potencial $U(y_o)$ es función de la intensidad del ruido. Es más, en el límite de $\epsilon \rightarrow 0$, basta considerar los términos provenientes de éste para explicar la propagación del frente en presencia de ruido.

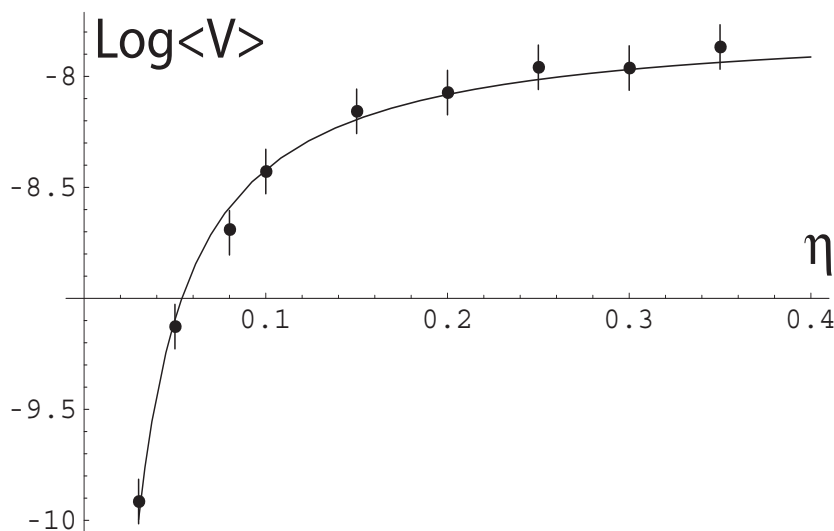


Fig. 4.5: Gráfico semilog de la velocidad de propagación del frente inducida por ruido. Los puntos son simulaciones numéricas para diversos valores de la intensidad del ruido. La línea continua muestra la predicción teórica.

4.2.1. Generalización del modelo

Para poder entender el mecanismo anterior hemos usado el modelo subcrítico de Swift-Hohenberg. Este modelo nos ha ayudado a realizar los cálculos y a obtener expresiones analíticas para la velocidad media del frente. Para un modelo arbitrario, encontrar fórmulas explícitas se torna complicado, debido a que no poseemos las expresiones explícitas de las soluciones no-homogéneas. Aún en este caso, podemos esperar encontrar una ecuación adecuada para la envolvente, cerca del bifurcación espacial. Usando un ansatz similar a (4.1.3), y usando que la envolvente satisface las simetrías $\{x \rightarrow -x, A \rightarrow \bar{A}\}$, y $\{x \rightarrow x + x_o, A \rightarrow Ae^{iqx_o}\}$, podemos concluir que la ecuación de amplitud puede ser escrita como (4.1.4) con coeficientes reales de la forma

$$\partial_T A = f(|A|^2) A + \partial_{XX} A + \sum_{m,n} g_{mn} A^m \bar{A}^n e^{iq(1+n-m)x}$$

donde los términos con dependencia explícita en el espacio son no-resonantes y varían rápidamente en el espacio[53]. Sin embargo, estos son precisamente los términos que pueden explicar el bloqueo. Se obtienen términos similares a los obtenidos en (4.1.4), que pueden ser dominantes si el ruido es considerado cuando el sistema bifurca. Una manera sencilla de entender el efecto del ruido es como fuente de propagación debido a que éste prefiere crear o destruir un pulso, porque la perturbación necesaria para nuclear o destruir un pulso son distintas.

4.3. Patrones localizados en presencia de ruido

En el modelo anterior (4.1.1), además de poseer frentes estacionarios en una región finita del espacio de parámetros cerca del punto de Maxwell, también posee estructuras

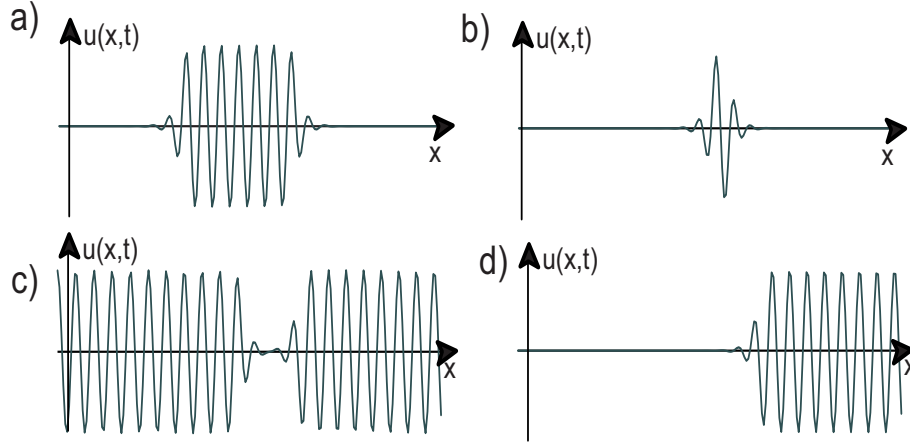


Fig. 4.6: Estructuras localizadas y frentes que aparecen en la ecuación subcrítica de Swift-Hohenberg. Los parámetros han sido escogidos como $\epsilon = -0,16$, $\nu = 1,00$, y $q = 0,70$. (a) patrón localizado, (b) patrón localizado de menor longitud, (c) defecto homogéneo localizado u hoyo y (d) solución frente.

localizadas[54]. La existencia, propiedades de estabilidad y diagramas de bifurcación de estas estructuras localizadas, llamados *patrones localizados*, en la región de fijación han sido estudiados recientemente por Coulet[41] desde un punto de vista de sistemas dinámicos. En la figura 4.6 se pueden ver diversas estructuras, tanto localizadas como extendidas, que posee en modelo de Swift-Hohenberg subcrítico.

Para analizar la dinámica de los patrones localizados, en especial, en presencia de ruido, realizamos un cálculo similar al de Otha y Kawasaki[40], planteando el ansatz en la ecuación (4.1.4)

$$A(y, \tau) = (A_-(y - y_1(\tau)) + A_+(y - y_1(\tau)) + \rho(y, \tau, y_1(\tau), y_2(\tau)))e^{i\Theta(y_1, y_2, y, \tau)}, \quad (4.3.1)$$

donde promovemos a variables dinámicas los corazones de ambos frentes, ρ y Θ son correcciones de orden $\delta = \epsilon - \epsilon_m$, al igual que las derivadas de y_1 e y_2 en el tiempo lento τ . Así, encontramos dos condiciones de solubilidad, que se pueden escribir en función de $\Delta = y_2 - y_1$ como

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = f(\Delta) \equiv -\alpha\Delta \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\Delta\right) + \beta \cos(2q\Delta/\sqrt{\epsilon}) + 2\delta\epsilon, \quad (4.3.2)$$

donde $\alpha = 27\sqrt{3}/64$ y $\beta = 64\sqrt{3}q^2 \exp(-q4\pi/\sqrt{\epsilon})/3\epsilon$. El cálculo de estos coeficientes se mostrarán en el Apéndice B. Es importante notar que en sistemas extendidos unidimensionales, la dependencia en la distancia de la interacción del frente es exponencial. La parte lineal y oscilatoria está contenida en la parte no-resonante. Nuevamente, el sistema posee equilibrios en $f(\Delta^*) = 0$, y son estables si $f'(\Delta^*) < 0$, o inestables si $f'(\Delta^*) > 0$. Una representación gráfica de la interacción aparece en la figura 4.7. Cambiando el parámetro de bifurcación ϵ , es decir, moviendo el eje horizontal hacia arriba o hacia abajo, podemos ver que, para $|\delta\epsilon| > \beta$ y $\delta\epsilon < 0$, la interacción es siempre atractiva, es decir no hay equilibrios. Esto significa que la solución periódica invade al estado homogéneo. Aumentando ϵ , encontramos que el primer equilibrio en $\Delta = \infty$ para $\delta\epsilon = \delta\epsilon_- \equiv \beta$

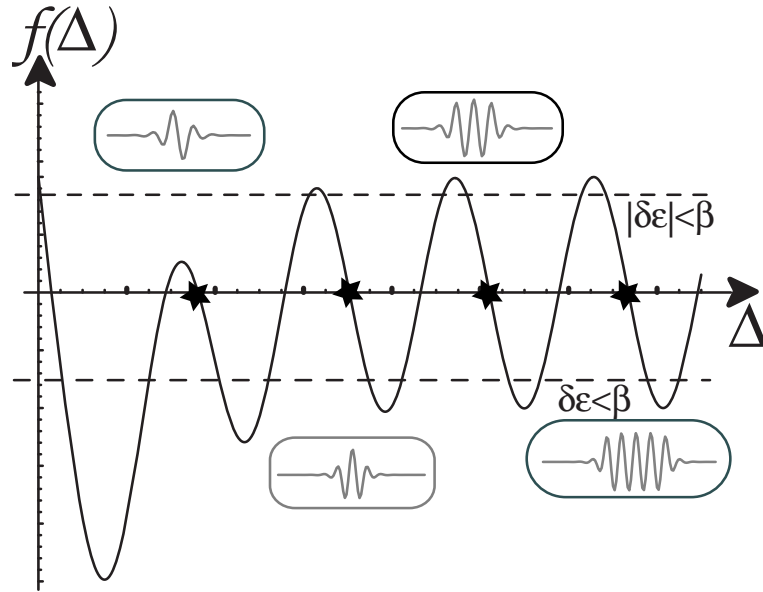


Fig. 4.7: Representación de la interacción oscilatoria $f(\Delta)$. Los recuadros son los patrones localizados estables en el punto de Maxwell. El tamaño de estos patrones está representado por estrellas. Las líneas punteadas representan la abscisa afectiva cuando ϵ cambia.

y $\delta\epsilon < 0$. Así, el sistema posee un frente estacionario entre un estado periódico y uno homogéneo. Para $\delta\epsilon > \beta$, el frente se propaga desde el estado homogéneo al periódico. Aumentando $\delta\epsilon$ desde $\delta\epsilon_-$, observamos que los equilibrios, es decir, los patrones localizados, aparecen por una serie de bifurcaciones consecutivas de nodo-silla, siendo uno estable y otro inestable, y cada vez con menos, notados por c_i^a . Para $\delta\epsilon$ pequeño, y cerca del punto de Maxwell, el sistema tiene infinitos patrones localizados. El largo de cada uno de estos patrones es cercano a un múltiplo de la longitud del más pequeño de los estados localizados. Contrariamente, para $|\delta\epsilon| > \beta$, los patrones localizados, notados como c_i^d , desaparecen por una bifurcación de nodo-silla y aumentando $\delta\epsilon$ los patrones más largos desaparecen uno tras del otro[55]. Así, el patrón más pequeño es el último en desaparecer. De la misma forma podemos analizar las soluciones localizadas de estados homogéneos en estados periódicos, también llamados soluciones *hoyo*[46], usando el ansatz,

$$A(y, \tau) = (A_+(y - y_1(\tau)) + A_-(y - y_1(\tau)) + \rho(y, \tau, y_1(\tau), y_2(\tau)))e^{i\Theta(y_1, y_2, y, \tau)}, \quad (4.3.3)$$

en la ecuación (4.1.4). El cálculo es el mismo, sólo cambiando el signo de α . Su diagrama de bifurcación aparece en la figura 4.8 como h_i^d .

En presencia de ruido, ocurrirá el mismo fenómeno que vimos que ocurría en el frente que conecta el estado periódico y el homogéneo: se inducirá la propagación desde el estado metaestable a otro, lo que produce que, cambiando $\delta\epsilon$, se propague el patrón sobre el sistema homogéneo o viceversa. Una representación de un patrón que se propaga por efecto del ruido aditivo aparece en la figura 4.9. Del análisis anterior, notamos que los patrones localizados son, en esencia, inestables, ya que en presencia de fluctuaciones desaparecerán. La velocidad de propagación de la interfaz es proporcional a la tasa de

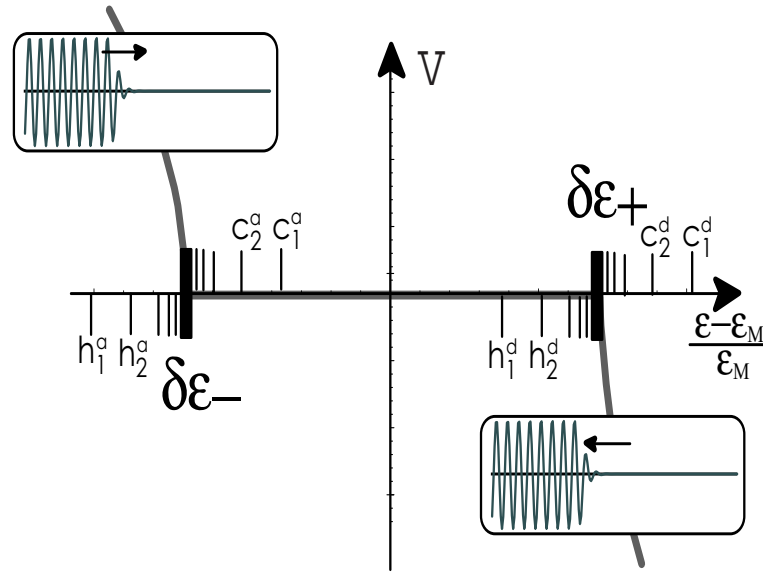


Fig. 4.8: Velocidad de propagación del frente (línea gris) y diagramas de bifurcación para patrones localizados de estados homogéneos y periódicos en función del parámetro de bifurcación. c_i^a y c_i^d (h_i^a y h_i^d) representan los puntos de bifurcación donde los patrones localizados con un número i de pulsos aparecen y desaparecen respectivamente.

Kramers. Es por esto que, experimentalmente, uno puede observar patrones localizados por un largo período de tiempo como estados metaestables, cuando el ruido es pequeño.

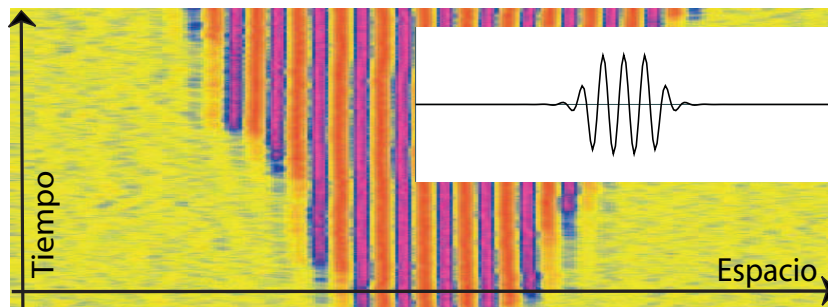


Fig. 4.9: Propagación de un patrón localizado inducida por el ruido. El recuadro es la condición inicial.

Parte III

CONCLUSIONES

Capítulo 5

CONCLUSIONES

5.1. Conclusiones del trabajo de tesis

El objetivo principal de este trabajo de tesis, titulado *Efectos robustos del ruido en sistemas extendidos* fue entender y caracterizar un nuevo fenómeno robusto del ruido en sistemas extendidos: la propagación de un frente estacionario que conecta un estado homogéneo estable con un estado periódico, también estable, en presencia de ruido aditivo. Para ello se usó un modelo prototipo para sistemas que desarrollan patrones llamando modelo de Swift-Hohenberg subcrítico, que describe en una región del espacio de parámetros la coexistencia entre un estado homogéneo y un estado periódico. Este modelo también puede desarrollar estructuras localizadas, tanto homogéneas como periódicas, que poseen una rica dinámica y que en presencia de ruido desaparecen o invaden todo el espacio.

A través de este trabajo se concluye que:

- ◇ Mediante una ecuación de amplitud adecuada, se ha encontrado una explicación para el fenómeno de bloqueo del frente estacionario entre un estado homogéneo estable y un estado periódico estable (*frente de Pomeau*). Se encontró la región de fijación tanto analítica, como numéricamente, para parámetros dados en el modelo de Swift-Hohenberg subcrítico.
- ◇ En presencia de ruido aditivo, el anterior frente estacionario, se propaga con una velocidad promedio bien definida. La explicación de este fenómeno se realiza mediante una ecuación de evolución para el corazón del frente: un potencial asimétrico periódico y ruido aditivo produce transiciones inducidas por ruido, convirtiendo fluctuaciones en movimiento dirigido. Esta explicación se puede generalizar a cualquier problema que presente el fenómeno de bloqueo en presencia de ruido aditivo, ya que las perturbaciones para avanzar o retroceder serán distintas siempre.
- ◇ La existencia, dinámica, propiedades de estabilidad y diagramas de bifurcación de estructuras localizadas en una ecuación prototipo fueron estudiadas, mediante la interacción de defectos. Las predicciones analíticas de la interacción y las simulaciones numéricas muestran gran acuerdo entre ellas.
- ◇ En presencia de ruido aditivo, las estructuras localizadas que se desarrollan entre un estado homogéneo estable y un estado periódico son inestables, es decir, el estado homogéneo invadirá al estado periódico, destruyendo las estructuras localizadas, o

las estructuras localizadas invadirán al estado homogéneo, desarrollando un patrón extendido en todo el espacio.

5.2. *Limitaciones y Perspectivas*

Principalmente, las limitaciones de este trabajo de tesis residen en que el cálculo de interacciones de defectos y de propagación de frentes es unidimensional, por lo que la dinámica reducida que explica la evolución de la interfaz es la dinámica de un punto, al que llamamos en el caso de frentes, corazón del frente. El cálculo de las soluciones de las ecuaciones de partida que usamos como base para los cálculos perturbativos ya es difícil, y se intentara realizar un cálculo similar en dos dimensiones, uno esperaría que para describir la dinámica de la interfaz, aún conociendo la solución inicial no perturbada, necesitaríamos conocer la evolución de una curva, lo que complica el cálculo y la comprensión del fenómeno. En algunos casos, cuando la simetría del problema lo permite, podemos encontrar una ecuación de evolución para un campo que describe la interfaz.

Debido a que el fenómeno de propagación de frentes estacionarios entre estados estables homogéneos y estados estables inhomogéneos en presencia de ruido aditivo, es robusto, podemos encontrar diversas ramificaciones de esta investigación. Dentro de las que presentan mayor interés podemos enumerar:

- Teóricamente, el cálculo de ecuaciones de amplitud para modelos en dos dimensiones que desarrollan patrones y los efectos de ruido aditivo cuando estructuras localizadas se desarrollan en ellos.
- Experimentalmente, el estudio del efecto del ruido (aditivo y multiplicativo) en sistemas fuera del equilibrio, en particular, en estructuras localizadas en fluidos newtonianos y medios granulares vibrados que experimentan la inestabilidad de Faraday.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. Landau and L. Lifschitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. V* (Pergamon Press, New York, 1987).
- [2] L. Landau and L. Lifschitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. VI* (Pergamon Press, New York, 1987).
- [3] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley and Sons, New York, 1987)
- [4] L. Landau and L. Lifschitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. VII* (Pergamon Press, New York, 1987).
- [5] Lord Rayleigh (J.W. Strutt), *Scientific Papers of Lord Rayleigh, Vol. I* (Cambridge Scientific Press, Cambridge, 1902).
- [6] M. Faraday, *Phis. Trans. Roy. Soc. London*, **52**, 299 (1831).
- [7] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 51 (1993).
- [8] W. Horstenke and R. Lefever, *Noise-induced transition* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [9] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
- [10] C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo and R. Toral, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3395 (1994); C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo, R. Toral and R. Kawai, *Phys. Rev. E* **55**, 4084 (1997); J. Garcia-Ojalvo et. al. *Phys. Rev. E* **54**, 6918 (1996).
- [11] J. Garcia-Ojalvo, A. Hernandez-Machado, and J.M. Sancho, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1542 (1993)
- [12] A. Becker and L. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 995 (1994).
- [13] J. Buceta, M. Ibañes, J.M. Sancho and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **67**, 021113 (2003).
- [14] M. G. Zimmermann, R. Toral, O. Piro, and M. San Miguel *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3612-3615 (2000).
- [15] L.Q. Zhou, X. Jia and Q. Ouyang, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 138301 (2002).
- [16] R.A. Fisher, *Ann. Eugenics* **7**, 355 (1937); A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskunov, *Bull. Univ. Moskou Ser. Int. Se. A* **1**, 1(1937)

-
- [17] O.T. Valls, and L.M. Lust, Phys. Rev. B **44**, 4326 (1991); J. Armero et. al., Phys. Rev. Lett. **76**, 3045 (1996); M. A. Santos and J.M. Sancho, Phys. Rev. E **59**, 98 (1999); Phys. Rev. E **64**, 016129 (2001). A. Rocco, U. Ebert, and W. van Saarloos, Phys. Rev. E **62**, R13 (2000).
- [18] J.Hale, H.Kocak, *Dynamics and Bifurcations* (Springer, Berlin, 1999).
- [19] S. Strogatz, *Nonlinear dynamics and Chaos* (West View Press, 2000).
- [20] A.F. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, (Dover, New York, 1927).
- [21] A. Fetter and J. Walecka, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua* (McGraw-Hill, 1980).
- [22] A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*(Dover, New York, 1980).
- [23] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, (John Wiley and Sons, New York, 1996).
- [24] A. Einstein, Ann. Phys (Leipzig) **17**, 549 (1905).
- [25] H.A. Kramers, Physica (Utrecht), **7**, 289 (1940).
- [26] N.G. van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry* (North Holland, Amsterdam, 1981).
- [27] P. Langevin, Comptes rendus acad. sci., **146**, 530 (1908).
- [28] R.L. Stratonovich, *Topics in theory of random noise, Vol. I* (Gordon and Breach, New York, 1963); R.L. Stratonovich, *Topics in theory of random noise, Vol. II* (Gordon and Breach, New York, 1967)
- [29] P. Hanggi, P. Talkner and M. Borkovec, Rev. Mod. Phys, **62**, 2, p.251 (1990).
- [30] S.Arrhenius, Z. Phys. Chem (Leipzig) **4**, 226 (1889).
- [31] Lord Rayleigh (J.W. Strutt), *Scientific Papers of Lord Rayleigh, Vol. III* (Cambridge Scientific Press, Cambridge, 1902, p. 473).
- [32] M. von Smoluchowski, Phys. Z, **16**, 321, (1915); **17**, 557, (1916).
- [33] E. Dynkin and A.A. Juschkewitz, *Satze und aufgaben uber Markoffsche prozesse* (Springer, Berlin, 1969).
- [34] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Non Equilibrium systems* (J.Wiley & sons, New York, 1977).
- [35] C. Riera, *Tesis*.
- [36] P.G. deGennes, *The Physics of Liquid Crystals* (Oxford University Press, New York, 1974).

-
- [37] H. Weyl, *The theory of groups and Quantum Mechanics* (Dover, New York, 1931).
- [38] D. Hilbert and R. Courant, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I (John Wiley and Sons, New York, 1962); D. Hilbert and R. Courant, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II (John Wiley and Sons, New York, 1962)
- [39] R.D. Benguria and M. C. Depassier, *Phys. Rev. E*, **66**, 026670 (2002).
- [40] K. Kawasaki, and T. Otha, *Physica A* 116, 573 (1982).
- [41] P. Couillet, C. Riera and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3069 (2002).
- [42] A.M. Turing, *Phil. Tran. Roy. Soc. B*, **237**, 37 (Londres, 1952).
- [43] P. Couillet, *Int. J. of Bif. and Ch.*, **12**, 2445 (2002).
- [44] M.G. Clerc, submitted to *Phys. Rev. Lett.*
- [45] M.G. Clerc, D. Escaff and V.M. Kenkre, submitted to *Phys. Rev. E*.
- [46] U. Bortolozzo, M.G. Clerc, C. Falcón, R. Rojas and S. Residori, submitted to *Phys. Rev. Lett.*
- [47] P.C. Hohenberg and H. Swift, *Phys. Rev. A*, **46**, 4773 (1992).
- [48] C. Elphick, E. Tirapegui, M.E. Brachet, P. Couillet and G. Iooss, *Physica D*, **29**, 95 (1987).
- [49] Y. Pomeau, *Physica D* **23**, 3 (1986).
- [50] D. Bensimon, B.I. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 5461 (1988).
- [51] M.G. Clerc, C. Falcon and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 148302 (2005).
- [52] M.G. Clerc, C. Falcon and E. Tirapegui, in preparation.
- [53] P. Couillet, R. Rojas, E. Tirapegui, C. Tresser, in preparation.
- [54] H. Sakaguchi and H. Brand, *Physica D* 97, 274 (1996).
- [55] M.G. Clerc and C. Falcon, *Physica A* (Amsterdam), to be published.

Parte IV

APÉNDICES

Apéndice A

PUBLICACIONES

1.- Additive noise induces Front propagation

M.G. Clerc, C. Falcon and E. Tirapegui, Phys. Rev. Lett. **94**, 148302 (2005).

Abstract: The effect of noise in a motionless front between a periodic spatial state and an homogeneous one is studied. Numerical simulations show that noise induces front propagation. From the subcritical Swift-Hohenberg equation with noise, we deduce an adequate equation for the envelope and the core of the front. The equation of the front's core is characterized by an asymmetrical periodic potential plus additive noise. The conversion of random fluctuations into direct motion of front core is responsible of the propagation. We obtain an analytical expression for the velocity of the front, which is in good agreement with numerical simulations.

2.- Localized patterns and hole solutions in one-dimension extended system

M.G. Clerc and C. Falcon, Physica A (Amsterdam), **356**, 48 (2005).

Abstract: The existence, stability properties, and bifurcation diagrams of localized patterns and hole solutions in one-dimensional extended systems is studied from the point of view of front interactions. An adequate envelope equation is derived from a prototype model that exhibits these particle-type solutions. This equation allow us to obtain an analytical expression for the front interaction, which is in good agreement with numerical simulations.

3.- Localized states in bistable pattern forming systems

U. Bortolozzo, M. G. Clerc, C. Falcon, S. Residori, and R. Rojas, submitted to Phys. Rev. Lett.

Abstract: An unified description of particle-like state, which is a large peak nucleating over a pattern, is presented. This particle-like state is a generic class of behavior appearing whenever a pattern forming system exhibits coexistence of two spatially periodic states. At the onset of the spatial bifurcation a forced amplitude equations is derived for the critical modes. We also put in evidence this robust phenomenon in different experiments, like a perimetrically driven Newtonian fluid and a nematic liquid

crystal valve with optical feedback. The experimental observations are in a good qualitative agreement with the numerical results.

4.-Front propagation sustained by additive noise

M.G. Clerc, C. Falcon and E. Tirapegui, submitted to Phys. Rev. E.

Abstract:The effect of noise in a motionless front between a periodic spatial state and an homogeneous one is studied. Numerical simulations show that noise induces front propagation. From the subcritical Swift-Hohenberg equation with noise, we deduce an adequate equation for the envelope and the core of the front. The equation of the front's core is characterized by an asymmetrical periodic potential plus additive noise. The conversion of random fluctuations into direct motion of core of the front is responsible of the propagation. We obtain an analytical expression for the velocity of the front, which is in good agreement with numerical simulations.

Additive Noise Induces Front Propagation

M. G. Clerc, C. Falcon, and E. Tirapegui

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile
(Received 16 August 2004; published 14 April 2005)

The effect of additive noise on a static front that connects a stable homogeneous state with an also stable but spatially periodic state is studied. Numerical simulations show that noise induces front propagation. The conversion of random fluctuations into direct motion of the front's core is responsible of the propagation; noise prefers to create or remove a bump, because the necessary perturbations to nucleate or destroy a bump are different. From a prototype model with noise, we deduce an adequate equation for the front's core. An analytical expression for the front velocity is deduced, which is in good agreement with numerical simulations.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.148302

PACS numbers: 82.40.Ck, 05.40.Ca

The description of macroscopic matter, i.e., matter composed of a large number of microscopic constituents, is usually done using a small number of coarse-grained or macroscopic variables. When spatial inhomogeneities are considered these variables are spatiotemporal fields whose evolution is determined by deterministic partial differential equations (PDE). This reduction is possible due to a separation of time scales, which allows a description in terms of the slowly varying macroscopic variables, which are in fact fluctuating variables due to the elimination of a large number of fast variables whose effect can be modeled including suitable stochastic terms (noise) in the PDE. The influence of noise in nonlinear systems has been the subject of intense experimental and theoretical investigations [1–6]. Far from being merely a perturbation to the idealized deterministic evolution or an undesirable source of randomness and disorganization, noise can induce specific and even counterintuitive dynamical behavior. The most well-known examples in zero dimensional systems are noise-induced transition [1] and stochastic resonance [2]. More recently, examples in a spatial extended system are noise-induced phase transition [3], noise-induced patterns [4], stochastic spatiotemporal intermittency [5], and noise-induced traveling waves [6]. Here, we will focus on the effect of additive noise in front propagation. The concept of front propagation emerged in the field of populations dynamics [7], and the interest in these types of problems has been growing steadily in chemistry, physics, and mathematics. In physics, front propagation plays a central role in a large variety of situations, ranging from reaction diffusion models to general pattern forming systems (see the review in [8] and references therein). The influence of multiplicative noise in a globally stable state invading an unstable or metastable state, a *front solution*, has been extensively studied, particularly concerning the issue of velocity selection [9].

The aim of this Letter is to study the effect of noise in a motionless front that connects a stable homogeneous state with an also stable but spatially periodic state. Numerical simulation of this type of front shows that noise induces

front propagation, that is, one state invades the other one. From a prototype model that exhibits this type of front, the subcritical Swift-Hohenberg equation with additive noise, we deduce an equation for the front's core, which is characterized by a periodic asymmetrical potential plus additive noise. The conversion of random fluctuations into directed motion of the front's core is responsible for front propagation. We obtain an analytical expression for the velocity of the front, which is proportional to Kramer's rate, in the weak noise intensity limit. This expression is in good agreement with numerical simulations.

A front that connects two stable homogeneous states in a variational system with a known free energy, permanently propagates from the state with higher free energy to the state with lowest free energy [8]. However, the front is static when both states are energetically equal, i.e., in the *Maxwell point*. This picture changes in the case of a front

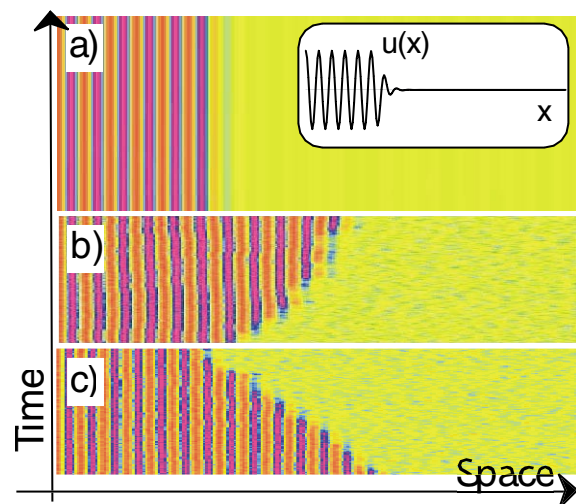


FIG. 1 (color online). Spatiotemporal evolution of Eq. (1), with time running up. The gray scale is proportional to field u . The inset figure is the initial condition. The parameters have been chosen $\varepsilon = -0.16$, $\nu = 1.0$, $q = 0.7$. (a) $\eta = 0.0$, (b) $\eta = 0.4$, and (c) $\varepsilon = -0.175$, $\eta = 0.5$.

that connects a stable homogeneous state with an also stable but spatially periodic one. This front exhibits a *locking phenomena* in a region of parameters known as the pinning range [10], in which the front does not move. When additive white noise is taken into account, one may expect random fluctuations of the interface between the two states (front's core). However, numerical simulations in a one dimensional extended system show that the front propagates from one state to the other with a stochastic velocity, as is illustrated in Fig. 1. The numerical method used in the simulation is the Runge-Kutta algorithm with time step equal 0.01, and spatial mesh 1/400. Depending on the region of parameters, the front can propagate to the periodic spatial state or to the homogeneous one.

In order to understand the mechanism through which noise induces propagation, we consider a prototype model that exhibits this type of front (subcritical Swift-Hohenberg equation with noise [8])

$$\partial_t u = \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2)^2 u + \sqrt{\eta} \zeta(x, t), \quad (1)$$

where $u(x, t)$ is an order parameter, $\varepsilon - q^4$ is the bifurcation parameter, q is the wave number of periodic spatial solutions, ν the control parameter of the type of bifurcation (supercritical or subcritical), $\zeta(x, t)$ is a Gaussian white noise with zero mean value and correlation $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$, and η represents the intensity of the noise. The model (1) describes the confluence of a stationary and an spatial subcritical bifurcation, when the parameters scale as $u \sim \varepsilon^{1/4}$, $\nu \sim \varepsilon^{1/2}$, $q \sim \varepsilon^{1/4}$, $\partial_t \sim \varepsilon$, and $\partial_x \sim \varepsilon^{1/4}$ ($\varepsilon \ll 1$). This bifurcation is of codimension three. The above model is often employed in the description of patterns observed in Rayleigh-Bénard convection [8].

For small and negative ν and $9\nu^2/40 < \varepsilon < 0$, the system exhibits coexistence between a stable homogeneous state $u = 0$ and a periodic spatial one $u = \sqrt{\nu}(\sqrt{2(1 + \sqrt{1 + 40\varepsilon/9\nu})} \cos(qx)) + o(\nu^{5/2})$. In this parameter region, one finds a front between these two states. A front between a homogeneous and a spatial oscillatory state can be described by the ansatz

$$u = \sqrt{\frac{2\nu}{10}} \varepsilon^{1/4} \left\{ A \left(y = \frac{3\sqrt{|\varepsilon|}}{2\sqrt{10}q} x, \right. \right. \\ \left. \left. \tau = \frac{9\nu^2 |\varepsilon|}{10} t \right) e^{iqx} + w_1(x, y, \tau) \right\} + \text{c.c.}, \quad (2)$$

where $A(y, \tau)$ is the envelope that describes the front solution, $w_1(x, y, \tau)$ is a small correction function of order ε , and $\{y, \tau\}$ are slow variables. In this ansatz, we consider q is order one or larger than the other parameters. Introducing the above ansatz in Eq. (1) and linearizing in w_1 , we find the following solvability condition

$$\begin{aligned} \partial_\tau A = & \varepsilon A + |A|^2 A - |A|^4 A + \partial_{yy} A \\ & + \left(\frac{A^3}{9\nu} - \frac{A^3 |A|^2}{2} \right) e^{2iqy/(a\sqrt{|\varepsilon|})} - \frac{A^5}{10} e^{2iqy/(a\sqrt{|\varepsilon|})} \\ & + \frac{\sqrt{\eta} b}{|\varepsilon|^2} e^{2iqy/(a\sqrt{|\varepsilon|})} \zeta(y, \tau), \end{aligned} \quad (3)$$

where $\varepsilon \equiv 10\varepsilon/9\nu^2$, $a \equiv 3\nu/2\sqrt{10}q$, and $b \equiv 10^{9/4}/81\nu^4$. The deterministic terms proportional to the exponential are nonresonant, that is, one can eliminate these terms by an asymptotic change of variable. Furthermore, they have rapidly varying oscillations in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$. Hence, one usually neglects these terms. When one considers only the deterministic resonant terms, the first line of (3), it is straightforward to show that the system exhibits a front solution between two homogeneous states, 0 and $\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})/2}$, when $\varepsilon < 0$. This front propagates from the stable state (lowest free energy) to the metastable one, and it is static when the Maxwell point is reached $\varepsilon_M = -3/16$, and it has the form

$$A_\pm(y) = \sqrt{\frac{3/4}{1 + e^{\pm\sqrt{3/4}(y-y_0)}}} e^{i\theta},$$

where y_0 is the position of the front's core, and θ is an arbitrary phase. In the neighborhood of ε_M the front propagates by a velocity given approximately by $\Delta = 3d/8(\varepsilon - \varepsilon_M)$, where $d = \int (\partial_y A_+)^2 dy$. However, as pointed out by Pomeau [10], static fronts between a homogeneous and spatial periodic state may actually persist in a finite neighborhood of the Maxwell point, the *pinning range*, and it was conjectured that this phenomena could be due to nonadiabatic effects produced by nonresonant terms. This was shown in a particular case in [11] and has recently been discussed in a general frame in [12], with the conclusion that the locking phenomena results from the interaction (contained in the nonresonant terms) of the large scale envelope $A(y, \tau)$ with the small scale underlying the spatial periodic solution [11].

To describe the dynamics exhibited by (1) and the locking phenomena, we must then consider the nonresonant terms in the envelope equation (3). We consider all these terms as perturbations because they have rapidly varying oscillations. Close to the Maxwell point, we use the ansatz

$$A(y, \tau) = (A_+(y - y_0(\tau)) + \delta\rho) e^{i\delta\Theta}$$

where δ is a small parameter of order $(\varepsilon - \varepsilon_M)$. Introducing the above ansatz in Eq. (3) and linearizing in $\{\rho, \Theta\}$ we obtain the following solvability condition for the front's core

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 = & -\frac{\partial U(y_0)}{\partial y_0} + \frac{ab}{|\varepsilon|^2} \sqrt{\frac{\eta}{2d}} \zeta(\tau) \\ = & \Delta + \Gamma \cos\left(\frac{2q}{d\sqrt{|\varepsilon|}} y_0 - \varphi\right) + \frac{ab}{|\varepsilon|^2} \sqrt{\frac{\eta}{2d}} \zeta(\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

where $\Gamma \equiv \sqrt{k_1 + k_2} e^{-\sqrt{4/3}\pi q/d\sqrt{|\epsilon|}}$, $\tan\varphi = k_1/k_2$, $k_1 \equiv -9d\pi/2048(8q/a\sqrt{3|\epsilon|})^3 - (8 + d\pi/32\nu)(8q/a\sqrt{3|\epsilon|}) + \sqrt{3}d^2\beta^2q^3\eta\pi/2^3a^3|\epsilon|^{11/2}$, and $k_2 \equiv (27/1024 - 1/128\nu)d\pi(8q/a\sqrt{3|\epsilon|})^2 - 3d^2\beta^2q^2\eta\pi/2^6a^2|\epsilon|^5$. $U(y_0)$ is the potential which characterizes the dynamics of the front's core and $\zeta(\tau)$ is a Gaussian white noise, that is, with zero mean value and correlation $\langle\zeta(\tau)\zeta(\tau')\rangle = \delta(\tau - \tau')$.

The locking phenomena and the pinning range are simple to understand from Eq. (4); the locking phenomena is exhibited when the deterministic evolution of y_0 has stable equilibrium points, that is, the front's core has stable equilibrium positions (cf., Fig. 2). The pinning range is the parameter region where the system has equilibrium points. If $\Delta < 0$ and $|\Delta| > |\Gamma|$, the model (4) does not have equilibrium points. The front's core moves forward and its acceleration increases and decreases periodically, hence the spatial periodic state invades the homogeneous one with an oscillatory velocity. In Fig. 3, the thick and the dashed curves are the average velocity with and without noise, respectively. Increasing Δ (ϵ), the system exhibits a simultaneous infinite saddle-node bifurcations for $|\Delta| = |\Delta_-| \equiv |\Gamma|$. For $\Delta > \Delta_-$ and $|\Delta| < |\Gamma|$, the system has an infinite number of stable equilibria. Each equilibrium point represents a static front with different bumps (cf., Fig. 2). Increasing further Δ , all critical points disappear simultaneously by saddle node when $\Delta > 0$ and $\Delta = \Delta_+ \equiv |\Gamma|$. For $\Delta > \Delta_+$ the front's core moves backward, hence the homogeneous state invades the spatial periodic one with an oscillatory velocity (cf., Fig. 3). Therefore, for $\Delta_- < \Delta < \Delta_+$ (pinning range) the system exhibits the locking phenomena.

We now consider the effect of noise in (4). Because of the asymmetry of the potential and the lack of a global stationary state, the system continuously converts the random fluctuations in directed motion of the front, i.e., the noise induces front propagation. This type of phenomena is well known as a Brownian motor [13]. One can easily understand the origin of this phenomena: if initially y_0 is

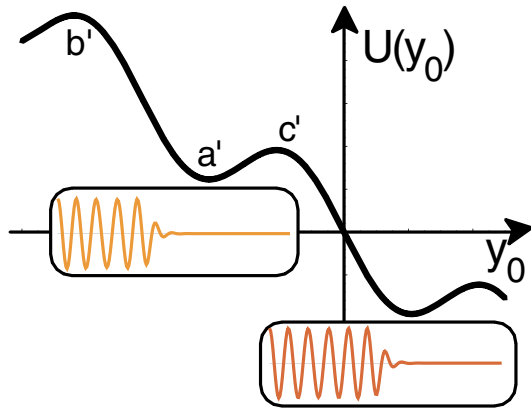


FIG. 2 (color online). Schematic representation of the potential $U(y_0)$ of Eq. (4). $\{a', b', c'\}$ are fixed points. The inset figures represent two successive equilibria states of Eq. (1).

inside the basin of attraction Ω of a fixed point, the front just fluctuates around the fixed point during a time of the order of the mean first passage time to $\partial\Omega$, the border of Ω . After this time the system makes a transition to the basin of attraction of the nearest stable fixed point separated from the first one by the lowest energy barrier. This behavior is repeated in this new basin of attraction and the final result is a directed motion of the front. Since the energy threshold for jumping to the right or to the left is different, the probability of jumping to the side with the highest energy threshold will be exponentially small with respect to the probability of jumping to the other side and this determines the direction of motion of the front. Hence, fluctuations are privilege to the creation or removal of a bump, simply because nucleating or destroying a bump is different.

From the above analysis, we can estimate the mean velocity of the front's core

$$\langle v \rangle = \frac{\pi\sqrt{|\epsilon|}}{qa} \left(\frac{1}{\tau_+} - \frac{1}{\tau_-} \right),$$

where $\pi\sqrt{|\epsilon|}/qa$ is the distance between the two successive fixed points and $\{\tau_-, \tau_+\}$ are the escape times to move to the basins of attraction of the left or right fixed point, respectively. They have the expression

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau_+} - \frac{1}{\tau_-} \right)^{-1} &= \frac{2}{\theta} \int_{c'}^{b'} \int_{c'}^y e^{2(U[y]-U[z])/ \theta} dy dz \\ &\quad - \frac{2}{\theta} \int_{c'}^{a'} \int_{c'}^y e^{2(U[y]-U[z])/ \theta} \\ &\quad \times dy dz \left[\frac{\int_{c'}^{a'} e^{2U[y]/ \theta} dy}{\int_{c'}^{b'} e^{2U[y]/ \theta} dy} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

where a' , b' , and c' are a minimum and two successive maximums of the potential $U(y_0)$ (see Fig. 2), respectively, and $\theta \equiv ab/|\epsilon|^2\sqrt{\eta/2d}$. In the limit of weak noise

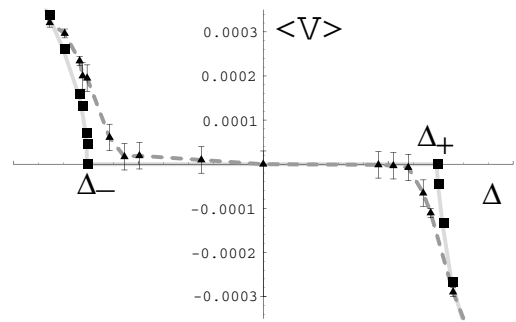


FIG. 3. Mean velocity of the front with and without noise. The thick and the dashed curves are the average velocity of the front of Eq. (1) for $\epsilon = -0.16$, $\nu = 1.0$, $q = 0.7$, $\eta = 0.0$, and $\eta = 0.01$, respectively.

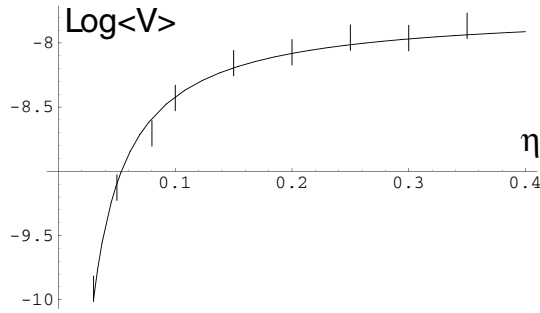


FIG. 4. Mean velocity of the front. The continuous line is the analytical formula of mean velocity and the solid dots are the numerical measuring of the mean velocity of the front of Eq. (1).

$$\langle v \rangle = \frac{2\sqrt{|\epsilon|}}{qa\sqrt{|\partial_{yy}U(a')|\partial_{yy}U(c')|}} e^{-[U(c')-U(a')]/\theta} \times \left(1 - \sqrt{\frac{|\partial_{yy}U(c')|}{|\partial_{yy}U(b')|}} e^{-[U(b')-U(c')]/\theta} \right).$$

From the above expression one can find that in this limit the velocity is proportional to Kramer's rate. Numerically, we have measured the front velocity for different values of the noise intensity and we obtain a good agreement with the theoretical prediction, as it is shown in Fig. 4. It is important to remark that $U(y_0)$ is function of the noise intensity (η). For finite noise intensity this dependence is dominant in the terms k_1 and k_2 , in the limit of $\epsilon \rightarrow 0$. Hence for finite noise intensity one only needs to consider the terms coming from the noise to explain the locking phenomena and the induced front propagation.

To understand the mechanism of noise-induced front propagation we have considered the subcritical Swift-Hohenberg equation. This model allows us to obtain analytical expressions for the mean velocity of the front. For an arbitrary model it is thorny to obtain explicit formulas for the front velocity, since in general we do not have access to explicit expressions of spatial periodic solutions and front solutions. Given a system that exhibits locking phenomena, close to a spatial bifurcation, one expects to find a similar envelope equation to (3) [12]. We can conclude then that the noise induces front propagation since the noise prefers to create or remove a bump, simply because the necessary perturbations to nucleate or destroy a bump are different.

The existence, stability properties, and bifurcation diagrams of localized patterns in the pinning range in one dimensional extended systems have recently been studied [14]. In one spatial dimension, one can understand the localized pattern as the equilibrium points of the front interaction [15]. When we consider the effects of noise on these solutions, we expect, due to our previous discussion, propagation of the interface of these localized patterns. From the above results, one realizes that the

localized patterns are unstable in nature, that is, in the presence of noise. The velocity of propagation of the interfaces and fronts are proportional to Kramer's rate. Therefore, experimentally, one can observe these localized patterns, when noise is weak enough, for long intervals of time, as metastable states.

The simulation software DIMX developed by P. Coulet and collaborators at the laboratory INLN in France has been used for all the numerical simulations. M. G. C. and E. T. acknowledge the support of FONDECYT Projects 1051117 and 1020374, FONDAP Grant No. 11980002, and ECOS-CONICYT collaboration programs.

- [1] W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-Induced Transition* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [2] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
- [3] C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo, and R. Toral, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3395 (1994); C. Van den Broeck *et al.*, *Phys. Rev. E* **55**, 4084 (1997); R. Muller *et al.*, *Phys. Rev. E* **56**, 2658 (1997); J. Garcia-Ojalvo *et al.*, *Phys. Rev. E* **54**, 6918 (1996); A. A. Zaikin, J. Garcia-Ojalvo, and L. Schimansky-Geier, *Phys. Rev. E* **60**, R6275 (1999); M. Ibañez *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 020601 (2001).
- [4] J. Garcia-Ojalvo, A. Hernandez-Machado, and J. M. Sancho, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1542 (1993); A. Becker and L. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 955 (1994); A. A. Zaikin and L. Schimansky-Geier, *Phys. Rev. E* **58**, 4355 (1998); J. Buceta *et al.*, *Phys. Rev. E* **67**, 021113 (2003).
- [5] M. G. Zimmermann, R. Toral, O. Piro, and M. San Miguel, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3612 (2000).
- [6] L. Q. Zhou, X. Jia, and Q. Ouyang, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 138301 (2002).
- [7] R. A. Fisher, *Annals of Eugenics* **7**, 355 (1937); A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskunov, *Bull. Univ. Moskou Ser. Int. Sec. A* **7**, 335 (1937).
- [8] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [9] O. T. Valls and L. M. Lust, *Phys. Rev. B* **44**, 4326 (1991); J. Armero *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3045 (1996); M. Löcher, D. Cigna, and E. R. Hunt, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5212 (1998); M. A. Santos and J. M. Sancho, *Phys. Rev. E* **59**, 98 (1999); *Phys. Rev. E* **64**, 016129 (2001); A. Rocco, U. Ebert, and W. van Saarloos, *Phys. Rev. E* **62**, R13 (2000).
- [10] Y. Pomeau, *Physica D* (Amsterdam) **23**, 3 (1986).
- [11] D. Bensimon, B. I. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. A* **38**, 5461 (1988).
- [12] P. Coulet, R. Rojas, E. Tirapegui, and C. Tresser (to be published).
- [13] P. Reimann and P. Hanggi, *Appl. Phys. A* **75**, 169 (2002).
- [14] P. Coulet, C. Riera, and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3069 (2000).
- [15] M. G. Clerc and C. Falcon, nlin.PS/0502041 [*Physica A* (Amsterdam) (to be published)].

Localized patterns and hole solutions in one-dimensional extended systems

Marcel G. Clerc*, Claudio Falcon

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile

Available online 13 June 2005

Abstract

The existence, stability properties, dynamical evolution and bifurcation diagram of localized patterns and hole solutions in one-dimensional extended systems are studied from the point of view of front interactions. An adequate envelope equation is derived from a prototype model that exhibits these particle-like solutions. This equation allows us to obtain an analytical expression for the front interaction, which is in good agreement with numerical simulations.
© 2005 Published by Elsevier B.V.

PACS: 47.54.+r; 45.70.Qj

Keywords: Fronts; Patterns; Localized structures

Non-equilibrium processes often lead by nature to the formation of spatial periodic structures developed from a homogeneous state through the spontaneous breaking of symmetries present in the system [1,2]. In the last decade localized patterns or localized structures have been observed in different experiments: liquid crystals [3], gas discharge systems [4], chemical reactions [5], fluids [6], granular media [7], and nonlinear optics [8,9]. One can understand these localized patterns as patterns extended only over a small portion of an extended system. From the point of view of dynamics, the localized patterns in one-dimensional spatial systems are

*Corresponding author.

E-mail address: marcel@dfi.uchile.cl (M.G. Clerc).

homoclinic connections for the stationary dynamical system [10]. Recently, a geometrical interpretation of the existence, stability properties, and bifurcation diagram of localized patterns in one-dimensional extended systems has been given [11].

The aim of this paper is to describe how one-dimensional localized patterns and hole solutions arise from front interactions. From a prototype model that exhibits localized patterns and hole solutions, the subcritical Swift–Hohenberg equation, we deduce an adequate equation for the envelope of these particle-like solutions. This model has a front solution that connects a stable homogeneous state with a stable spatially periodic one. Due to the oscillatory nature of the front interaction, which alternates between attractive and repulsive, we can infer the existence, stability properties, dynamical evolution and bifurcation diagram of localized patterns and hole solutions. Hence, we reobtain the bifurcation diagram of localized patterns and hole solution deduced from the horseshoe behavior of the attractive and repulsive manifold of ordinary differential equations [11].

Let us consider a prototype model that exhibits localized patterns and hole solutions in a one-dimensional extended system, the subcritical Swift–Hohenberg equation [12] is

$$\partial_t u = \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2)u, \quad (1)$$

where $u(x, t)$ is an order parameter, $\varepsilon - q^4$ is the bifurcation parameter, q is the wave-number of periodic spatial solutions, and ν is the control parameter of the type of bifurcation, supercritical or subcritical. This model describes the confluence of a stationary and a spatial subcritical bifurcation, when the parameters scale as $u \sim \varepsilon^{1/4}$, $\nu \sim \varepsilon^{1/2}$, $q \sim \varepsilon^{1/4}$, $\partial_t \sim \varepsilon$ and $\partial_x \sim \varepsilon^{1/4}$ ($\varepsilon \ll 1$). It is often employed in the description of patterns observed in Rayleigh–Benard convection and pattern-forming systems [2]. In Fig. 1 we show typical localized patterns, hole solutions, and motionless front solutions obtained from this model. For small and negative ν , and $9\nu^2/40 < \varepsilon < 0$, the system exhibits coexistence between a stable homogeneous state $u(x) = 0$ and a periodic spatial one $u(x) = \sqrt{\nu}(\sqrt{2(1 + \sqrt{1 + 40\varepsilon/9\nu^2})} \cos(qx)) + o(\nu^{5/2})$. In this parameter region, one finds a front between these two stable states (cf. Fig. 1). In order to describe the front, localized patterns and hole solutions, we introduce the ansatz

$$u = \sqrt{\frac{2\nu}{10}} \varepsilon^{1/4} \left\{ A \left(y = \frac{3\sqrt{|\varepsilon|}}{2\sqrt{10q}} x, \tau = \frac{9\nu^2|\varepsilon|}{10} t \right) + w_1(x, y, \tau) \right\} e^{iqx} + c.c., \quad (2)$$

where $A(y, \tau)$ is the envelope of the front solution, $w_1(x, y, \tau)$ is a small correction function of order ε , and $\{y, \tau\}$ are slow variables. Note that in this ansatz we consider that q is order one, or larger than the other parameters. Introducing the above ansatz in Eq. (1) and linearizing in w_1 , we find the following solvability condition:

$$\partial_\tau A = \varepsilon A + |A|^2 A - |A|^4 A + \partial_{yy} A + \left(\frac{A^3}{9\nu} - \frac{A^3 |A|^2}{2} \right) e^{\frac{2iqy}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} - \frac{A^5}{10} e^{\frac{4iqy}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}}, \quad (3)$$

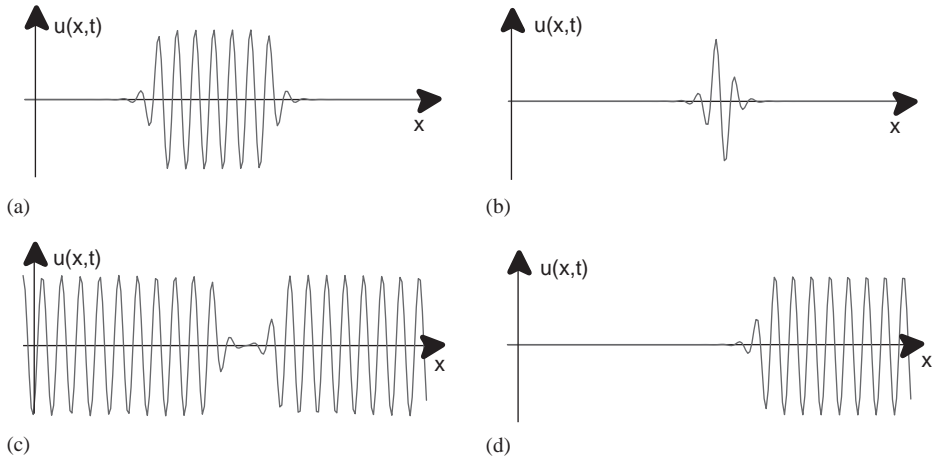


Fig. 1. Particle-type solutions appearing in the subcritical Swift–Hohenberg equation. The parameters have been chosen as $\varepsilon = -0.16$, $\nu = 1.00$, and $q = 0.70$. (a) Localized pattern, (b) shortest localized pattern, (c) hole solution and (d) front solution.

where $\varepsilon \equiv 10\varepsilon/9\nu^2$, and $a \equiv 3\nu/2\sqrt{10}q$. The terms proportional to the exponential are non-resonant, that is, one can eliminate these terms by an asymptotic change of variables. Furthermore, they have rapidly varying oscillations in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$. Hence, one usually neglects these terms. Note that the above envelope equation is a universal model, close to a spatial bifurcation, of a system that exhibits coexistence between a homogeneous state and a spatially periodic one. In general, one can use an ansatz similar to (2) and noting that the envelope satisfies independently the symmetries $\{x \rightarrow -x, A \rightarrow \bar{A}\}$ and $\{x \rightarrow x + x_0, A \rightarrow Ae^{iqx_0}\}$ one derives Eq. (3).

When one considers only the resonant terms, that is, when all spatial-forcing terms are neglected, it is straightforward to show that the system has a front solution between two homogeneous states, 0 and $\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})/2}$, when $-1/4 < \varepsilon < 0$. This front propagates from the global stable (global minimum) to a metastable one (local minimum). At the Maxwell point, where the equilibrium states have the same energy, the front is motionless. This point is reached at $\varepsilon_M = -3/16$, where the front solution has the form

$$a_{\pm}(y) = \sqrt{\frac{3/4}{1 + e^{\pm\sqrt{3/4}(y-y_0)}}} e^{i\theta},$$

where y_0 is the front’s core position, and θ is an arbitrary phase.

To describe a localized pattern exhibited by (1) as the interaction of two fronts, we must then consider the non-resonant terms in the envelope equation (3). We consider all these terms as perturbations because they have rapidly varying oscillations. Close

to the Maxwell point, we use the ansatz

$$A_{LP}(y, \tau) = \left[a_-(y - y_1(\tau)) + a_+(y - y_2(\tau)) - \sqrt{\frac{3}{4}} + \rho(y_1, y_2, y, \tau) \right] e^{i\theta(y_1, y_2, y, \tau)},$$

where $\{\rho, \theta\}$ are small correction functions, which are of order $\delta\varepsilon \equiv (\varepsilon - \varepsilon_M)$ and $y_2 > y_1$. Introducing the above ansatz in Eq. (3), linearizing in $\{\rho, \theta\}$ and after straightforward calculations, we obtain the following solvability condition for the distance between the fronts:

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = f(\Delta) \equiv -\alpha\Delta \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\Delta\right) + \beta \cos(2q\Delta/\sqrt{\varepsilon}) + 2\delta\varepsilon, \tag{4}$$

where $\Delta \equiv y_2 - y_1$, $\alpha = 27\sqrt{3}/64$ and $\beta = 64\sqrt{3}q^2 \exp(-q4\pi/\sqrt{\varepsilon})/3\varepsilon$. In Fig. 2, we display the interaction between two fronts. It is important to notice that in one-dimensional extended systems, the dependence of the front interaction on the front distance (Δ) is purely exponential [2]. In the present case, the linear and periodic dependence on Δ is a consequence of the interaction (contained in the non-resonant terms) of the large scale with the small scale of the underlying spatially periodic solution. The system has several equilibria, $f(\Delta^*) = 0$, that are stable if $f'(\Delta^*) < 0$. Thus, the existence and stability of localized patterns are given by the oscillatory nature of the front interaction. As is illustrated in Fig. 2, each region of attractive and repulsive interaction is separated by localized patterns. It is also important to notice that the larger equilibrium (Δ^*) represents localized patterns with a larger number of bumps.

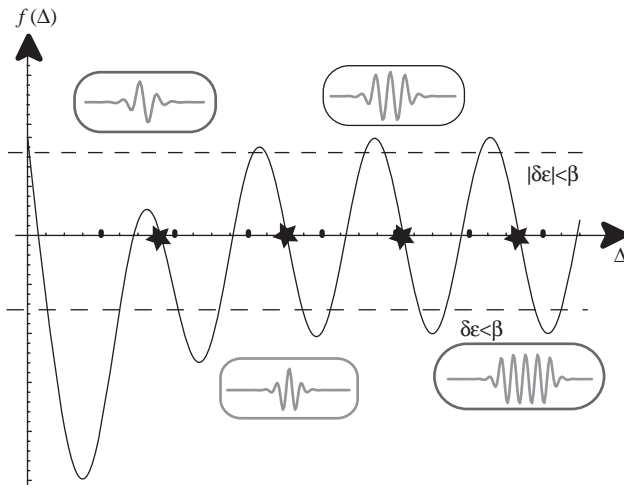


Fig. 2. Oscillatory interaction force $f(\Delta)$. The inset figures show the stable localized patterns observed at the Maxwell point. The lengths of these localized patterns are represented by the stars. The dashed lines represent the effective abscissas that determine the size of localized patterns when ε is changed.

In order to understand the bifurcation diagram of localized patterns, we consider the effect of changing the bifurcation parameter ε . Modifying ε is equivalent to moving the abscissa on the graph of front interaction (cf. Fig. 2). First, we consider the case $|\delta\varepsilon| > \beta$ and $\delta\varepsilon < 0$; the interaction is always attractive, that is, there is no equilibrium. Hence, if one takes into account a front that connects the homogeneous state with the spatially periodic state, then the spatially periodic state invades the homogeneous one. On increasing ε , one finds the first equilibrium point $\Delta = \infty$ for $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_- \equiv \beta$ and $\delta\varepsilon < 0$. Here, the system has a motionless front between the spatially periodic state and the homogeneous one. This front remains stationary until $|\delta\varepsilon| \leq \beta$; therefore, this front is motionless in a parameter range. This phenomenon is well-known as the *Locking phenomenon* and the interval $|\delta\varepsilon| \leq \beta$ is the denominated pinning range [13]. For $\delta\varepsilon > \beta$, the front propagates from the spatially periodic state to the homogeneous one. In Fig. 3, the thick solid line shows the velocity of front propagation as a function of the bifurcation parameter.

Increasing $\delta\varepsilon$ from $\delta\varepsilon_-$, we observe that the equilibria, that is, localized patterns, appear by successive saddle-node bifurcations each time with a length smaller than the previous one, i.e., the localized patterns appear by pairs, one stable and another unstable, and each time with a smaller number of bumps. This sequence of bifurcations is illustrated in Fig. 3 by the points c_i^a . For small, $\delta\varepsilon$ and close to the Maxwell point, the system has an infinite number of localized patterns with all the possible number of bumps. The lengths of the localized patterns are roughly multiples of that of the shortest localized state (one bump). In contrast, for $|\delta\varepsilon| > \beta$, the localized patterns disappear by saddle-node bifurcations and with increasing $\delta\varepsilon$ the larger localized patterns disappear one after the other. Hence, the shortest localized state is the last to disappear. In Fig. 3 the sequences of these bifurcation are represented by the points c_i^d .

Model (1) has different particle-like solution fronts, localized patterns and holes. These solutions are displayed in Fig. 1. From the front interaction the hole solutions

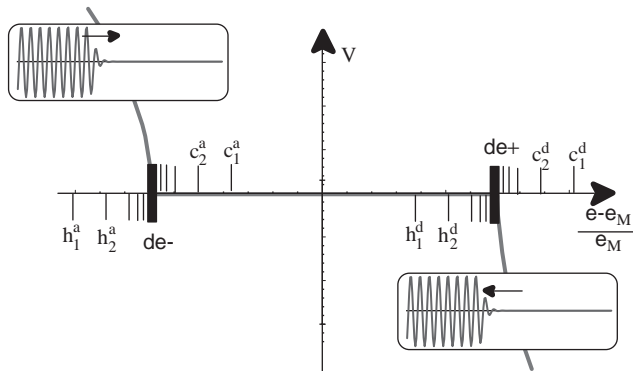


Fig. 3. Speed of the front and bifurcation diagram of the localized patterns and hole solutions as a function of the bifurcation parameter. The thick solid line indicates the front velocity. c_i^a and c_i^d (h_i^a and h_i^d) represent the bifurcation points where the localized patterns with (hole solutions without) i -bumps appear and disappear, respectively.

can be understood as the *complementary of localized patterns*, because these solutions can be described in terms of the front as

$$A_{hole}(y, \tau) = (a_+(y - y_2(\tau)) + a_-(y - y_2(\tau)) - \rho(y_1, y_2, y, \tau))e^{i\theta(y_1, y_2, y, \tau)},$$

where this solution asymptotically converges to a spatially periodic state. We obtain the same expression for interaction (4) by replacing α by $-\alpha$. Therefore, for these solutions, on increasing ε we obtain a bifurcation diagram similar to that of localized patterns but inverted, that is, the first hole appearing and disappearing by saddle-node bifurcation is the shortest one. Successively, the holes with larger length appear one after the other. Then, the solutions with shorter length disappear sequentially one after the other. In Fig. 3 this sequence of bifurcations is indicated by the points $\{h_i^a, h_i^d\}$.

It is important to remark that the bifurcation diagram shown in Fig. 3 has been deduced from geometrical arguments based on the horseshoe behavior of the attractive and repulsive manifolds of an ordinary differential equation [11]. Adding to the previous results, the front interaction also allows us to predict the dynamical evolution of localized structures. In the pinning range, the front solution is motionless. Recently, it has been shown that additive white noise induces front propagation close to the pinning range [14]. The mean velocity of the front is zero only in the Maxwell point, that is, at the Maxwell point the front core describes a Brownian motion.

In conclusion, we have shown on the basis of the front interactions the existence, stability properties, dynamical evolution and bifurcation diagram of localized patterns and hole solutions in one-dimensional extended systems.

The authors would like to thank S. Residori, R. Rojas, and E. Tirapegui for fruitful discussions. The simulation software *DimX* developed by P. Coulet and collaborators at the laboratory INLN in France has been used for all the numerical simulations. The authors acknowledge the support of FONDECYT project 1051117, FONDAP grant 11980002, and the ECOS-CONICYT collaboration program.

References

- [1] G. Nicolis, I. Prigogine, *Self-organization in Non Equilibrium Systems*, Wiley, New York, 1977.
- [2] M. Cross, P. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* 65 (1993) 851.
- [3] S. Pirkel, P. Ribiere, P. Oswald, *Liq. Cryst.* 13 (1993) 413.
- [4] Y.A. Astrov, Y.A. Logvin, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 2983.
- [5] K.J. Lee, W.D. McCormick, Q. Ouyang, H. Swinney, *Science* 261 (1993) 192.
- [6] O. Lioubashevski, Y. Hamiel, A. Agnon, Z. Reches, J. Fineberg, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 3190.
- [7] P.B. Umbanhowar, F. Melo, H. Swinney, *Nature* 382 (1996) 793.
- [8] F.T. Arecchi, S. Boccaletti, P.L. Ramazza, *Phys. Rep.* 318 (1999) 1.
- [9] B. Schapers, M. Feldmann, T. Ackemann, W. Lange, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 748.
- [10] W. van Saarloos, P.C. Hohenberg, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 749.
- [11] P. Coulet, C. Riera, C. Tresser, *Rev. Lett.* 84 (2000) 3069.
- [12] H. Sakaguchi, H. Brand, *Physica D* 97 (1996) 274.
- [13] Y. Pomeau, *Physica D* 23 (1986) 3.
- [14] M.G. Clerc, C. Falcon, E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* submitted for publication.

Localized states in bistable pattern forming systems

U. Bortolozzo^{1,2}, M. G. Clerc³, C. Falcon³, S. Residori¹, and R. Rojas¹

¹*Institut Non Linéaire de Nice, UMR 6618 CNRS-UNSA,
1361Route des Lucioles, F-06560 Valbonne, France.*

²*Istituto Nazionale di Ottica Applicata, Largo E. Fermi 6 50125 Florence, Italy*

³*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas,
Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile.*

We present an unifying description of a new class of localized states, appearing as large amplitude peaks nucleating over a pattern of lower amplitude. Localized states are pinned over a lattice spontaneously generated by the system itself. We show that the phenomenon is generic and requires only the coexistence of two spatially periodic states. At the onset of the spatial bifurcation, a forced amplitude equation is derived for the critical modes, which accounts for the appearance of localized peaks.

PACS numbers: 45.70.Qj, 47.54.+r 05.45.-a

During the last years emerging localized structures in dissipative systems have been observed in different fields, such as domains in magnetic materials [1], chiral bubbles in liquid crystals [2], current filaments in gas discharge experiments [3], spots in chemical reactions [4], pulses [5], kinks [6] and localized 2D states in fluid surface waves [7], oscillons in granular media [8], isolated states in thermal convection [9, 10], solitary waves in nonlinear optics [11–13] and cavity solitons in lasers [14]. Localized structures are macroscopic particle-like objects, which are spatial connections between two extended steady states [15]. In one-dimensional systems, localized patterns can be described as homoclinic connections between an homogeneous and a spatially oscillatory state, whereas localized domains are homoclinic connections between two spatially homogeneous states (see [16] and references therein). Recently, in a nematic liquid crystal valve with optical feedback it has been found experimentally a novel type of localized states, appearing as a large amplitude peaks nucleating over a lower amplitude pattern and therefore called *localized peaks* [17]. Similar observations have been reported in numerical simulations of an atomic vapor with optical feedback [18].

The aim of this manuscript is to show that localized peaks are a generic class of localized states, appearing whenever a pattern forming system exhibits coexistence of two spatially periodic states. In order to derive an unifying description of localized peaks, we develop a theoretical model for one-dimensional spatially extended systems. The model, which shows coexistence between different patterns and stable front solutions between them, is based on an amplitude equation that includes a spatial parametric forcing. This extension with respect to conventional amplitude equations, allows to describe localized patterns and takes into account the interaction of the slowly varying envelope with the small scale of the underlying spatial periodic solution [19, 20], well-known as the adiabatic effect [21].

Generally, the main ingredient for the appearance of localized peaks is the coexistence between two spatially

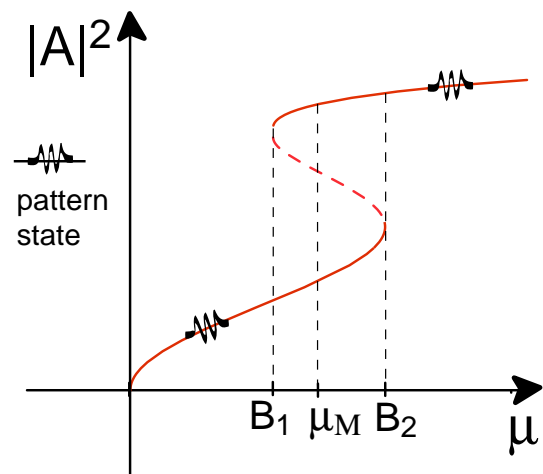


FIG. 1: Bifurcation diagram of super-sub-critical bifurcation: the horizontal axis corresponds to the bifurcation parameter μ ; dashed lines mark the beginning (end) B_1 (B_2) of the bistable region and the Maxwell point μ_M .

periodic states. In order to give a generic description of such a situation, we consider a system that exhibits a *super-sub-critical* spatial bifurcation, that is, the primary bifurcation is super-critical while the secondary one is of subcritical type. In Fig.1 it is shown the typical bifurcation diagram of a super-sub-critical instability. Let $\vec{u}(x; t)$ be a vector field that describes the system under study and satisfies the partial differential equation

$$\partial_t \vec{u} = \vec{f}(\vec{u}, \partial_x, \{\lambda_i\}), \quad (1)$$

where $\{\lambda_i\}$ is a set of parameters. For a critical value of one of the parameters, the system exhibits a spatial instability at a given wave number q . Close to this spatial instability, we use the ansatz $\vec{u} = A(X, T)e^{iqx}\hat{u} + \bar{A}(X, T)e^{-iqx}\hat{u} + \dots$ and the amplitude satisfies [15]

$$\partial_T A = \mu A - \nu |A|^2 A + \alpha |A|^4 A - |A|^6 A + \partial_{XX} A, \quad (2)$$

where μ is the bifurcation parameter and $\{\nu, \alpha\}$ control the type of the bifurcation (first or second order de-

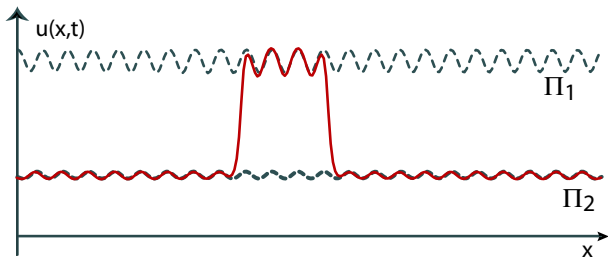


FIG. 2: A localized state solution (solid line) obtained from the amplitude equation, Eq.(5), for $\mu = 0.57$, $\nu = 0.43$, $\alpha = 2.87$, $q = 12.00$, and $\eta = 0.03$. Dashed lines are the two pattern solutions Π_1 and Π_2 , coexisting for the same parameters. The wave number of the larger amplitude pattern Π_1 is larger than the wave number of Π_2 .

pending on the sign of these coefficients). Higher-order terms are ruled out by scaling analysis, since $\nu \sim \mu^{2/3}$, $\alpha \sim \mu^{1/3}$, $|A| \sim \mu^{1/6}$, $\partial_t \sim \mu$, $\partial_x \sim \mu^{1/2}$, and $\mu \ll 1$. Note that this approach is phase invariant ($A \rightarrow Ae^{i\varphi}$), but the initial system under study does not necessarily have this symmetry.

As depicted in Fig.1, for a given range of parameter values the system exhibits coexistence between two different spatially periodic states, each one corresponding to a homogeneous state for the amplitude equation. The coexistence region is for $B_1 < \mu < B_2$. By writing $A = Re^{i\varphi}$, we can see that the equilibrium states in the amplitude equation have the form

$$A = R_0 e^{i \frac{\varepsilon}{R_0^2} x},$$

where $\mu - \varepsilon^2/R_0^4 - \nu R_0^2 + \alpha R_0^4 - R_0^6 = 0$ and ε is an arbitrary constant related to the initial phase invariance. It is worth to note that in the case of positive ε , the wave number of the pattern is modified by the inverse of the square amplitude R_0^2 , so that patterns with larger amplitude have smaller wave number. At variance when ε is negative, the patterns with large amplitude have smaller wavelength. In Fig.2 are depicted two different patterns that coexist for the same parameters and the pattern with large amplitude has smaller wavelength, hence ε in this case is negative.

Note that the above amplitude equation is variational and can be written as

$$\partial_t A = - \frac{\delta \mathcal{F} [A, \bar{A}]}{\delta \bar{A}},$$

where

$$\mathcal{F} = - \int \left(\mu |A|^2 - \nu \frac{|A|^4}{2} + \alpha \frac{|A|^6}{3} - \frac{|A|^8}{4} - |\partial_X A|^2 \right) dx.$$

For given values of the parameters, the two stable uniform stationary states of Eq.(2) have the same energy, that is, the system is at the *Maxwell point*. Where the front between the two states does not propagate, that is,

the front is motionless [22]. By moving away from the Maxwell point, the front dynamics is usually characterized by the motion of the core's front, which is defined as the position of front where the slope is largest. In order to have a localized solution, we consider the interaction of two of these motionless fronts close to the Maxwell point. As consequence of the asymptotic behavior of the front at infinite, the front interaction is attractive, and has the form [23]

$$\dot{\Delta} = -ae^{-\lambda\Delta} + \delta, \quad (3)$$

where Δ is the distance between the cores of each front, δ is the separation from the Maxwell point ($\mu - \mu_M$), λ characterizes the exponent decay of the front to a given constant value in infinite, and a is a positive coefficient that characterize the properties of the interaction and it is determined by the form of the front. The Eq.(3) has an unstable fixed point $\Delta^* = -\ln(\delta/a)/\lambda$, which is the nucleation barrier between the two homogeneous states. Hence, the conventional amplitude equation, Eq.(2), does not exhibit stable localized states, due to the scale separation used to derive the amplitude equation. But near the front's core, the previous ansatz is no more valid. Indeed, in these locations the slowly varying envelope $A(X, T)$ shows oscillations of the same (or comparable) size as the small scale of the underlying pattern. This phenomenon is denominated as the adiabatic effect [20, 21].

In order to take into account this effect, we modify the amplitude equation by including the non-resonant (adiabatic) terms. Thus, the amplitude equation becomes

$$\begin{aligned} \partial_T A = & \mu A - \nu |A|^2 A + \alpha |A|^4 A - |A|^6 A + \partial_{XX} A \\ & + \sum_{m,n \geq 0} g_{mn} A^m \bar{A}^n e^{i \frac{q(1+n-m)}{\sqrt{\mu}} X} \end{aligned} \quad (4)$$

where g_{mn} are real numbers of order one. Now the amplitude equation is parametrically forced in space by the non-resonant terms. We note that the ansatz for \vec{u} satisfies the symmetries $\{x \rightarrow -x, A \rightarrow \bar{A}\}$, and $\{x \rightarrow x + x_0, A \rightarrow Ae^{iqx_0}\}$. Therefore, the envelope equation also is invariant under this transformation. Instead, the spatial translation and phase invariance are independent symmetries of Eq. (2).

To understand and illustrate the effect of non-resonant terms we keep the leading term of the non resonant ones. Then the amplitude equation takes the form

$$\begin{aligned} \partial_T A = & \mu A - \nu |A|^2 A + \alpha |A|^4 A - |A|^6 A + \partial_{XX} A \\ & + \eta A^2 e^{-i \frac{q}{\sqrt{\mu}} X}. \end{aligned} \quad (5)$$

The amplitude is now spatially forced with frequency $q/2\pi\sqrt{\mu}$ and amplitude η . The spatial forcing is responsible for the homogenous states becoming spatially periodic states. As a consequence of the forcing, the front solution between the spatially periodic states exhibits a pinning range, that is, the front is motionless for a range

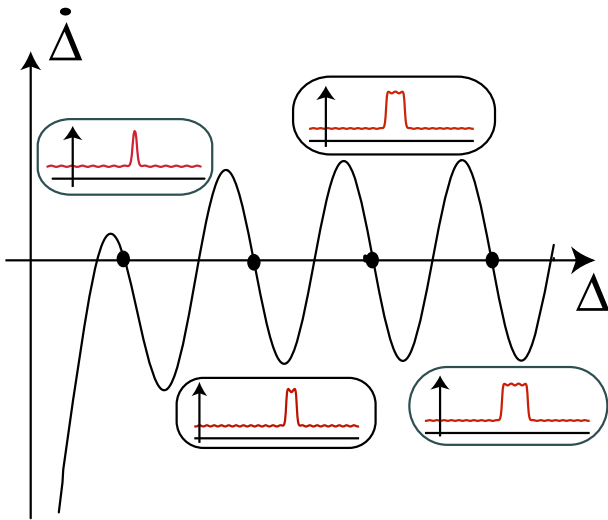


FIG. 3: Oscillatory interaction force between two front solutions. The inset figures are the stable localized patterns observed at the Maxwell points (black dots), where the interaction changes its sign.

of parameter around the Maxwell point. It is important to remark that the model (5) is the most simple model that exhibits front solution between two different spatial periodic solutions.

Note that the maxima of the envelope correspond to the maxima of the initial periodic solution $\vec{u}(t, x)$. In order to obtain the change of the front interaction as a result of the spatial forcing, we consider the front solution of the resonant equation $A_{\pm}(x - x_o) = R_{\pm}(x - x_o)e^{i\varepsilon/R_{\pm}^2}$, where $R_{\pm}(x - x_o)$ satisfies

$$\mu R - \nu R^3 + \alpha R^5 - R^7 + \partial_{xx} R - \frac{\varepsilon}{R^3} = 0,$$

x_o is the position of the front's core and the lower index + (-) correspond to a front monotonically rising (decreasing). As the non resonant term is a rapid spatial oscillation, we consider this term as perturbative-type and use the ansatz

$$A = R_+(x - x_1(t)) + R_-(x - x_2(t)) - (R_{o,+} - R_{o,-}) + \delta W e^{\delta\varphi},$$

in the Eq.(5), where δW and $\delta\varphi$ are small functions, and $R_{o,\pm}$ are the stable equilibrium states of the resonant amplitude equation (2) and $R_{o,+} > R_{o,-}$. We obtain the following solvability condition for the δW function (front interaction)

$$\dot{\Delta} = -ae^{-\lambda\Delta} + \delta + \gamma \cos\left(\frac{q}{\sqrt{\mu}}\Delta\right), \quad (6)$$

with

$$a = -2\langle 3\mu R_+^2 - 5\nu R_+^4 + 7\alpha R_+^6 - 3\varepsilon R_+^{-4} | \partial_x R_+ \rangle,$$

$$\delta = \frac{F(R_+) - F(R_-)}{\langle \partial_x R_+ | \partial_x R_+ \rangle},$$

$$\gamma = \eta \langle \partial_x R_+ | R_+^2 \cos\left(\frac{q}{\sqrt{\mu}}x\right) \rangle,$$

$$F(R) = \mu R^2 - \nu R^4/2 + \alpha R^6/3 - R^8/4, \text{ and } \langle f|g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx.$$

As a consequence of the spatial forcing the interaction of two fronts close to the pinning range, Eq.(6), has an extra term and now alternates between attractive and repulsive forces. It is important to remark that γ is a parameter exponentially small, proportional to η , and is of order δ , i.e. the source of the *periodical force* is the spatial forcing in the Eq.(5). Therefore, close to the Maxwell point the system exhibits a family of equilibrium points, $d\Delta/dt = 0$. Each equilibrium point correspond to a localized solution nucleating over a pattern state, we call these solutions *localized patterns*. The lengths of localized patterns are multiple of a basic length, corresponding to the shortest localized state. We term these shortest states as *localized-peaks*, as these solutions correspond to the experimental observations reported in [17] and to the numerical solutions shown in [18].

Due to the oscillatory nature of the front interaction, which alternates between attractive and repulsive forces, we can deduce the dynamical evolution and bifurcation diagram of localized patterns. By decreasing δ or increasing η , the family of localized patterns disappears by successive saddle-node bifurcations and only localized peaks survive. The mechanism for localized peak appearance is related to the fact that the spatial forcing is nonlinear. Indeed, it is proportional to the square of the pattern amplitude.

Since the amplitude of spatial forcing for the upper branch is larger than that for the lower branch, then the patterns with large modulus have large spatial amplitude oscillations around the equilibrium state of unperturbed amplitude equation (cf. Fig.(2)). For a critical, and small, value of the amplitude of forcing the upper spatial oscillations collide with the unstable branch (spatial oscillations), hence the minima of upper spatial oscillations reach the lower stable branch, saddle-node bifurcation of the spatial periodic solutions, giving rise to the appearance of a localized peak. Because of this mechanism, localized patterns with a size larger than the shortest length are not robust phenomena. In fact, the typical behavior observed in the experiments is the appearance of localized-peaks [17].

In Fig.4, it is shown a localized peak profile, recorded in the Liquid-Crystal-Light-Valve (LCLV) experiment [17]. In order to directly compare with the model, we have performed one-dimensional experiments by inserting a rectangular slit in the optical feedback loop. The slit transverse size is approximately $100 \mu m$ whereas, for the parameters set in the experiment, the size of localized peaks is around $350 \mu m$. The experimental profile is in a good qualitative agreement with the numerical solutions. In particular, it can be noticed that the localized peak has a size slightly larger than the surrounding lower amplitude pattern, to which it joins through two "shoulders". A similar profile can be obtained for the u solution.

In conclusion, we have presented an unifying description of a new class of localized states, termed localized

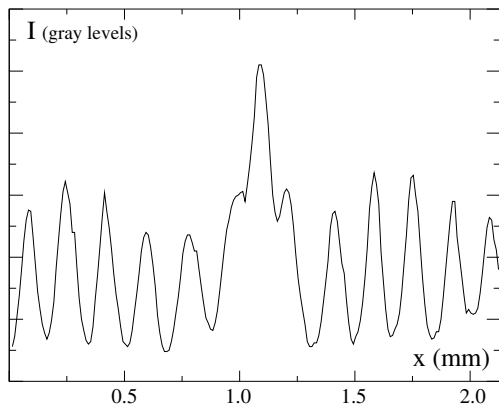


FIG. 4: Intensity profile of a one-dimensional super-peak in the LCLV experiment.

peaks, which are large amplitude peaks nucleating over a lower amplitude pattern. These particle-like states are a generic class of behavior appearing whenever a pattern forming system exhibits coexistence between two spatially periodic states. We have derived a spatially forced amplitude equations for the critical modes at the onset of a super-sub-critical bifurcation. The front solution that connects the two different pattern states exhibit

a locking phenomena, that is, it is motionless for a range of parameter. We have obtained the front interaction and from this interaction we have deduced the family of localized solutions. We have shown that, as a consequence of the nonlinear nature of the forcing, localized patterns with a size larger than the shortest length are not robust phenomena, so that only localized peaks are stable at long times and for a wide range of parameters. We have shown a good qualitative agreement with the experimental observations for a LCLV system and we expect similar phenomena to be observed in other pattern forming systems, provided they present bistability between two different spatial structures. Note that pinning of solitons on periodic arrays has recently been reported for a fixed grid [24]. Localized peaks can be seen as a generalization of this case, when the pinning lattice is spontaneously generated by the system itself.

The simulation software *DimX*, developed at INLN, has been used for all the numerical simulations presented in this paper. The authors thanks the support of ECOS-CONICYT collaboration program. M.G. C. acknowledges the financial support of FONDECYT project 1051117, and FONDAP grant 11980002. R.R. acknowledges financial support from Beca Presidente de la República of the Chilean Government.

-
- [1] H.A. Eschenfelder, *Magnetic Bubble Technology* (Springer Verlag, Berlin 1981).
- [2] S. Pirkl, P. Ribière and P. Oswald, *Liq. Cryst.* **13**, 413 (1993).
- [3] Y.A. Astrov and Y.A. Logvin, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2983 (1997).
- [4] K-Jin Lee, W. D. McCormick, J.E. Pearson and H.L. Swinney, *Nature* **369**, 215 (1994).
- [5] J. Wu, R. Keolian and I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1421 (1984).
- [6] B. Denardo, W. Wright, S. Putterman and A. Larraza, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1518 (1990).
- [7] W.S. Edwards and S. Fauve, *J. Fluid Mech.* **278**, 123 (1994).
- [8] P.B. Umbanhowar, F. Melo and H.L. Swinney, *Nature* **382**, 793 (1996).
- [9] R. Heinrichs, G. Ahlers and D.S. Cannell, *Phys. Rev. A* **35**, R2761 (1987).
- [10] P. Kolodner, D. Bensimon and C.M. Surko, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1723 (1988).
- [11] D.W. Mc Laughlin, J.V. Moloney and A.C. Newell, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 75 (1983).
- [12] R. Neubecker, G.-L. Oppo, B. Thuering and T. Tschudi, *Phys. Rev. A* **52**, 791 (1995).
- [13] B. Schäpers, M. Feldmann, T. Ackemann and W. Lange, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 748 (2000).
- [14] V. B. Taranenko, I. Ganne, R. J. Kuszelewicz and C. O. Weiss, *Phys. Rev. A* **61**, 063818 (2000).
- [15] M. Cross and P. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [16] P. Coullet, C. Riera and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3069, (2000).
- [17] U. Bortolozzo, R. Rojas and S. Residori, submitted to *Phys. Rev. E* 2005.
- [18] Yu. A. Logvin, B. Schäpers and T. Ackemann, *Phys. Rev. E* **61**, 4622 (2000).
- [19] M.G. Clerc and C. Falcon, arXiv:nlin.PS/0502041, to published in *Physica A* (2005).
- [20] D. Bensimon, B.I. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. A* **38**, 5461 (1988).
- [21] Y. Pomeau, *Physica D* **23**, 3 (1986).
- [22] P. Collet, J.P. Eckmann, *Instabilities and Fronts in Extended systems*, (Princeton University Press, New Jersey, 1990).
- [23] K. Kawasaki, and T. Ohta, *Physica A* **116**, 573 (1982).
- [24] T.J. Alexander, A. A. Sukhorukov, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 063901 (2004).

Front propagation sustained by additive noise

M.G. Clerc, C. Falcon and E. Tirapegui

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas,
Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile.*

The effect of noise in a motionless front between a periodic spatial state and an homogeneous one is studied. Numerical simulations show that noise induces front propagation. From the subcritical Swift-Hohenberg equation with noise, we deduce an adequate equation for the envelope and the core of the front. The equation of the front's core is characterized by an asymmetrical periodic potential plus additive noise. The conversion of random fluctuations into direct motion of core of the front is responsible of the propagation. We obtain an analytical expression for the velocity of the front, which is in good agreement with numerical simulations.

PACS numbers:

I. INTRODUCTION

The description of macroscopic matter, i.e. matter composed by a large number of microscopic constituents, is usually done using a small number of coarse-grained or macroscopic variables. When spatial inhomogeneities are taken into account these variables are promoted to spatio-temporal fields whose evolution is determined by deterministic partial differential equations (PDE). This reduction is possible due to a separation of time and space scales, which allows a description in terms of the slowly varying macroscopic variables, which are in fact fluctuating variables due to the elimination of a large number of fast variables whose effect can be modeled including suitable stochastic terms (noise) in the PDE, hence, the evolution of the macroscopic variable is given by stochastic partial differential equation. The influence of noise in nonlinear systems has been the subject of intense experimental and theoretical investigations in the last decades [1–11]. Far from being merely a perturbation to the idealized deterministic evolution or an undesirable source of randomness and disorganization, noise can induce specific and even counterintuitive dynamical behavior. The most well-know examples in zero dimensional dynamical systems are noise induced transitions [1] and stochastic resonance (see the review [2] and reference therein). More recently, examples in spatial extended system are noise induced phase transition [3–6], noise-induced patterns [7–9], stochastic spatio-temporal intermittency [10] and noise-induced travelling waves [11]. Recently, we have found out a novel robust phenomenon of additive noise in extended system, *additive noise induces front propagation* [12], where the conversion of random fluctuations into direct motion of front, between a periodic spatial state and an homogeneous one, is responsible of the propagation.

The concept of front propagation emerged in the field of populations dynamics [13], and the interest in this type of problems has been growing steadily in Chemistry, Physics and Mathematics. In Physics, front propagation plays a central role in a large variety of situations, ranging

from reaction diffusion models, to general pattern forming systems (see the review [14] and references therein). A front solution is a solution that links spatially two extended states. One of the most study front solutions is the front that connects a stable uniform state with an unstable one, FKPP-front [16]. The speed of propagation of these front is not unique and it is fixed by the initial condition [17]. Another well-know type of front is that connect two stable uniform state, *normal from*. The speed of this type front is characterized by to be unique and for the variational system it is proportional to the different of energy between the two uniform states. In fig.1, the dashed curve represents the typical behavior speed of a normal front as function of an arbitrary parameter. Note that the speed of the front is zero at the Maxwell point, that is, both states have the same energy. This picture is modified, when one consider a front between a periodic spatial state and uniform one. The front is motionless in an interval of parameter, this phenomenon is well-known as locking phenomena and the interval is denominated

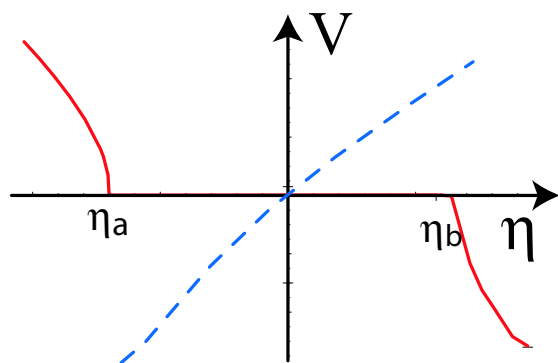


FIG. 1: Speed of the front as function of one parameter. The dashed curve depicts the typical behavior of the speed of a normal front as function of arbitrary parameter and the continue curve represents the speed of a front that link a spatial periodic state and uniform one. For the sake of simplicity the origin represents the Maxwell point. The pinning range is depicted by the interval between η_a and η_b .

pinning range [22]. In fig.1 the continuous line represents the typical speed of these fronts and the interval $[\eta_a, \eta_b]$ represents the pinning range. The effect of additive noise of the speed of a normal front is a random fluctuations of the speed of it. The influence of multiplicative noise in a globally stable state invading an unstable or metastable state, a *front solution*, has been extensively studied in the literature, particularly concerning the issue of velocity selection[15].

The aim of this manuscript is to present in details the origin and mechanism of additive noise induces front propagation, that is, the effect of internal noise in a motionless front between a stable periodic spatial state and an also stable homogeneous state. We present diverse dynamical systems that exhibit this phenomenon. From a prototypical model of pattern forming system, subcritical Swift-Hohenberg equation with noise, we deduce an adequate equation for the envelope of the spatial periodic state and the front core that link the periodic spatial state and an homogeneous one. The equation of the front's core is characterized by an asymmetrical periodic potential plus additive noise. The origin of the asymmetrical potential is the interaction of the large scale envelope variation with the small scale underlying the spatial periodic state. The conversion of random fluctuations into direct motion of front core is responsible of the propagation. We obtain an analytical expression for the velocity of the front, which is in good agreement with numerical simulations.

The manuscript is organized in the following manner: In Section II, using a prototype model that exhibits this type of front we deduce an adequate equation for the envelope of the front solution, which includes non-resonant terms. Following this calculation, in Section III, we derive an equation for the core of the front, which is characterized by a periodic asymmetrical potential with stable equilibria in presence of additive noise. Finally, in Section IV we obtain an analytical expression for the mean velocity of the front using Dinkyn's equation, which is proportional to Kramer's rate in the weak noise intensity limit. This expression is in good agreement with numerical simulations.

II. NUMERICAL OBSERVATIONS OF NOISE INDUCES FRONT PROPAGATION

To illustrate the general nature of the noise induces front propagation we consider the effect of additive noise over several dynamics systems that have front that link an spatial periodic solution and uniform one.

Lifshitz normal form A prototype model that exhibits coexistence of a spatial periodic solution and an uniform state is the Lifshitz normal form [18]

$$\partial_t u = \eta + \mu u - u^3 + \nu \partial_{xx} u - \partial_{xxxx} u + d u \partial_{xx} u + c (\partial_x u)^2 + \sqrt{\delta} \zeta(x, t), \quad (1)$$

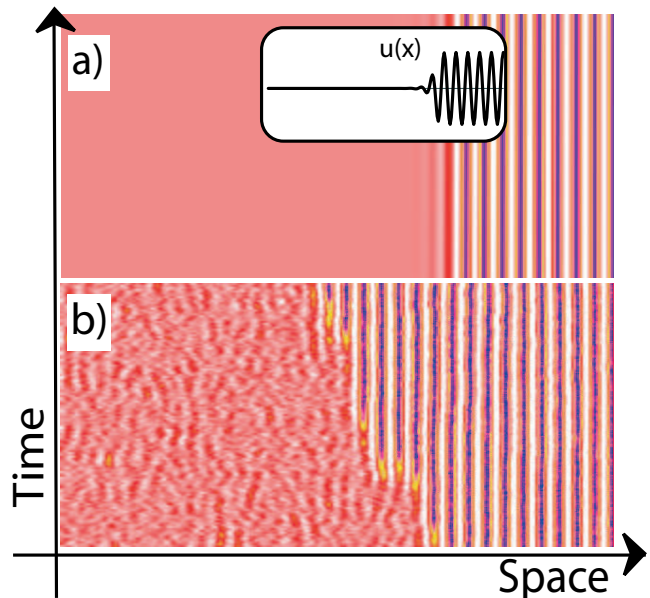


FIG. 2: Spatiotemporal evolution of Eq. (1), with time running up. The gray scale is proportional to field u . The inset figure is the initial condition. The parameters have been chosen $\eta = -0.044$, $\mu = -0.0126$, $\nu = -1.0$, $c = 0.177$, and $d = 0.2$ a) $\delta = 0.0$, and b) $\delta = 0.9$.

This model describe the dynamic close to the confluence of bistability and spatial bifurcation give rise to a critical point of codimension three, Lifshitz point. Where μ is the bifurcation parameter, η accounts for the asymmetry between the two homogeneous states, the term $\partial_{xxxx} u$ describes a super-diffusion, accounting for the short distance repulsive interaction, whereas the terms proportional to d and c are, respectively, the nonlinear diffusion and convection, $\zeta(x, t)$ is a gaussian white noise with zero mean value and correlation $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$, and δ represents the intensity of the noise. Recently, this model have been used to describe the complex dynamic observed in a liquid crystal light valve with optical feedback [18]. In the region of the pinning range of above model, the system exhibits a motionless front that connects the spatial periodic state with the uniform one (cf. Fig2a). When we consider the effect of internal noise depending on the region of the parameter, the noise induces in average that one of the state invades the other one. In Fig.2, it is depicted the propagation of one state to the other one.

Population Dynamics In order to take into account the effect of the environment and congeners of a given specie, one must to consider nonlocal model to describe the population dynamics. In these type of model it is well known the emerge of self-organized structures, patterns [19, 20]. A minimal model that exhibits coexistence of spatial periodic state and uniform one is the variational nonlocal Nagumo model [21].

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u + u(\alpha - u)(1 - u) + u^3 - u(x, t) \int_{\Omega} u(x', t)^2 f_{\sigma}(x, x') d^2 x', \quad (2)$$

where $u(x, t)$ is the local density, α is the adversity parameter and gives account of the complicatedness of development of species under study, the adversity characterizes the equilibrium point, and can always be chosen to satisfy $0 \leq \alpha \leq 1$ without loss of generality. $f_{\sigma}(x, x')$ is the influence function, characterized by a range σ , and normalized in the domain Ω under study. For simplicity, we consider the environment to be homogeneous and isotropic. Then $f_{\sigma}(x, x') = f_{\sigma}(x - x')$, with $f_{\sigma}(z)$ even, and $\int_{\Omega} f_{\sigma}(x, x') dx' = 1$. In the extreme local limit $\sigma \rightarrow 0$, one has $f_{\sigma}(x, x') = \delta(x - x')$, and Eq.(2) reduces to the Nagumo model [19]. Let us now consider the simple influence functions $f_{\sigma}(z) = \theta(\sigma + z)\theta(\sigma - z)/2\sigma$. The dynamics is described by the parameters $\{\alpha, \sigma\}$ and Eq.(2) can be written as

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u}$$

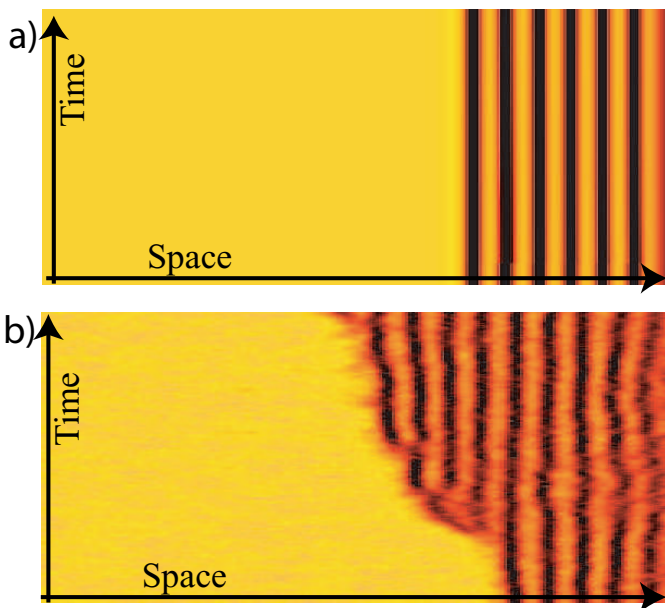


FIG. 3: Spatio-temporal evolution the population density $u(x, t)$ for the model (2), with time running up, $\alpha = 0.35$, $\sigma = 4\%$ of total system size, system size=400 points, a) without noise, and b) plus additive noise. The gray scale is proportional to the population density.

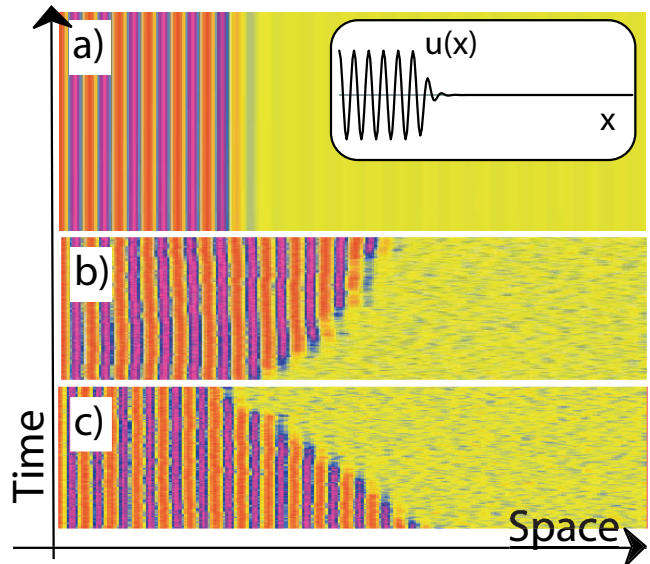


FIG. 4: Spatiotemporal evolution of Eq. (3), with time running up. The gray scale is proportional to field u . The inset figure is the initial condition. The parameters have been chosen $\nu = 1.0$, $q = 0.7$ a) $\epsilon = -0.16$, and $\eta = 0.0$, b) $\epsilon = -0.16$, and $\eta = 0.4$, and c) $\epsilon = -0.177$, and $\eta = -0.16$.

where the Lyapunov functional $\mathcal{F}[u]$ has the form

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{\alpha}{2} u^2 - \frac{(\alpha + 1)}{3} u^3 \right\} dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \int_{\Omega} u^2 u'^2 f_{\sigma}(x, x') dx dx'.$$

Hence, the dynamics of this model (2) is of the relaxation type and the stationary states are local minima of $\mathcal{F}[u]$.

The Eq.(2) exhibits a motionless front that connects the spatial periodic state with the uniform one (cf. Fig.3a). Note that these motionless front solutions are not the global minimum of the Lyapunov functional (3), however, they are local minimum of this free energy and the population only can spread if one add energy to system, for instance, if we consider the effect of additive noise the population ($u = 1$) can invade the unpopulation state ($u = 0$). In Fig.3, it is depicted the spread of population as a result of the additive noise in the variational non-local Nagumo model.

subcritical Swift-Hohenberg equation: A prototype model used in pattern forming system is Swift-Hohenberg equation [14]. Initially this model have been used to describe the onset of Rayleigh-Benard convection [14]. From the point of view of dynamical system theory, this model describes the confluence of a stationary and spatial bifurcation. Generalization of this model has been used intensively to give an account of pattern formation in several systems(see the review [14] and reference therein). A simple model that exhibits coexist between spatial periodic state and uniform one is the subcritical

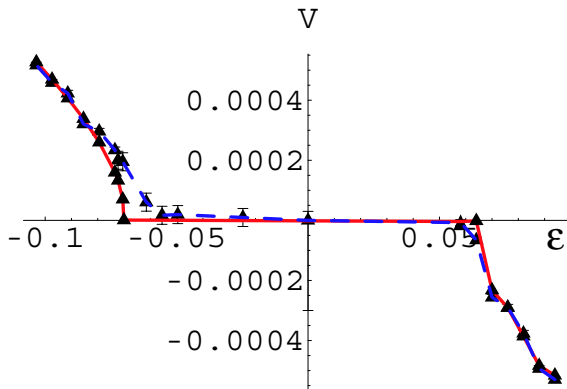


FIG. 5: Mean velocity of the front with and without noise. The thick and the dashed curves are the average velocity of the front of Eq. (3) for $\varepsilon = -0.16$, $\nu = 1.0$, $q = 0.7$, $\eta = 0.0$ and $\eta = 0.01$, respectively.

Swift-Hohenberg, which reads

$$\partial_t u = \varepsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_{xx} + q^2)^2 u + \sqrt{\eta} \zeta'(x, t), \quad (3)$$

where $u(x, t)$ is an order parameter, $\varepsilon - q^4$ is the bifurcation parameter, q is the wave-number of periodic spatial solution, ν the control parameter of the type of bifurcation (supercritical or subcritical), $\zeta(x, t)$ is a gaussian white noise with zero mean value and correlation $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$, and η represents the intensity of the noise. The above variational model (3) describes the confluence of a pitchfork and spatial bifurcation [14]. In the pinning range of above model, the system exhibits a motionless front that connects the spatial periodic state with the uniform one (cf. Fig4a). When one considers the effect of internal noise depending on the region of the parameter inside pinning range, the noise induces in average that one of the state invades the other one. In Fig.4, it is depicted the propagation of one state to the other one. In Fig.5 is shown the speed of the front of model (3) with and without noise.

In brief, we have considered three different dynamical systems that exhibit a motionless front solution that links a spatial periodic state and uniform one. When internal noise is taken into account in general one state starts to invade the other one, front propagation. In order to figure out the mechanism of this propagation in the next section we will study in the details the dynamics of subcritical Swift-Hohenberg equation at the onset of spatial instability.

III. AMPLITUDE EQUATION AND EVOLUTION OF THE CORE OF THE FRONT

In order to understand the mechanism through which noise induces front propagation, we consider a prototype model that exhibits this type of front, subcritical Swift-Hohenberg equation with noise, Eq. (3). This model can

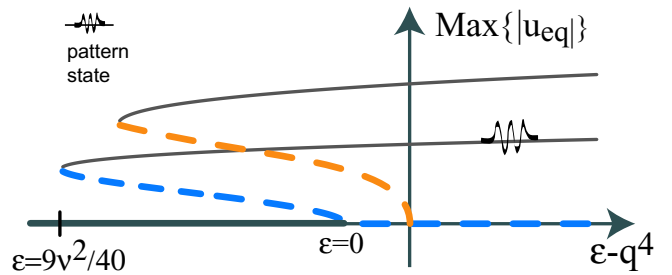


FIG. 6: Bifurcation diagram of the subcritical Swift-Hohenberg model (3), the horizontal axis is represented the control parameter and the vertical one represents the maximum value of absolute value the equilibrium state. The model (3) exhibits coexistence between two uniform state and spatial periodic one.

reads

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} + \sqrt{\eta} \zeta'(x, t), \quad (4)$$

where the free energy has the form

$$\mathcal{F} = \int dx - \frac{(\varepsilon - q^4)u^2}{2} - \frac{\nu u^4}{4} + \frac{u^6}{6} - q^2(\partial_x u)^2 - \frac{(\partial_{xx} u)^2}{2}.$$

Hence, the dynamic of the above model is characterized by the minimization of this free energy. In fig.6 is shown the typical bifurcation diagram observed in the subcritical Shift-Hohenberg model. Note that the system exhibits coexistence between different homogeneous states and the spatial periodic one. For small ε and μ , the system shows spatial periodic solutions with small amplitude (the amplitude is proportional to $\sqrt{\nu}$). Then, the amplitude equation will be an adequate framework to give an account of the coexistence of spatial periodic state and the uniform one.

A. Amplitude equation

In the limit of small μ and ν , one can approach a solution for the field $u(x, t)$ in Fourier modes as $u = A_0 e^{iqx} + \bar{A}_0 e^{-iqx} + \dots$, with A of order $\nu^{1/2}$. Imposing this solution in (3), we find that A satisfies

$$\varepsilon A_0 - 3\nu |A_0|^2 A_0 - 10 |A_0|^4 A_0 = 0, \quad (5)$$

For small and negative ν and $9\nu^2/40 < \varepsilon < 0$ (cf. Fig.6), the system exhibits coexistence between a stable homogenous state $u = 0$ and a periodic spatial one $u = \sqrt{\nu} \left(\sqrt{2(1 + \sqrt{1 + 40\varepsilon/9\nu})} \cos(q(x - x_0)) \right) + o(\nu^{5/2})$, where x_0 is an arbitrary number, related to the symmetry of translation. In this parameter region, one finds a front solution between these two states. These

type of solution is an heteroclinic curve of the spatial dynamical system ($\partial_t u = 0$) associated to the above model [23]. A front between a homogeneous and a spatial oscillatory state can be described by an envelope $A(X, T)$, which is introduced through the ansatz

$$u = A \left(X = |\varepsilon|^{1/2} x, T = |\varepsilon| t \right) e^{iqx} + c.c. + W(X, T), \quad (6)$$

where $W(X, T)$ is a small function of the order $\nu^{5/2}$, $A \sim \nu^{1/2}$ and $\varepsilon \sim \nu^{1/2}$. Introducing the above ansatz in Eq.(3), linearized in W and considered the dominant order ($\nu^{5/2}$), we obtain

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + q^2)^2 W &= (\varepsilon A + 3\nu|A|^2 A - 10|A|^4 A) e^{iqx} \\ &\quad (2q^4 \partial_{xx} A - \partial_T A) e^{iqx} + \\ &\quad - (\mu A^3 - 5|A|^2 A^3) e^{i3qx} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\eta}}{2} \zeta'(x, t) e^{-iqx} + c.c., \end{aligned}$$

where the self-adjoint operator $L = (\partial_x^2 + q^2)$ has a non-trivial kernel characterized by the eigenfunction ae^{iqx} . Therefore, in order to obtain a solution for W , we impose the solvability condition

$$\begin{aligned} \partial_t A(X, t) &= \varepsilon A + 3\nu A |A|^2 - 10A |A|^4 + 4|\varepsilon| q^2 \partial_{XX} A + \\ &\quad (\nu A^3 - 5A^4 \bar{A}) e^{2iqx} - A^5 e^{4iqx} + \frac{\sqrt{\eta}}{2} \zeta'(x, t) e^{-iqx}; \end{aligned}$$

scaling and defining

$$A(x, t) = \sqrt{\frac{3\nu}{10}} B(y, \tau), \quad x = \frac{2\sqrt{10}q}{3\nu} y, \quad t = \frac{10}{9\nu^2} \tau$$

the envelope equation reads

$$\begin{aligned} \partial_\tau B(y, \tau) &= \sigma B + B |B|^2 - B |B|^4 + \partial_{yy} B + \\ &\quad + \left(\frac{1}{9\tilde{\nu}} B^3 - \frac{1}{2} B^4 \bar{B} \right) e^{2iq \frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} \\ &\quad - \frac{1}{10} B^5 e^{2iq \frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} + \frac{\beta\sqrt{\eta}}{2\alpha|\varepsilon|^2} e^{-iq \frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} \zeta(y, \tau), \quad (7) \end{aligned}$$

where the new noise ζ is proportional to ζ' , has mean value zero and correlation $\langle \zeta(y, \tau) \zeta(y', t') \rangle = \delta(y - y') \delta(t - t')$. One has

$$\sigma = \frac{10\varepsilon}{9\nu^2}, \quad \nu = \sqrt{|\varepsilon|} \tilde{\nu}, \quad \alpha = \frac{3\tilde{\nu}}{2\sqrt{10}q}, \quad \beta = \frac{10^{3/4} 10^2}{81\tilde{\nu}^4}.$$

If in the above amplitude equation, we eliminate all the terms with an explicit dependence on the spatial variable y we obtain the normal form

$$\begin{aligned} \partial_\tau B(y, \tau) &= \sigma B + B |B|^2 - B |B|^4 + \partial_{yy} B \\ &= -\frac{\delta F [B, \bar{B}]}{\delta B}, \quad (8) \end{aligned}$$

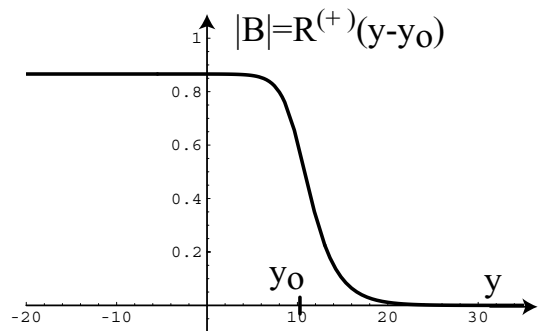


FIG. 7: Motionless front solution of Eq.(8), computed at the Maxwell point. In the vertical axis is represented the modulus of amplitude B as function of the position. y_0 represents the position of the core of the front.

which is variational, as indicated, with the functional

$$F [B, \bar{B}] = - \int dy \left[\sigma |B|^2 + \frac{1}{2} |B|^4 - \frac{1}{3} |B|^6 - |\partial_y B|^2 \right].$$

By minimizing the free energy functional we find that the system has 5 uniform states, 3 of these states are stable, $B = 0$ and $B_\pm = \pm \sqrt{(1 + \sqrt{1 + 4\sigma})/2}$ (cf. Fig.6).

It is well-known that this kind of amplitude equation shows a stationary front solution that will connect the zero state and the non-zero ones, only when the free energy for both states is the same (Maxwell point). When one considers only the deterministic resonant terms, Eq.(8), it is straightforward to show that the system exhibits a front solution between two homogeneous states, 0 and $\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 4\sigma})/2}$, when $-0.25 \leq \varepsilon < 0$. To calculate the motionless front solution, we use the fact that both the zero amplitude solution and B_+ solution satisfy (5). This front propagates from the stable state (lowest free energy) to the metastable one, and it is static only when the free energy is the same for both homogeneous states, that means

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon \frac{|B|^2}{2} + \frac{|B|^4}{4} - \frac{|B|^6}{6}, \\ 0 &= \varepsilon B + |A|^2 B - |B|^4 B, \end{aligned}$$

The all eliminated terms in the Eq.8 are non resonant, in the sense that they can be eliminated by a nonlinear and nonsingular change of variables near the bifurcation point [27] and hence usually neglected. As we shall see these terms are fundamental in order to understand the locking phenomena and the pinning range. The exception is the noise term which is always resonant [28–31] as we shall discuss in Appendix A. Furthermore, the nonresonant terms give an exponentially small contribution due to the rapid oscillating exponentials and can be treated perturbatively.

We can calculate now the Maxwell point from $F [B, \bar{B}]$ and we obtain $\sigma_M = 3/16$. We put now $\sigma = \sigma_M + \delta\sigma$ in

the complete equation for $B(y, \tau)$, which we treat as the variational part in the Maxwell point plus small terms which can be treated as perturbations. One has (the small terms are in last two lines)

$$\begin{aligned} \partial_\tau B(y, \tau) = & \left(-\frac{3}{16}B + B|B|^2 - B|B|^4 + \partial_{yy}B \right) + \\ & \delta\sigma B + \left(\frac{1}{9\bar{\nu}}B^3 - \frac{1}{2}B^4\bar{B} \right) e^{2iq\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} \\ & - \frac{1}{10}B^5 e^{4iq\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} + \frac{\beta\sqrt{\eta}}{2|\varepsilon|^2} e^{-iq\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} \zeta(y, \tau); \end{aligned}$$

The unperturbed equation for $B(y, \tau)$ at the Maxwell point has the exact stationary front solutions

$$B^{(\pm)}(y - y^{(o)}) = R_o^{(\pm)}(y - y^{(o)})e^{i\varphi},$$

where φ is a constant phase, $y^{(o)}$ stands for the position of the core of the front and $R_o^{(\pm)}(y - y^{(o)})$ is given by

$$R_o^{(\pm)}(y - y^{(o)}) = \sqrt{\frac{3/4}{1 + e^{\pm\sqrt{3/4}(y - y^{(o)})}}}.$$

From now on we shall work with the front $R_o^{(+)}(y - y^{(o)})$ which goes from zero at $y = -\infty$ to the value $\sqrt{3/4}$ at $y = +\infty$ and we shall simply write R_o for this solution. In Fig.7 is depicted this solution. We place $B(y, \tau) = R(y, \tau)e^{i\Theta(y, \tau)}$ in the complete equation for $B(y, \tau)$ and we obtain

$$\begin{aligned} \partial_\tau R(y, \tau) + i\partial_\tau \Theta(y, \tau) = & \left(-\frac{3}{16}R + R^3 - R^5 + \partial_{yy}R \right) + \\ & (2i\partial_y R \partial_y \Theta + iR \partial_{yy} \Theta - R(\partial_y \Theta)^2) + \\ & \left[\delta\sigma R + \left(\frac{1}{9\bar{\nu}}R^3 e^{2i\Theta} - \frac{1}{2}R^5 e^{4i\Theta} \right) e^{2iq\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} - \right. \\ & \left. \frac{1}{10}R^5 e^{4i\Theta} e^{4iq\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} + \frac{\beta\sqrt{\eta}}{2|\varepsilon|^2} e^{-iq\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}} \zeta(y, \tau) \right] \end{aligned}$$

B. Non-resonant terms

In order to solve the above equation we make the ansatz

$$\begin{aligned} R(y, \tau) &= R_o(y - y^{(o)}(\tau)) + \tilde{\varepsilon}\rho(y, y^{(o)}(\tau)), \\ \Theta(y, \tau) &= \tilde{\varepsilon}\Theta_1(y, y^{(o)}(\tau)), \end{aligned}$$

where $\tilde{\varepsilon}$ is a small parameter, and we have promoted the coordinate $y^{(o)}$ of the core of the front to a function of time $y^{(o)}(\tau)$. We replace our ansatz in the previous equation, where we assume that the small terms in the square brackets are $O(\tilde{\varepsilon})$ as well as the time derivative

$dy^{(o)}(\tau)/d\tau \equiv \dot{y}^{(o)}$, and we equate the real and imaginary parts at $O(\tilde{\varepsilon})$, then we obtain

$$\begin{aligned} -R_{oy}(y - y^{(o)}(\tau))\dot{y}^{(o)} &= \tilde{\varepsilon}L(y - y^{(o)})\rho \\ + \delta\sigma R_o(y - y^{(o)}(\tau)) &+ \left(\frac{1}{9\bar{\nu}}R_o^3 - \frac{1}{2}R_o^5 \right) \cos\left(2q\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) \\ - \frac{1}{10}R_o^5 \cos\left(4q\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) &+ \frac{\beta\sqrt{\eta}}{2|\varepsilon|^2} \cos\left(q\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) \zeta(y, \tau); \quad (9) \\ \frac{d}{dy}(R_o(y - y^{(o)}(\tau))^2 \Theta_{1y}) &= \\ -\left(\frac{1}{9\bar{\nu}}R_o^4 - \frac{1}{2}R_o^6\right) \sin\left(2q\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) &- \frac{1}{10}R_o^6 \sin\left(4q\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) \\ - \frac{\beta\sqrt{\eta}}{2|\varepsilon|^2} R_o(y - y^{(o)}(\tau)) \sin\left(q\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) &\zeta(y, \tau) \quad (10) \end{aligned}$$

where

$$R_{oy}(y) \equiv \frac{dR_o}{dy}, \quad R_{oyy}(y) \equiv \frac{d^2R_o}{dy^2}, \quad \Theta_{1y} \equiv \partial_y \Theta_1(y, y^{(o)}(\tau))$$

and

$$L(y - y^{(o)}) \equiv -\frac{3}{16} + 3R_o(y - y^{(o)})^2 - 5R_o^4 + \partial_{yy}$$

is the operator obtained through liberalization of the variational equation for $B(y, \tau)$ around the front. The function $R_o(y - y^{(o)}(\tau))$ satisfies the equation

$$-\frac{3}{16}R_o(y - y^{(o)}) + R_o^3 - R_o^5 + \partial_{yy}R_o(y - y^{(o)}) = 0.$$

Taking the derivative with respect to y , It is easy to show

$$L(y - y^{(o)})R_{oy}(y - y^{(o)}) = 0.$$

The operator $L(y - y^{(o)})$ is self-adjoint in the inner scalar product

$$\{f(y), g(y)\} = \int dy f(y)^* g(y).$$

We multiply the Eq.(9) by $R_o(y - y^{(o)}(\tau))$ and we integrate over y in the all space. We obtain the solvability condition (putting $\tilde{\varepsilon} = 1$)

$$\begin{aligned} -\{R_{oy}, R_{oy}\} \dot{y}^{(o)}(\tau) &= \{R_{oy}, L\rho\} + \delta\sigma \{R_{oy}, R_o\} \\ + \int dy R_{oy}(y - y^{(o)}(\tau)) &\left(\frac{1}{9\bar{\nu}}R_o^3 - R_o^5 \right) \cos\left(2q\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) \\ - \frac{1}{10} \int dy R_{oy} R_o(y - y^{(o)}(\tau))^5 &\cos\left(4q\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) \\ + \frac{\beta\sqrt{\eta}}{2|\varepsilon|^2} \int dy R_{oy}(y - y^{(o)}(\tau)) &\cos\left(q\frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) \zeta(y, \tau). \end{aligned}$$

One has $\{R_{oy}, R_{oy}\} = 1/a$, and $\{R_{oy}, R_o\} = 3/8$. On the other hand since L is self-adjoint one has $\{R_{oy}, L\rho\} =$

$\{LR_{oy}, \rho\} = 0$ and we obtain an equation for $y^{(o)}(\tau)$ of the form

$$\dot{y}^{(o)}(\tau) = A\left(y^{(o)}(\tau)\right) + \sqrt{\tilde{\eta}} \int dy R_{oy}(y - y^{(o)}(\tau)) \cos\left(q \frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) \zeta(y, \tau), \quad (11)$$

with $\sqrt{\tilde{\eta}} \equiv a\beta\sqrt{\tilde{\eta}}/2|\varepsilon|^2$, and

$$A(y^{(o)}(\tau)) \equiv -\frac{3}{8}a\delta\sigma + a \int dy R_{oy}(y - y^{(o)}(\tau)) \left(-\frac{1}{9\tilde{\nu}}R_o^3 + R_o^5\right) \cos\left(2q \frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) + \frac{a}{10} \int dy R_{oy} R_o(y - y^{(o)}(\tau))^5 \cos\left(4q \frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right).$$

C. Oscillatory stochastic integral contribution

In the equation for $y^{(o)}(\tau)$, Eq.(11), the product of a function of the stochastic process $y^{(o)}(\tau)$ with the white noise $\zeta(y, \tau)$ is not defined due to the singular properties of the noise. We define it considering $\zeta(y, \tau)$ as the limit of a physical noise with time correlation proportional to a symmetric function $\Delta_\mu(\tau - \tau')$ of width μ , where μ is much smaller than the characteristic times of variation of the macroscopic physical variables, which tends to $\delta(\tau - \tau')$ when μ tends to zero. This leads to the Stratonovic interpretation for the undefined product [32]. In Appendix B, we show that this gives a supplementary drift which is added to $A(y^{(o)}(\tau))$ and also that we can transform the noise term to obtain (neglecting an exponentially small contribution to the last term)

$$\dot{y}^{(o)}(\tau) = A(y^{(o)}(\tau)) - \frac{\tilde{\eta}}{2} \int dy R_{oy} R_{oyy} \cos\left(2q \frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) + \sqrt{\frac{\tilde{\eta}}{2a}} \xi(\tau),$$

where $\xi(\tau)$ is a gaussian white noise of zero mean and correlation $\langle \xi(\tau)\xi(\tau') \rangle = \delta(\tau - \tau')$. If we make the change of variables $y' = y - y^{(o)}(\tau)$ in the last integral and in the integrals in the definition of $A(y^{(o)}(\tau))$ we obtain the equation (see Appendix B for the calculations)

$$\dot{y}^{(o)}(\tau) = e^{-c \frac{2q}{\sqrt{|\varepsilon|}}} \sqrt{(K_1)^2 + (K_2)^2} \cos\left(2q \frac{y^{(o)}(\tau)}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}} + \phi\right) - \frac{3}{2}a\delta\sigma + \sqrt{\frac{\tilde{\eta}}{2a}} \xi(\tau), \quad (12)$$

where $c \equiv \pi\sqrt{4/3}/\alpha$. In the last equation K_1 and K_2 are not exponentially small (for small $|\varepsilon|$) and we have neglected a term $O(e^{-c4q/\sqrt{|\varepsilon|}})$. We have

$$K_1 = e^{c \frac{2q}{\sqrt{|\varepsilon|}}} \left[\text{Re } K - \frac{9\tilde{\eta}}{256} \frac{q}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}} \text{Im } I \right],$$

$$K_2 = e^{c \frac{2q}{\sqrt{|\varepsilon|}}} \left[\text{Im } K + \frac{9\tilde{\eta}}{256} \frac{q}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}} \text{Re } I \right],$$

$$\cos \phi = \frac{K_1}{\sqrt{(K_1)^2 + (K_2)^2}},$$

with

$$K = a \int dy \left(-\frac{1}{9\tilde{\nu}}R_{oy}R_o^3 + \frac{1}{2}R_{oy}R_o^5\right) e^{i2q \frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}},$$

and

$$I = \int dy \frac{e^{-2\sqrt{\frac{3}{4}}y}}{(1 + e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}y})^3} e^{i2q \frac{y}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}}.$$

Both order K and I are $O(e^{-c2q/\sqrt{|\varepsilon|}})$. We have obtained then in (12) our final equation for the core of the front which tells us that the coordinate $y^{(o)}(\tau)$ of the core is an stochastic diffusion process defined by this equation. In the next Section we shall study this equation and show that it is at the origin of the motion of the front. We take care now of Eq.(10), which involves the phase Θ_1 . There is no solvability condition here and we have then to show that Θ_1 can be calculated and is bounded, that is, the linear operator in Θ_1 has a trivial kernel. Since $R_{oy}(y - y^{(o)}(\tau))$ vanishes for $y \mapsto -\infty$ we integrate Eq.(10) from $-\infty$ to y and we obtain

$$R_o(y - y^{(o)}(\tau))^2 \Theta_{1y}(y, y^{(o)}(\tau)) = \int_{-\infty}^y dy' \left(-\frac{1}{9\tilde{\nu}}R_o(y' - y^{(o)}(\tau))^4 + \frac{1}{2}R_o(y' - y^{(o)}(\tau))^6\right) \sin\left(2q \frac{y'}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) + \int_{-\infty}^y dy' \frac{1}{10}R_o(y' - y^{(o)}(\tau)) \sin\left(4q \frac{y'}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) + \frac{\sqrt{\tilde{\eta}}}{a} \int_{-\infty}^y dy' R_o(y' - y^{(o)}(\tau)) \sin\left(q \frac{y'}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) \zeta(y', \tau).$$

In the last term of above equation, we have the same problem as in Eq.(11), i.e. an undefined product of a function of the process $y^{(o)}(\tau)$ with the white noise $\zeta(y, \tau)$, which we interpret in the Stratonovic sense. Af-

ter a long calculation done in Appendix C we obtain

$$\begin{aligned}
& R_o(y - y^{(o)}(\tau))^2 \Theta_{1y} = \\
& -\frac{1}{16\tilde{\nu}} \left| S^{(1)}(y - y^{(o)}(\tau)) \right| \cos\left(2q \frac{y^{(o)}(\tau)}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}} - \varphi^{(1)}\right) \\
& + \frac{27}{128} \left| S^{(2)}(y - y^{(o)}(\tau)) \right| \cos\left(2q \frac{y^{(o)}(\tau)}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}} - \varphi^{(2)}\right) \\
& + \frac{27}{640} \left| S^{(3)}(y - y^{(o)}(\tau)) \right| \cos\left(2q \frac{y^{(o)}(\tau)}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}} - \varphi^{(3)}\right) - \\
& \frac{9\tilde{\eta}}{256a} \left| I(y - y^{(o)}(\tau)) \right| \cos\left(2q \frac{y^{(o)}(\tau)}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}} - \varphi\right) \\
& + \frac{\sqrt{\tilde{\eta}}}{a} \left[\int_{-\infty}^y dy' R_o(y' - y^{(o)}(\tau)) \sin\left(q \frac{y'}{\alpha\sqrt{|\varepsilon|}}\right) \zeta(y', \tau) \right]_{\gamma_1(0)},
\end{aligned}$$

where $\gamma_1(0)$ in the noise term means that in a time discretization $y^{(o)}(\tau)$ has to be evaluated at the beginning of the time interval (pre-point discretization, [32]), which corresponds to the Ito prescription, and consequently the mean value of this term vanishes. It is shown in Appendix C that for all values of y one has that $|S^{(j)}(y - y^{(o)}(\tau))|$ is bounded by $O(\sqrt{|\varepsilon|})$, $j = 1, 2, 3$, while $|I(y - y^{(o)}(\tau))|$ is bounded by an exponentially small quantity. If we take then mean value of above expression, we conclude that $\langle R_o(y - y^{(o)}(\tau))^2 \Theta_{1y} \rangle$ remains bounded everywhere.

D. Potential approach: Brownian motor

Therefore from the preceding results; the dynamics of core of the front is described by (11). This equation may

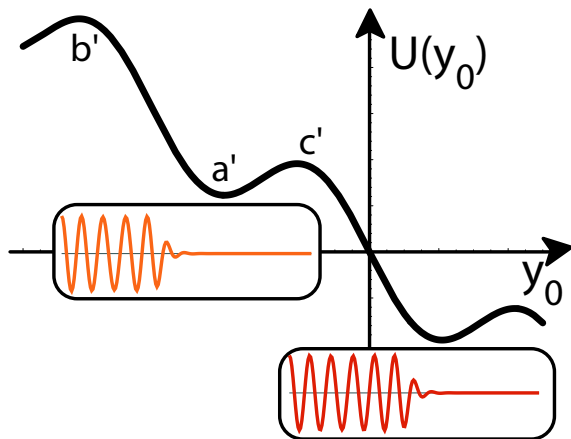


FIG. 8: Schematic representation of the potential $U(y_0)$ of Eq. (13), when $0 > \Delta > \Delta_-$ and $|\Delta| < |\Gamma|$. $\{a, b, c\}$ are fixed points. The inset figure represent two successive equilibria state of Eq. (3).

be read in the following form

$$\begin{aligned}
\dot{y}^{(o)} &= -\frac{\partial U(y^{(o)})}{\partial y^o} + \frac{ab}{|\varepsilon|^2} \sqrt{\frac{\eta}{2d}} \zeta(\tau) \\
&= \Delta + \Gamma \cos\left(\frac{2q}{d\sqrt{|\varepsilon|}} y^{(o)} - \varphi\right) + \frac{ab}{|\varepsilon|^2} \sqrt{\frac{\eta}{2d}} \zeta(\tau) \quad (13)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\Gamma &\equiv \sqrt{k_1 + k_2} e^{-\sqrt{4/3}\pi q/d\sqrt{|\varepsilon|}}, \\
\tan \varphi &= k_1/k_2 + \sqrt{3}d^2\beta^2q^3\eta\pi/2^3a^3|\varepsilon|^{11/2}, \\
k_1 &\equiv -9d\pi/2048(8q/a\sqrt{3|\varepsilon|})^3, \\
&\quad - (8 + d\pi|\varepsilon|^{1/2}/32\nu) (8q/a\sqrt{3|\varepsilon|}), \\
k_2 &\equiv (27/1024 - |\varepsilon|^{1/2}/128\nu)d\pi(8q/a\sqrt{3|\varepsilon|})^2, \\
&\quad - 3d^2\beta^2q^2\eta\pi/2^6a^2|\varepsilon|^5 \\
\beta &\equiv |\varepsilon|^{1/2}10^{9/4}/81\nu,
\end{aligned}$$

$U(y_0)$ is the potential which characterizes the dynamics of the core of the front and $\zeta(\tau)$ is a gaussian white noise, that is, with zero mean value and correlation $\langle \zeta(\tau) \zeta(\tau') \rangle = \delta(\tau - \tau')$.

Due to the interaction of the large scale with the small scale underlying the spatial periodic solution, the dynamics of the core of the front is modified with terms which are exponentially small and periodic in space. The deterministic system of model (13) is characterized by the spatial periodic state invading the homogeneous one with a well defined velocity when $\Delta < 0$ and $|\Delta| > |\Gamma|$. Increasing Δ , the system exhibits a simultaneous transition to infinite saddle nodes for $\Delta = \Delta_- \equiv \Gamma$. For $\Delta > \Delta_-$ and $|\Delta| < |\Gamma|$, the system has an infinite number of stable equilibria. Each equilibrium point represents a static front with different bumps. In Fig.8, it is depicted the potential $U(y_0)$ and its respectively equilibria, when $0 > \Delta > \Delta_-$ and $|\Delta| < |\Gamma|$. Increasing further Δ , all critical points disappear by saddle-node when $\Delta > 0$ and $\Delta = \Delta_+ \equiv |\Gamma|$. For $\Delta > \Delta_+$ the homogeneous states invades the spatial periodic one with a well defined velocity. Therefore, for $\Delta_- < \Delta < \Delta_+$ (pinning range) the system exhibit the locking phenomena. It is important to note that, for negative (positive) Δ , the potential has the tendency to be an increasing (decreasing) function (cf. Fig.8).

We now consider the effect of noise in (13). Due to the asymmetry of the potential the system does not have a global stationary state (cf. Fig.8) and continuously converts the random fluctuations in directed motion of the front, i.e. the noise induces front propagation. This type of phenomena is well known as a Brownian motor [26]. One can easily understand the origin of this phenomena: if initially y_0 is inside the basin of attraction Ω of a fixed point the front just fluctuates around the fixed point during a time of the order of the mean first passage time to $\partial\Omega$, the border of Ω , after this time the system makes a transition to the basin of attraction of

the nearest stable fixed point separated from the first one by the lowest energy barrier. This behavior is repeated in this new basin of attraction and the final result is a directed motion of the front. Since the energy threshold for jumping to the right or to the left are different the probability of jumping to the side with the highest energy threshold will be exponentially small with respect to the probability of jumping to the other side and this determines the direction of motion of the front.

IV. MEAN VELOCITY OF THE FRONT: ANALYTICAL RESULTS

A. Dynkin's Equation and Escape Times

From the above analysis, we can estimate the mean velocity of the core of the front

$$\langle v \rangle = \frac{\pi \sqrt{|\epsilon|}}{qa\tau}$$

where $\pi \sqrt{|\epsilon|}/qa$ is the distance between two successive unstable fixed points of the potential and τ is the escape times to leave to the basins of attraction of attractor contain between the two successive maxima. To calculate these escape times, we use Dynkin's equation [33].

This equation describes the evolution of *first passage time* $\tau(\Omega, \partial\Omega; x_o)$, that is, the average time that take a particle to leave for first time a given domain Ω with boundary $\partial\Omega$ and initial condition x_o inside Ω . If Ω takes up the same place of the basin of attraction of a given attractor, then $\tau(\Omega, \partial\Omega; x_o)$ is denominated *The Mean First Passage Times* (τ), or *Escape times*.

For scalar dynamics system, the basin of attraction of a given attractor is characterized by two points, the interval of the basin of attractor. In Fig.8 it is depicted the basin of attractor of the fixed point a' by the points b' and c' . The Dynkin's equation for Eq.(13) is

$$\left(\frac{\eta a^2 b^2}{4|\epsilon|^2 d} \right) \frac{d^2 \tau}{dy_o^2} - \frac{\partial U[y_o]}{\partial y_o} \frac{d\tau}{dy_o} = -1, \quad (14)$$

with boundary condition $\tau(b') = \tau(c') \equiv 0$, where b' and c' are two successive maxima of the potential (cf. Fig.8). In order to solve the above equation, one can multiply it by $e^{-2U[y_o]/\theta}$, where $\theta \equiv ab/|\epsilon|^2 \sqrt{\eta/2d}$, then it reads

$$\frac{d}{dy_o} \left(e^{-\frac{2U[y_o]}{\theta}} \frac{d\tau}{dy_o} \right) = -2 \frac{e^{-\frac{2U[y_o]}{\theta}}}{\theta},$$

Integrating this equation, multiply by $e^{2U[y_o]/\theta}$ and integrated again, we find explicitly the solution

$$\tau = A + B \int_{a'}^{y_o} dy e^{\frac{2U[y]}{\theta}} - \frac{1}{\theta} \int_{a'}^{y_o} e^{\frac{2U[y]}{\theta}} dy \int_{a'}^y e^{-\frac{2U[x]}{\theta}} dx,$$

where A and B are constants determined by the boundary condition. Imposing the boundary condition and straight calculations, we obtain the escape time of the basin of attraction $\{b', c'\}$ of the attractor a' and it has the form

$$\tau = \frac{2}{\theta} \int_{c'}^{b'} \int_{c'}^y e^{2[U[y]-U[z]]/\theta} dy dz - \frac{2}{\theta} \int_{c'}^{a'} \int_{c'}^y e^{2[U[y]-U[z]]/\theta} dy dz \left[\frac{\int_{c'}^{a'} e^{2U[y]/\theta} dy}{\int_{c'}^{b'} e^{2U[y]/\theta} dy} \right] \quad (15)$$

One can estimate this formula in the limit of weak noise ($\theta \rightarrow 0$), because one can approach the integrals by successive integral of gaussian functions, *steepest descent method*. In this extreme limit the escape time takes the form

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{|\partial_{yy}U(a')| |\partial_{yy}U(c')|}} e^{-\frac{(U(c')-U(a'))}{\theta}} \left(1 - \sqrt{\frac{|\partial_{yy}U(c')|}{|\partial_{yy}U(b')|}} e^{-\frac{(U(b')-U(c'))}{\theta}} \right),$$

and the expression for the mean velocity is

$$\langle v \rangle = \frac{\sqrt{|\epsilon| |\partial_{yy}U(a')| |\partial_{yy}U(c')|}}{2qa} e^{-\frac{(U(c')-U(a'))}{\theta}} \left(1 - \sqrt{\frac{|\partial_{yy}U(c')|}{|\partial_{yy}U(b')|}} e^{-\frac{(U(b')-U(c'))}{\theta}} \right).$$

From the above expression one can find that in this limit the velocity is proportional to Kramer's rate. Therefore, the speed of the front is proportional to the energy barrier. Then, the noise induces the core of the front moves in the direction of smallest barrier successively, that is, the system exhibits the conversion of random fluctuations into direct motion of core of the front.

Numerically, we have measured the front velocity for different values of the noise intensity and we obtain a

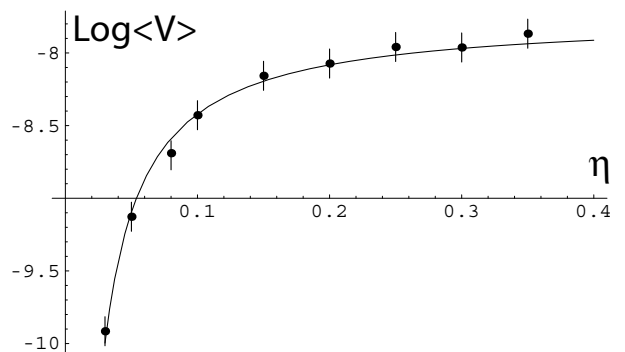


FIG. 9: Mean velocity of the front for the model (3). The continuous lines is the analytical formula of mean velocity and the dot points are numerical measuring of the mean velocity of the front.

good agreement with the theoretical prediction, as it is shown in Fig.10. It is important to remark that $U(y^{(o)})$ is function of the noise intensity. For finite noise intensity this dependence is dominant in the terms k_1 and k_2 , in the limit of $\epsilon \rightarrow 0$. Hence for finite noise intensity one only needs to consider the terms coming from the noise to explain the locking phenomena and the induced front propagation.

B. Generalization of the model

In order to understand the mechanism of noise induced front propagation, we have considered the subcritical Swift-Hohenberg equation. This model allows us to obtain analytical expressions for the mean velocity of the front. For an arbitrary model, it is thorny to obtain explicit formulas for the front velocity, since in general we do not have access to explicit expressions of spatial periodic solutions. Given a system that exhibits locking phenomena between a spatial periodic state and a nearby homogeneous state, we expect to find, close to a spatial bifurcation, an adequate envelope equation since the spatial periodic solutions in the onset of the bifurcation are harmonic, that is, we can describe the system with an adequate amplitude equation in a bi-critical point at the parameter space (spatial instability and both extended states are nearby). Hence, one can use an ansatz similar to (6) and noticing that the envelope satisfies the symmetries $\{x \rightarrow -x, A \rightarrow \bar{A}\}$, and $\{x \rightarrow x + x_o, A \rightarrow Ae^{iqx_o}\}$ [25], we can conclude that the amplitude equation has a form similar to (7) with real coefficients which can be written in the form

$$\partial_\tau A = f(|A|^2)A + \partial_{yy}A + \sum_{m,n} g_{mn} A^m \bar{A}^n e^{iq(1+n-m)x/\epsilon}$$

where the terms which have explicit exponential are non resonant and rapidly varying in space. However it is precisely due to these terms that we can explain the locking phenomena. One obtains similar terms (7), which can be dominant, when noise is considered. We can conclude then that the noise induces front propagation due to the asymmetry of the potential of the front core and the lack of a global stationary state.

Far from the bi-critical point, at the parameter space, where the above amplitude equation is valid, the dynamical system continues exhibiting the locking phenomena and noise induces front propagation. The locking phenomenon is a consequence of the spatial breaking of symmetry, that is, the front propagation is blocked as result of the appearance of a threshold for the core of the front. The noise induces front propagation can be understood as noise prefers to create or remove a bump, because the necessary perturbations to nucleate or destroy a bump are different. It is important to note that the mechanisms of these phenomena can be deduce analytically close to the bi-critical point and the subcritical Swift-

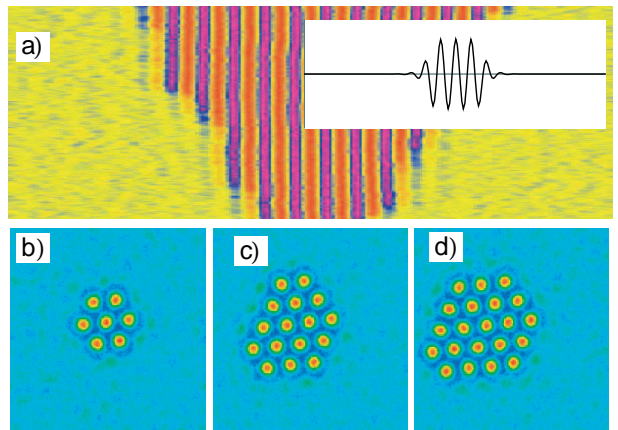


FIG. 10: Noise induces propagation of localized patterns. a) Numerical simulations of generalized Swift-Hohenberg model in one-extended system with additive noise. The inset figure is the initial condition. b), c), and d) are different snapshots of sequent time for numerical simulations of subcritical Swift-Hohenberg model in two-extended system with noise.

Hohenberg equation is the prototypical model of this bi-critical point.

The existence, stability properties, and bifurcation diagrams of localized patterns in the pinning range in one dimensional extended systems have recently been studied, from a dynamical point of view [23] and from the defect interaction point of view [34]. When we consider the effects of noise on these solutions, we expect, due to our previous discussion, propagation of the interface of these localized patterns. In Fig.10 we show, in one and two extended dimensions, the noise induced propagation of one state into the other. The noise changes the size of the localized structures have been observed numerically in subcritical Swift-Hohenberg equation [35]. In one spatial dimension, one can then understand the localized pattern solutions as equilibrium points of the interaction of two fronts [34]. In two dimensional spatial systems, the understanding of the localized pattern is in progress. From the above results, one realizes that the localized patterns are unstable in nature, that is, in presence of noise. The velocity of propagation of the interfaces and fronts are proportional to Kramer's rate. Therefore, experimentally, one can observe these localized patterns, when noise is weak enough, for long intervals of time, are metastable states.

V. CONCLUSIONS

We have studied the effect of additive noise in a motionless front between a periodic spatial state and a homogeneous one, in more than a few dynamical systems relevant for different fields of physics. Numerical simulations show that noise induces propagation of this type of front. In order to figure out the mechanism of noise induces front propagation, we have perused a prototyp-

ical model of pattern formation, the subcritical Swift-Hohenberg equation with internal noise, which exhibits this type of front. Close to a bi-critical point (spatial instability and both extended states are nearby), we derive an adequate equation for the envelope and the core of the front. The envelope equation is characterized by the presence of non resonant terms, spatially forcing terms with high frequency, which are responsible of the locking phenomena, pinning range, and noise induces front propagation. These non resonant terms restore the spatial breaking symmetry suffers by the initial dynamics system and ignoring by the parasite symmetry of phase invariance of the resonant envelope equation. Hence, the resonant amplitude equation are appropriated to describe pattern formation, however, they are not adequate to describe the defect solution like front and localized structures. To describe these solution one must to consider relevant non resonant terms. The equation of the core of the front is characterized by an asymmetrical periodic potential plus additive noise. The conversion of random fluctuations into direct motion of core of the front is responsible of the propagation. We obtain an analytical expression for the velocity of the front, which is in quite good agreement with numerical simulations.

VI. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank D. Escaff, and M. Trejo for fruitful discussions. The simulation software *DimX* developed by P. Coulet and collaborators at the laboratory INLN in France has been used for all the numerical simulations. M.G.C. and E.T. acknowledge the support of FONDECYT projects 1020782 and 1020374, FONDAP grant 11980002, and ECOS-CONICYT collaboration programs.

APPENDIX A

We have stated in the text that noise is always resonant in the reduction to the normal form in the neighborhood of an instability. Our discussion will follow closely our previous works. If we have a dynamical system

$$\partial_t \underline{U}(t) = \underline{F}(\underline{U}(t), \{\vec{\lambda}\}) + \eta \underline{H}(t, \underline{U}(t)); \quad (\text{A1})$$

where $\underline{U}(t) = \sum_{\alpha=1}^N U_{\alpha}(t) \underline{e}_{\alpha}$, $\underline{F}(\underline{U}(t), \{\vec{\lambda}\}) = \sum_{\alpha=1}^N F_{\alpha}(\underline{U}(t), \{\vec{\lambda}\}) \underline{e}_{\alpha}$, $\underline{H}(t, \underline{U}(t)) = \sum_{\alpha=1}^N H_{\alpha}(t, \underline{U}(t)) \underline{e}_{\alpha}$ is a noise term, $\{\vec{\lambda}\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ is a set of control parameters and η is a parameter measuring the intensity of the noise. Let E be the linear space of dimension N spanned by the basis vectors $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_N)$ and $\underline{U}^{(o)}(\{\vec{\lambda}\})$ a fixed point of (A1) for $\vec{\lambda} \in \Omega$, where Ω is a domain in the space of parameters $\{\vec{\lambda}\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$. If we linearize the deterministic

part $\partial_t \underline{U} = \underline{F}$ of (A1) around $\underline{U}^{(o)}(\{\vec{\lambda}\})$ putting $\underline{U} = \underline{U}^{(o)}(\{\vec{\lambda}\}) + \underline{V}$ we find a linear equation for \underline{V} of the form

$$\partial_t \underline{V} = \widehat{\Lambda}(\{\vec{\lambda}\}) \underline{V}; \quad (\text{A2})$$

The solution $\underline{U}^{(o)}(\{\vec{\lambda}\})$ is stable if all the eigenvalues of the operator $\widehat{\Lambda}(\{\vec{\lambda}\})$ have negative real parts. If we move $\vec{\lambda}$ in Ω and arrive to a critical point $\vec{\lambda}^{(c)}$ in the space of parameters ($\vec{\lambda}^{(c)} \in \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}$ the closure of Ω) where a set of eigenvalues $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ have zero real part, while the rest of the eigenvalues $(\sigma_{m+j}, j \geq 1)$ have negative real parts such that $\Re|\sigma_j| \geq d, j \geq m+1$, where d is a fixed quantity, then the solution $\underline{U}^{(o)}(\{\vec{\lambda}\})$ has lost its stability, and the operator $\widehat{\Lambda}(\{\vec{\lambda}\}) \equiv \widehat{L}^{(o)}$ has two invariant subspaces, the critical subspace $E^{(o)}$ and the stable space $E^{(-)}$. Let $(\underline{\chi}^{(1)}, \dots, \underline{\chi}^{(n)}, \underline{\chi}^{(n+1)}, \dots, \underline{\chi}^{(N)})$ be the Jordan basis of E associated to the operator $\widehat{L}^{(o)}$. One has $\widehat{L}^{(o)} \underline{\chi}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^N L_{\beta\alpha}^{(o)} \underline{\chi}^{(\beta)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, where $L_{\beta\alpha}^{(o)}$ is a Jordan matrix. The critical subspace $E^{(o)}$ is spanned by $(\underline{\chi}^{(1)}, \dots, \underline{\chi}^{(n)})$ and $E^{(-)}$ by $(\underline{\chi}^{(n+1)}, \dots, \underline{\chi}^{(N)})$. In the $\widehat{L}^{(o)}$ -invariant subspace $E^{(o)}$ the operator $\widehat{L}^{(o)}$ has all its eigenvalues with zero real part $(\sigma_1, \dots, \sigma_m), m \leq n$, and $\widehat{L}^{(o)} \underline{\chi}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^n J_{\beta\alpha} \underline{\chi}^{(\beta)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, where $J_{\alpha\beta}$ is an $n \times n$ Jordan matrix, and $J_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}^{(o)}, 1 \leq \alpha, \beta \leq n$. If $\underline{X} = \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha} \underline{\chi}^{(\alpha)} \in E$, we define the operators $P_{(0)}$ projecting on $E^{(o)}$, and $P_{(-)}$ projecting on $E^{(-)}$, by

$$P_{(0)} \underline{X} = \sum_{\alpha=1}^n X_{\alpha} \underline{\chi}^{(\alpha)}, P_{(-)} \underline{X} = \sum_{\alpha=n+1}^N X_{\alpha} \underline{\chi}^{(\alpha)}; \quad (\text{A3})$$

If we are in a neighborhood of the critical point $\vec{\lambda}^{(c)}$ we put $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}^{(c)} + \delta\vec{\lambda}$, $\underline{U}(t) = \underline{U}^{(o)}(\{\vec{\lambda}^{(c)}\}) + \underline{V}$, and then equation (A1) (without the noise term) is written as

$$\partial_t \underline{V} = \left[\widehat{L}^{(o)} \underline{V} + \underline{N}^{(o)}(\underline{V}) \right] + \left[\underline{D} + \widehat{L}^{(1)} \underline{V} + \underline{N}^{(1)}(\underline{V}) \right]; \quad (\text{A4})$$

where the terms in the first square bracket in the right hand side are of order zero in $\{\delta\vec{\lambda}\}$ and in η , and the terms in the second square bracket of order 1 (or more) in the unfolding parameters $\{\delta\vec{\lambda}\}$ and zero in η . If $\underline{D} = 0$, where \underline{D} is a constant vector belonging to E , the fixed point $\underline{U}^{(o)}(\{\vec{\lambda}^{(c)}\})$ is persistent in a neighborhood of $\{\vec{\lambda}^{(c)}\}$, $\widehat{L}^{(j)} \underline{V}$ are linear terms in \underline{V} , and $\underline{N}^{(j)}(\underline{V})$ are nonlinear in \underline{V} ($j = 1, 2$). In order to construct the normal form of (A4) we make the ansatz

$$\underline{V} = \left[\underline{U}^{[1,0]}(\vec{A}) + \underline{U}^{[2,0]}(\vec{A}) + \dots \right] + \left[\underline{U}^{[0,1]}(\vec{A}) + \underline{U}^{[1,1]}(\vec{A}) + \dots \right]; \quad (\text{A5})$$

where $\underline{X}^{[n_1, n_2]}$ stands for the part of \underline{X} which is of polynomial order n_1 in $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$, order n_2 in the unfolding parameters $\{\delta\lambda\}$ and zero in η . In (A5) we have $\underline{U}^{[1,0]}(\vec{A}) = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \chi^{(\alpha)}$ and the normal form is the "simplest" equation involving only the critical variables $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$. As shown and discussed in detail in [?]. The ansatz (A5) leads to self-contained equations for \vec{A} (the normal form) which are

$$\begin{aligned} \partial_t A_\alpha = & \left[f_\alpha^{[1,0]}(\vec{A}) + f_\alpha^{[2,0]}(\vec{A}) + \dots \right] \\ & + \left[f_\alpha^{[0,1]}(\vec{A}) + f_\alpha^{[1,1]}(\vec{A}) + \dots \right]; \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

where $f_\alpha^{[1,0]}(\vec{A}) = J_{\alpha\beta} A_\beta$. Adding the noise term in (A1) to equation (A4) we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{V} = & \left[\widehat{L}^{(0)} \underline{V} + \underline{N}^{(0)}(\underline{V}) \right] + \left[\underline{D} + \widehat{L}^{(1)} \underline{V} + \underline{N}^{(1)}(\underline{V}) \right] + \\ & \left[\widetilde{\underline{G}}(t) + \widehat{S}(t) \underline{V} + \underline{N}^{(2)}(t, \underline{V}) \right]; \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

where $\widetilde{\underline{G}}(t)$ is an additive noise, $\widehat{S}(t) \underline{V}$ a linear multiplicative noise, etc, and the added terms are of order η . In order to obtain the stochastic unfolding we change the ansatz (A5) adding in the right hand side a third set of terms

$$\begin{aligned} \underline{V} = & \left[\underline{U}^{[1,0]}(\vec{A}) + \underline{U}^{[2,0]}(\vec{A}) + \dots \right] \\ & + \left[\underline{U}^{[0,1]}(\vec{A}) + \underline{U}^{[1,1]}(\vec{A}) + \dots \right] \\ & + \left[\underline{U}^{[0,0,1]}(t) + \underline{U}^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) + \dots \right]; \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

where the notation $\underline{X}^{[n_1, n_2, n_3]}$ stands for the part of \underline{X} which is of polynomial order n_1 in \vec{A} , n_2 in $\{\delta\lambda\}$, and n_3 in η . The normal form (A6) will be now $(\alpha = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{aligned} \partial_t A_\alpha = & \left[f_\alpha^{[1,0]}(\vec{A}) + f_\alpha^{[2,0]}(\vec{A}) + \dots \right] \\ & + \left[f_\alpha^{[0,1]}(\vec{A}) + f_\alpha^{[1,1]}(\vec{A}) + \dots \right] + \\ & \left[\widetilde{f}_\alpha^{[0,0,1]}(t) + \widetilde{f}_\alpha^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) + \dots \right]; \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

We remark that the ansatz (A7) can be derived from a general stochastic non linear change of variables, i.e. the coefficients of the change of variables are now stochastic processes [37] in a similar way to what is done for the unfolding of the parameters or for the unfolding due to the addition of periodic perturbations to the original equation [36].

The problem now is to calculate the stochastic terms of the ansatz (A9), i.e.

$$\underline{U}^{[j,0,1]}(t, \vec{A}) = \sum_{\substack{\beta=1, \dots, N \\ \alpha_i=1, \dots, n}} U_{\alpha_1, \dots, \alpha_j; \beta}(t) A^{\alpha_1} \dots A^{\alpha_j} \chi^{(\beta)} \quad (\text{A10})$$

and the new random terms

$$\widetilde{f}_\alpha^{[j,0,1]}(t, \vec{A}) = \sum_{\alpha_i=1}^n \widetilde{f}_{\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_j}(t) A^{\alpha_1} \dots A^{\alpha_j} \quad (\text{A11})$$

in the stochastic normal form. We call Ξ and Φ the left and right hand side of equation (A7). Then we have

$$\begin{aligned} \Xi^{[0,0,1]} & \equiv (\partial_t \underline{V})^{[0,0,1]} = \\ (\partial_t A_\alpha)^{[0,0,1]} \frac{\partial \underline{U}^{[1,0]}(\vec{A})}{\partial A_\alpha} & + \widehat{\partial}_t \underline{U}^{[0,0,1]}(t) = \\ \widetilde{f}_\alpha^{[0,0,1]}(t) \chi^{(\alpha)} & + \widehat{\partial}_t \underline{U}^{[0,0,1]}(t); \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

where $\widehat{\partial}_t$ stands for the time derivative with respect to the explicit time dependence, i.e. the one in the random functions and not the one in $\{A_\alpha(t)\}$, and

$$\Phi^{[0,0,1]} = \widehat{L}^{(0)} \underline{U}^{[0,0,1]}(t) + \widetilde{\underline{G}}(t); \quad (\text{A13})$$

Then $\Xi^{[0,0,1]} = \Phi^{[0,0,1]}$ gives (putting $\widetilde{\underline{G}}(t) = \sqrt{\eta} \underline{G}(t)$, $\widetilde{f}_\alpha^{[j,0,1]} = \sqrt{\eta} f_\alpha^{[j,0,1]}$) gives

$$(\widehat{\partial}_t - \widehat{L}^{(0)}) \underline{U}^{[0,0,1]}(t) = \sqrt{\eta} \underline{G}(t) - \sum_{\alpha=1}^n \sqrt{\eta} f_\alpha^{[0,0,1]}(t) \chi^{(\alpha)}; \quad (\text{A14})$$

Projecting with \widehat{P}_0 ($\widehat{L}_0^{(0)} = \widehat{P}_0 \widehat{L}^{(0)} \widehat{P}_0$) we obtain

$$(\widehat{\partial}_t - \widehat{L}_0^{(0)}) \widehat{P}_0 \underline{U}^{[0,0,1]}(t) = \widehat{P}_0 \sqrt{\eta} \underline{G}(t) - \sum_{\alpha=1}^n \sqrt{\eta} f_\alpha^{[0,0,1]}(t) \chi^{(\alpha)}; \quad (\text{A15})$$

Since $\widehat{L}_0^{(0)}$ has eigenvalues with zero real part the linear stochastic differential equation (A13) has no stationary solution. One has $\underline{G}(t) = \sum_{\alpha=1}^N G_\alpha(t) \chi^{(\alpha)}$, $\widehat{P}_0 \underline{G}(t) = \sum_{\alpha=1}^n G_\alpha(t) \chi^{(\alpha)}$, and if we assume that the random functions $\{G_\alpha(t), \alpha = 1, \dots, n\}$ are δ - correlated white noises with zero mean and correlations $\langle G_\alpha(t) G_\beta(t') \rangle = \delta^{\alpha\beta} \delta(t - t')$, then (A13) is a Markov process whose conditional probability density $P \left[\widehat{P}_0 \underline{U}^{[0,0,1]}(t) = \underline{X} \mid \widehat{P}_0 \underline{U}^{[0,0,1]}(0) = \underline{X}^{(0)} \right]$ has no limit when $t \rightarrow \infty$, and then one has no stationary probability and no stationary state. We solve then (A15) choosing $\widehat{P}_0 \underline{U}^{[0,0,1]}(t) = 0$ and consequently

$$f_\alpha^{[0,0,1]}(t) = G_\alpha(t), \alpha = 1, 2, \dots, n; \quad (\text{A16})$$

This equation tells us that additive noise is always resonant as stated in the text. We can go to higher orders polynomials orders in \vec{A} and the conclusion will be the same. Let us calculate the terms in the linear stochastic unfolding, for this we need the projection $P_- \underline{U}^{[0,0,1]}(t)$ on the stable subspace E_- . We project (A14) with P_- to obtain

$$\widehat{\partial}_t - \widehat{L}_-^{(0)}) \widehat{P}_- \underline{U}^{[0,0,1]}(t) = P_- \sqrt{\eta} \underline{G}(t); \quad (\text{A17})$$

Since all the eigenvalues of $\widehat{L}_-^{(0)} \equiv P_- \widehat{L} P_-$ have negative real parts this linear equation has can be solved for $\widehat{P}_- \underline{U}^{[0,0,1]}(t)$ and we can go to the next order in $\sqrt{\eta}$. One has

$$\begin{aligned} \underline{\Xi}^{[1,0,1]} &\equiv (\partial_t \underline{V})^{[1,0,1]} = \\ &(\partial_t A_\alpha)^{[1,0,1]} \frac{\partial \underline{U}^{[1,0]}(\vec{A})}{\partial A_\alpha} + \widehat{\partial}_t \underline{U}^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) + \\ &f_\alpha^{[1,0]} \frac{\partial \underline{U}^{[1,0,1]}(\vec{A})}{\partial A_\alpha} + (\partial_t A_\alpha)^{[0,0,1]} \frac{\partial \underline{U}^{[2,0]}}{\partial A_\alpha}; \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}^{[1,0,1]} &= \widehat{L}^{(0)} \underline{U}^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) + \\ &N_2^{(0)}(\underline{V} = \underline{U}^{[1,0]}(\vec{A}), \underline{V} = \underline{U}^{[0,0,1]}(t)) + \\ &N_2^{(0)}(\underline{V} = \underline{U}^{[0,0,1]}(t), \underline{V} = \underline{U}^{[1,0]}(\vec{A})) + \\ &\widehat{S}(t) \underline{U}^{[1,0]}(\vec{A}); \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

Then $\underline{\Xi}^{[1,0,1]} = \underline{\Phi}^{[1,0,1]}$ gives $(f_\alpha^{[1,0]} = J_{\alpha\beta} A^\beta)$

$$\begin{aligned} (\widehat{\partial}_t + J_{\alpha\beta} A^\beta \frac{\partial}{\partial A^\alpha} - \widehat{L}^{(0)}) \underline{U}^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) = \\ \underline{I}^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) - \\ \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) \underline{\chi}^{(\alpha)}; \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

with $\underline{I}^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) = \sum_{\alpha=1, \dots, N} I_{\beta\alpha}^{[1,0,1]}(t) A_\beta \underline{\chi}^{(\alpha)}$. The operator on the right hand side is $(\widehat{\partial}_t + \Pi(\widehat{L}^{(0)}))$ where $\Pi(\widehat{L}^{(0)}) \equiv J_{\alpha\beta} A^\beta \frac{\partial}{\partial A^\alpha} - \widehat{L}^{(0)}$ is the homological operator and $\underline{I}^{[1,0,1]}(t, \vec{A})$ can be read directly from (A18, A19). Projecting (A20) with \widehat{P}_0 we obtain

$$\begin{aligned} (\widehat{\partial}_t + J_{\alpha\beta} A^\beta \frac{\partial}{\partial A^\alpha} - \widehat{L}_0^{(0)}) \widehat{P}_0 \underline{U}^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) = \\ \widehat{P}_0 \underline{I}^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) - \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) \underline{\chi}^{(\alpha)}; \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

Then, since $(J_{\alpha\beta} A^\beta \frac{\partial}{\partial A^\alpha} - \widehat{L}_0^{(0)})$ has eigenvalues with zero real part, we have the same situation as in equation (A15) and we must solve (A21) putting $\widehat{P}_0 \underline{U}^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) = 0$ and then

$$f_\alpha^{[1,0,1]}(t, \vec{A}) = \sum_{\substack{\beta=1, \dots, n \\ \alpha=1, \dots, n}} I_{\beta\alpha}^{[1,0,1]}(t) A_\beta; \quad (\text{A22})$$

This equation is the analogous of (A16) for linear multiplicative noise and once again we find that we have to keep all the noise terms. For a complete discussion of the stochastic center manifold.

APPENDIX B

We call M the noise term in equation (3), where the product of the function of the stochastic process $y_o(\tau)$ with the white noise $\zeta(y, \tau)$ is interpreted in the Stratonovic sense. We discretize the variable y as $\{y_j = \Delta j, j \in Z\}$, i.e., $y_j - y_{j-1} = \Delta$. Since $\langle \zeta(y_l, \tau) \zeta(y_{l'}, \tau') \rangle = \delta(y_l - y_{l'}) \delta(\tau - \tau') = \frac{\delta_{l,l'}}{\Delta} \delta(\tau - \tau')$. We define $\tilde{\zeta}_l(\tau) \equiv \Delta^{1/2} \zeta(y_l, \tau)$, which has correlation $\langle \tilde{\zeta}_l(\tau) \tilde{\zeta}_{l'}(\tau') \rangle = \delta_{l,l'} \delta(\tau - \tau')$. With this, M can be written in the form

$$M = \sqrt{\tilde{\eta}} \Delta \sum_l a_l(y_o(\tau)) \frac{\tilde{\zeta}_l(\tau)}{\sqrt{\Delta}}; \quad (\text{B1})$$

with

$$a_l(y_o(\tau)) \equiv (-1) R_{oy}(y_l - y_o(\tau)) \cos\left(\frac{q y_l}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}}\right); \quad (\text{B2})$$

and equation (3) takes the form

$$\begin{aligned} \dot{y}_o(\tau) &= A(y_o(\tau)) + M \equiv \\ &A(y_o(\tau)) + \sqrt{\tilde{\eta}} \Delta \sum_l a_l(y_o(\tau)) \tilde{\zeta}_l(\tau); \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

If we discretize the time τ as $\tau_j = \beta j, j \in Z, \beta = \tau_j - \tau_{j-1}$, we can write (B3) as for the variables $y_o(\tau_j) = y_{o,j}$. Defining $\Delta y_{o,j} = y_{o,j} - y_{o,j-1}$,

$$\begin{aligned} \Delta y_{o,j} &= \beta(A(y_{o,j}) + \\ &\sqrt{\tilde{\eta}} \Delta \sum_l a_l(y_{o,j-1} + \frac{1}{2} \Delta y_{o,j}) \Delta w_{lj}); \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

where we have discretized $a_l(y_o(\tau))$ in the midpoint of the interval $[t_{j-1}, t_j]$ due to the Stratonovic prescription. In (B4) one has $\Delta w_{lj} \equiv w_{lj} - w_{lj-1}, w_{lj} = w_l(\tau_j)$, where $\{w_l(\tau), l \in Z\}$ are independent Wiener processes defined by $dw_l(\tau) = \tilde{\zeta}_l(\tau) d\tau$, and consequently $\Delta w_{lj} \Delta w_{l'j} = \beta \delta_{l,l'}$. Since $\Delta y_{o,j}$ is of order $\beta^{1/2}$, we obtain up to order β the expression

$$\begin{aligned} \Delta y_{o,j} &= \beta(A(y_{o,j-1}) + \\ &\frac{\sqrt{\tilde{\eta}} \Delta}{2} \sum_l a'_l(y_{o,j-1}) \Delta y_{o,j} \Delta w_{lj} + \\ &\sqrt{\tilde{\eta}} \Delta \sum_l a_l(y_{o,j-1}) \Delta w_{lj}); \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

where the prime denotes derivative with respect to the argument. Using the fact that Δw_{lj} is of order $\beta^{1/2}$, the dominant term in the latter equation is

$$\Delta y_{o,j} = \sqrt{\tilde{\eta}\Delta} \sum_l a_l(y_{o,j-1}) \Delta w_{lj}; \quad (\text{B6})$$

Replacing in the right hand side and using $\Delta w_{lj} \Delta w_{l'j} = \beta \delta_{l,l'prime}$ we obtain

$$\begin{aligned} \Delta y_{o,j} = & \beta(A(y_{o,j-1} + \\ & \frac{\tilde{\eta}\Delta}{2} \sum_l a'_l(y_{o,j-1}) a_l(y_{o,j-1}) + \\ & \sqrt{\tilde{\eta}\Delta} \sum_l a_l(y_{o,j-1}) \Delta w_{lj}); \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

The stochastic differential equation for $y_o(\tau)$ is now written in the prepoint discretization (Ito prescription). The noise term is a sum of independent white noises $\sqrt{\tilde{\eta}\Delta} \sum_l a_l(y_{o,j-1}) \Delta w_{lj}$ which can be replaced by a white noise $\sqrt{\tilde{\eta}\Delta} \tilde{\Omega}(\tau)$ with

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} = & \Delta \sum_l a_l(y_o(\tau))^2 = \\ & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy R_{oy}(y - y_o(\tau))^2 (1 + \cos(\frac{2qy}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}})); \end{aligned}$$

and $\zeta(\tau)$ is a white noise of zero mean and correlation $\langle \zeta(\tau) \zeta(\tau') \rangle = \delta(\tau - \tau')$. The contribution of cosine in the integral gives an exponentially small contribution of order $e^{-c \frac{2q}{|\epsilon|^{1/2}}}$, $c = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\alpha}$, and consequently we approximate $\tilde{\Omega}$ by

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy R_{oy}(y - y_o(\tau))^2 = 1/2a$$

On the other hand, the second term in the right hand side of equation B7 is

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta}{2} \sum_l a_l(y_{o,j-1}) a'_l(y_{o,j-1}) = \\ & \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dy (1 + \cos(\frac{2qy}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}})) \frac{d}{dy} R_{oy}(y - y_o(\tau))^2; \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

Since $\int_{-\infty}^{\infty} R_{oy} R_{oyy} = 0$, we can finally write the stochastic differential equation for $y_o(\tau)$ in the form

$$\begin{aligned} \dot{y}_o(\tau) = & A(y_o(\tau)) + \\ & \frac{\tilde{\eta}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dy R_{oy}(y) R_{oyy}(y) \cos(\frac{2q(y + y_o(\tau))}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) + \\ & \sqrt{\frac{\tilde{\eta}}{2a}} \zeta(\tau); \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

We make all the integrals in B9, giving the following equation

$$\begin{aligned} \dot{y}_o(\tau) = & -\frac{3a\delta\sigma}{2} + \text{Re}(K) \cos(\frac{2qy_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) - \\ & \text{Im}(K) \sin(\frac{2qy_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) + \text{Re}(J) \cos(\frac{4qy_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) - \\ & \text{Im}(J) \sin(\frac{4qy_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) - \frac{\tilde{\eta}}{4} (\text{Re}(S) \cos(\frac{2qy_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) - \\ & \text{Im}(S) \sin(\frac{2qy_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}})) + \frac{\sqrt{\tilde{\eta}}}{4} \zeta(\tau); \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

where $S = -\frac{iq}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}} \frac{9}{64} I$, I and K are defined in formula (5) in the text, and J is defined by

$$J \equiv \frac{a}{10} \int_{-\infty}^{\infty} dy R_{oy}(y) R_o(y)^5 e^{\frac{4qy_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}};$$

We show below that $K \sim O(e^{-c \frac{2q}{\sqrt{|\epsilon|}}})$, $I \sim O(e^{-c \frac{2q}{\sqrt{|\epsilon|}}})$, $J \sim O(e^{-c \frac{4q}{\sqrt{|\epsilon|}}})$, consequently we can neglect in (B10) the terms proportional to J . We obtain

$$\begin{aligned} \dot{y}_o(\tau) = & -\frac{3a\delta\sigma}{2} + e^{-c \frac{2q}{\sqrt{|\epsilon|}}} (K_1 \cos(\frac{2qy_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) + \\ & K_2 \sin(\frac{2qy_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}})) + \frac{\sqrt{\tilde{\eta}}}{4} \zeta(\tau); \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

where K_1 and K_2 are of order 1 and defined in (5prima). Finally equation (B11) coincides with (5) in the text. We obtain now the estimates for the oscillatory integrals K , I and J . We define \tilde{I} (μ is a positive number),

$$\tilde{I} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-\gamma y}}{(1 + e^{-\nu y})^n} e^{i\omega \frac{y}{\mu}};$$

Using the contour Γ in Fig.11, we consider the integral in the complex plane I . We call I_L the integral over Γ_1

$$I_L = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L dx \frac{e^{-\gamma x}}{(1 + e^{-\nu x})^n} e^{i\omega \frac{x}{\mu}} = \tilde{I}$$

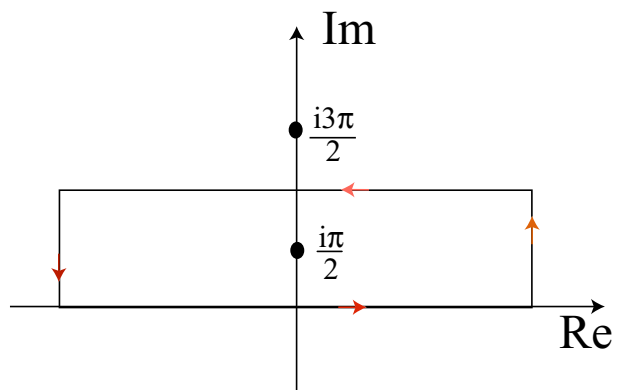


FIG. 11: Contour of integration Γ on the complex plane.

The explicit calculation of the integral over the contour Γ gives, in the limit $L \rightarrow \infty$ the result

$$I = (1 - e^{-\frac{2\omega\pi}{\mu\nu}})I_L \quad (\text{B12})$$

The residue theorem gives $I = 2\pi i\alpha^{(0)}$, where $\alpha^{(0)} \approx e^{-\frac{\omega\pi}{\mu\nu}} P(\frac{i\omega}{\mu})$ is the residue in the pole $z = i\pi/\nu$ and $P(i\omega/\mu)$ is a polynomial with maximum degree $(2n-3)$. We obtain then for \tilde{I} the final result

$$\tilde{I} = e^{-\frac{\omega\pi}{\mu\nu}} P(\frac{i\omega}{\mu}) + O(e^{-\frac{2\omega\pi}{\mu\nu}}) \quad (\text{B13})$$

APPENDIX C

We shall study here the stochastic process $R_o(y - y_o(\tau))^2 \Theta_{1y}(y, y_o(\tau))$, which involves the derivative of the phase $\Theta_1(y, y_o(\tau))$ and prove that the mean value of $\langle R_o^2 \Theta_{1y} \rangle$ is bounded for all values of τ . The value of $R_o^2 \Theta_{1y}$ is given by equation (6) in the text and we can see there that we have in the last term an undefined product of a function of $y_o(\tau)$ with the noise $\zeta(y, \tau)$. As explained before we have to interpret this product with the Stratonovic prescription. We write this noise term as $\frac{\tilde{\eta}}{4} Q$, with

$$Q = \int_{-\infty}^y dy' R_o(y' - y_o(\tau)) \sin(\frac{2qy'}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) \zeta(y', \tau); \quad (\text{C1})$$

We proceed as in Appendix B and we use the same notation. The discretized version of (??) involves using the midpoint discretization for the τ dependence in $y_o(\tau)$ due to the Stratonovic prescription. Then $R_o(y - y_{o,j-1}(\tau) + \frac{1}{2}\Delta y_{o,j}) = R_o(y - y_{o,j-1}(\tau) + \frac{1}{2}\Delta y_{o,j}) + \frac{1}{2}\Delta y_{o,j} R_o'(y - y_{o,j-1}(\tau))$, and one has

$$Q = \Delta^{1/2} \sum_l R_o(y_l - y_{o,j-1}) \sin(\frac{2qy_l}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) \tilde{\zeta}_{l,j} |_{\gamma_o} \quad (\text{C2})$$

$$+ \Delta^{1/2} \sum_l \frac{1}{2} R_{oy}(y_l - y_{o,j-1}) \sin(\frac{2qy_l}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) \Delta y_{o,j} \frac{\Delta w_{lj}}{\beta}; \quad (\text{C3})$$

where γ_o stands for the prepoint discretization. Replacing $\Delta y_{o,j}$ using (B6) and the correlation of the Wiener processes, we obtain $Q = Q_1 + Q_2$ with

$$Q_1 = -\frac{\sqrt{\tilde{\eta}}}{2} \int_{-\infty}^y dy' R_{oy}(y' - y_o(\tau))^2 \sin(\frac{2qy'}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}); \quad (\text{C4})$$

$$Q_2 = \int_{-\infty}^y dy' R_o(y' - y_o(\tau)) \sin(\frac{2qy'}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) \zeta(y', \tau) |_{\gamma_o} \quad (\text{C5})$$

We replace now in the expression (6) for $R_o^2 \Theta_{1y}$ the last term $\frac{\sqrt{\tilde{\eta}}}{a} Q$ using (C4, C5) and we perform in all the

integrals (except in Q_2) the change of variables $y = y' - y_o(\tau)$. The final result is

$$R_o(y - y_o(\tau))^2 \Theta_{1y}(y, y_o(\tau)) =$$

$$-\frac{1}{16\sigma} (\text{Im}(S^{(1)}(y - y_o(\tau)) \cos(2q \frac{y_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}})) +$$

$$\text{Re}(S^{(1)}(y - y_o(\tau)) \sin(2q \frac{y_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}))) +$$

$$\frac{27}{128} (\text{Im} S^{(2)}(y - y_o(\tau)) \cos(2q \frac{y_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) +$$

$$\text{Re}(S^{(2)}(y - y_o(\tau)) \sin(2q \frac{y_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}))) +$$

$$\frac{27}{240} (\text{Im} S^{(3)}(y - y_o(\tau)) \cos(4q \frac{y_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) +$$

$$\text{Re}(S^{(3)}(y - y_o(\tau)) \sin(4q \frac{y_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}})))$$

$$-\frac{9\tilde{\eta}}{256a} (\text{Im} I(y - y_o(\tau)) \cos(2q \frac{y_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) +$$

$$\text{Re}(I(y - y_o(\tau)) \sin(2q \frac{y_o(\tau)}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}))) +$$

$$\frac{\tilde{\eta}^{1/2}}{a} \int_{-\infty}^y dy' R_o(y' - y_o(\tau)) \sin(2q \frac{y}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}) \zeta(y', \tau) |_{\gamma_o} \quad (\text{C6})$$

where (j=1,2)

$$S^{(j)}(y - y_o(\tau)) = \int_{-\infty}^{y - y_o(\tau)} dy' \frac{1}{(1 + e^{-\sqrt{\frac{3}{4}} y'})^{1+j}} e^{i \frac{2qy'}{\alpha|\epsilon|^{1/2}}},$$

$$S^{(3)}(y - y_o(\tau)) = \int_{-\infty}^{y - y_o(\tau)} dy' \frac{1}{(1 + e^{-\sqrt{\frac{3}{4}} y'})^3} e^{i \frac{4qy'}{\alpha|\epsilon|^{1/2}}},$$

$$I(y - y_o(\tau)) = \int_{-\infty}^{y - y_o(\tau)} dy' \frac{e^{-2\sqrt{\frac{3}{4}} y'} 1}{(1 + e^{-\sqrt{\frac{3}{4}} y'})^{1+j}} e^{i \frac{2qy'}{\alpha|\epsilon|^{1/2}}}; \quad (\text{C7})$$

We remark that $I(y - y_o(\tau))$ is bounded and moreover $\lim_{y \rightarrow \infty} I(y - y_o(\tau)) = I = O(e^{-c \frac{2q'}{\alpha\sqrt{|\epsilon|}}})$ (see Appendix

A). The expression (??) can be written in the form

$$\begin{aligned}
R_o(y - y_o(\tau))^2 \Theta_{1y}(y, y_o(\tau)) = & \\
-\frac{1}{16\sigma} \left| S^{(1)}(y - y_o(\tau)) \right| \cos(2q \frac{y_o(\tau)}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}} - \varphi^{(1)}) & \\
+\frac{27}{128} \left| S^{(2)}(y - y_o(\tau)) \right| \cos(2q \frac{y_o(\tau)}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}} - \varphi^{(2)}) & \\
+\frac{27}{240} \left| S^{(3)}(y - y_o(\tau)) \right| \cos(4q \frac{y_o(\tau)}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}} - \varphi^{(3)}) & \\
-\frac{9\tilde{\eta}}{256a} |I(y - y_o(\tau))| \cos(2q \frac{y_o(\tau)}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}} - \varphi) & \\
+\frac{\tilde{\eta}^{1/2}}{a} \int_{-\infty}^y dy' R_o(y' - y_o(\tau)) \sin(\frac{2qy'}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}}) \zeta(y', \tau) |_{\gamma_o}; & \quad (C8)
\end{aligned}$$

where, for $j=1,2,3$.

$$\cos(\varphi^{(j)}) = \frac{\text{Im}(S^{(j)}(y - y_o(\tau)))}{|S^{(1)}(y - y_o(\tau))|}, \quad (C9)$$

$$\sin(\varphi^{(j)}) = \frac{\text{Re}(S^{(j)}(y - y_o(\tau)))}{|S^{(1)}(y - y_o(\tau))|}; \quad (C10)$$

and the same formulas can be written for $\{\cos(\varphi), \sin(\varphi)\}$ a replacing $S^{(j)}(y - y_o(\tau))$ for $I(y - y_o(\tau))$. We prove now that the functions $S^{(j)}(y - y_o(\tau))$ are bounded. These integrals are of the type

$$\tilde{S}(y - y_o(\tau)) = \int_{-\infty}^{y - y_o(\tau)} dy' \frac{e^{i\Omega \frac{y'}{\mu}}}{(1 + e^{-\sqrt{\frac{3}{4}} y'})^n}; \quad (C11)$$

where $n' = (m' + n' + 1)/2$ is always an entire number, $\Omega' = (m' - n' - 1)q/\alpha$, $\mu = \sqrt{\epsilon}$, and the integrals S comes from a non-resonant term (see equation (4) in the text) of the for $c_{m'n'} A^{m'} \bar{A}^{n'} e^{i(m'-n'-1)q/\alpha}$. The functions $S^{(1)}(y - y_o(\tau))$, $S^{(2)}(y - y_o(\tau))$, and $S^{(3)}(y - y_o(\tau))$ correspond to $(m' = 3, n' = 0, \Omega' = 2q/\alpha)$, $(m' = 4, n' = 1, \Omega' = 2q/\alpha)$ and $(m' = 5, n' = 0, \Omega' = 4q/\alpha)$, respectively. Rescaling $\tilde{S}(y - y_o(\tau)) = \frac{4}{\sqrt{3}} S(\tilde{y} - \tilde{y}_o(\tau)) = \sqrt{\frac{3}{4}}(y - y_o(\tau))$, we have

$$S(y - y_o(\tau)) = \int_{-\infty}^{\tilde{y} - \tilde{y}_o(\tau)} dy' \frac{e^{i\Omega \frac{y'}{\mu}}}{(1 + e^{-2y'})^n}; \quad (C12)$$

where $\Omega = \frac{4}{\sqrt{3}}\Omega'$. To calculate S we use the contour Γ of figure 2.

Using the theorem of residues

$$J = \int_{\Gamma} dz \frac{e^{i\Omega \frac{z}{\mu}}}{(1 + e^{-2z})^n} = 2\pi\alpha^{(0)}; \quad (C13)$$

where $\alpha^{(0)} \sim e^{-\Omega\pi/2\mu}$ is the residue at the pole $z = i\pi/2$ of the integrand. The sum of the integrals over Γ_1 and Γ_2 gives $S(y - y_o(\tau))(1 - e^{-\Omega\pi/2\mu})$, and the integral over Γ_2 has the value $ie^{i\Omega(y - y_o(\tau))}M$, with

$$M = \int_0^\pi dy \frac{e^{\Omega \frac{y}{\mu}}}{(1 + e^{-2iy - 2(\tilde{y} - \tilde{y}_o(\tau))})^n}; \quad (C14)$$

A short calculation gives, for the modulus of M , the bound

$$\begin{aligned}
|M| \leq \int_0^\pi dy \frac{e^{i\Omega \frac{y}{\mu}}}{(1 + e^{-2(\tilde{y} - \tilde{y}_o(\tau))})^n} = & \\
\frac{\mu}{2} \frac{1 - e^{-\frac{\Omega\pi}{\mu}}}{(1 + e^{-2(\tilde{y} - \tilde{y}_o(\tau))})^n}; & \quad (C15)
\end{aligned}$$

We have then from (C9)

$$S(\tilde{y} - \tilde{y}_o(\tau)) = \frac{2\pi i \alpha^{(0)}}{1 - e^{-\frac{\Omega\pi}{\mu}}} - i \frac{e^{i\Omega(\tilde{y} - \tilde{y}_o(\tau))}}{1 - e^{-\frac{\Omega\pi}{\mu}}} M; \quad (C16)$$

Since M is bounded by $O(\mu = \sqrt{\epsilon})$ according to (11), we conclude from (C12) that it is bounded by a quantity of $O(\sqrt{\epsilon})$ for all values of \tilde{y} . If we take the mean value of $\langle R_o^2 \Theta_{1y} \rangle$ in (5) the last term vanishes due to the $\gamma_{(o)}$ discretization and all the other terms are bounded due to (12) and the bound $O(e^{-c\frac{2q}{\alpha\sqrt{\epsilon}}})$ for I .

[1] W. Horstenke and R. Lefever, *Noise-induced transition* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
[2] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
[3] J. Gracia-Ojalvo and J.M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems* (Springer-Verlag, New York, 1999).
[4] C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo and R. Toral, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3395 (1994).
[5] C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo, R. Toral and R. Kawai, *Phys. Rev. E* **55**, 4084 (1997).

[6] J. Garcia-Ojalvo et. al. *Phys. Rev. E* **54**, 6918 (1996).
[7] J. Garcia-Ojalvo, A. Hernandez-Machado, and J.M. Sancho, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1542 (1993).
[8] A. Becker and L. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 995 (1994).
[9] J. Buceta, M. Ibañes, J.M. Sancho and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **67**, 021113 (2003).
[10] M. G. Zimmermann, R. Toral, O. Piro, and M. San Miguel *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3612-3615 (2000).
[11] L.Q. Zhou, X. Jia and Q. Ouyang, *Phys. Rev. Lett.* **88**,

- 138301 (2002).
- [12] M.G. Clerc, C. Falcon, and E. Tirapegui, Phys. Rev. Lett. **94**, 148302 (2005).
- [13] R.A. Fisher, Ann. Eugenics **7**, 355 (1937); A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskunov, Bull. Univ. Moskou Ser. Int. Se. A **1**, 1(1937).
- [14] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, Rev. Mod. Phys. **850**, 51 (1993).
- [15] O.T. Valls, and L.M. Lust, Phys. Rev. B **44**, 4326 (1991); J. Armero et. al., Phys. Rev. Lett. **76**, 3045 (1996); M. A. Santos and J.M. Sancho, Phys. Rev. E **59**, 98 (1999); Phys. Rev. E **64**, 016129 (2001). A. Rocco, U. Ebert, and W. van Saarloos, Phys. Rev. E **62**, R13 (2000).
- [16] P. Collet and J.P. Eckmann, *Instabilities and fronts in extended systems* (Princeton University Press, Princeton 1990).
- [17] W. van Saarloos, Phys. Rep. 386, 29 (2003).
- [18] M.G. Clerc, S. Residori and A. Petrossian, Phys. Rev. E, **71**, 015205(R) (2005).
- [19] J.D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer-Verlag, Berlin 1989).
- [20] S.Camazine, J.L. Deneubourg, N.R. Franks, J. Sneyd, G. Theraulaz, and E. Bonabeau, *Self-Organization in Biological Sestems* (Princeton University Press, Princeton 2001).
- [21] M.G. Clerc, D. Escaff and V.M. Kenkre, submitted to Phys. Rev. E.
- [22] Y. Pomeau, Physica D **23**, 3 (1986).
- [23] P. Couillet, C. Riera and C. Tresser, Phys. Rev. Lett. **84**, 3069 (2002).
- [24] D. Bensimon, B.I. Shraiman, and V.Croquette, Phys. Rev. Lett. **38**, 5461 (1988).
- [25] P. Couillet, R. Rojas, E. Tirapegui, C. Tresser, in preparation.
- [26] P. Reimann and P. Hanggi, Appl. Phys. A, **75**, 165 (2002).
- [27] C.Elphick, E.Tirapegui, M. E.Brachet, P.Couillet, E.Tirapegui, Physica D, **29**, 95 (1987).
- [28] P.H.Couillet, C.Elphick, E.Tirapegui, Phys.Lett.Vol. **111A**, 277(1985).
- [29] F.Baras, P.H.Couillet, E.Tirapegui, Journal of Stat.Phys., **45**, 745 (1986).
- [30] C.Elphick, M.Jeanerret, E.Tirapegui, Journal of Stat.Phys., **48**, 925 (1987).
- [31] E.Tirapegui, in *Lecture Note in Mathematics 1331*, eds.R.Bamón, R.Labarca, J.Palis Jr., Springer-Verlag.
- [32] F.Langouche, D.Roekaerts,E.Tirapegui, *Functional integration and semiclassical expansions*, Reidel (1982).
- [33] E.B. Dynkin and A.A. Juschkewitz, *Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse* (Springer, Berlin 1969).
- [34] M.G. Clerc, and C. Falcon, Physica A **356**, 48 (2005).
- [35] H. Sakaguchi and H. Brand, Physica D **96**, 2745 (1998)
- [36] C. Elphick, G. Iooss, and E. Tirapegui, Phys. Lett. A **120**, 459 (1987).
- [37] O. Descalzi, and E. Tirapegui, "Normal Forms In Non-linear Dynamics, in *Fundamentals and Applications of Complex Systems*", Editor. G. Zgrablich (Nueva Editorial Universitaria, UNSL, Argentina 1999).

Apéndice B

CÁLCULO DE INTERACCIÓN DE DEFECTOS EN LA ECUACIÓN DE SWIFT-HOHENBERG SUBCRÍTICA

Usando la solución frente estacionario encontrada en el Capítulo 4, que conecta un estado periódico estable con un estado homogéneo estable

$$A_{\pm} = \sqrt{\frac{3/4}{1 + e^{\pm\sqrt{3/4}(y-y_0)}}} e^{i\theta},$$

estudiaremos la interacción de defectos en la ecuación de Swift-Hohenberg subcrítica en torno al punto de Maxwell. Partiendo del ansatz

$$A(y, \tau) = (A_-(y-y_1(\tau)) + A_+(y-y_1(\tau)) - \sqrt{\frac{3}{4}} + \rho(y, \tau, y_1(\tau), y_2(\tau))) e^{i\Theta(y_1, y_2, y, \tau)}, \quad (\text{B.0.1})$$

donde $\{\rho, \Theta\}$ y sus derivadas temporales son correcciones de orden $\delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_m$, realizaremos un cálculo de interacción de defectos, en ausencia de ruido. Introduciendo este ansatz en la ecuación de la envolvente 4.1.4 que incluye los términos no-resonantes, promovemos a variables dinámicas los corazones de ambos frentes $y_1(\tau)$ e $y_2(\tau)$. Encontraremos dos ecuaciones, una para la parte real y otra para la parte imaginaria. Como se puede ver en los artículos del Apéndice A, la condición de solubilidad para la fase no existe, ya que es integrable. Es más, se demuestra que la fase es acotada. Entonces, la condición de solubilidad relevante será en la parte real. Por simplicidad de la notación llamaremos

$$u(y, y_1, y_2) = A_-(y - y_1(\tau)) + A_+(y - y_1(\tau)) - \sqrt{\frac{3}{4}}. \quad (\text{B.0.2})$$

Linealizando en ρ , y siguiendo la notación del capítulo anterior, encontramos la ecuación

$$\begin{aligned} -\dot{y}_1 \partial_y A_- A_-(y - y_1(\tau)) - \dot{y}_2 \partial_y A_+(y - y_1(\tau)) &= \mathbf{L}\rho + \delta\epsilon u(y, y_1, y_2) \\ &+ \left(\frac{1}{9\nu} u(y, y_1, y_2)^3 - \frac{1}{2} u(y, y_1, y_2)^5 \right) \cos\left(2q \frac{y}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}}\right) \\ &- \frac{1}{10} u(y, y_1, y_2)^5 \cos\left(4q \frac{y}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}}\right) + c.e., \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

donde el operador \mathbf{L} tiene la forma

$$\mathbf{L} = \epsilon_m + 3u(y, y_1, y_2)^2 - 5u(y, y_1, y_2)^4 + \partial_{yy} \quad (\text{B.0.4})$$

y *c.e.* son correcciones exponencialmente pequeñas que provienen de la diferencia entre alguna potencia de $u(y, y_1, y_2)$ y sus componentes $(A_+, A_-, \sqrt{\frac{3}{4}})$.

Nuevamente, este es un operador que tiene la propiedad siguiente: cuando $y \ll y_1$ se comporta como el operador autoadjunto

$$\mathbf{L}_+ = \epsilon_m + 3A_+(y - y_2)^2 - 5A_+(y - y_2)^4 + \partial_{yy}$$

que tiene como autovector con valor propio cero a $\partial_y A_+(y - y_2)$, salvo correcciones exponencialmente pequeñas, y cuando $y \gg y_2$, se comporta como el operador autoadjunto

$$\mathbf{L}_- = \epsilon_m + 3A_-(y - y_1)^2 - 5A_-(y - y_1)^4 + \partial_{yy}$$

que tiene como autovector con valor propio cero a $\partial_y A_+(y - y_2)$, salvo correcciones exponencialmente pequeñas. Para definir el operador autoadjunto, usamos el producto interno de Hilbert, es decir, $\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x)dx$. Bajo este producto, para $|y_1 - y_2| \gg \sqrt{\frac{4}{3}}$ (el decaimiento exponencial de la solución frente estacionario), estos autovectores son ortogonales bajo el producto interno antes definido.

Tomando esto en cuenta, usaremos estos dos "seudoautovectores" para calcular dos condiciones de solubilidad para los corazones de ambos frentes. Proyectando sobre el primer autovector, $\partial_y A_-(y - y_1)$, encontramos la condición de solubilidad

$$\begin{aligned} & -\dot{y}_1 \langle \partial_y A_- | \partial_y A_- \rangle = \\ & \langle \partial_y A_- | \delta \epsilon u(y, y_1, y_2) \rangle \\ & + \langle \partial_y A_- | \left(\frac{1}{9\nu} u(y, y_1, y_2)^3 - \frac{1}{2} u(y, y_1, y_2)^5 \right) \cos\left(2q \frac{y}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}}\right) \rangle \\ & - \langle \partial_y A_- | \frac{1}{10} u(y, y_1, y_2)^5 \cos\left(4q \frac{y}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}}\right) \rangle \\ & + 3 \langle \partial_y A_- | A_-^2 (A_+ - \sqrt{\frac{3}{4}}) \rangle \\ & - 5 \langle \partial_y A_- | A_-^4 (A_+ - \sqrt{\frac{3}{4}}) \rangle. \end{aligned} \tag{B.0.5}$$

El corchete de la izquierda es una integral, como vimos en el Apéndice A, igual a $\frac{3}{4}$. El primer corchete de la derecha es igual a una derivada total, que integrando rápidamente vemos que es igual a $\frac{3}{8}$. Los otros dos tipos de corchetes son más complicados y hay que calcularlos con más cuidado.

El tipo de corchetes que nos interesarán será de la forma

$$J(y_1, y_2)_- = 3 \langle \partial_y A_- | A_-^2 (A_+ - \sqrt{\frac{3}{4}}) \rangle, \tag{B.0.6}$$

conteniendo las correcciones exponencialmente pequeñas y los corchetes de la forma

$$I(y_1, y_2)_- = \langle \partial_y A_-(y - y_1) | u(y, y_1, y_2)^m \cos\left(2q \frac{y}{\alpha \sqrt{|\epsilon|}}\right) \rangle, \tag{B.0.7}$$

que contienen la oscilación rápida del patrón subyacente.

El primer tipo de integral se calcula, sabiendo que, asintóticamente,

$$\begin{aligned} A_+(y - y_2) &\sim \sqrt{\frac{3}{4}}(1 - e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}(y-y_2)}), \\ A_-(y - y_1) &\sim \sqrt{\frac{3}{4}}(1 - e^{+\sqrt{\frac{3}{4}}(y-y_1)}) \end{aligned} \quad (\text{B.0.8})$$

cuando $y \gg y_2$ y $y \ll y_1$, respectivamente. Con esto calculamos la integral

$$J(y_1, y_2) = \sqrt{\frac{3}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} dy A_-(y - y_1)^2 \partial_y A_-(y - y_1) e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}(y-y_2)}, \quad (\text{B.0.9})$$

para $y \gg y_2$. Esta integral tiene la particularidad de depender de la distancia entre los corazones de los frentes, ya que la derivada de la solución frente asintóticamente crece tan rápido como decae la solución frente. Expresando las soluciones explícitamente, vemos que

$$J(y_1, y_2) = -\sqrt{\frac{3}{4}}^{5/2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}(y-y_2)} \frac{e^{\sqrt{\frac{3}{4}}(y-y_1)}}{(1 + e^{\sqrt{3/4}(y-y_2)})^{3/2}}. \quad (\text{B.0.10})$$

Suponiendo que $y_2 \gg y_1$, podemos aproximar de buena manera la integral anterior por

$$J(y_1, y_2) = -\sqrt{\frac{3}{4}}^{5/2} \int_{y_1}^{y_2} dy e^{-\sqrt{\frac{3}{4}}(y-y_2)} \frac{e^{\sqrt{\frac{3}{4}}(y-y_1)}}{(1 + e^{\sqrt{3/4}(y-y_2)})^{3/2}}, \quad (\text{B.0.11})$$

donde las correcciones a esta integral son exponencialmente despreciables con respecto a los términos dominantes de la integral. Hay que recordar que esta integral ya es exponencialmente pequeña. Usando la coordenada de distancia relativa $\Delta = y_2 - y_1$, y el cambio de variable $z = y - \Delta$, podemos reducir esta integral a

$$J(y_1, y_2) = -2\sqrt{\frac{3}{4}}^{5/2} e^{\sqrt{3/4}\Delta} \int_{-\Delta/2}^0 dy \frac{1}{(1 + e^y)^{3/2}}. \quad (\text{B.0.12})$$

Simulaciones numéricas dan cuenta que la integral anterior es directamente proporcional a la distancia de los corazones, con constante de proporcionalidad extremadamente cerca 1/2. Es más, para exponentes mayores en el denominador, el cambio de la constante de proporcionalidad es casi insensible. Por ello, podemos calcular el primer corchete como

$$J(y_1, y_2) = -2\sqrt{\frac{3}{4}}^{5/2} e^{\sqrt{3/4}\Delta} \Delta/2. \quad (\text{B.0.13})$$

Para diferentes potencias de A_- , el cálculo será el mismo y sólo cambiará el coeficiente delante de la integral.

Para el segundo corchete, el que posee la parte oscilatoria debemos realizar un cálculo en el plano complejo, como el que realizamos en el Apéndice A. Este cálculo entregará una contribución oscilatoria, con un coeficiente exponencialmente pequeño e igual a $= 16\sqrt{3}q^2 \exp(-4\pi q/\sqrt{\epsilon})\epsilon$, que ya calculamos.

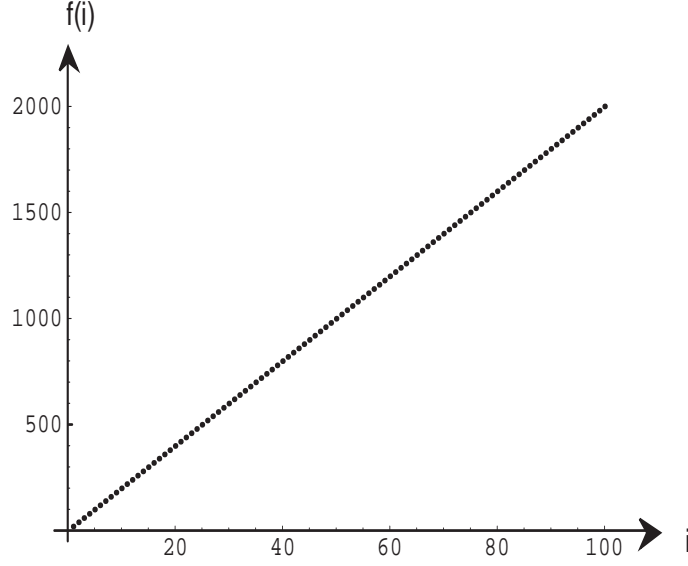


Fig. B.1: Simulaciones numérica de la integral B.0.12. Cada punto representa una integración numérica. En el eje horizontal, el número de la iteración i , y en el vertical, el cálculo de la integral, donde $\Delta = 20i$. El fiteo numérico entrega $f(\Delta/2) = (0,4956 \pm 0,0020)\Delta$

Para el otro autovector, el cálculo es el mismo, sólo que cambian los signos de los decaimientos exponenciales. Usando la coordenada distancia relativa, $\Delta = y_2 - y_1$, y de centro de masa, $R = (y_2 + y_1)/2$, encontramos que, la interacción entre defectos se describe por las funciones

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{d\tau} &= f(\Delta, R) \equiv -\alpha\Delta \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\Delta\right) \\ &\quad + \beta \cos(2q\Delta/\sqrt{\epsilon}) \cos(2qR/\sqrt{\epsilon} + \phi_o) + 2\delta\epsilon, \\ \frac{dR}{d\tau} &= g(\Delta, R) \equiv \beta \sin(2q\Delta/\sqrt{\epsilon}) \sin(2qR/\sqrt{\epsilon} + \phi_o) \end{aligned} \quad (\text{B.0.14})$$

donde ϕ_o está asociada a la traslación espacial con respecto al patrón subyacente. Para la talla de las estructuras localizadas, fijamos $2qR/\sqrt{\epsilon} + \phi_o = 2\pi$ y vemos que la función de interacción de defectos que nos da la talla de la estructura localizada está dada por

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = f(\Delta) \equiv -\alpha\Delta \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\Delta\right) + \beta \cos(2q\Delta/\sqrt{\epsilon}) + 2\delta\epsilon. \quad (\text{B.0.15})$$

donde $\alpha = 27\sqrt{3}/64$ y $\beta = 64\sqrt{3}q^2 \exp(-q4\pi/\sqrt{\epsilon})/3\epsilon$.