



**UNIVERSIDAD DE CHILE**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**INTERACCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE ESTRUCTURAS  
LOCALIZADAS EN SISTEMAS NO LINEALES**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER  
EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

**TANIA JAVIERA SAUMA PÉREZ**

**PROFESORES GUÍA**

NICOLÁS MUJICA, MARCEL CLERC

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN EVALUADORA**

Francisco Melo

Stefania Residori

Germán Varas

SANTIAGO DE CHILE

ABRIL 2012

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Solitones Hidrodinámicos no propagativos . . . . .	2
1.2. Vórtices en un Cristal Líquido Nemático . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	5
<b>2. Marco Experimental: Solitones hidrodinámicos no propagativos.</b>	<b>7</b>
2.1. Montaje . . . . .	7
2.2. Adquisición de datos . . . . .	8
2.2.1. Imágenes . . . . .	8
2.2.2. Medidas capacitivas . . . . .	14
2.2.3. Preparación de la mezcla . . . . .	18
<b>3. Marco Teórico: Caracterización del sistema</b>	<b>19</b>
3.1. Modos Propios . . . . .	19
3.2. Descripción teórica . . . . .	23
3.2.1. Solitones disipativos . . . . .	24
<b>4. Resultados Experimentales: Caracterización del solitón</b>	<b>28</b>
4.1. Resultados experimentales . . . . .	28
4.1.1. Frecuencias propias del sistema . . . . .	28
4.1.2. Diagramas de Bifurcación . . . . .	32
<b>5. Interacción de solitones</b>	<b>40</b>
5.1. Marco Teórico: Interacción de solitones . . . . .	40
5.1.1. Ley de interacción de a pares . . . . .	40

5.2. Resultados experimentales . . . . .	43
5.2.1. Solitones en oposición de fase . . . . .	44
5.2.2. Solitones en fase . . . . .	46
<b>6. Marco Experimental: Vórtices en cristales líquidos</b>	<b>48</b>
6.1. Montaje experimental . . . . .	48
6.1.1. Imágenes . . . . .	50
6.1.2. Modulador espacial de la luz . . . . .	51
<b>7. Resultados Experimentales: Interacción y localización de vórtices</b>	<b>54</b>
7.1. Resultados experimentales . . . . .	54
7.1.1. Interacción de vórtices . . . . .	54
7.2. Condiciones de borde . . . . .	58
<b>8. Conclusiones</b>	<b>59</b>
8.1. Solitones Hidrodinámicos no propagativos . . . . .	59
8.2. Vortices en un cristal líquido nemático . . . . .	60
<b>A. Artículos</b>	<b>61</b>
A.1. Ley de interacción de a pares en un fluido vibrado parametricamente . . . . .	61
A.2. ¿Es posible forzar el movimiento de los solitones hidrodinámicos no propagativos?	76
A.3. Caracterización Experimental de la Ley de Interacción de pares de vórtices disipativos	88

# Capítulo 1

## Introducción

Los sistemas fuera del equilibrio se caracterizan por buscar nuevos equilibrios al compensar la inyección de energía con la disipación, lo que permite la existencia de estructuras que no se encuentran en los sistemas en equilibrio. Estas estructuras, ya sean patrones o estados localizados, pueden observarse en diversos sistemas fuera del equilibrio, por ejemplo sistemas granulares, reacciones químicas, cristales líquidos e incluso en nuestra vida cotidiana, como en este camino en Licanray, en el sur de Chile, en la figura 1.1, donde luego de una intensa lluvia, el terreno se ha ablandado y con el pasar de los autos se observan estos agujeros de un tamaño bien definido.



Figura 1.1: Camino en el sur de Chile luego de una intensa lluvia, se observan agujeros de un tamaño bien definido en todo el camino.



Los sistemas que exhiben estados localizados suelen presentar una inestabilidad subcrítica [13], es decir, existen al menos dos estados estables en alguna región de parámetros, y la estructura localizada es el resultado de la conexión entre estos dos estados en una región acotada del espacio. Además, es necesario que el sistema no pueda ser descrito con un potencial de Lyapunov, ya que la estructura localizada en este caso no sería estable, y el sistema relajaría a uno de los dos estados.

En esta tesis se estudian dos sistemas fuera del equilibrio completamente distintos entre sí, pero ambos exhiben estructuras localizadas, uno corresponde a una capa de agua horizontal, vibrada verticalmente y el otro a un cristal líquido nemático al que se le aplica un campo eléctrico.

## **1.1. Solitones Hidrodinámicos no propagativos**

Los solitones hidrodinámicos no propagativos fueron descritos por primera vez por Wu en 1984 [1] y han sido estudiados experimentalmente desde entonces [6], [3], [5]. Son estructuras localizadas que pueden observarse en una celda rectangular cuya dimensión longitudinal es mucho mayor que la transversal, que a su vez es del mismo orden que la profundidad, que contiene una capa de agua vibrada verticalmente. Son una respuesta subarmónica a la vibración, es decir, oscilan a la mitad de la frecuencia de forzamiento, y su movimiento corresponde a un vaivén en la dirección transversal, mojando alternadamente la pared delantera y la trasera. En la figura 1.2 se muestra una superficie que representa al solitón cuando se encuentra en su máximo de amplitud.

La inyección de energía está determinada por la vibración a la que es sometida la capa de agua, mientras que la disipación se debe a tres mecanismos: gradientes de velocidad en el volumen, línea de contacto con las paredes de la celda y roce con el fondo, y ninguno de ellos puede despreciarse [8].

En la región de parámetros estudiada, los solitones hidrodinámicos no propagativos, si bien son estables, no aparecen de forma espontánea en el sistema, para observarlos es necesario agitar el agua con una paleta a una frecuencia similar a la frecuencia de los solitones, es decir, es necesario superar una barrera de nucleación para observar estas estructuras. Sin embargo, existen otras estructuras llamadas ondas de Faraday que se muestran en la figura 1.3, cuya barrera de nucleación es más pequeña, en este sistema donde el forzamiento es de baja frecuencia les basta el ruido propio del sistema para aparecer. Estas ondas han sido ampliamente estudiadas desde que fueran descritas originalmente por M. Faraday en 1831 [7], [9]. También son subarmónicas, pero a diferencia del

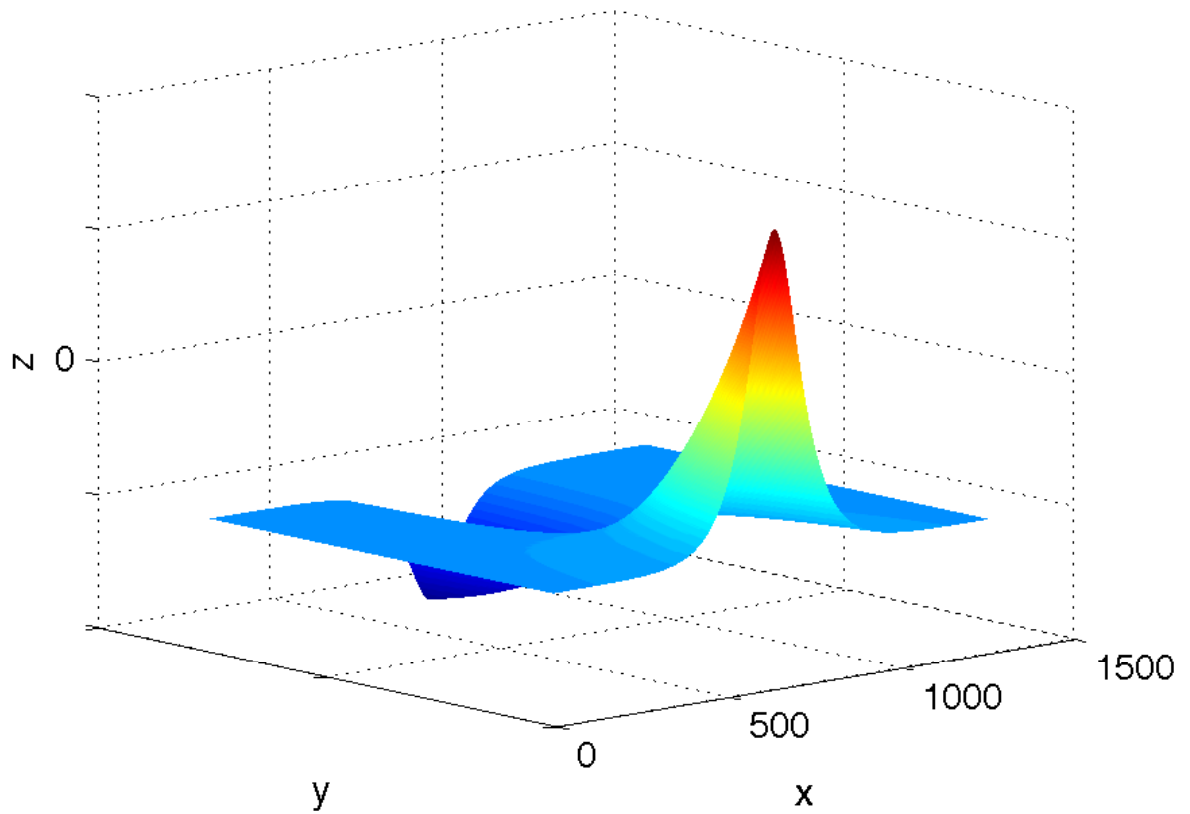


Figura 1.2: Superficie de un solitón calculada en base a los datos experimentales en la dirección longitudinal y el modelo propuesto por Wu [1] para la dirección transversal, corresponde a una secante hiperbólica en la dirección longitudinal y a una exponencial negativa en la transversal,

$$f(x, y) = (e^{ay} - b)A * \operatorname{sech} \frac{x-x_0}{w}$$

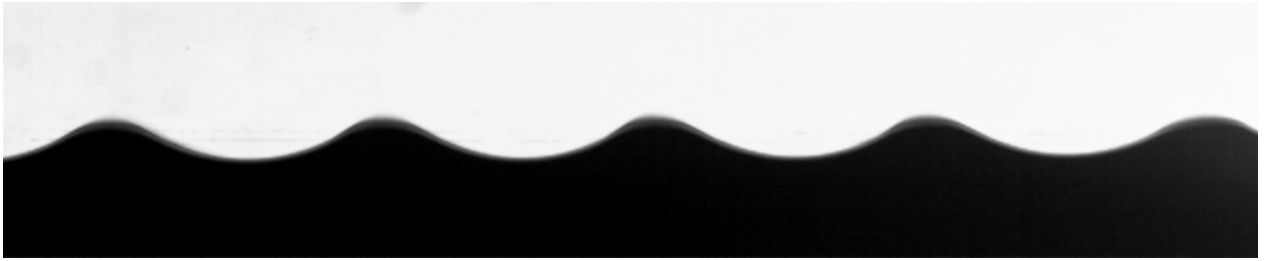


Figura 1.3: Ondas de Faraday, se observan en la misma región de parámetros que el solitón a estudiar

solitón son espacialmente extendidas.

Para generar un solitón en este sistema, es necesario superar la barrera de nucleación del mismo antes que las ondas de Faraday invadan el sistema.

## 1.2. Vórtices en un Cristal Líquido Nemático

Un cristal líquido es fluido compuesto por moléculas alargadas que se encuentran ordenadas de alguna forma, es decir, su función de correlación es anisotrópica. Según este ordenamiento se clasifican en nemáticos, esmécticos y quirales como se muestra en la figura 1.4

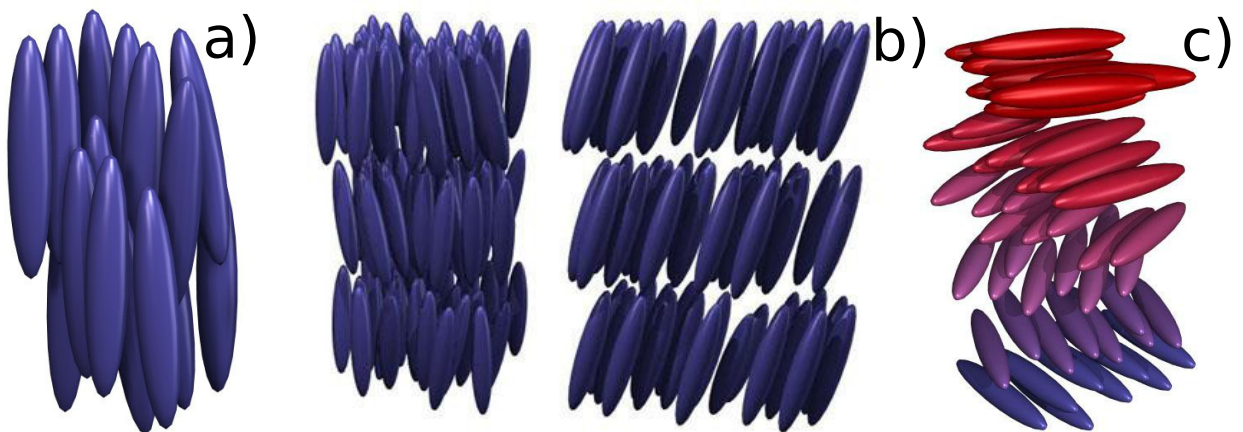


Figura 1.4: Las moléculas alargadas que componen un cristal líquido, se orientan de diferentes formas, la orientación a) corresponde a un cristal líquido nemático, la b) a uno esméctico y la c) a un colestérico o quiral

Los cristales nemáticos se orientan en una sola dirección privilegiada, los esmécticos presentan

capas donde en cada una de ellas predomina cierta orientación, mientras que los colestéricos se orientan de forma helicoidal.

En esta tesis se estudia un cristal líquido nemático de geometría homeotrópica, es decir, las moléculas que lo componen son perpendiculares a las paredes del recipiente que lo contienen debido al tratamiento que se le da a dicha superficie. Además tiene una anisotropía dieléctrica negativa, de modo que al aplicarse un campo eléctrico, el vector director, que indica la dirección en la que se orientan las moléculas del cristal líquido nemático, será perpendicular a la dirección del campo.

Al imponer un campo eléctrico las moléculas comienzan a reorientarse rompiendo la simetría rotacional del sistema al escoger una dirección para reorientarse, generándose así diferentes dominios de orientación, que al encontrarse generan vórtices.

En este sistema la inyección de energía está dada por un campo eléctrico impuesto mientras que la disipación está dada por [12] por la viscosidad del medio y es dependiente de la velocidad con que se desplazan los vórtices.

### **1.3. Objetivos**

El objetivo general de esta investigación es comprender cómo interactúan las estructuras localizadas de estos dos sistemas.

Como objetivo específico para el caso de los solitones hidrodinámicos no propagativos, primero es necesario caracterizar el sistema a estudiar; medir los modos propios de la superficie del agua con el fin de conocer la frecuencia del primer modo longitudinal y de escoger una celda apropiada para realizar los experimentos.

También resulta de interés estudiar la estabilidad del solitón para distintos valores de amplitud y de frecuencia de forzamiento. Para esto se elaboran diagramas de bifurcación fijando la frecuencia y variando la amplitud de forzaje, resulta relevante comparar estos resultados con las predicciones teóricas derivadas de la ecuación de Schrödinger no lineal con forzamiento paramétrico [10], [4].

Finalmente para el caso de los solitones hidrodinámicos no propagativos, se busca caracterizar la interacción de los mismos, tanto en fase como en oposición de fase.

En el caso de los vórtices en un cristal líquido nemático se quiere caracterizar la interacción entre un par de vórtices de carga distinta, y comparar estos resultados con las predicciones teóricas basadas en la ecuación de amplitud tipo Ginzburg-Landau. En particular se quiere mostrar el efecto

de la movilidad en la interacción. [14].

# Capítulo 2

## Marco Experimental: Solitones hidrodinámicos no propagativos.

### Resumen

En este capítulo se describe el sistema en el que se llevan a cabo los experimentos, así como también las distintas técnicas de medición: a través de imágenes y usando un sensor de altura. Estas técnicas serán seleccionadas dependiendo de los observables que se deseen medir. En caso que se quiera conocer la forma del solitón en detalle se utilizan imágenes, mientras que si se necesita conocer la altura del agua en solo un punto del canal, se utiliza el sensor de altura.

### 2.1. Montaje

El sistema a estudiar corresponde a una celda, llena parcialmente con agua, que puede ser vibrada verticalmente, como se muestra en la figura 2.1. La celda se fabrica de un bloque de acrílico que se desgasta para producir una cavidad de aproximadamente 2,5 cm de espesor, 10 cm de alto y de distintos largos. Se utilizan celdas de 28 cm y de 50 cm de largo, dependiendo de las necesidades experimentales. Por ejemplo, si se desea estudiar un solitón que no se desplaza a lo largo del sistema se utiliza la celda de 28 cm, en cambio, si se desea estudiar la dinámica del solitón, ya sea debido a gradientes de altura o a la presencia de otro solitón, se utiliza la celda de 50 cm. La profundidad del agua es de 2 cm. Al agua se le añaden 2 ml de Kodak Photo Flo para mejorar las propiedades

de mojado, lo que facilita la formación de solitones hidrodinámicos no propagativos, ya que tienen mucho contacto con la pared.

Para controlar el movimiento se utiliza un generador de funciones que produce una señal  $y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$  conectado a un amplificador de potencia, este a su vez está conectado a un vibrador electromecánico sobre el que se monta la celda. Se utilizan frecuencias  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  entre 10 y 11 Hz y aceleraciones cercanas a  $\Gamma = 0,15$ , donde se define  $\Gamma = \frac{A \cdot \omega^2}{g}$ , es decir, la aceleración cuando la amplitud es máxima, normalizada.

Para medir la aceleración del sistema se utiliza un acelerómetro piezoeléctrico adosado al fondo de la celda, el voltaje producido por el acelerómetro es proporcional a la aceleración del sistema con la constante de proporcionalidad 94,4 mV/g, donde  $g$  es la aceleración de gravedad. La señal de salida del acelerómetro pasa por un amplificador de carga y se conecta a un amplificador sincronizado en fase, cuya referencia es la señal de forzaje de la celda. La precisión de esta medida es de 0,001 g.

## 2.2. Adquisición de datos

### 2.2.1. Imágenes

Se realiza una adquisición de imágenes utilizando una cámara rápida IDT modelo Motion Pro X-3. Para iluminar el sistema desde atrás, se utiliza un arreglo de leds blancos y una pantalla de acrílico, también blanco, que difunde la luz de los leds. Al agua se le añaden 8 gotas de tinta negra para poder identificar las zonas con agua de las zonas sin agua al procesar las imágenes.

Usando Matlab es posible obtener la forma de la superficie para cada una de las imágenes, con un algoritmo que utiliza un umbral adaptativo buscando el punto donde la imagen cambia de blanco a negro.

Es importante destacar que utilizando este método no es posible ver bajo la línea del agua, de modo que cuando el máximo del solitón se encuentra en la parte de atrás del canal y el mínimo adelante, lo que se observa es la proyección del máximo sobre la pared delantera, de modo que la superficie que se detecta tiene una frecuencia dos veces mayor a la real, en la figura 2.2 se muestra el tipo de imágenes obtenidas con este método. En la figura 2.3 se muestra un diagrama espacio temporal obtenido mediante el algoritmo de umbral adaptativo, en esta figura es posible distinguir cuando el solitón está mojando la pared trasera y cuando está mojando la pared delantera, pues se

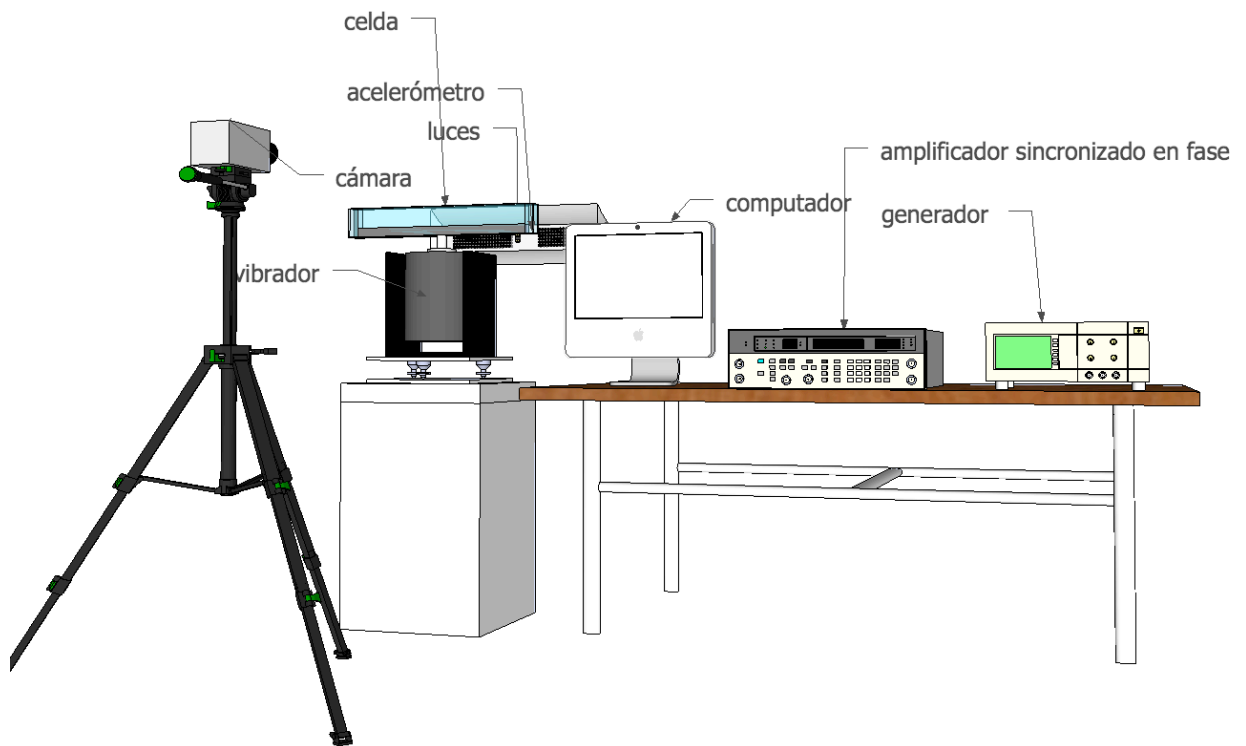


Figura 2.1: Montaje experimental: El canal con agua se monta sobre un vibrado electromecánico controlado por un generador de señales. La aceleración se mide con un acelerómetro usando un amplificador sincronizado en fase y la cámara toma imágenes que se transfieren al computador.



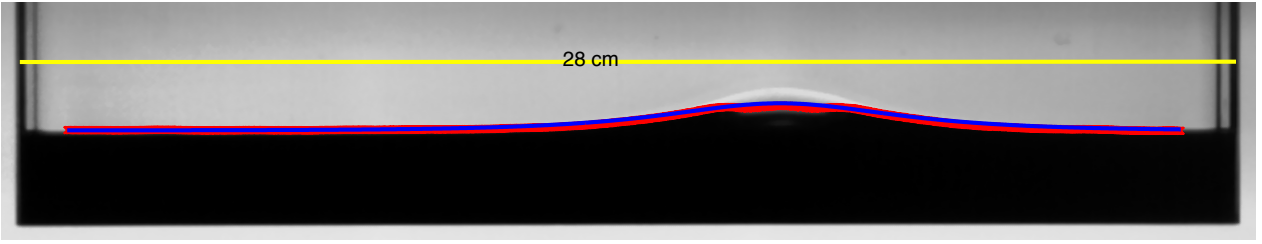


Figura 2.2: Imagen de un solitón en escala de grises. Se utiliza el nivel de gris de las imágenes para distinguir la superficie del agua usando Matlab. Se muestra también los puntos detectados de la superficie y el ajuste utilizado para medir la amplitud

ve más ancho cuando está adelante.

Una vez reconstruida la interfaz para cada imagen, es decir, para cada instante  $t$ , es posible ajustar una curva, dependiendo de la estructura a estudiar. En el caso de un solitón, se ajusta una secante hiperbólica con 4 parámetros libres:

$$y(x, t) = A(t) \operatorname{sech} \left( \frac{x - x_0(t)}{b(t)} \right) + c(t). \quad (2.1)$$

donde  $A(t)$  corresponde a la altura máxima del solitón en función del tiempo y  $b(t)$  al ancho; estas cantidades varían en función del tiempo debido a la oscilación hacia adelante y atrás del solitón.  $x_0(t)$  corresponde a la posición del centro en función del tiempo y varía debido a los desplazamientos longitudinales que puede realizar el solitón,  $c(t)$  corresponde a la línea de base del canal y oscila debido al forzamiento del sistema. Es posible entonces, ajustar una función a la serie temporal de  $A$  del tipo:

$$(A_0 + b - c) * |\sin \Omega t - \theta| + b \sin(\Omega t - \theta) + c, \quad (2.2)$$

El valor absoluto de una función oscilatoria modulado por otra oscilación, ya que la amplitud del solitón oscila con el vaivén del mismo de la pared delantera a la trasera.  $A_0$  corresponde a la amplitud del solitón,  $b$  a la diferencia de amplitud producida por el movimiento del solitón de la pared delantera a la trasera,  $\theta$  a la fase del solitón en el sistema de referencia fijo, de la cámara y  $c$  a la línea de base como se muestra en la figura 2.4.

Si el solitón se describe con una amplitud  $A(t)$  y una fase  $\phi_A(t)$ , en un sistema de referencia de la celda, la fase  $\phi_A$  se obtiene del restarle a la fase total  $\theta$  la fase de la línea de base  $\phi_c$ , la que se obtiene ajustando una función sinusoidal  $c(t) = C \sin(\Omega t + \phi_c)$  a la serie temporal de  $c(t)$ . Es decir  $\phi_A = \theta - \phi_c$ . Se obtienen estos parámetros para construir los diagramas de bifurcación

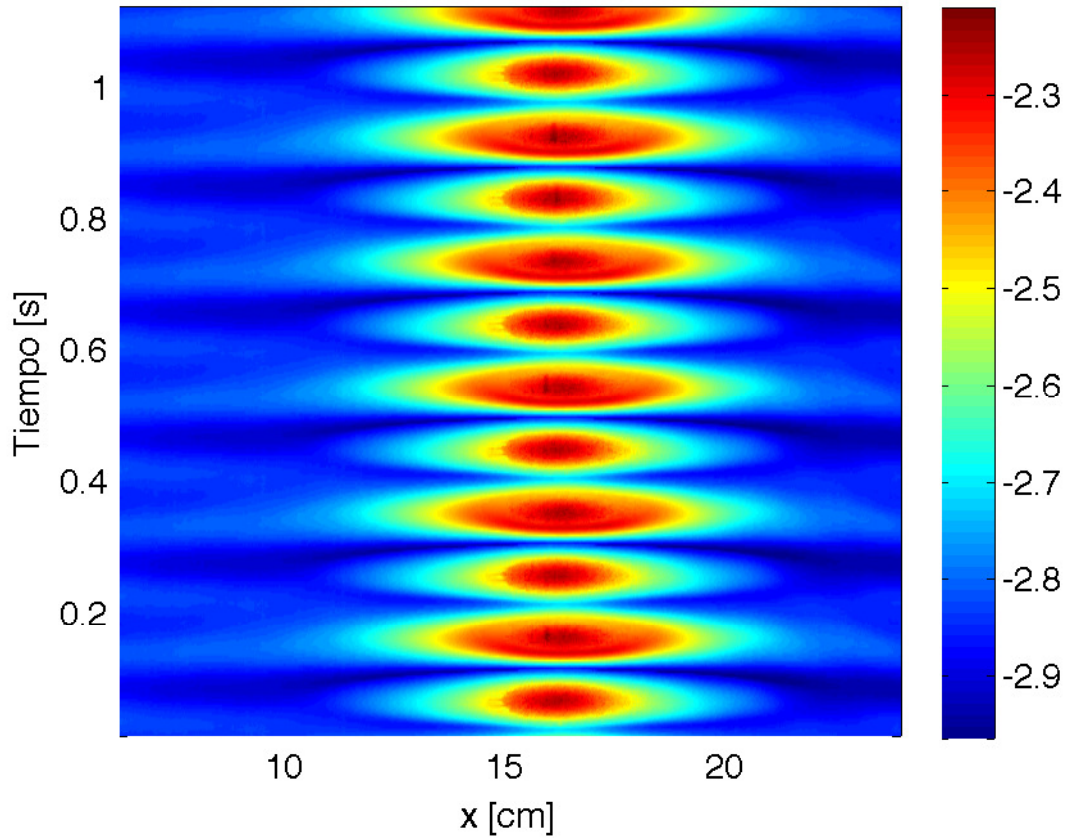


Figura 2.3: Diagrama espacio-temporal de un solitón disipativo para  $\Gamma = 0,073$ , corresponde a una adquisición rápida de imágenes lo que permite ver la oscilación de este en el tiempo. El eje horizontal representa el espacio y el vertical el tiempo. La escala de colores indica la altura del solitón, donde azul corresponde a alturas pequeñas y rojo a las grandes, se puede ver que la altura del solitón oscila en el tiempo, y que se observa solo la proyección del máximo, pues no es posible ver bajo la línea del agua con esta técnica

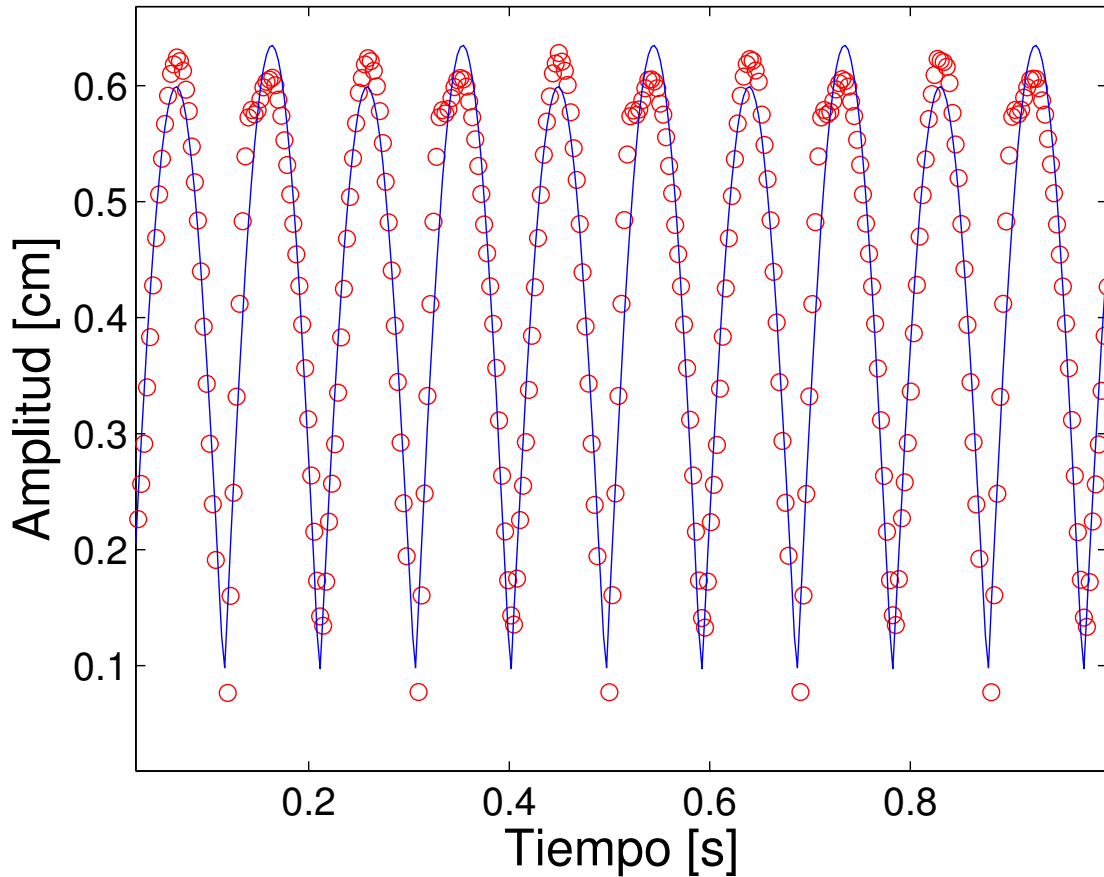


Figura 2.4: Se muestra la evolución temporal de la amplitud de un solitón a 10,5 Hz y  $\Gamma = 0,073$ . Los círculos (rojo) corresponden a los datos experimentales mientras que la línea continua (azul) al ajuste de  $(A_0 + b - c) * |\sin \Omega t - \theta| + b \sin(\Omega t - \theta) + c$ , este proceso permite determinar la fase y amplitud del solitón.

que se muestran en el capítulo 4, los que dan información sobre la dinámica general del sistema y permite comparar los resultados experimentales con lo predicho por la teoría.

Además es posible controlar la cámara con un generador de funciones. Esto es necesario en casos que se desee controlar la fase entre la señal de forzaje del sistema y la señal de adquisición o en casos en que se desee utilizar una frecuencia de adquisición muy baja, ya que la frecuencia mínima de la cámara sin este método es de 30 Hz. En particular, se utiliza una señal de la misma frecuencia que la que fuerza el sistema, o una fracción de esta, para obtener imágenes estroboscópicas y estudiar comportamientos lentos comparados con la dinámica propia del solitón, como se muestra en la figura 2.5. Utilizando un osciloscopio se puede medir la fase entre ambas señales,

esto es útil pues para ver al solitón siempre en su máxima altura, la fase entre las señales debe ser 0 y para verlo en su mínimo debe ser  $\frac{\pi}{2}$ .

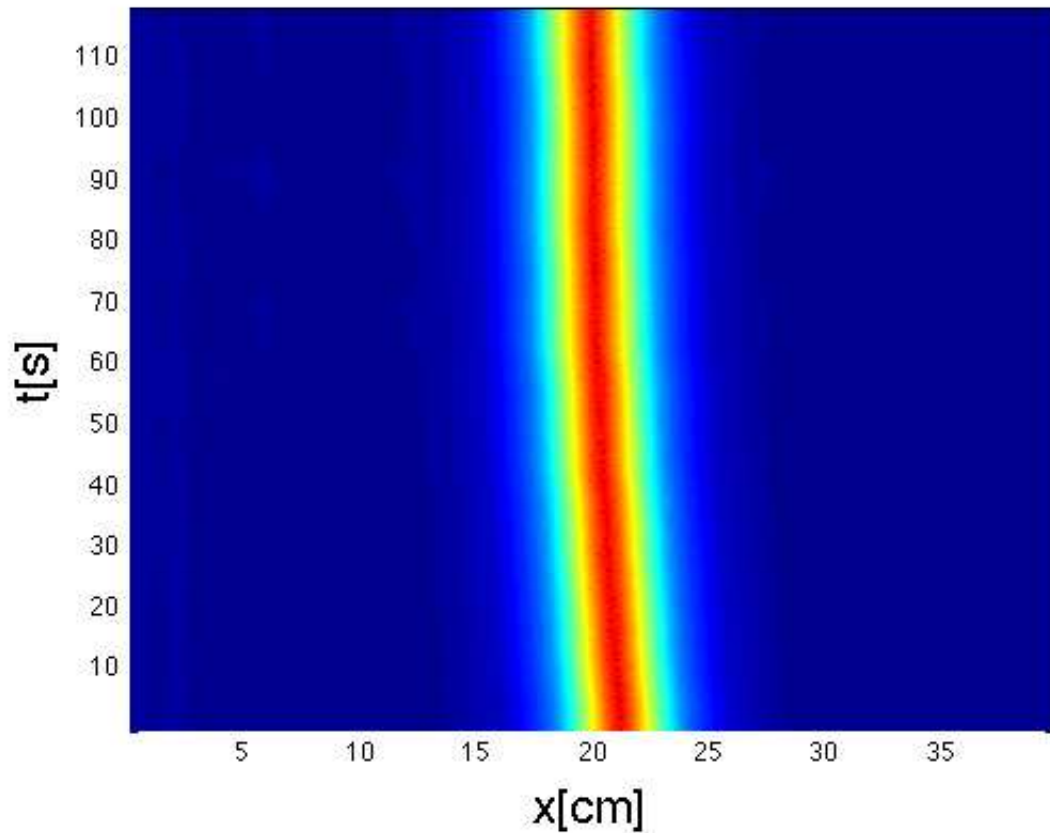


Figura 2.5: Diagrama espacio-temporal de un solitón disipativo Se tomaron imágenes estroboscópicamente, cada 4 ciclos. El eje horizontal representa el espacio y el vertical el tiempo. Se observa el solitón siempre en su máximo durante 110 segundos, en este tiempo el solitón se desplaza levemente hacia la izquierda.

## 2.2.2. Medidas capacitivas

Un conductor recubierto por un aislante y sumergido en agua, que también conduce, se comporta como un capacitor cilíndrico. Para este experimento, se utiliza un captor capacitivo cuyo conductor interno es un cable de cobre recubierto por esmalte, que es aislante, sumergido en agua como se muestra en la figura 2.7.

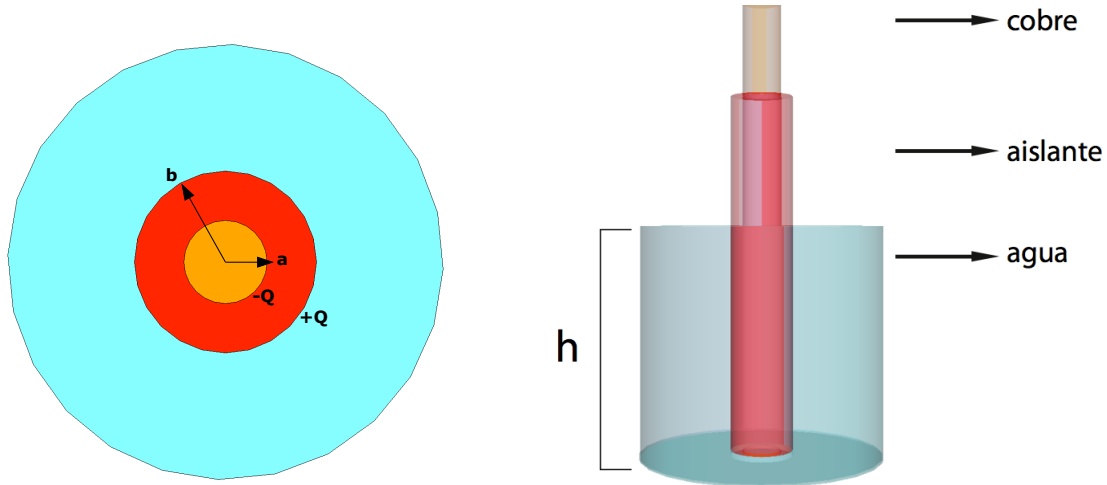


Figura 2.6: El cable de cobre recubierto por un material aislante, en este caso esmalte, sumergido en agua, se comporta como un condensador cuya capacidad depende de la altura de agua que lo recubre. La figura de la izquierda muestra una vista superior y la de la derecha una vista frontal

Si se considera que hay una carga total  $+Q$  en la interfaz entre el conductor interior y el aislante y  $-Q$  en la interfaz entre el aislante y el agua se puede utilizar la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

donde  $\rho$  corresponde a la densidad de carga y  $\varepsilon$  a la constante dieléctrica del aislante. Utilizando el teorema de la divergencia, se puede escribir la ecuación anterior de forma integral

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

si se asume que  $\vec{E}$  tiene simetría cilíndrica, esto es,  $\vec{E} = E(r) \cdot \hat{r}$  se tiene que:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon rh}, \quad (2.5)$$

pues la integral de  $z$  y  $\theta$  corresponden simplemente al área y  $h$  a la altura del agua que cubre el cable. Además se tiene que si  $a$  y  $b$  son los diámetros interno y externo de los cilindros a considerar:

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (2.6)$$

Utilizando  $\vec{E}$  obtenido anteriormente y reemplazándolo en la ecuación 1.6

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \int_a^b \frac{1}{r} dr, \quad (2.7)$$

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \ln \frac{b}{a}, \quad (2.8)$$

y sabemos que para un condensador

$$V = \frac{Q}{C_s}, \quad (2.9)$$

donde  $Q$  es la carga en el condensador y  $C_s$  la capacidad, de modo que es posible identificar  $C_s$  como

$$C_s = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (2.10)$$

La capacidad es lineal a la altura  $h$  del agua que rodea al cable. Por lo tanto conocer las variaciones en la capacidad, permite conocer las variaciones en la altura del agua circundante.

Se construye un circuito resonante como el que se muestra en la figura 2.7 con los siguientes valores:  $R_L = 25 \Omega$ ,  $L = 22 \text{ mH}$ ,  $R = 1,5 \Omega - 2 \text{ k}\Omega$  y  $C = 150 \text{ pF}$ .  $C_0$  es la capacidad del cable rodeado por agua cuando el sistema está en reposo y  $\Delta C$  son las variaciones de capacidad debido a las variaciones de altura con respecto a la altura de reposo.

Utilizando el formalismo de impedancia es posible escribir una ecuación para la corriente:

$$I_0 = \frac{V_0}{R + R_L + i\omega L + \frac{1}{i\omega C_{eq}}}, \quad (2.11)$$

donde

$$C_{eq} = C_0 + C + \Delta C. \quad (2.12)$$

La fase de la señal sobre la resistencia  $R$  está dada por:

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C_{eq}}}{R + R_L} \quad (2.13)$$

A pesar de que los valores típicos de  $\Delta C$  pueden ser del mismo orden que  $C_0$ , se puede elegir  $C$  suficientemente grande como para garantizar que  $\Delta C \ll C + C_0$  y hacer una expansión a primer orden de  $\Delta C$ :

$$\tan \phi = \frac{1}{R + R_L} \left\{ \omega L - \frac{1}{\omega C'} \left( 1 - \frac{\Delta C}{C'} \right) \right\} \quad (2.14)$$

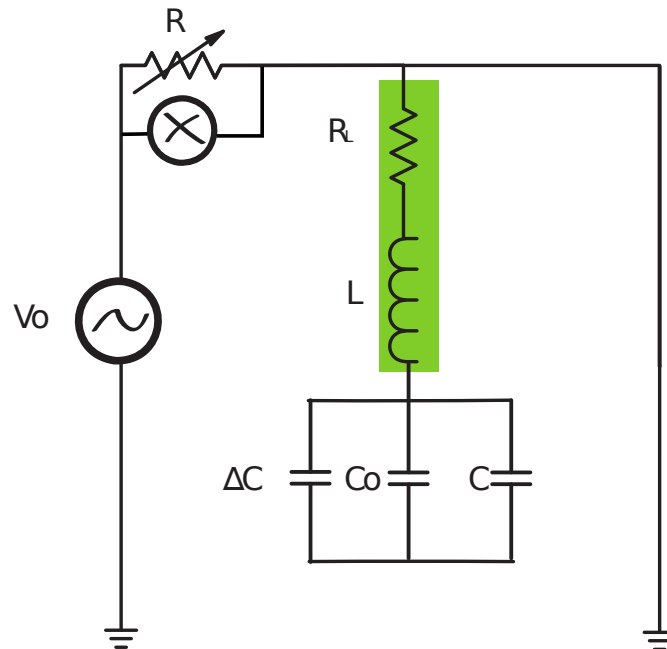


Figura 2.7: Circuito resonante que se utiliza para medir la altura relativa del agua. Los valores de los elementos del circuito son:  $R_L = 25 \Omega$ ,  $L = 22 \text{ mH}$ ,  $R = 1,5 \Omega - 2 \text{ k}\Omega$  y  $C = 150 \text{ pF}$ .  $C_0$  corresponde a la capacidad del cable rodeado por agua cuando el sistema está en reposo, mientras que  $\Delta C$  a las variaciones de capacidad del mismo debido a las variaciones de altura del agua. Se mide el voltaje diferencial sobre la resistencia variable  $R$

donde  $C' = C + C_0$ . Así, se obtiene una ecuación para la frecuencia de resonancia  $\omega^*$

$$\omega^* L - \frac{1}{\omega^* C'} = 0, \quad (2.15)$$

Por lo tanto,  $\omega^* = \sqrt{\frac{1}{LC'}}$ , lo que al introducirlo en la ecuación 1.14:

$$\tan \phi = \frac{1}{R + R_L} \left\{ -\omega^* L \frac{\Delta C}{C'} \right\} \quad (2.16)$$

lo que nos permite concluir que

$$\tan \phi = -\frac{\Delta C}{C'(R + R_L)} \sqrt{\frac{L}{C'}}, \quad (2.17)$$

es decir, la  $\tan \phi$  es proporcional a la  $\Delta C$  que a su vez es proporcional a la altura  $h$  del agua que rodea al cable  $h$ . Si además consideramos que las variaciones de la fase son pequeñas,  $\tan \phi \approx \phi$ . Se tiene que para la frecuencia de resonancia, las variaciones en la altura del agua son proporcionales a las variaciones de la altura que rodea al cable.

Para medir, se utiliza un generador de señales para alimentar el circuito con una señal sinusoidal de frecuencia igual a la de resonancia del circuito y se mide la fase de la señal de salida del circuito con un amplificador sincronizado en fase. Para encontrar la frecuencia de resonancia experimentalmente, se varía esta en torno al valor teórico, manteniendo el agua siempre en reposo, hasta ajustar la frecuencia para la cual la fase medida es cero, ya que según la ecuación 1.17 si la altura es cero, la señal de salida también lo será. El límite de frecuencia del amplificador sincronizado en fase utilizado es de 102 kHz de modo que se agrega  $C$  para garantizar que la frecuencia de resonancia del circuito sea menor, así, para el circuito utilizado se tiene que  $F^* \approx 87$  kHz. La salida del amplificador sincronizado en fase se conecta a un amplificador de bajo ruido, capaz de dejar pasar solo la banda de frecuencias de interés. Finalmente se adquieren los datos con una tarjeta de adquisición, que los traspa al computador.

La frecuencia de adquisición está solo limitada por la frecuencia máxima de la tarjeta de adquisición, que es  $10^4$  Hz. Los datos se guardan en un archivo de texto, que utilizan muy poca memoria, lo que permite adquirir datos a alta frecuencia y durante mucho tiempo, lo que resulta útil para hacer medidas que requieran de gran resolución temporal. Por esto, esta técnica se utiliza para medir frecuencias, ya sean las frecuencias propias del canal o la frecuencia de respuesta del sistema.



### **2.2.3. Preparación de la mezcla**

Para la celda grande ( $L=50$  cm) se utiliza una mezcla de 252 ml de agua destilada con 2 ml de Kodak photo Flo y 8 gotas de tinta.

Para la celda pequeña se utiliza una mezcla de 140,24 ml de agua destilada con 2 ml de Kodak photo Flo y 8 gotas de tinta.

Durante el desarrollo de la investigación se observa que las propiedades del sistema cambian con el tiempo, ya que la disipación cambia a medida que la mezcla envejece.

Para garantizar resultados reproducibles la mezcla se prepara siempre el día anterior a las mediciones y se guarda en un recipiente de vidrio con tapa para evitar que la mezcla se evapore. Sin embargo es necesario caracterizar este efecto en mayor detalle en el futuro.

# Capítulo 3

## Marco Teórico: Caracterización del sistema

### Resumen

En este capítulo se presenta un estudio lineal de los modos propios que caracterizan la celda con agua a estudiar, a partir de la ecuación de Euler y las condiciones de borde apropiadas. Se estudian los modos propios para las dos celdas disponibles. Además se presenta una descripción fenomenológica de los solitones hidrodinámicos no propagativos utilizando la ecuación de Schrödinger no lineal que describe bien la dinámica de una capa de agua vibrada paraméricamente.

### 3.1. Modos Propios

Se hace un estudio lineal de los modos propios de una celda rectangular, como la que se utiliza para hacer los experimentos de este estudio, para ello se considera la ecuación de Euler [2]:

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + g \hat{z} \quad (3.1)$$

donde  $\vec{v}$  corresponde a la velocidad en un punto,  $p$  a la presión en ese punto,  $\rho$  es la densidad del fluido, que se supone constante y  $g$  a la aceleración de gravedad. Si se considera la identidad vectorial

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}), \quad (3.2)$$

y además se considera que el fluido es irrotacional, esto es  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ , es posible reescribir la ecuación 2.1 como

$$\partial_t \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + g \hat{z}. \quad (3.3)$$

$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$  también permite escribir un potencial para  $\vec{v}$  tal que  $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ , de modo que la ecuación puede escribirse como

$$\partial_t \vec{\nabla}\phi + \frac{1}{2} \vec{\nabla}\vec{\nabla}\phi^2 = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + g\hat{z}, \quad (3.4)$$

y al intercambiar la derivada temporal con la espacial se tiene que:

$$\vec{\nabla}(\partial_t\phi + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - gz) = 0, \quad (3.5)$$

lo que implica que la cantidad dentro del paréntesis es una constante en el espacio, por lo tanto se obtiene la ecuación de Bernoulli

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - gz = m(t), \quad (3.6)$$

con  $m(t)$  una función arbitraria del tiempo que puede eliminarse, pues la ecuación es invariante bajo transformaciones temporales, debido a que  $\vec{v}$  es potencial, es decir,  $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$  depende solo de la derivada espacial, por lo que al hacer la transformación  $\phi \rightarrow \phi' = \phi - \int m(t')dt'$  la ecuación queda igual. Al linealizar la ecuación, se desprecia el segundo término, cuadrático en  $\vec{v}$ . Finalmente la ecuación a considerar es:

$$p = -\rho gz - \rho\partial_t\phi. \quad (3.7)$$

Si  $\zeta(x, y)$  es la coordenada que denota el desplazamiento vertical de la superficie y sus oscilaciones, se puede escribir una ecuación para la superficie a partir de 2.7, de la forma

$$p_0 = -\rho g\zeta - \rho(\partial_t\phi)_{z=\zeta}, \quad (3.8)$$

donde  $p_0$ , la presión en la superficie del agua, puede ser eliminado al redefinir  $\phi = \phi - \frac{p_0 t}{\rho}$  lo que simplifica la ecuación a

$$g\zeta + (\partial_t\phi)_{z=\zeta} = 0. \quad (3.9)$$

Si se consideran amplitudes pequeñas, esto es  $\zeta$  pequeño se tiene que  $v_z = \partial_t\zeta$ . Además  $v_z = \partial_z\phi$  lo que junto a la ecuación 2.9 permite concluir que

$$(\partial_z\phi)_{z=\zeta} + \frac{1}{g}(\partial_{tt}\phi)_{z=\zeta} = 0, \quad (3.10)$$

que es la condición de borde que en conjunto con la suposición de que el fluido es incompresible ( $\nabla\vec{v}=0$ ) implica

$$\nabla^2\phi = 0, \quad (3.11)$$

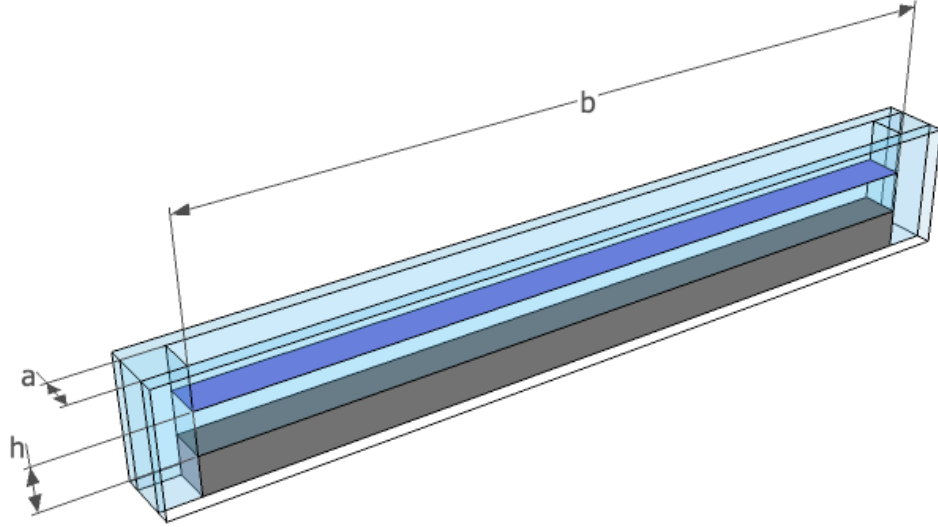


Figura 3.1: Se muestra la celda a estudiar llena parcialmente con agua. El ancho de la celda es  $a$  y el largo es  $b$ , la profundidad del agua es  $h$ .

que define el sistema a estudiar, junto con las condiciones de borde geométricas, en nuestro caso son las de una celda rectangular de altura  $h$ , ancho  $a$  y largo  $b$  como se muestra en la figura 3.1. Para resolverlo se supone una solución del tipo  $\phi = f(z) \cos(px) \cos(qy) \cos(\omega t)$  donde  $k^2 = p^2 + q^2$  que al reemplazarlo en la ecuación 2.11 se obtiene que

$$\partial_{zz}f - k^2f = 0 \quad (3.12)$$

por lo tanto  $f = Ae^{kz} + Be^{-kz}$ . La condición de borde fijo en el fondo del recipiente, es decir para  $z = -h$ , es que la velocidad en ese eje, debe anularse, es decir  $(\partial_z\phi)_{z=-h} = 0$ , lo que junto a la condición de borde de la superficie y evaluando en  $z=0$  permite deducir que

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (3.13)$$

y que

$$\phi = \cosh(k(z+h)) \cos(px) \cos(qy) \cos(\omega t) \quad (3.14)$$

Además, al saber que la velocidad debe anularse en los bordes de la celda, es decir  $(\partial\phi_x)_{x=0} = 0$ ,  $(\partial_x\phi)_{x=a} = 0$ ,  $(\partial\phi_y)_{y=0} = 0$  y  $(\partial_z\phi)_{y=b} = 0$ , se tiene que

$$p = \frac{m\pi}{a} \quad (3.15)$$

y

$$q = \frac{n\pi}{b} \quad (3.16)$$

así que el número de onda está dado por

$$k = \pi \sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}, \quad (3.17)$$

por lo tanto los  $k_{mn}$  están cuantizados y las frecuencias propias también, lo que determina completamente los modos propios de la celda.

Si se considera que  $a$ , el ancho de la celda y  $h$ , la profundidad del agua, están fijos es posible ver que para un valor fijo de  $\omega$ , al aumentar  $b$  aumenta  $n$ , de modo que para tener menos modos longitudinales, es necesario disminuir  $b$ , es decir, utilizar un canal lo más corto posible.

Para ilustrar, se presentan las frecuencias propias para una celda de  $28 \pm 0,05$  cm y  $50 \pm 0,05$  cm de largo, en las tablas (3.1) y (3.2), se muestra hasta el primer modo cruzado,  $m=1$  y  $n=1$  en ambos casos

Frecuencia [Hz]	$m$	$n$
0.78	0	1
1.53	0	2
2.21	0	3
2.82	0	4
3.35	0	5
3.82	0	6
4.22	0	7
4.59	0	8
4.91	0	9
5.21	0	10
5.44	1	0
5.46	1	1

Tabla 3.1: Frecuencias propias menores a para una celda de  $28 \pm 0,05$  cm de largo, 2,586 cm de ancho y 2 cm de altura del agua, las frecuencias bajo 5,3 Hz corresponde exclusivamente a modos longitudinales, mientras que la primera frecuencia del modo transversal es la que corresponde a  $m=1$  y  $n=0$ , también se ve la frecuencia del primer modo cruzado,  $m=1$ ,  $n=1$ .

Al comparar ambas tablas se ve que el número de modos longitudinales entre 0 y 5 Hz es menor en una celda más corta, es decir, los modos longitudinales se encuentran más separados, por lo que

Frecuencia [Hz]	$m$	$n$
0.44	0	1
0.87	0	2
1.29	0	3
1.70	0	4
2.08	0	5
2.44	0	6
2.77	0	7
3.08	0	8
3.37	0	9
3.64	0	10
3.88	0	11
4.11	0	12
4.33	0	13
4.53	0	14
5.47	1	0
5.48	1	1

Tabla 3.2: Frecuencias propias menores a para una celda de  $50 \pm 0,05$  cm de largo, 2,563 cm de ancho y 2 cm de altura del agua, las frecuencias bajo 5,3 Hz corresponde exclusivamente a modos longitudinales, mientras que la primera frecuencia del modo transversal es la que corresponde a  $m=1$  y  $n=0$ , también se ve la frecuencia del primer modo cruzado,  $m=1$ ,  $n=1$ .

es menos probable excitar un modo longitudinal cuando se busca excitar uno transversal. Por esto se escoge la celda de 28 cm para realizar experimentos de un solo solitón.

### 3.2. Descripción teórica

La ecuación de Shrödinger no lineal es un modelo fenomenológico que describe bien la dinámica de una capa de fluído vibrada sinusoidalmente a una frecuencia  $\Omega$ . Como se estudió en [10]

y [4], y como estudiamos en [6]

$$\partial_t \psi = -i\nu\psi - i|\psi|^2\psi - i\partial_{xx}\psi - \mu\psi + \gamma\bar{\psi}, \quad (3.18)$$

donde  $\psi(x, t)$  es un campo complejo y  $\bar{\psi}$  su conjugado. Este campo se relaciona con las variables físicas  $h = \psi e^{\frac{-i\Omega t}{2}} + c.c.$  que corresponde al desplazamiento vertical de la superficie normalizado y  $\phi(x, t) = -i\psi e^{\frac{-i\Omega t}{2}} + c.c.$  el potencial de velocidades normalizado.  $\nu$  es la desintonización adimensional, es decir  $\nu = \Omega_0 - \frac{\Omega}{2}$  donde  $\Omega_0$  es la frecuencia del primer modo propio puramente transversal adimensionalizada,  $\nu$  es proporcional a  $\nu'$  la desintonización experimental que se describe más adelante en este texto.  $\mu$  es la disipación adimensional y  $\gamma$  es el forzamiento adimensional. Es posible ver que si  $\mu = \gamma = \nu = 0$ , la ecuación (2.1) es simplemente la ecuación de Shrodinger, que describe la envolvente de un sistema oscilatorio. Este modelo es reversible en el tiempo bajo la transformación  $t \rightarrow -t, \psi \rightarrow \bar{\psi}$ . Los términos proporcionales a  $\mu$  y  $\gamma$  rompen esta simetría y representan la inyección y la disipación de energía en el sistema respectivamente. Los términos de orden superior en la ecuación (2.1) pueden despreciarse usando un análisis de escala donde, si  $\mu \ll 1, \nu \sim \gamma, |\psi| \sim \mu^2, \frac{\partial}{\partial x} \sim \mu^{1/2}$  y  $\frac{\partial}{\partial t} \sim \mu^{1/2}$ .

La solución trivial de la ecuación (2.1) es el estado homogéneo  $\psi_0 = 0$  que se vuelve inestable cuando  $\gamma = \mu$ . Particularmente para  $\nu < 0$ , lo hace a través de una inestabilidad subcrítica, estacionaria, para  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$ , que corresponde a la inestabilidad subarmónica de la capa de fluido. Dentro de esta región, llamada lengua de Arnold que se muestra en el figura 2.2, el sistema tiene tres soluciones uniformes inestables:

$$\psi_0 = 0 \quad (3.19)$$

y

$$\psi_{\pm} = x_0 \pm i \sqrt{\frac{(\mu - \gamma)}{(\mu + \gamma)}} x_0, \quad (3.20)$$

donde

$$x_0 = \sqrt{\frac{(\gamma - \mu)(\nu + \sqrt{\gamma^2 - \nu^2})}{2\gamma}}. \quad (3.21)$$

Para  $\nu > 0$ , estos tres estados se mezclan en una bifurcación de pitchfork para  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$ .

### 3.2.1. Solitones disipativos

Una solución trivial de la ecuación (2.1) es el estado homogéneo  $\psi_0 = 0$ , que representa a la capa de fluido completamente quieta con respecto al movimiendo de la celda. Para obtener otras

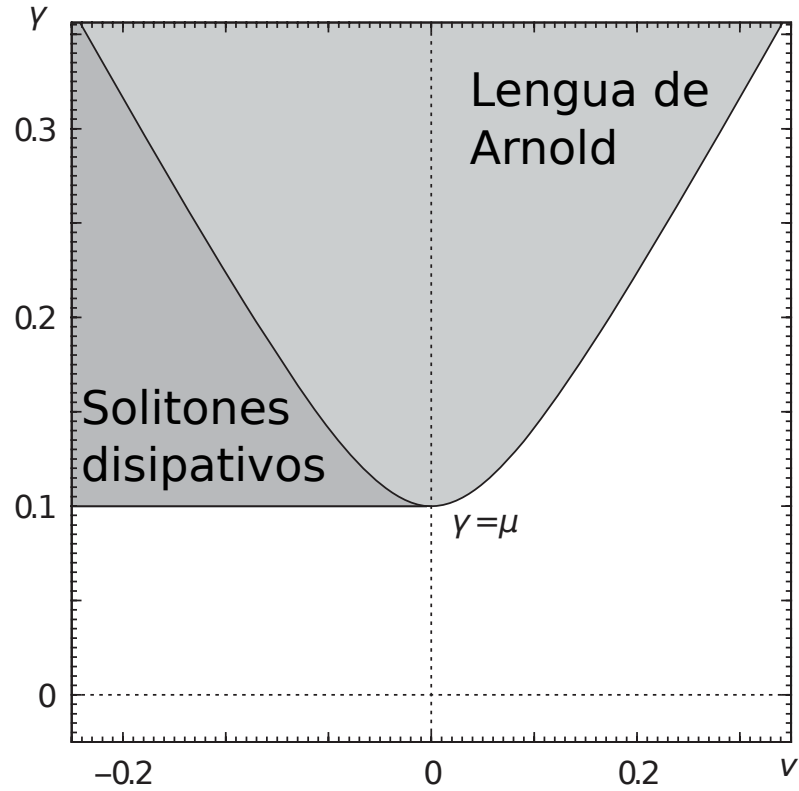


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación de la ecuación de Schrödinger no lineal, la región definida por  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$  es la denominada Lengua de Arnold.

soluciones se utiliza la transformación  $\psi(x, t) = R(x, t)e^{i\theta(x, t)}$ , que reemplazar en la ecuación (2.1) permite obtener dos ecuaciones, al separar en parte real e imaginaria:

$$\partial_t R = 2\partial_x R \partial_x \theta + \partial_{xx} R \theta - \mu R + \gamma R \cos(2\theta) \quad (3.22)$$

$$R \partial_t \theta = -\nu R - R^3 - \partial_{xx} R + R(\partial_x \theta)^2 - \gamma R \sin(2\theta) \quad (3.23)$$

donde la solución es

$$\cos(2\theta_0) = \frac{\mu}{\gamma}, \quad (3.24)$$

$$R_{\pm}(x) = \sqrt{2\delta_{\pm}} \operatorname{sech}(\sqrt{\delta_{\pm}}[x - x_0]), \quad (3.25)$$



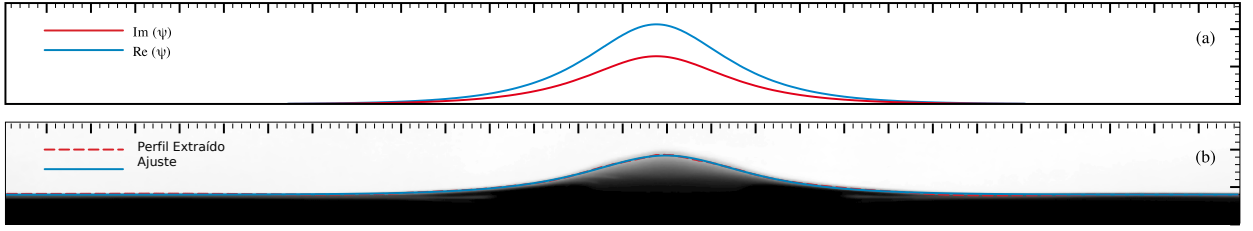


Figura 3.3: (a) Solitón disipativo estable, solución de la Ecuación de Shrödinger no lineal. (b) Imagen experimental, la línea entrecortada muestra el perfil extraído y la línea azul el ajuste de una secante hiperbólica sobre este.

donde  $\delta_{\pm} = -\nu \pm \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} = -\nu - \gamma \sin(2\theta_0)$ . La amplitud del solitón y su talla están determinados por  $\sqrt{\delta_{\pm}}$  y  $\frac{1}{\sqrt{\delta_{\pm}}}$  respectivamente. Como consecuencia de la simetría traslacional de la ecuación (2.1), los solitones disipativos son una familia de estados caracterizados por el parámetro continuo  $x_0$  que indica la posición del máximo del solitón. La región donde existen los solitones es aquella donde  $\nu < 0$ ,  $\gamma \geq \nu$  y  $\gamma^2 < \mu^2 + \nu^2$ . En la región de parámetros definida, la ecuación (2.21) tiene 4 soluciones en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , lo que permite inferir que los estados localizados aparecen y desaparecen con una bifurcación tipo saddle-node cuando  $|\gamma| = \mu$ . El estado plano se vuelve inestable para  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$  para  $\nu < 0$ . Los solitones disipativos estables están caracterizados por  $Re(\psi)Im(\psi) > 0$ , es decir, cuando ambos campos tienen el mismo signo, lo que resulta en dos solitones estables, esto da cuenta de la simetría de reflexión ( $A \rightarrow -A$ ), lo que experimentalmente se identifica como un solitón en fase y uno en antifase.

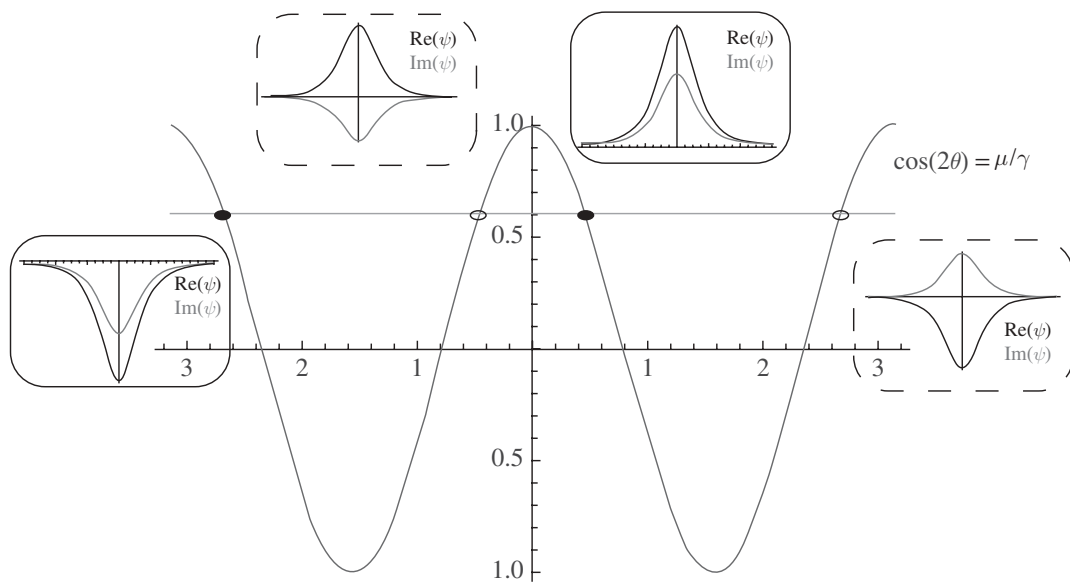


Figura 3.4: Esquema que representa los distintos solitones, se puede ver que existen cuatro soluciones para  $\cos(2\theta) = \frac{\mu}{\gamma}$ , pero solo dos de ellas son estables.

# Capítulo 4

## Resultados Experimentales:

## Caracterización del solitón

### Resumen

En este capítulo se presentan medidas de las frecuencias propias de la celda donde se realizan los experimentos, para esto se obtiene un espectro del sistema del que se extraen los valores experimentales de las frecuencias. Además se presentan diagramas de bifurcación donde se tanto para la amplitud del solitón como para su fase en función de la aceleración de forzamiento, para distintas frecuencias de forzaje. Estos resultados permiten caracterizar el solitón y comparar los resultados experimentales obtenidos con las predicciones teóricas de la ecuación de Schrödinger no lineal.

### 4.1. Resultados experimentales

#### 4.1.1. Frecuencias propias del sistema

Para medir las frecuencias propias de la celda de 28 cm de largo,  $2,59 \pm 0,002$  cm de ancho y una altura del agua de 2 cm, con el sistema en reposo, se utiliza un ventilador pequeño que fuerza la superficie del agua de forma ruidosa y se miden las variaciones de altura que esto produce con el sensor capacitivo.

Se realizan dos medidas, una con el sensor capacitivo en el centro de la celda y otra con el

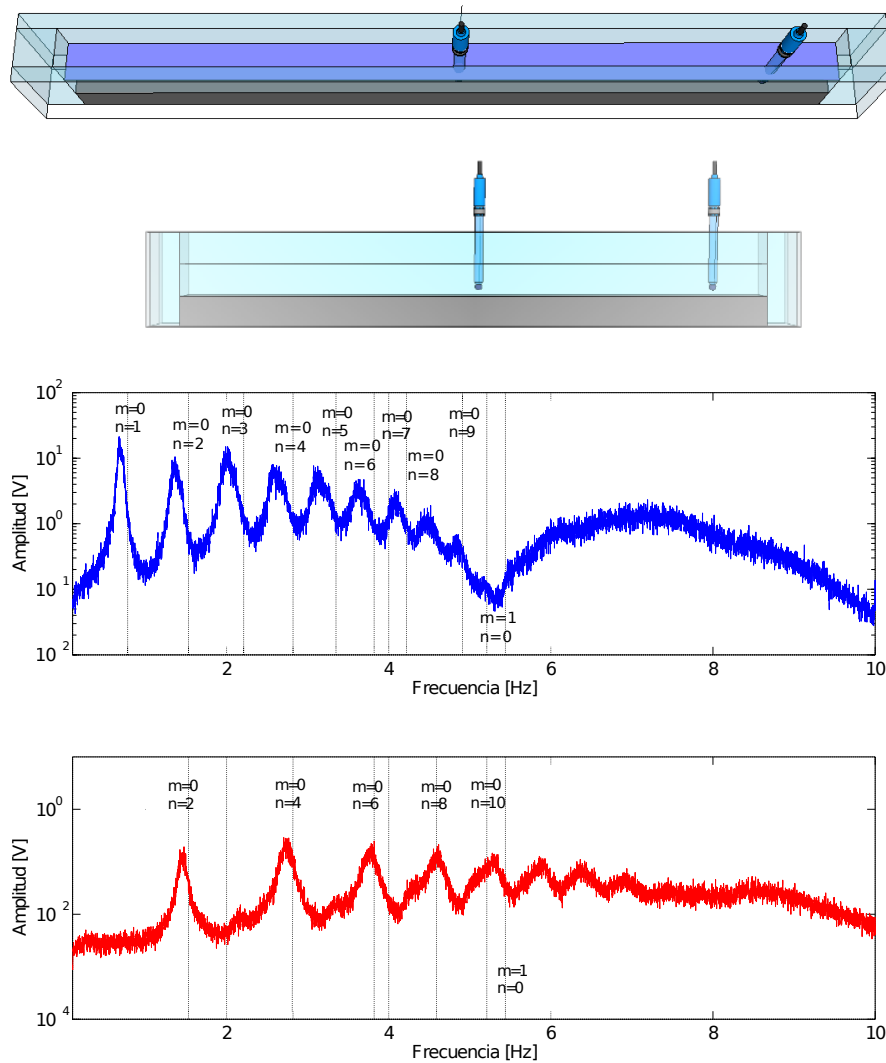


Figura 4.1: En las dos figuras superior se muestra un esquema de la posición del sensor en la celda de 28 cm de largo y 2,59 de ancho y llena con 2 cm de agua, para los distintos espectros obtenidos. Se muestran frecuencias entre 0 y 10 Hz, la secuencia en de arriba (azul) corresponde al sensor en un extremo de la celda a) y la secuencia de abajo (rojo) a el sensor al centro de la misma b). Se muestra también los modos correspondientes a las frecuencias teóricas predichas en el capítulo 3.

sensor en un extremo de la misma. Para cada medida se adquieren 4 secuencias de datos durante 60 minutos cada una.

Para cada serie temporal obtenida de esta forma se calcula la transformada de Fourier y se suman los resultados para obtener un espectro promedio, lo que sirve para definir mejor donde se encuentran las frecuencias propias. En la figura 4.1 se muestra el espectro obtenido de esta forma donde la figura a) corresponde a la obtenida con el sensor en el centro del canal y la b) muestra la

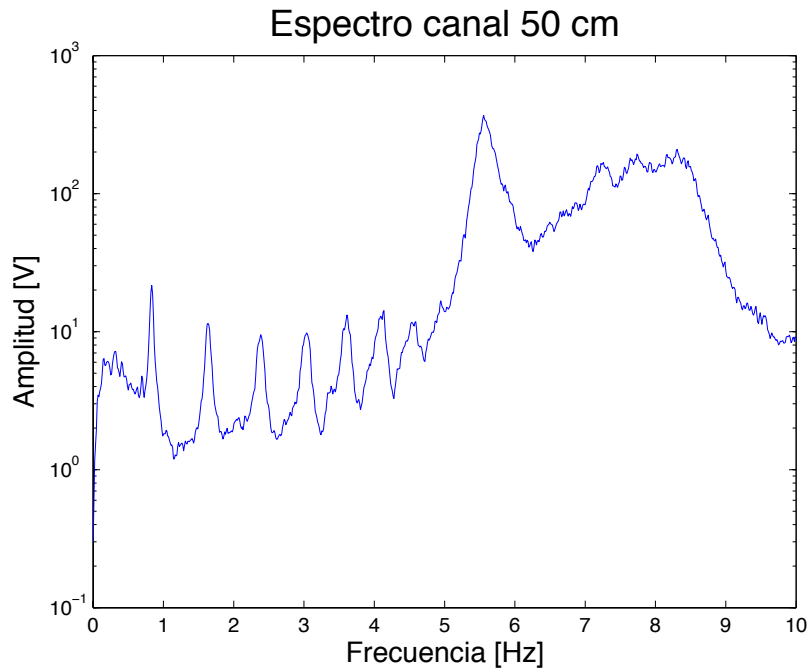


Figura 4.2: Espectro de una celda de 50 cm de largo,  $2,56 \pm 0,009$  cm de ancho, llena hasta los 2 cm de altura del agua, entre 0 y 10 Hz. Obtenido por Leonardo Gordillo con el sensor capacitivo al centro de la celda.

secuencia obtenida con el sensor en un extremo del canal.

Teniendo en cuenta los resultados teóricos que predicen las frecuencias de una celda de 28 cm de largo, del capítulo anterior, se puede concluir de la figura 4.1 que al medir con el sensor en el centro de la celda (secuencia a) no es posible medir todos los modos longitudinales, sino que solo los modos pares, los modos impares no aparecen porque tienen un nodo en el centro de la celda. Por otro lado al medir con el sensor en un extremo de la celda (secuencia b) pueden observarse todos los modos longitudinales. Además se observa una absorción para el primer modo transversal, debido también a la posición del sensor, muy cerca del centro en la dirección transversa. El espectro de la figura 4.2 se obtuvo con el sensor capacitivo al centro del canal, de modo que solo contempla los modos pares. Para compararlo entonces hay que hacerlo con aquel que solo contempla los modos pares de la figura 4.1 para la celda de 28 cm. Al compararlos se puede ver que los modos longitudinales se encuentran más separados para la celda de 28 cm, es decir caben menos modos longitudinales en el rango de interés lo que permite mayor estabilidad para el solitón, al ser menos probable excitar un modo longitudinal con el forzaje, lo que induciría ondas de Faraday. Debido a esto se realizan los experimentos en la celda de 28 cm.

Frecuencia Experimental [Hz]	Frecuencia teórica [Hz]	$m$	$n$
$0,688 \pm 0,0009$	0,78	0	1
$1,374 \pm 0,001$	1,53	0	2
$2,024 \pm 0,001$	2,21	0	3
$2,62 \pm 0,0015$	2,82	0	4
$3,152 \pm 0,001$	3,35	0	5
$3,634 \pm 0,001$	3,82	0	6
$4,09 \pm 0,0015$	4,22	0	7
$4,466 \pm 0,002$	4,59	0	8
$4,832 \pm 0,0025$	4,91	0	9
---	5,21	0	10
$5,245 \pm 0,002$	5,44	1	0
---	5,46	1	1

Tabla 4.1: Frecuencias propias de la celda de 28 cm de largo comparadas con las frecuencias calculadas teóricamente

Además, de estos espectros es posible determinar las frecuencias propias experimentalmente. Para esto, a cada máximo del espectro se le ajusta una función gaussiana del tipo  $f(x) = a \cdot e^{-((x-b)/c)^2} + d$  como se muestra en la figura 4.3 donde su media,  $b$ , corresponde al valor de la frecuencia en cuestión y su error al error del ajuste con un intervalo de confiabilidad del 95%. Se escoge un ajuste gaussiano en vez de un ajuste polinomial para considerar en el ajuste no solo la parte superior del pick, sino que también sus alas.

Para identificar a qué modo corresponde cada una de las frecuencias experimentales se comparan con las frecuencias teóricas, no solo en su magnitud, sino también en el orden relativo a las otras frecuencias vecinas. Así se identifica al primer modo transversal con la frecuencia  $F_0 = 5,245$  Hz, lo que nos permitirá definir el parámetro experimental  $\nu' = F_0 - \frac{F}{2}$ , donde  $F$  es la frecuencia a la que se mueve el sistema debido al forzamiento paramétrico. Este parámetro tiene unidades de Hz y se relaciona con el parámetro teórico  $\nu$  linealmente.

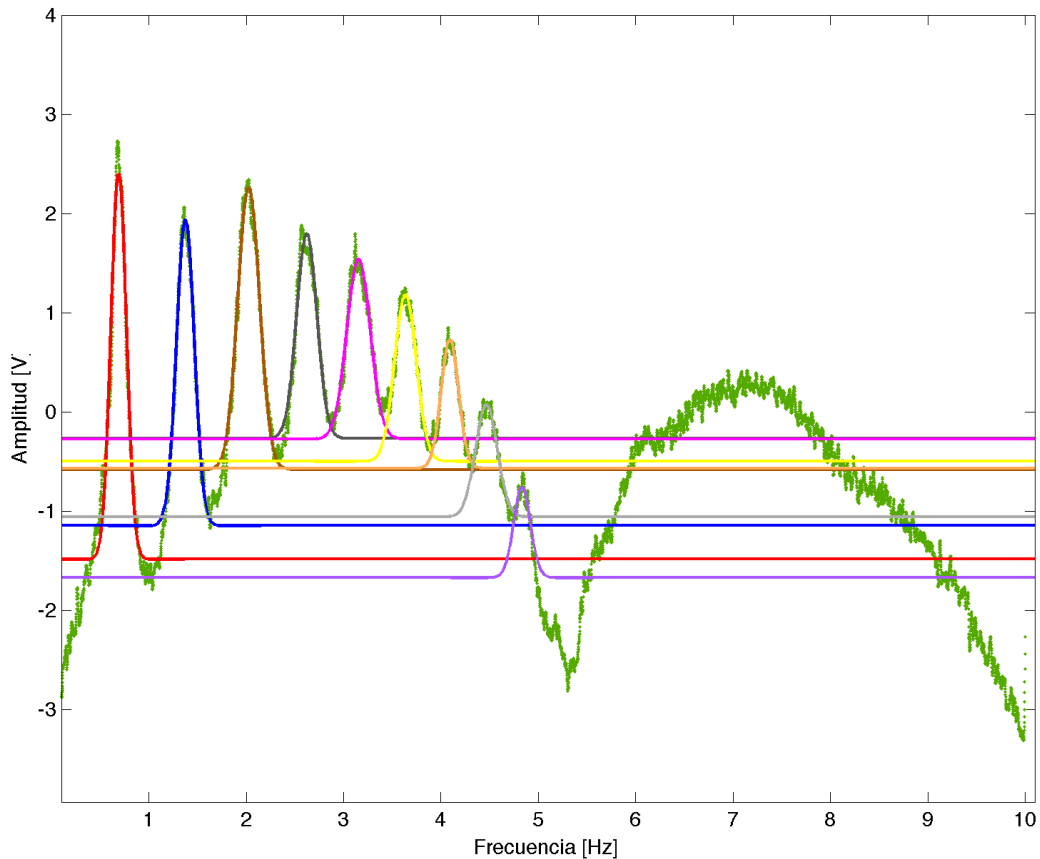


Figura 4.3: Ajustes del tipo  $f(x) = a \cdot e^{-((x-b)/c)^2} + d$  a cada uno de los máximos del espectro, estos ajustes permiten conocer el valor experimental de las frecuencias propias de la celda de 28 cm.

#### 4.1.2. Diagramas de Bifurcación

Un diagrama de bifurcación es un gráfico que se obtenido midiendo la respuesta del sistema físico al variar alguno de los parámetros de control. En se presentan resultados de la variación de la amplitud del solitón en función de la amplitud de forzamiento del sistema para distintas frecuencias de forzamiento, así como también los resultados de la variación de la fase en función de la amplitud de forzamiento.

Utilizando la cámara rápida, se capturan imágenes del solitón. Para un valor fijo de frecuencia de forzamiento, se varía la amplitud y para cada amplitud se toman 32 imágenes por ciclo durante 16 ciclos. Esto se hace en dos etapas, primero se comienza con un forzamiento lo más pequeño posible, donde se pueda crear el solitón y este permanezca estable, el forzamiento se aumenta en pasos pequeños y se graba una serie cada vez. Cuando el forzamiento es suficientemente alto, se

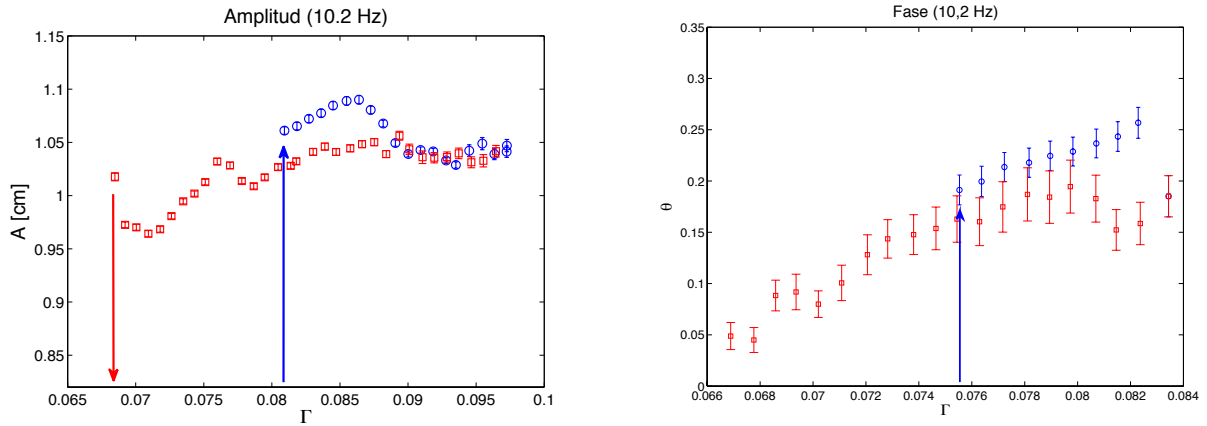


Figura 4.4: Diagramas de bifurcación para una frecuencia de forzamiento de 10,2 Hz. A la Izquierda se muestra la variación de la amplitud del solitón y a la derecha la variación de la fase del mismo. Los datos tomados aumentando el forzamiento se muestran como círculos (azul) mientras que los datos adquiridos disminuyendo el forzamiento se muestran como cuadrados (rojo)

hace el recorrido inverso, se disminuye la amplitud de forzamiento en pasos pequeños, grabando en cada paso, hasta que el solitón desaparece.

Para cada una de estas series se obtiene la altura y la fase del solitón, que se grafican en función de la amplitud medida por el acelerómetro. Las frecuencias utilizadas son 10,2 Hz, 10,3 Hz, 10,4 Hz, 10,5 Hz y 10,7 Hz. Con estos datos es posible confeccionar los diagramas de bifurcación que se muestran en las figuras 4.4, 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9, donde el color azul representa los datos adquiridos al aumentar la amplitud de forzamiento y el rojo, los datos adquiridos al disminuirla.

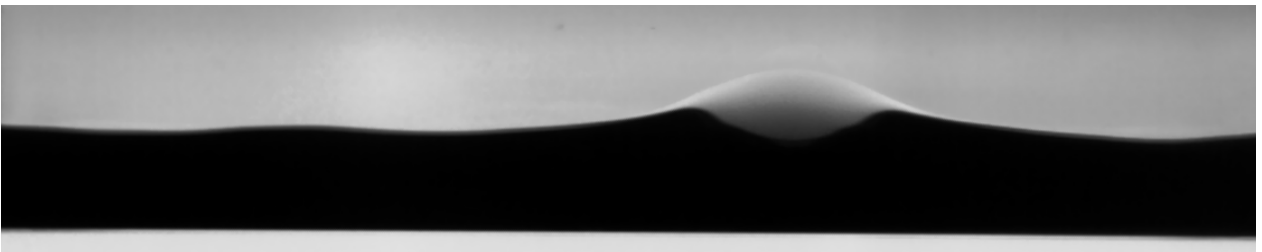


Figura 4.5: Solitón a 10,2 Hz. Se puede ver que hay más ondas en la celda, lo que hace de esta una realización ruidosa

Para la realización a 10,2 Hz que se muestra en la figura 4.4 se ve gran dispersión en los datos, esto se debe a que como se muestra en la figura 4.5 existen más ondas en la celda, a pesar de esto, el solitón es estable en todo el rango de amplitudes medido. Las ondas hacen que el ajuste utilizado



para calcular la amplitud del solitón y su fase sea menos preciso, lo que explica el tamaño de las barras de error en esta realización y la poca regularidad en la curva de amplitud. La presencia de ondas se explica debido a que la desintonización es tan negativa que está en el borde de la zona de estabilidad del solitón y este compite con las ondas de Faraday [1].

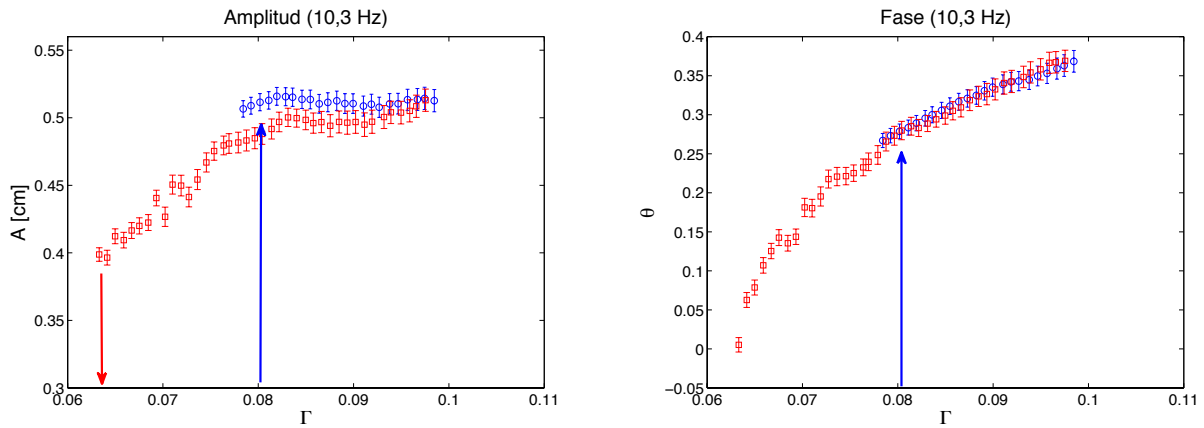


Figura 4.6: Diagramas de bifurcación para una frecuencia de forzamiento de 10,3 Hz. A la Izquierda se muestra la variación de la amplitud del solitón y a la derecha la variación de la fase del mismo. Los datos tomados aumentando el forzamiento se muestran como círculos (azul) mientras que los datos adquiridos disminuyendo el forzamiento se muestran como cuadrados (rojo)

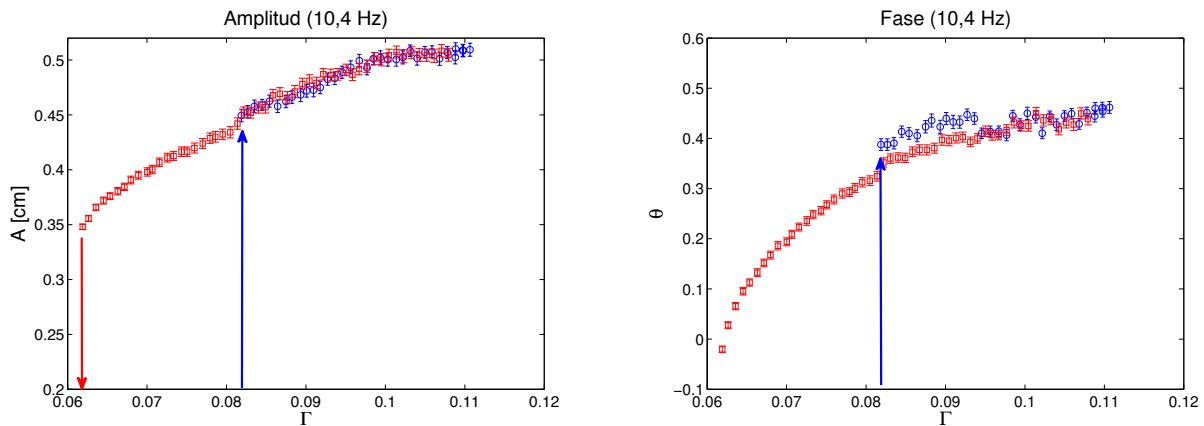


Figura 4.7: Diagramas de bifurcación para una frecuencia de forzamiento de 10,4 Hz. A la Izquierda se muestra la variación de la amplitud del solitón y a la derecha la variación de la fase del mismo. Los datos tomados aumentando el forzamiento se muestran como círculos (azul) mientras que los datos adquiridos disminuyendo el forzamiento se muestran como cuadrados (rojo)

Para comparar como influye la variación de frecuencia en la amplitud y la fase del solitón

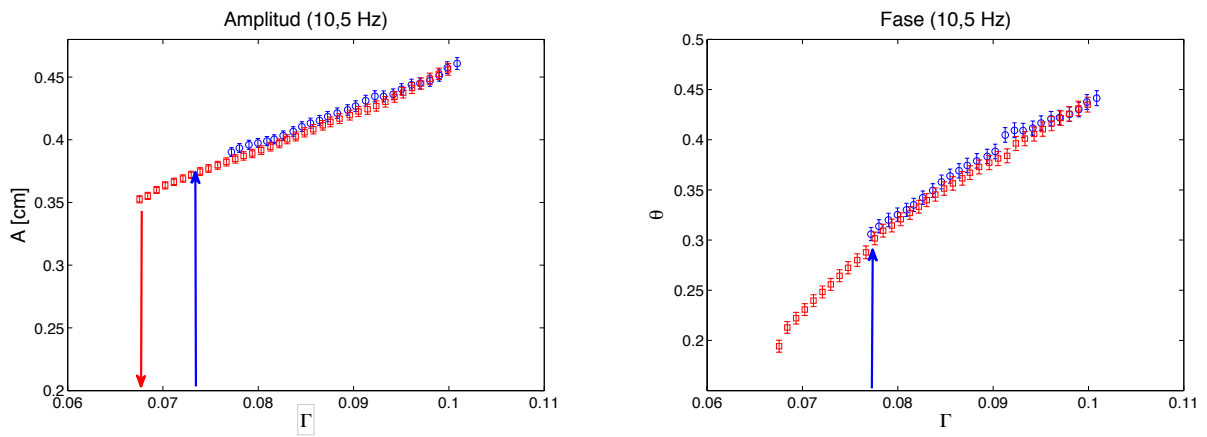


Figura 4.8: Diagramas de bifurcación para una frecuencia de forzamiento de 10,5 Hz. A la Izquierda se muestra la variación de la amplitud del solitón y a la derecha la variación de la fase del mismo. Los datos tomados aumentando el forzamiento se muestran como círculos (azul) mientras que los datos adquiridos disminuyendo el forzamiento se muestran como cuadrados (rojo)

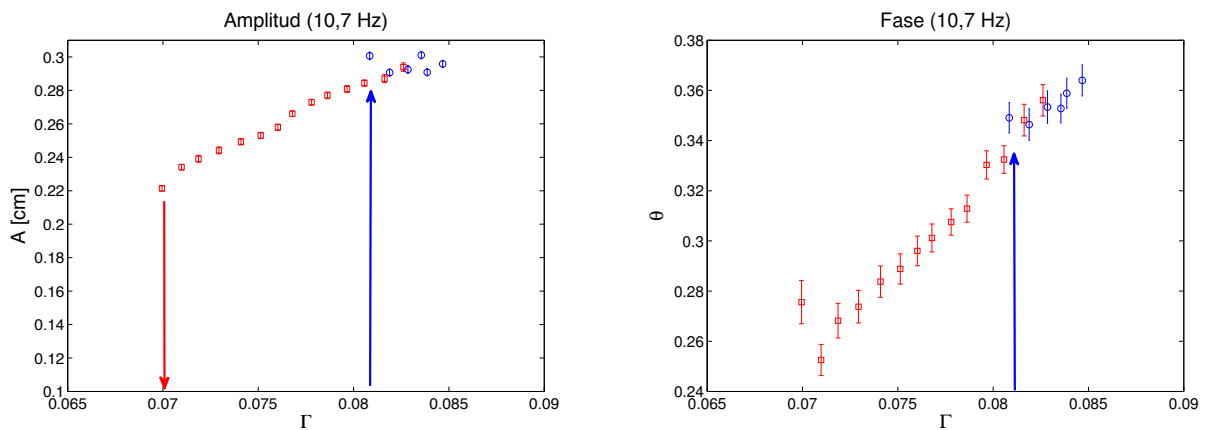


Figura 4.9: Diagramas de bifurcación para una frecuencia de forzamiento de 10,7 Hz. A la Izquierda se muestra la variación de la amplitud del solitón y a la derecha la variación de la fase del mismo. Los datos tomados aumentando el forzamiento se muestran como círculos (azul) mientras que los datos adquiridos disminuyendo el forzamiento se muestran como cuadrados (rojo)

es necesario ver todas las curvas en un solo gráfico que permita notar esta diferencia, como se muestra en la figura 4.10. Se puede observar que al aumentar la frecuencia, es decir, al aumentar la desintonización  $\nu' = \frac{F}{2} - F_0$  el solitón se hace más bajo (y a su vez más ancho). En el gráfico para la fase se ve que esta aumenta al aumentar la desintonización, para todo el rango de forzamiento que se estudia.

Se consideran entonces el parámetro teórico  $\gamma$ , que es proporcional al parámetro experimental

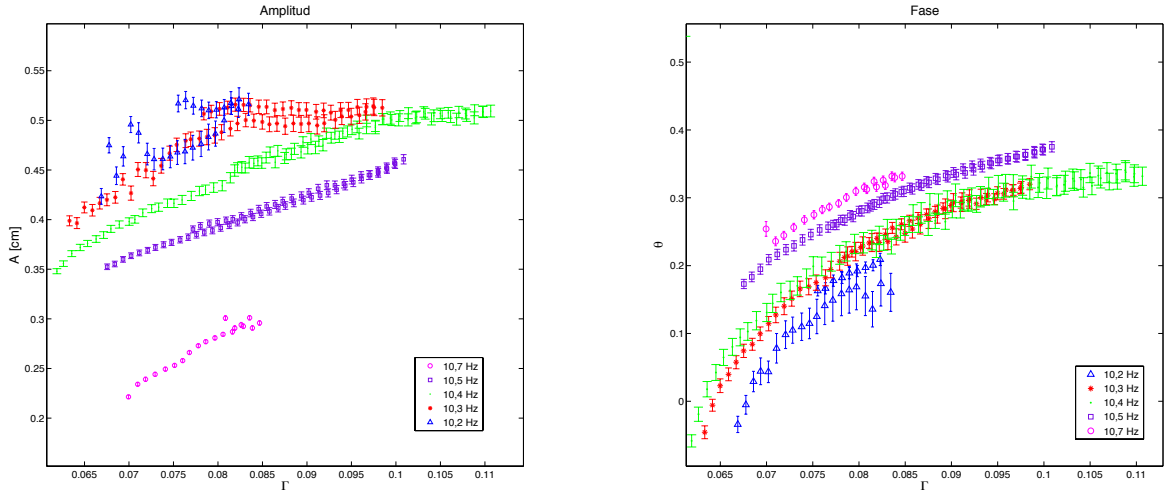


Figura 4.10: Diagramas de bifurcación para todas las frecuencias consideradas. A la izquierda se muestra la variación de amplitud y a la derecha la fase. Se ve en el gráfico par al amplitud, que al aumentar la desintonización  $\nu'$  el solitón se hace más bajo en todo el rango de forzamiento estudiado, en el gráfico de la fase se ve que esta aumenta al aumentar la desintonización para todo el rango de frecuencias estudiado.

$\Gamma$ . Cerca de la bifurcación  $\mu \simeq \gamma_c$ , con  $\gamma_c$  la aceleración a la que el solitón desaparece. Además se puede considerar que  $\gamma = \gamma_c + \Delta\gamma$  donde  $\Delta\gamma$  es pequeño.

Como se muestra en el capítulo 3, el solitón teóricamente se describe como:

$$R_{\pm}(x) = \sqrt{2\delta_{\pm}} \operatorname{sech}(\sqrt{\delta_{\pm}}[x - x_0]), \quad (4.1)$$

$$\cos(2\theta) = \frac{\mu}{\gamma}. \quad (4.2)$$

De la ecuación (3.1) se desprende que la amplitud del solitón está descrita por  $\sqrt{\delta_{\pm}}$  donde  $\delta_{\pm} = -\nu \pm \sqrt{\gamma^2 - \mu}$ . Pero cerca de la bifurcación puede aproximarse como

$$A = \sqrt{-2\nu} \pm \frac{1}{\sqrt{-2\nu}} \sqrt{\gamma^2 - \gamma_c^2} \quad (4.3)$$

Del mismo modo, se puede linealizar la ecuación para  $\theta$  (3.2) como

$$\theta^2 = \frac{\gamma}{\gamma_c} - 1. \quad (4.4)$$

Es importante notar que las ecuaciones (3.1) y (3.2) son la solución de la ecuación de Shrödinger no lineal, cuyos parámetros están normalizados. Entonces los parámetros físicos que definen la

bifurcación serán  $\gamma_c$  en unidades de aceleración normalizada por la aceleración de gravedad  $g$  y  $A_0$  en cm, que corresponden al forzamiento para el cuál el solitón desaparece y a la amplitud que tiene el solitón para  $\gamma_c$  respectivamente. Para conocer  $\gamma_c$  y  $A_0$  a la serie de la fase al cuadrado se le ajusta una recta del tipo:

$$\theta^2 = p_1\gamma + p_2, \quad (4.5)$$

donde comparándola con la ecuación (3.4) se tiene que:

$$\gamma_c = \frac{-p_2}{p_1} \quad (4.6)$$

En la figura 4.11 se muestran los ajustes lineales que permiten estimar un valor experimental para  $\gamma_c$  para los distintos valores de frecuencia utilizados.

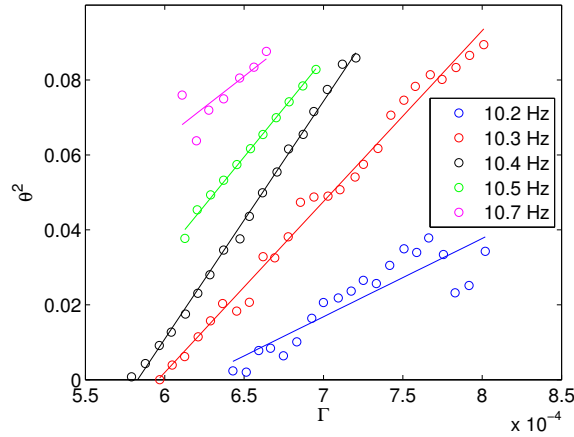


Figura 4.11: Ajustes lineales para el cuadrado de la fase, los parámetros del ajuste permiten estimar un valor experimental de  $\Gamma_c$ .

A la serie de la amplitud se le ajusta una función del tipo:

$$A_0 = \tilde{A} + \sqrt{\gamma^2 - \gamma_c^2} \quad (4.7)$$

donde el valor para  $\gamma_c$  se obtiene del ajuste para la serie de la fase.

En la figura 4.12 se muestra como varían los parámetros  $\tilde{A}$  y  $\Gamma_c$  al variar la frecuencia y a su vez la desintonización  $\nu'$ . Es posible ver que al aumentar la desintonización  $\nu'$ , el valor de forzamiento para el que el solitón desaparece  $\Gamma_c$  disminuye, a su vez también disminuye la amplitud con la que el solitón desaparece  $\tilde{A}$ .

El diagrama de bifurcación que se obtiene para la fase en todos los casos presenta un muy buen acuerdo con la predicción teórica que indica que la fase crece con la raíz cuadrada del parámetro

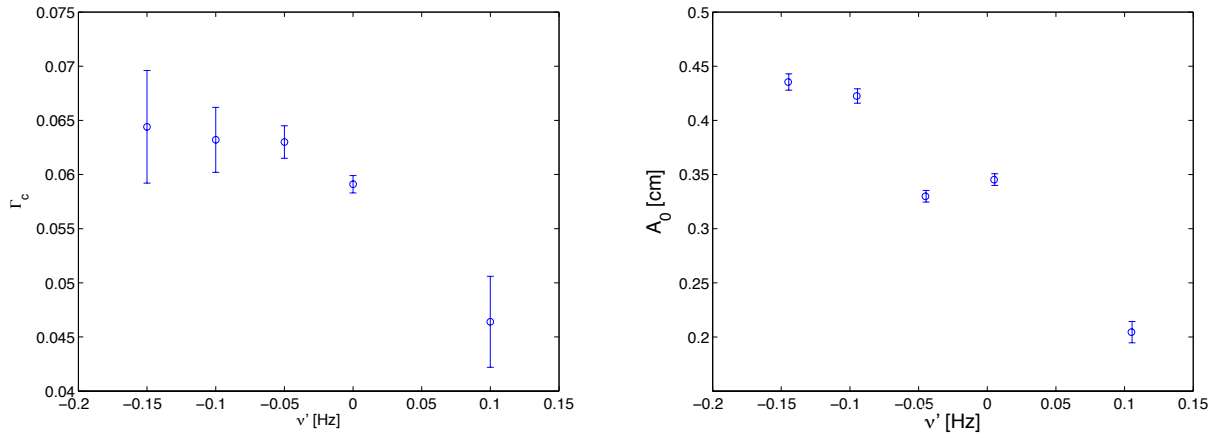


Figura 4.12: En la figura de la izquierda se muestra como varía  $\Gamma_c$  en función de la desintonización  $\nu'$ . existe una clara tendencia decreciente, es decir, al aumentar la desintonización, el forzamiento para el cuál el solitón desaparece es menor. En la figura de la derecha se muestra la variación de la amplitud mínima del solitón  $A_0$  en función de la desintonización, se puede ver al aumentar la desintonización, la amplitud mínima del solitón disminuye.

de control, en este caso la aceleración  $\Gamma$ . Por su parte los diagramas de bifurcación presentan algunas diferencias debidas principalmente a fluctuaciones en la amplitud del solitón. La bifurcación observada en este sistema es subcrítica, el solitón tiene una región en la que coexiste con el estado homogéneo, es decir, con el agua quieta con respecto a la celda.

Además se muestran diagramas de bifurcación para el ancho del solitón, para todas las frecuencias estudiadas, en la figura 4.13, se muestra la evolución del ancho del solitón en función de  $\Gamma$  para 10,2 Hz, 10,3 Hz, 10,4 Hz, 10,5 Hz, y 10,7 Hz.

La teoría predice que el ancho del solitón evolucione como  $\approx \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}$  sin embargo, salvo para la realización con  $f_0 = 10,5$  Hz, no se obtiene una función decreciente con  $\Gamma$  para el ancho.

Si bien la ecuación de Schrödinger no lineal con disipación y forzamiento paramétrico, describe bien la bifurcación tanto para la amplitud como para la fase del solitón, no lo hace con su ancho, esto puede ser debido a la naturaleza tridimensional del solitón, que no se puede abarcar completamente con un modelo bidimensional.

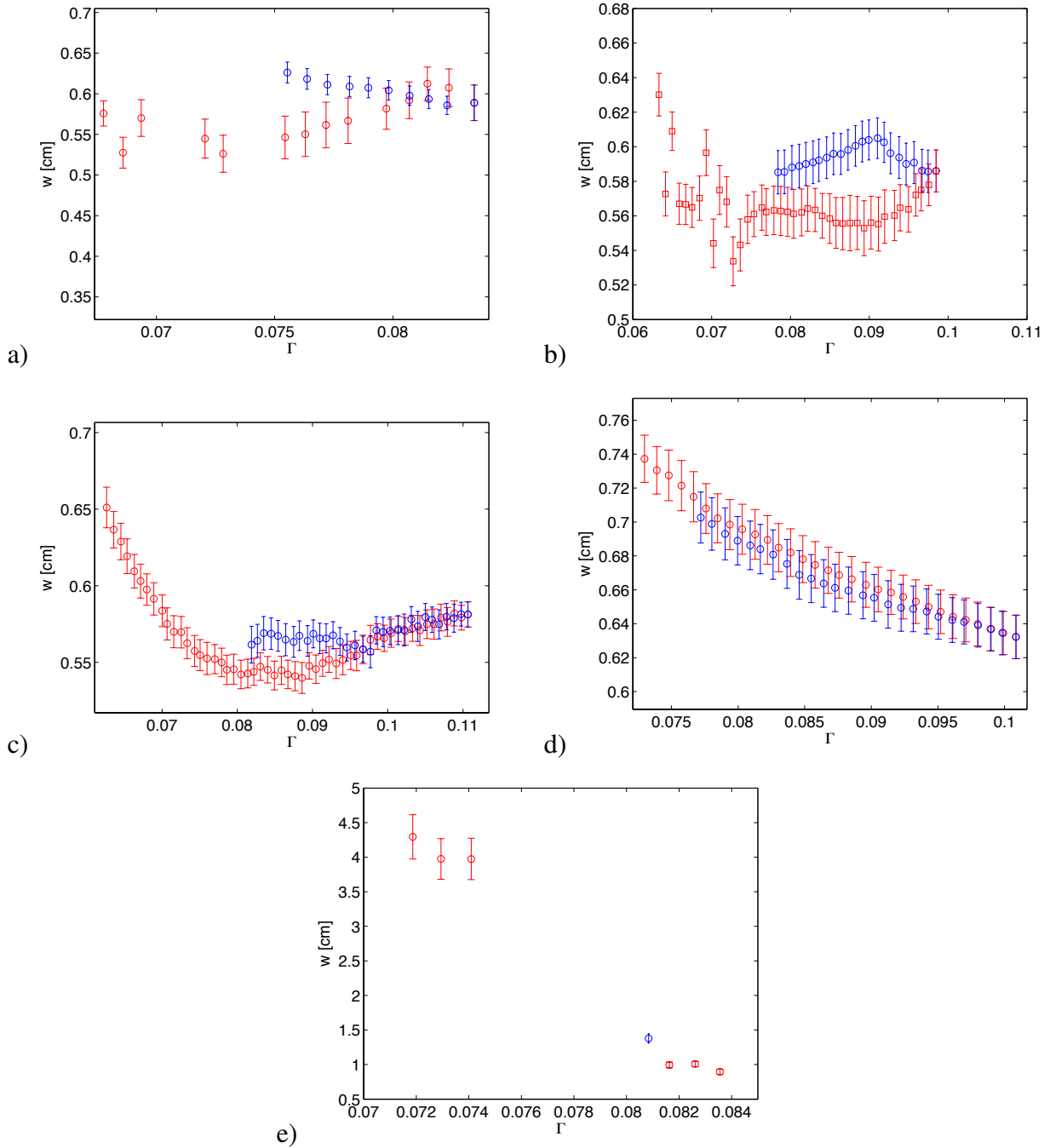


Figura 4.13: Diagrama de bifurcación para el ancho del solitón en función de  $\Gamma$  donde a) es para  $f_0 = 10,2$  Hz, b) para  $f_0 = 10,3$  Hz, c) para  $f_0 = 10,4$  Hz, d) para  $f_0 = 10,5$  Hz y e) para  $f_0 = 10,7$  Hz.

# Capítulo 5

## Interacción de solitones

### Resumen

En este capítulo se repasa una descripción fenomenológica de la interacción de solitones, tanto en fase como en oposición de fase, a partir de la ecuación de Schrödinger no lineal. Se encuentra la ley de interacción para solitones en fase y en oposición de fase para la velocidad entre ellos introduciendo correcciones pequeñas a los campos de la amplitud y la fase y utilizando la alternativa de Fredholm. Además se muestran datos experimentales, tanto de pares de solitones en fase como en oposición de fase.

### 5.1. Marco Teórico: Interacción de solitones

Hemos estudiado la interacción de solitones hidrodinámicos, no propagativos tanto numérica como experimentalmente [15]. Particularmente se ha mostrado que dos solitones disipativos en un canal largo (con respecto a la talla del solitón) que están en fase, tienen una interacción atractiva, mientras que si están en oposición de fase, tienen una interacción repulsiva.

#### 5.1.1. Ley de interacción de a pares

Si se consideran dos solitones disipativos [11], inicialmente separados, la distancia entre ellos se define como la distancia entre los máximos de cada solitón. Se considera el ansatz:

$$R(x, t) = R_+ \left( x + \frac{\Delta(t)}{2} \right) + \chi R_+ \left( x - \frac{\Delta(t)}{2} \right) + \rho(x, \Delta) \quad (5.1)$$

$$\theta(x, t) = \theta_0 + \varphi(x, \Delta) \quad (5.2)$$

Donde  $R_+(x, t)$  corresponde a la amplitud de un solitón, solución de la ecuación de Schrödinger no lineal,  $\theta_0$  a la fase, constante,  $\Delta(t)$  corresponde la distancia entre los máximos de los solitones y  $\chi$  indica si los solitones están en fase o en oposición de fase, esto es  $\chi = \pm 1$ . Para considerar el efecto de un solitón sobre el otro, se promueve  $\Delta(t)$  a una variable usando el método de variación de parámetros, y se modifica levemente la solución del solitón disipativo incluyendo correcciones pequeñas  $R = R + \rho(x, \Delta)$  y  $\theta = \theta + \varphi(x, \Delta)$  para la amplitud y la fase respectivamente. Además se considera que  $\Delta \cdot \delta_+^{1/2} \gg 1$  Se puede asumir que  $\Delta(t)$  evoluciona lentamente en el tiempo ( $\dot{\Delta} \ll \Delta \ll 1$ ), debido a que el efecto de un solitón disipativo sobre el otro, disminuye exponencialmente con la distancia entre ellos. Por simplicidad se introduce la siguiente notación:

$$R_{+,+}(z_+) = R_+(z_+ \equiv x + \Delta/2), \quad (5.3)$$

$$R_{+,-}(z_-) = R_+(z_- \equiv x - \Delta/2), \quad (5.4)$$

$$W = R_{+,+} + \chi R_{+,-}, \quad (5.5)$$

Donde  $R_{+,+}$  describe al solitón ubicado a la derecha,  $R_{+,-}$  al ubicado a la izquierda y  $W$  a la suma de ambos, que también debe ser solución de la ecuación de Schrödinger no lineal, de modo que es posible reemplazar este ansatz en la ecuación en coordenadas polares

$$\partial_t R = 2\partial_x R \partial_x \theta + \partial_{xx} R \theta - \mu R + \gamma R \cos(2\theta), \quad (5.6)$$

y linealizando en  $\rho$  y  $\varphi$  se obtiene la ecuación

$$\frac{\dot{\Delta}}{2} (\partial_{z_+} R_{+,+} - \chi \partial_{z_-} R_{+,-}) = W \partial_{xx} \varphi + 2\partial_x W \partial_x \varphi - 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} W \varphi, \quad (5.7)$$

que puede integrarse, obteniéndose una relación recursiva para  $\varphi$ :

$$\varphi = \int_x^{-\infty} dx' \frac{\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}{W^2} \int_{x'}^{-\infty} dy W^2 \varphi(y, t) + \int_x^{-\infty} dx' \frac{\dot{\Delta}}{2W^2} \int_{x'}^{-\infty} dy W (\partial_{z_+} R_{+,+} - \chi \partial_{z_-} R_{+,-}). \quad (5.8)$$

Cerca de la bifurcación, es decir, cuando  $\gamma - \mu \ll 1$  es posible usar la aproximación de Born:

$$\varphi = \dot{\Delta} \Theta(x, \Delta) + O(\sqrt{\gamma - \mu}), \quad (5.9)$$

Donde  $\Theta$  corresponde a la integral doble, independiente de  $\varphi$

$$\Theta(x, \Delta) \equiv \int_x^{-\infty} \frac{dx'}{2W^2} \int_{x'}^{-\infty} dy W (\partial_{z_+} R_{+,+} - \chi \partial_{z_-} R_{+,-}), \quad (5.10)$$



es decir, la corrección de la fase es del orden de la velocidad con la que interactúan los solitones.

Por otro lado, al introducir los ansatz (4.1) y (4.2) en la ecuación (2.23) y linealizando en  $\rho$  y  $\varphi$  se obtiene:

$$W\partial_t\varphi = L\rho - 2\mu W\varphi - 3\chi R_{+,+}^2 R_{+,-} - 3R_{+,-}^2 R_{+,+} \quad (5.11)$$

donde

$$L \equiv -v + \sqrt{\gamma^2 - \mu^2 - 3(R_{+,+} + \chi R_{+,-})^2} - \partial_{xx} \quad (5.12)$$

Usando la ecuación de Born en la ecuación linealizada (4.10) se obtiene:

$$L\rho = -2\mu W(x)\Theta(x)\dot{\Delta} - 3\chi R_{+,+}^2(x)R_{+,-}(x) - 3R_{+,-}^2 R_{+,+}(x), \quad (5.13)$$

es decir, una ecuación del tipo  $L|\rho\rangle = |b\rangle$ .

Bajo el producto interno

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx, \quad (5.14)$$

el operador lineal  $L$  es autoadjunto ( $L = L^\dagger$ ). Se busca utilizar la alternativa de Fredholm, para esto se buscan los elementos del Kernel de este operador  $\{v\}$ , que satisfacen que  $L|v\rangle = 0$ . Debido a que  $L\partial_x R_{+, \pm} \approx 0$ , pues es exponencialmente pequeño, se considera  $\partial_x R_{+, \pm}$  como una buena aproximación de los elementos del Kernel de  $L$ . Además estos elementos son ortogonales a los elementos de la imagen de  $L$ , es decir,  $\langle v|b\rangle = 0$  lo que permite escribir la ecuación:

$$\langle \partial_{z+} R_{+,+} | 2\mu W\Theta \rangle \dot{\Delta} + \langle \partial_{z+} R_{+,+} | 3\chi R_{+,+}^2 R_{+,-} \rangle + \langle \partial_{z+} R_{+,+} | 3R_{+,-}^2 R_{+,+} \rangle = 0. \quad (5.15)$$

Debido a que  $\partial_{z+} R_{+,+}$  es exponencialmente pequeño lejos del corazón  $R_{+,+}$ , particularmente, cerca del corazón de  $R_{+,-}$ , es posible despreciar el último término de la ecuación (4.14), lo que permite encontrar la velocidad de interacción:

$$\dot{\Delta} = -\frac{3\chi \langle \partial_{z+} R_{+,+} | R_{+,+}^2 R_{+,-} \rangle}{2\mu \langle \partial_{z+} R_{+,+} | W\Theta \rangle}, \quad (5.16)$$

donde el denominador

$$\langle \partial_{z+} R_{+,+} | W\Theta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_{+,+} W(z) \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{2W^2(x')} \int_{-\infty}^{x'} dy W(y) \Lambda(y), \quad (5.17)$$

es un número positivo, por argumentos de simetría con  $\Lambda \equiv \partial_{z+} R_{+,+}(y) - \chi \partial_{z-} R_{+,-}(y)$  y el numerador

$$\chi \langle \partial_{z+} R_{+,+} | R_{+,+}^2 R_{+,-} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_{z+} R_{+,+}(z) R_{+,+}^2(z) R_{+,-}(z + \Delta), \quad (5.18)$$

que al evaluar cerca del solitón de la derecha  $R_{+,+}$ , donde  $R_{+,-} \approx \sqrt{2\delta_+}e^{-\delta_+\Delta}$  permite estimar:

$$\langle \partial_{z+} R_{+,+} | W \Theta \rangle \approx \sqrt{2\delta_+} e^{-\delta_+\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_{+,+}(z) R_{+,+}^2(z) e^{-\delta_+z}, \quad (5.19)$$

por lo tanto

$$\dot{\Delta} = -R\chi e^{-\delta_+\Delta} \quad (5.20)$$

donde

$$R = \frac{\sqrt{2\delta_+} e^{-\delta_+\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_{+,+}(z) R_{+,+}^2(z) e^{-\delta_+z}}{\mu \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_{+,+} W(z) \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{2W^2(x')} \int_{-\infty}^{x'} dy W(y) \Lambda(y)} \quad (5.21)$$

es una constante positiva. Así la interacción entre dos solitones varía exponencialmente con la distancia entre ellos. Esta interacción será atractiva o repulsiva, cuando los solitones estén en fase o en oposición de fase, es decir, para  $\chi = 1$  o  $\chi = -1$ .

Para una condición inicial conocida, es posible integrar la velocidad de interacción, obteniéndose así una ley para la distancia:

$$\Delta(t) = \delta_+^{-1} \ln[-\chi \delta_+ R(t - t_0)], \quad (5.22)$$

donde  $t_0$  está determinado por la condición inicial:

$$t_0 = \chi \frac{e^{\delta_+\Delta(t=0)}}{\delta_+ R}. \quad (5.23)$$

De este modo, puede verse que la distancia entre dos solitones disipativos está caracterizada por una ley logarítmica.

## 5.2. Resultados experimentales

Para estudiar la interacción se utiliza la celda de 50 cm para que los solitones tengan suficiente espacio para interactuar y para minimizar los efectos de los bordes.

La frecuencia de forzamiento es de  $F_0 = 10,7$  Hz y la aceleración es  $\Gamma = 0,0696$ . Se crean pares de solitones a ambos lados de la celda, simétricos con respecto al centro, es posible moverlos al soplarlos suavemente para ubicarlos en la posición inicial deseada, se capturan imágenes de la interacción estroboscópicamente, en este caso la frecuencia de adquisición de la cámara es de 2,375, es decir 1 imagen cada 4 ciclos de oscilación de los solitones.

Para cada imagen se extrae la curva de la superficie del agua, donde se pueden identificar los máximos y sus posiciones, lo que permite calcular la distancia entre ellos.

### 5.2.1. Solitones en oposición de fase

Debido a que los solitones en oposición de fase se encuentran siempre separados el uno del otro, se consideran dos subimágenes cada una conteniendo a uno de los solitones, se procesan estas subimágenes por separado, extrayendo el perfil de la línea del agua a cada una de ellas y luego ajustando una función del tipo  $A \operatorname{sech} \frac{x-x_0}{b} + c$ . en este caso la distancia entre los solitones  $\Delta'$  se define como la distancia entre los máximos de los ajustes obtenidos para cada subimagen.

Dos solitones en oposición de fase se repelen, en la figura 5.1 se muestra una secuencia de este proceso, desde la posición inicial entre los solitones para  $t \approx 0,4$  segundos,  $t \approx 3,7$  segundos y  $t \approx 37$  segundos. Se ve que se alejan lentamente.

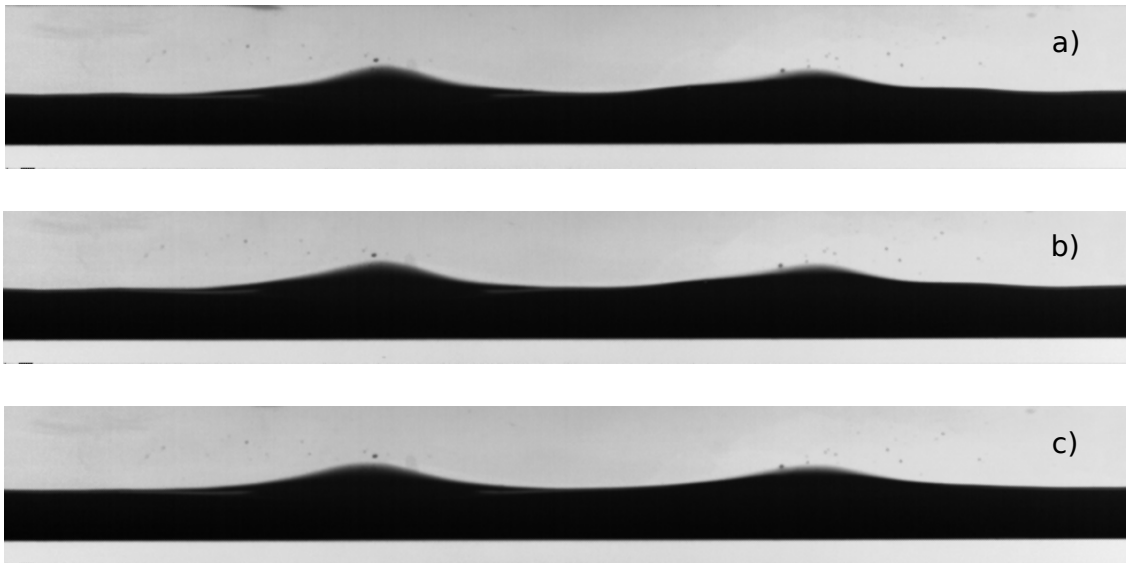


Figura 5.1: Secuencia que muestra dos solitones en fase que se repelen, a) fue capturada para  $t \approx 0,4$  segundos, b) para  $t \approx 3,7$  segundos y c) para  $t \approx 37$  segundos

Para observar este efecto más claramente se construye un diagrama espacio-temporal, a la izquierda en la figura 5.2 donde el eje horizontal indica la posición, el vertical el tiempo y la escala de color la altura. Se observa que luego de los primeros 10 segundos de interacción, los solitones apenas se desplazan. Además se muestra la evolución de la distancia entre los solitones  $\Delta'$  en función del tiempo, como se muestra a la derecha en la figura 5.2.

Debido a que la variación en la distancia es muy pequeña, para obtener los parámetros del ajuste logarítmico que se muestra a la izquierda de la figura 5.2 es necesario primero hacer un ajuste lineal

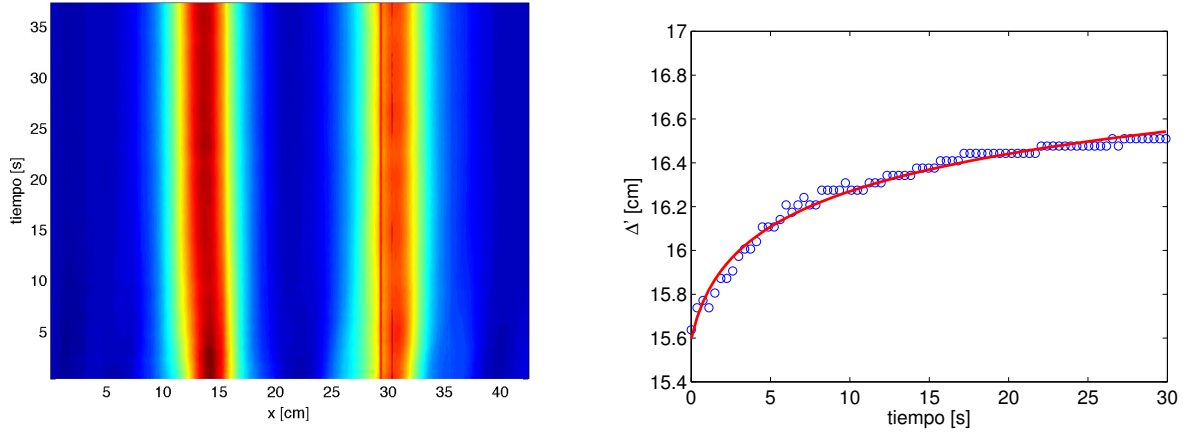


Figura 5.2: En la figura de la izquierda se muestra un diagrama espacio-temporal donde dos solitones en oposición de fase se alejan levemente el uno del otro. La figura de la derecha muestra la evolución de la distancia entre ambos solitones, definida como la distancia entre los máximos de cada solitón, los círculos (azul) muestran los datos experimentales mientras que la línea continua (rojo) corresponde a un ajuste logarítmico

a los datos  $v/s \log(t - t_0)$  del tipo

$$y = p1 \cdot \log(t - t_0) + p2, \quad (5.24)$$

donde  $t_0$  no es un parámetro conocido. Para obtenerlo es necesario ajustar la función anterior para distintos valores de  $t_0$  hasta obtener el mejor ajuste posible que es el que se muestra en la figura. En este caso  $t_0 = -0,819$ ,  $p1 = 0,261 \pm 0,008$  y  $p2 = 15,64 \pm 0,02$ . Es posible a partir de estos parámetros obtener un ajuste logarítmico del tipo

$$\Delta'(t) = a \log(b \cdot (t + t_0)), \quad (5.25)$$

como en la descripción fenomenológica presentada anteriormente con  $a = 0,261$  cm,  $b = 1,058e + 26 \text{ s}^{-1}$  y  $t_0 = -0,819$  s. Es importante notar que el parámetro  $b$  es muy difícil de ajustar, para obtener una mejor estimación del mismo, es necesario tener datos cuando los solitones se encuentran más cerca. En [6] se muestra una realización en un canal de 40 cm de largo y con 1,5 cm de agua, la interacción cubra más distancia, por lo que resulta más sencillo ajustar un logaritmo.

### 5.2.2. Solitones en fase

Dos solitones en fase se atraen, coalescen y se fusionan en uno solo, emitiendo ondas en la dirección longitudinal hasta obtener el tamaño para el que es estable como se muestra en la figura. Se define la distancia entre ellos  $\Delta'$  para cada imagen de la secuencia capturada, como la distancia entre los máximos de la curva que define el perfil del agua, ya que no es posible hacer un ajuste de la misma forma que se hace para los solitones en oposición de fase, porque los solitones en fase se fusionan. En la figura 5.3 se muestra una secuencia del proceso de atracción y fusión de dos solitones en fase para  $t \simeq 4$  segundos donde los solitones se encuentran separados,  $t \simeq 15$  segundos donde los solitones coalescen y  $t \simeq 22$  segundos donde ambos solitones se han fusionado en uno solo.

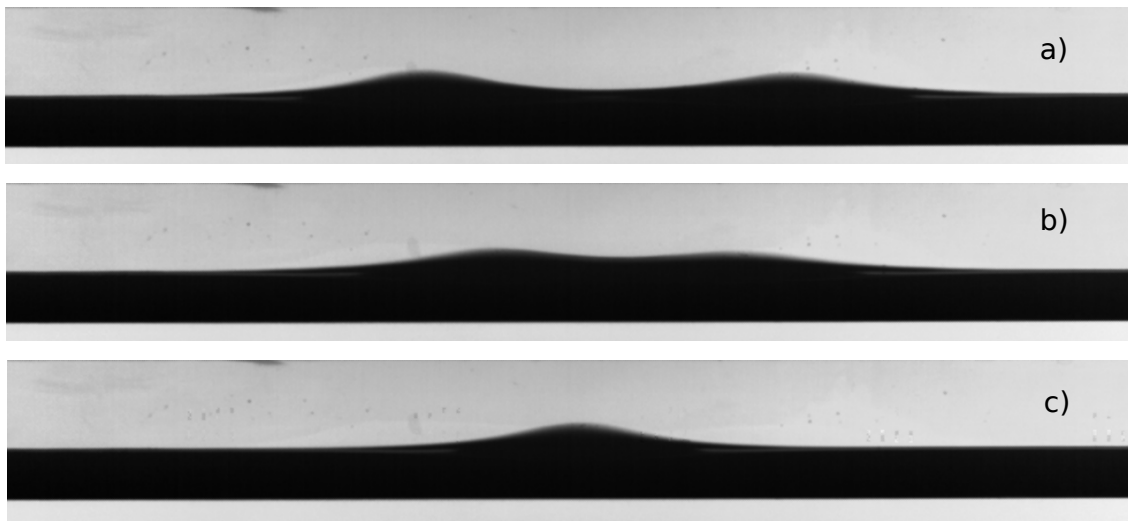


Figura 5.3: Secuencia que muestra la colisión y fusión de dos solitones en fase, a) fue capturada para  $t \simeq 4$  segundos, b) para  $t \simeq 15$  segundos y c) para  $t \simeq 22$  segundos

Es posible observar en detalle este fenómeno en la figura 5.4, donde en la imagen de la izquierda se muestra un diagrama espacio-temporal de los solitones donde el eje horizontal indica la posición, el eje vertical el tiempo y la escala de color indica la amplitud, aquí se observa claramente todo el proceso de colisión de los solitones.

En la figura de la izquierda se muestra la evolución temporal de la distancia entre ambos solitones y un ajuste logarítmico del tipo:

$$\Delta'(t) = a \log(b \cdot (t - t_0)), \quad (5.26)$$

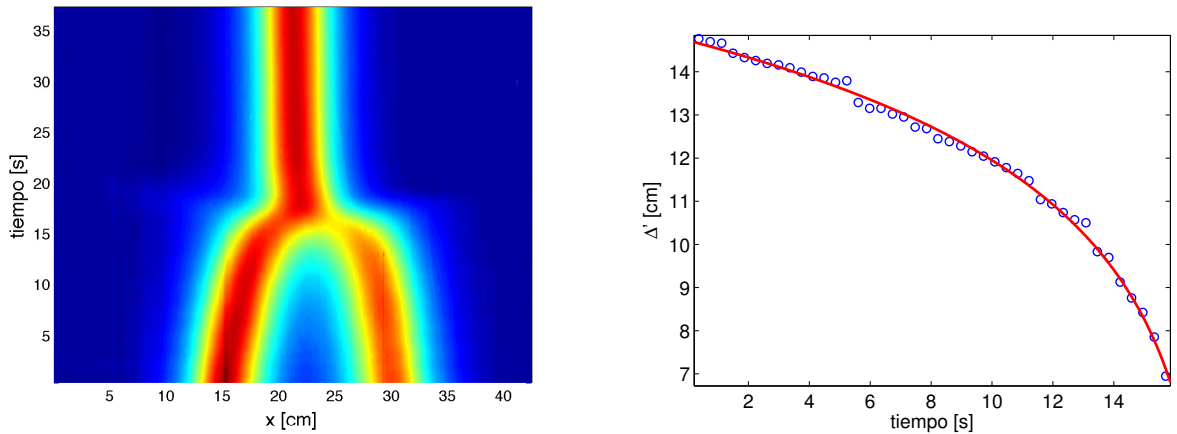


Figura 5.4: En la figura de la izquierda se muestra un diagrama espacio-temporal donde dos solitones en fase que se atraen hasta colisionar y fusionarse en uno solo. La figura de la derecha muestra la evolución de la distancia entre ambos solitones, definida como la distancia entre los máximos de cada solitón, los círculos (azul) muestran los datos experimentales mientras que la línea continua (rojo) corresponde a un ajuste logarítmico

como en la descripción fenomenológica presentada anteriormente. Donde  $a = 3,2 \pm 0,2$  cm,  $b = -5,4 \pm 1,5$  s<sup>-1</sup> y  $t_0 = 17,3 \pm 0,3$  s.

Se observa un excelente acuerdo con la teoría presentada para el caso de solitones en fase. Para el caso de dos solitones en oposición de fase, si bien el logaritmo ajusta bien, hay un parámetro cuyo error no puede ser estimado, por ser demasiado grande, esto se debe a la pequeña variación en la distancia. Resulta más difícil medir la interacción para dos solitones en oposición de fase que la interacción para dos solitones en fase debido a que la interacción es fuerte cuando los solitones se encuentran cerca, en el caso de los solitones en fase, esto sucede al comienzo de la realización, cuando los solitones recién han sido creados y existen otras perturbaciones en el sistema que obligan a considerar datos posteriores

# Capítulo 6

## Marco Experimental: Vórtices en cristales líquidos

### Resumen

En este capítulo se describe la celda de cristal líquido utilizada, además de la técnica de adquisición de imágenes y el procesamiento de datos utilizado para medir la interacción de los vórtices que se forman en el cristal líquido nemático.

### 6.1. Montaje experimental

La celda a utilizar, llamada válvula de luz de cristal líquido o LCLV por sus siglas en inglés, se compone por una capa de  $d = 15 \mu m$  de espesor de un cristal líquido nemático, contenida entre una placa de vidrio y una pared fotoconductor y transparente hecha de un lámina de  $Bi_{12}SiO_{20}$  de 1 mm de espesor, ambas caras de esta pared están cubiertas por un conductor transparente, Indio-Óxido de Estaño, ITO, por sus siglas en inglés (Indium Tin Oxide), que permite aplicar un voltaje externo a través de la celda. Esto significa que la celda es fotosensible y que cuando una luz incide sobre ella, se aplica un voltaje sobre el cristal líquido en su interior.

El cristal líquido que se utiliza es la mezcla comercial MLC6681 (marca Mercks) y se caracteriza por tener una anisotropía dieléctrica negativa, es decir  $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp} < 0$ , donde  $\varepsilon_{\parallel}$  y  $\varepsilon_{\perp}$  son la susceptibilidad dieléctrica paralela y perpendicular respectivamente, ortogonales al eje principal de las moléculas del cristal líquido. Mediante un tratamiento adecuado a la celda se puede garantizar

que las moléculas del cristal líquido estén homeotrópicamente alineadas a ella, es decir, el vector director del cristal nemático es perpendicular a las paredes de la celda.

Al aplicarse un voltaje sinusoidal de amplitud  $V_0$ , con frecuencia mayor a la de la frecuencia de electroconvección del orden de los 100 Hz, debido a que  $\varepsilon_a$  es negativo, las moléculas del cristal líquido se orientan perpendiculares al campo eléctrico. Al hacer esto, debido a la degeneración azimutal de  $2\pi$  alrededor de la dirección del campo eléctrico, se genera una invariancia rotacional, ya que las moléculas pueden orientarse indistintamente en cualquier dirección, por lo que surgen distintos dominios de orientación separados por defectos del tipo puntos, o vórtices.

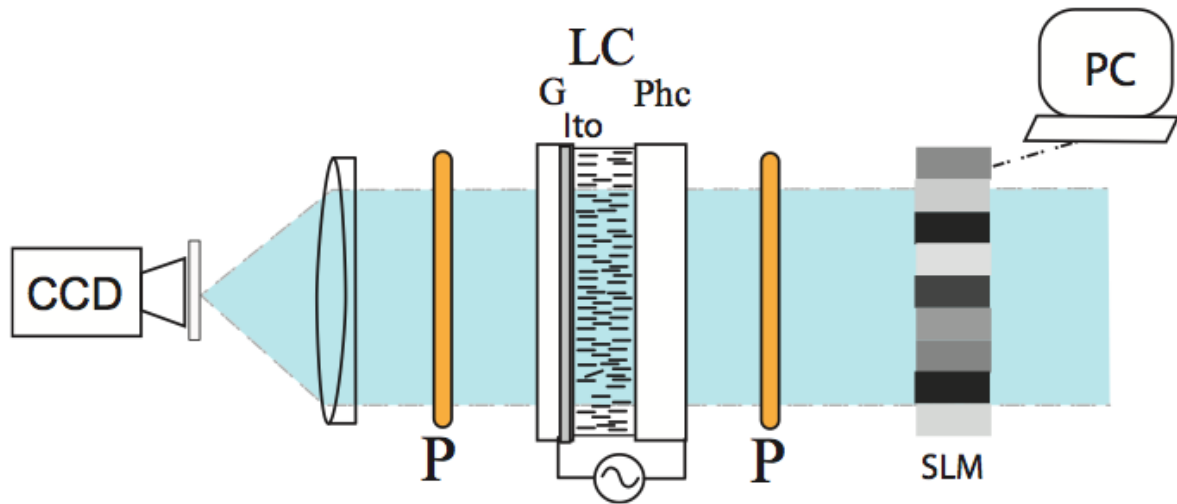


Figura 6.1: Esquema del montaje experimental de derecha a izquierda se muestra el SLM, el primer polarizador, la celda compuesta por la pared fotoconductor, el cristal líquido nemático y la placa de vidrio, el segundo polarizador, un lente y la cámara CCD

Se utiliza un láser azul ( $\lambda = 532 \text{ nm}$ ) que es colimado en un haz de 1 mm de diámetro y enviado a la celda. Los lugares de la celda iluminados por el láser están sometidos al Voltaje  $V_0$  gracias a la placa fotoconductor. Como se muestra en la figura 6.1 para detectar los vórtices y los dominios de orientación, es necesario poner la celda entre dos polarizadores cruzados y detectar la luz que sale de ella con una cámara CCD.

Para controlar las zonas iluminadas se utiliza un modulador espacial de luz, SML por sus siglas en inglés, que consiste en una pantalla de una pulgada, de cristal líquido, con una resolución espacial de  $1024 \times 768$  pixeles y una intensidad de 8 bits. El SML es controlado por un computador, y



proyecta sobre la celda las imágenes que se cargan en un computador destinado a esto, en escala de grises, dejando pasar la luz del láser por las zonas negras y bloqueándola en las zonas blancas, permitiendo crear todo tipo de máscaras sobre la celda.

Sobre la transición de Fréederick  $V_{FT} = 3,2$  V para la celda utilizada, las moléculas de cristal líquido comienzan a reorientarse y los vórtices aparecen abruptamente en el sistema, seguidos de un proceso de coarsening caracterizado por la aniquilación entre vórtices de distinto signo.

### 6.1.1. Imágenes

El sistema puede observarse entre polarizadores cruzados, lo que permite ver los brazos de los vórtices y los dominios de orientación, como se muestra a la izquierda de la figura 6.1, sin embargo para poder identificar los vórtices del fondo de las imágenes es necesario remover el segundo polarizador, para poder utilizar la intensidad de gris como criterio que permita identificar el centro de cada vórtice.

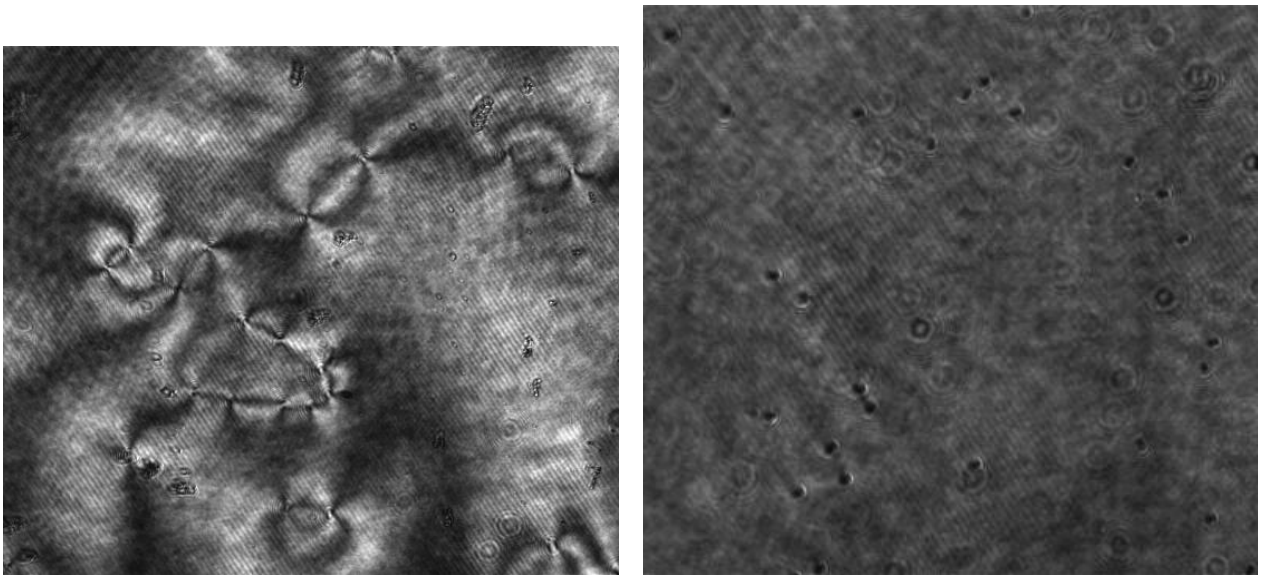


Figura 6.2: Vórtices en la celda de cristal líquido, en la imagen de la izquierda se muestra una imagen capturada utilizando ambos polarizadores cruzados. En la imagen de la derecha se ha retirado el polarizador posterior a la celda, lo que deja visible solo el corazón de los vórtices.

Para medir la interacción entre dos vórtices de signo contrario se proyecta un haz de láser circular de 1 mm de diámetro sobre la celda, lo que genera una gran cantidad de vórtices. Con la cámara se observa una fracción de la parte iluminada. Se espera a que el proceso de coarsening esté

muy avanzado, lo que puede tomar del orden de 5 minutos, y que en el campo visual queden solo dos vórtices interactuando para tomar imágenes con la cámara, de este modo se garantiza que solo se medirá la interacción entre dos vórtices y no otros efectos.

Se toman 25 cuadros por segundo, desde que en el campo visual hay solo dos vórtices hasta que estos coalescen y se aniquilan. Es por esta razón que todas las secuencias de imágenes obtenidas tiene distinta duración.

El voltaje aplicado a la celda es sinusoidal con  $V = 6,04 V_{rms}$  y  $f = 200$  Hz. Mientras que la intensidad de la luz del láser se varía. Para medirla se utiliza un espejo semitransparente que deja pasar el 99% de la luz y refleja el 1%, esta luz reflejada se mide con un medidor de potencia radiante.

Para procesar las imágenes, se exportan a un programa de tratamiento de imágenes, donde a cada secuencia se le resta la última de sus imágenes, donde los vórtices ya se han aniquilado, con el objeto de eliminar los defectos del fondo. Luego se hace una prueba, haciendo un corte en la dirección de interacción, es decir, se traza una línea que une los dos vórtices en la primera imagen y se observa como evoluciona el nivel de gris a través de esta línea a lo largo de toda la película, para verificar si la interacción ocurre efectivamente en una sola dimensión, ya que de no ser así, es posible que un vórtice fuera del campo visual esté participando del proceso y como la interacción es de largo alcance, este efecto no puede despreciarse. En la figura 6.3 a) se muestra como debe verse una interacción entre dos vórtices, si hubiese un tercer vórtice influyen sobre alguno de los vórtices observados, este debería desaparecer de la figura como se muestra en la figura 6.3 b) donde el vórtice que se encuentra abajo de la imagen, sale y vuelve a entrar a la línea que define la dirección de interacción.

Usando un programa de tratamiento de imágenes y con el fondo sustraído, se impone un umbral en la escala de grises para definir las partículas y luego se utiliza un software de detección de partículas, donde se puede escoger un radio mínimo y una excentricidad máxima para identificar qué elementos de la imagen corresponden a partículas. Esta herramienta entrega la posición del centro de masa de cada partícula para todas las imágenes.

### **6.1.2. Modulador espacial de la luz**

Utilizando el modulador espacial de la luz es posible proyectar máscaras sobre la celda, lo que define zonas de la celda a las que se les impone un voltaje y otras que no, es decir, es posible definir

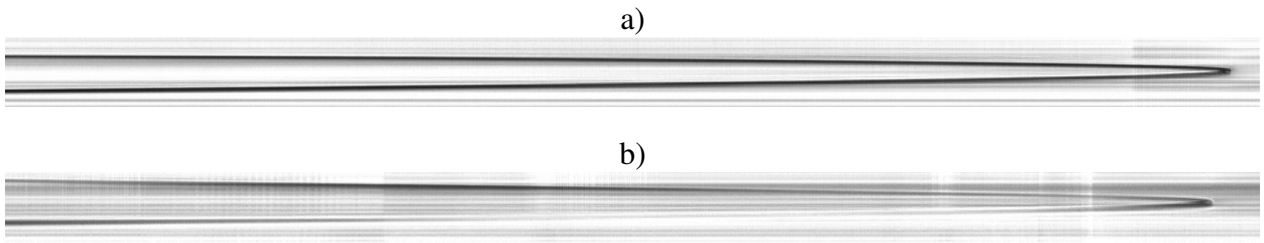


Figura 6.3: Diagrama espacio temporal de la interacción de dos vórtices de distinto signo, el eje horizontal es el tiempo y el vertical el espacio, ambos en unidades arbitrarias. Los vórtices se atraen, coalescen y se aniquilan. Esta imagen se utiliza para verificar que la interacción ocurra en una sola dimensión. Los vórtices aparecen de color negro debido a que la imagen se toma sin polarizador. La imagen a) corresponde a una interacción limpia en una sola dimensión, mientras que la b)

zonas de la celda que quedan bajo la transición de Fréederick y otras que quedan sobre ella.

Se fabrican máscaras sencillas utilizando sólo imágenes negras sobre un fondo blanco, el SLM deja pasar la luz por las zonas negras y la bloquea en las zonas blancas, como se muestra en la figura 6.4

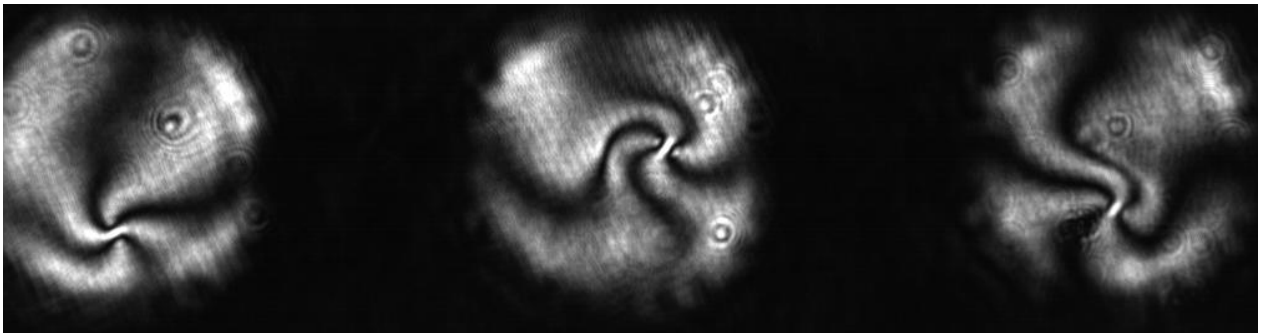
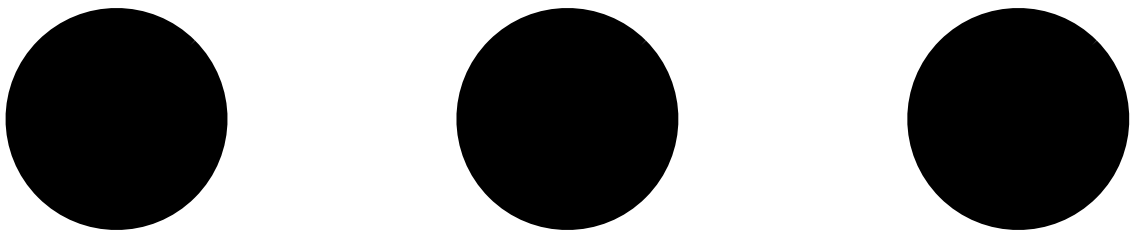


Figura 6.4: En la figura superior se muestra un ejemplo de una máscara que utiliza el SLM. En la figura inferior se muestra la imagen que se forma en el cristal líquido al proyectar esta máscara

# Capítulo 7

## Resultados Experimentales: Interacción y localización de vórtices

### Resumen

En este capítulo se muestran los resultados experimentales de la interacción de vórtices de distinto signo en un cristal líquido nemático, se muestra como se ajustan estos resultados a las distintas predicciones teóricas existentes. También se muestra como influyen las condiciones de borde en la carga total del sistema, utilizando un modulador espacial de la luz.

### 7.1. Resultados experimentales

Si bien la interacción entre vórtices está bien establecida teóricamente, [12], hasta la fecha no hay confirmación del efecto de la movilidad sobre la interacción, el objetivo de este estudio es verificar la validez de esta teoría basada en las ecuaciones de amplitud tipo Ginzburg-Landau. Utilizando la técnica descrita en el capítulo anterior se observa la interacción de dos vórtices de signo opuesto en la celda de cristal líquido nemático.

#### 7.1.1. Interacción de vórtices

En la figura 7.1 se muestra la evolución de la distancia entre los vórtices en función del tiempo para un par de vórtices de signo contrario. El voltaje en la celda para esta realización es una señal

sinusoidal de 200 Hz y  $6,04 V_{rms}$  y la intensidad de la luz  $2,67 \text{ mW/cm}^2$

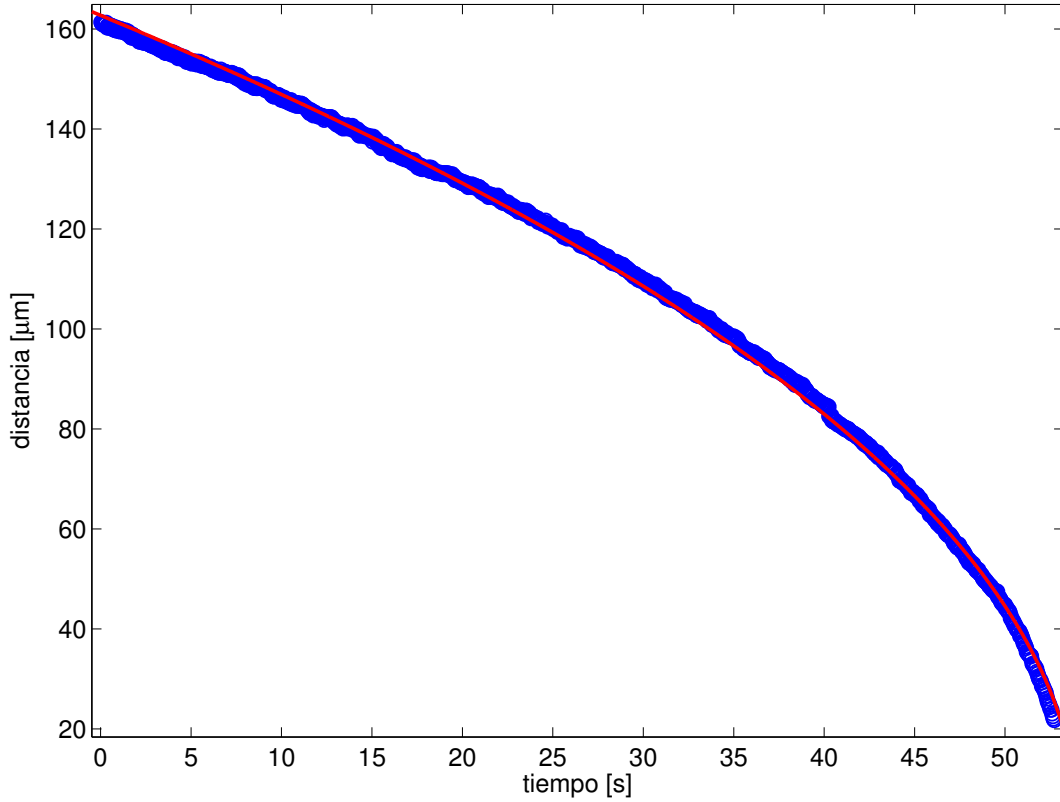


Figura 7.1: Evolución de la distancia entre dos vórtices de distinto signo en función del tiempo, los círculos (azul) muestran los datos experimentales mientras que la línea continua (rojo) muestra un fit de raíz cuadrada.

Si se considera la ley de interacción descrita por Pismen [12]:

$$\dot{r}M(r) = \dot{r} \log\left(\frac{v_0}{\dot{r}}\right) = \frac{q}{r}, \quad (7.1)$$

donde  $q = \pm 1$  es el producto de las cargas topológicas y  $v_0$  es del orden de la velocidad con que colisionan los vórtices y  $M = \log\left(\frac{v_0}{\dot{r}}\right)$  da cuenta de la movilidad. Para distancias grandes, la velocidad con que se mueven los vórtices es pequeña ( $\dot{r}/v_0 \ll 1$ ) por lo tanto  $M(r) \approx 1$ , en este caso la ecuación puede ser integrada analíticamente, resultando:

$$r(t) = \sqrt{-q(t_0 - t)}. \quad (7.2)$$

En el caso de cargas opuestas,  $q = -1$ , así se obtiene una expresión aproximada para la interacción,

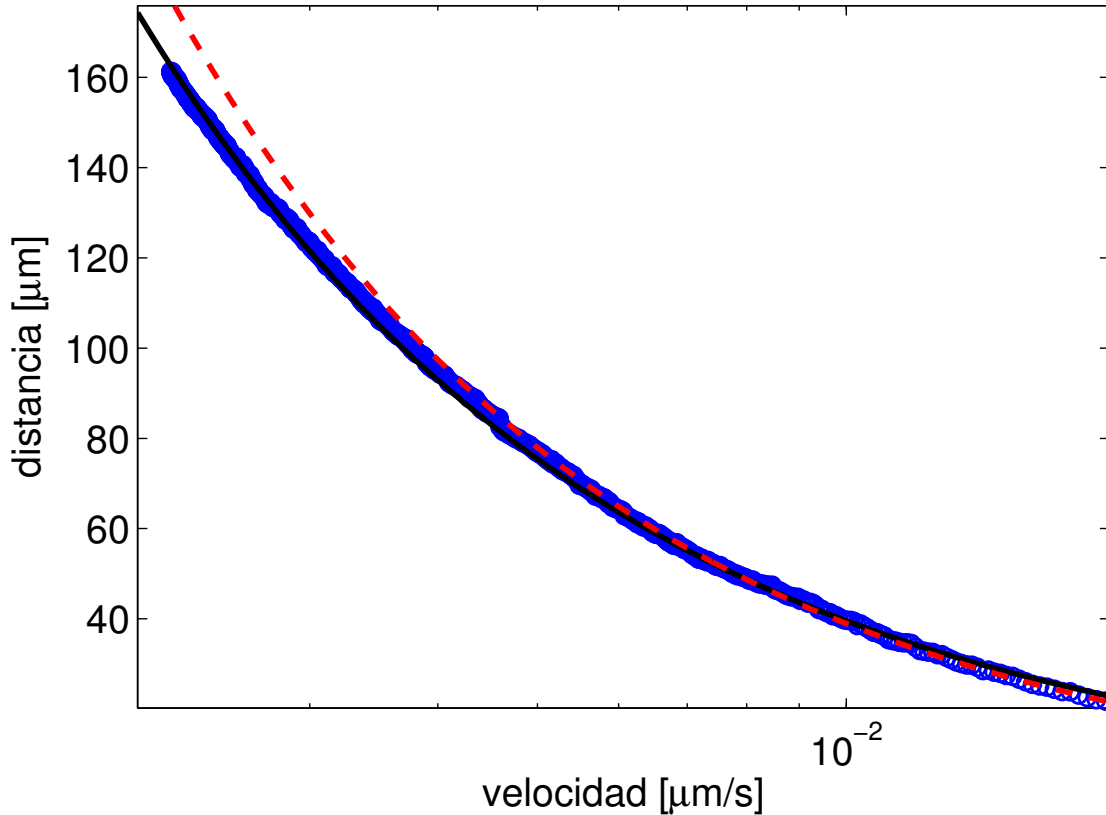


Figura 7.2: Distancia en función de la velocidad, los círculos (azul) corresponden a los datos experimentales mientras que la línea continua (negro) corresponde al fit obtenido para  $M = \log \frac{v_0}{v}$  y la línea punteada (rojo) al fit obtenido para  $M = 1$

como se muestra en la figura 7.1

$$r(t) = d_0 \sqrt{t - (t_0)}. \quad (7.3)$$

que donde  $d_0$  corresponde a la distancia inicial entre los vórtices y  $t_0$  al tiempo de colisión. En el ejemplo de la figura 7.1 la línea continua corresponde a los parámetros  $d_0 = 22,13 \pm 0,005$  y  $t_0 = 54,05 \pm 0,03$ .

Cuando los vórtices están muy cerca el uno del otro, el efecto de la movilidad es despreciable, sin embargo cuando están muy separados y se mueven lentamente, este efecto domina la dinámica del sistema. En la figura 7.2 se muestran dos ajustes, uno para  $M = 1$ , el línea punteada (rojo), del tipo

$$x = \frac{a}{v}, \quad (7.4)$$

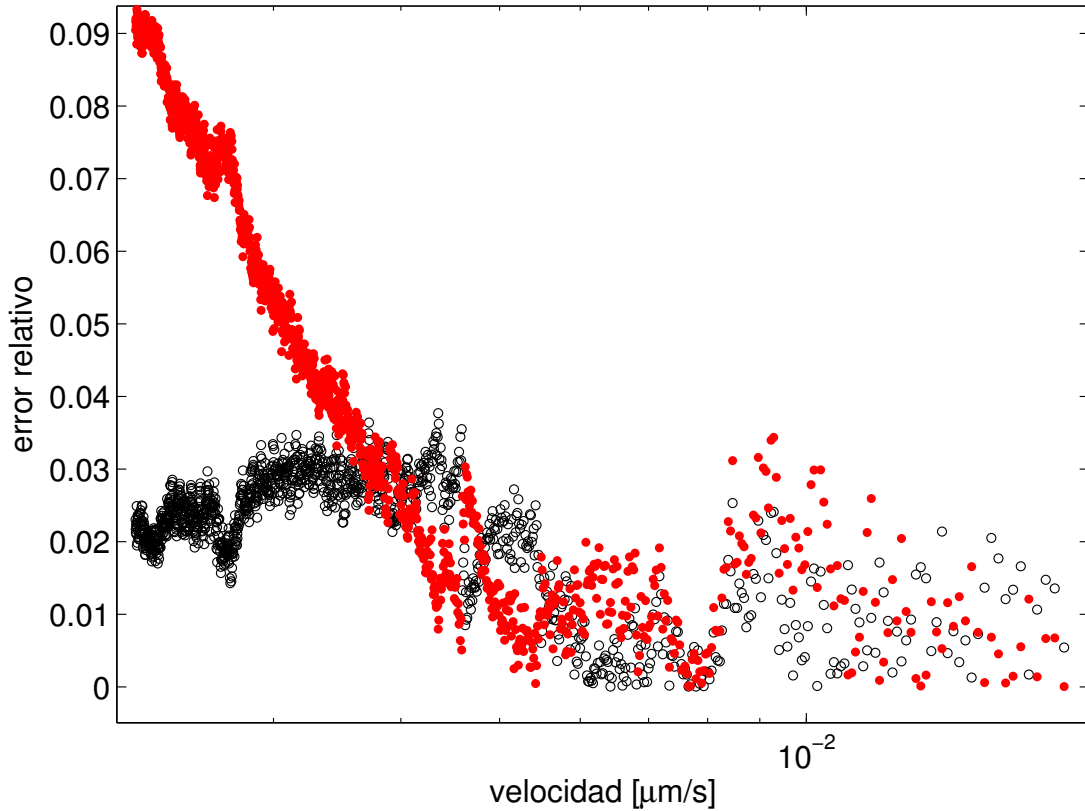


Figura 7.3: Error relativo calculado para ambos fit en función de la velocidad. Los círculos llenos (rojo) muestran el error relativo para  $M = 1$  mientras que los círculos vacíos (azul) muestran el error relativo para  $M = \log\left(\frac{v_0}{\bar{r}}\right)$

con  $a = 0,3896 \pm 8 \times 10^{-4}$  y otro con  $M = \log\left(\frac{v_0}{\bar{r}}\right)$  del tipo:

$$x = \frac{a}{v \cdot \log 1/v} + c \quad (7.5)$$

con  $a = 2,245 \pm 0,013$  y  $c = -9,291 \pm 0,32$ .

A simple vista es posible ver que el ajuste obtenido con  $M = 1$  no es tan bueno como el que se obtiene con  $M = \log\left(\frac{v_0}{\bar{r}}\right)$ , sin embargo para ilustrar mejor este efecto se grafica el error relativo calculado como  $\frac{f-f_0}{f_0}$  donde  $f$  corresponde a uno de los ajustes y  $f_0$  a los datos experimentales en función de la velocidad en escala semilogarítmica como se muestra en la figura 7.3.

Los resultados anteriores evidencian que la movilidad logarítmica tiene un efecto sobre la interacción, lo que logra conciliar la teoría con las observaciones experimentales.



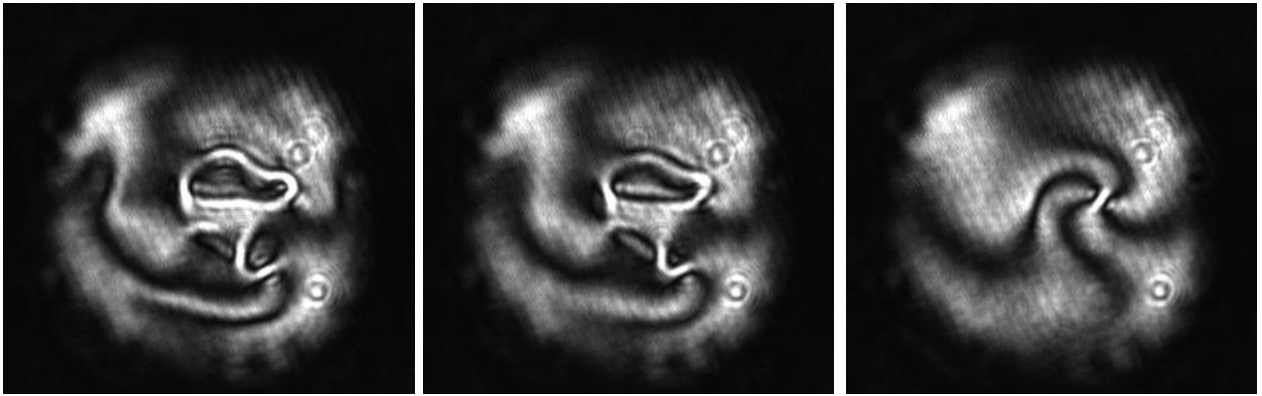


Figura 7.4: Secuencia que muestra la formación de un vórtice, la primera imagen corresponde a  $t = 0,36$  segundos, la segunda a  $t = 1,12$  segundos y la tercera a  $t = 4,56$  segundos

## 7.2. Condiciones de borde

Usando el Modulador espacial de la luz (SLM, por sus siglas en inglés) es posible controlar las condiciones de borde en el sistema, determinando que zonas de la celda quedan por sobre la transición de Frederick y cuales no, lo que permite controlar las condiciones de borde. Se observa que es posible inducir y aislar un solo vórtice reduciendo el tamaño del sistema, proyectando una máscara circular sobre la celda de cristal líquido.

Los solitones inducidos de esta forma siempre tienen el mismo signo, que puede determinarse al girar uno de los polarizadores, los brazos de un vórtice de signo  $+1$  giran en la dirección con que se gira el polarizador, mientras que los brazos de un vórtice de signo  $-1$  giran en dirección contraria. Imponer estas condiciones de borde induce vórtices de carga  $+1$ .

En la figura 7.4 se muestra la formación de un vórtice debido a las condiciones de borde del sistema, apenas se ilumina el sistema aparecen fluctuaciones que se transforman en vórtices, estos se aniquilan hasta dejar uno solo, de carga  $+1$ .

# Capítulo 8

## Conclusiones

Los sistemas fuera del equilibrio, es decir, aquellos que reciben una inyección de energía que a su vez es disipada por los mecanismos internos del sistema, pueden exhibir estructuras localizadas. Estas estructuras interactúan entre sí de forma no trivial, la interacción está caracterizada por la carga de las estructuras, por la geometría de las mismas, por el tamaño del sistema, por el forzamiento y por la disipación.

### 8.1. Solitones Hidrodinámicos no propagativos

En el caso de una capa de agua horizontal vibrada verticalmente, se observan solitones hidrodinámicos no propagativos.

Al medir los modos propios de las celdas disponibles se observa que en una celda más corta, pero con la misma profundidad de agua y con el mismo ancho aproximado, existen menos modos longitudinales que en una celda larga, es por eso que se escoge la celda más corta disponible, de 28 cm de largo para estudiar la estabilidad del solitón en función de los parámetros de la bifurcación, ya que las ondas de Faraday, al ser puramente longitudinales, pueden aparecer espontáneamente al excitar un modo longitudinal, impidiendo la formación de solitones.

Los solitones presentan una bifurcación subcrítica para todas las frecuencias de forzamiento estudiadas, es decir, existe una zona de biestabilidad, donde no solo el solitón es estable, sino que también lo es el estado homogéneo, donde la superficie del agua no tiene ningún movimiento relativo con respecto a la celda.

Los diagramas de bifurcación experimentales, en general se ajustan muy bien a la predicción

teórica, en particular aquellos obtenidos para la evolución de la fase para las distintas frecuencias, donde la ecuación de Schrödinger no lineal con forzamiento paramétrico predice que la fase crecerá como raíz cuadrada con la amplitud de dicho forzamiento. Además se observa que al crecer la desintonización, es decir, al aumentar la frecuencia de forzamiento, la amplitud de forzamiento crítica  $\Gamma_c$  disminuye, a su vez la amplitud con la que el solitón aparece  $A_0$  también disminuye al aumentar la desintonización.

Respecto a la interacción de solitones se puede concluir que cuando los solitones están en fase se atraen, mientras que cuando se encuentran en oposición de fase se repelen. La evolución de la distancia entre ambos solitones puede describirse bien con una ley logarítmica.

En general el modelo fenomenológico utilizado describe bien la interacción entre solitones y la dinámica de la bifurcación, sin embargo, tiene limitaciones, no considera el efecto del tamaño del sistema, el efecto de las paredes, ni el hecho de que el solitón es una estructura tridimensional, se cree que las discrepancias observadas experimentalmente se deben a esta razón.

## 8.2. Vórtices en un cristal líquido nemático

Respecto a la interacción de vórtices en una celda de cristal líquido nemático, se observa que dos vórtices de signo distinto se atraen y aniquilan, mientras que la interacción entre dos vórtices del mismo signo no fue observada. La evolución de la distancia entre dos vórtices del mismo signo se describe bien considerando una movilidad  $M$  constante cuando los vórtices están próximos a colisionar, sin embargo para describir la evolución de la distancia entre ellos cuando se encuentran muy alejados, es necesario tener en cuenta el efecto no lineal en la movilidad, se utiliza un modelo logarítmico para ajustar los datos obtenidos, obteniéndose un excelente acuerdo entre teoría y datos experimentales. Además se observa que es posible imponer una carga neta al sistema al modificar las condiciones de borde. Para un sistema considerado infinito la carga neta será cero, es decir, los vórtices que aparecen en el sistema, luego de un proceso de *coarsening* se aniquilarán totalmente, sin quedar ninguno. Sin embargo al imponer condiciones de borde que limitan el tamaño del sistema, luego del proceso de *coarsening*, quedará un vórtice, así, la carga neta del sistema, será +1.

# Apéndice A

## Artículos

### **A.1. Ley de interacción de a pares en un fluido vibrado parametricamente**

En este artículo se presenta un estudio experimental y teórico del movimiento e interacción de dos solitones hidrodinámicos no propagativos en una celda rectangular que contiene una capa de agua. Cerca de la inestabilidad de Faraday este sistema puede modelarse por la ecuación de Schrödinger no lineal con disipación y forzamiento paramétrico. Este modelo permite caracterizar la ley de interacción entre pares de solitones hidrodinámicos no propagativos. Este modelo se ajusta bien a los resultados experimentales de este trabajo. Los experimentos de este trabajo se realizaron en una celda de 40 cm de largo, 2,54 cm de ancho y con una profundidad de 1,5 cm de agua.

# Soliton pair interaction law in parametrically driven Newtonian fluid

BY M. G. CLERC<sup>1,\*</sup>, S. COULIBALY<sup>2</sup>, N. MUJICA<sup>1</sup>, R. NAVARRO<sup>1</sup>  
AND T. SAUMA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas,  
Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile*

<sup>2</sup>*Laboratoire de Cristallographie et Physique Moléculaire (LACPM), UFR  
Sciences des Structures de la Matière et Technologies (UFR SSMT),  
Université de Cocody, Abidjan, Côte d'Ivoire*

An experimental and theoretical study of the motion and interaction of the localized excitations in a vertically driven small rectangular water container is reported. Close to the Faraday instability, the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation models this system. This model allows one to characterize the pair interaction law between localized excitations. Experimentally we have a good agreement with the pair interaction law.

**Keywords:** dissipative soliton; pattern formation; particle-type solutions

## 1. Introduction

Pattern formation in out of equilibrium dynamical systems leads sometimes to the appearance of coherent or localized states, that is, a pattern extends over a limited space region and consists of only a few cells, eventually one, of the corresponding extended structure. During the last few years, emerging macroscopic particle-type solutions in dissipative systems have been observed in different fields, such as domains in magnetic materials, chiral bubbles in liquid crystals, current filaments in gas discharges, spots in chemical reactions, localized states in fluid surface waves, oscillons in granular media, isolated states in thermal convection, solitary waves in nonlinear optics, among other physical systems. In one-dimensional systems, localized states can be described as spatial trajectories that connect one steady state with itself, which means they are homoclinic orbits from the dynamical system point of view (see Coulet 2002 and references therein), while domain walls or interfaces are seen as spatial trajectories joining two different steady states—heteroclinic curves—of the corresponding spatial dynamical system (van Saarloos & Cross 1990). For quasi-reversible systems—time-reversible systems perturbed with small injection and dissipation of energy (Clerc *et al.* 1999*a,b*, 2000, 2001, 2008*a*)—the prototype model that exhibits

\*Author for correspondence ([marcel@dfi.uchile.cl](mailto:marcel@dfi.uchile.cl)).

One contribution of 14 to a Theme Issue ‘Topics on non-equilibrium statistical mechanics and nonlinear physics’.

localized structures or dissipative solitons is the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation (Barashenkov & Zemlyanaya 1999). This model has been derived in several contexts to describe patterns and localized structures, such as vertically oscillating layers of water (Miles 1984; Zhang & Viñal 1995), nonlinear lattices (Denardo *et al.* 1992), optical fibres (Kutz *et al.* 1993), Kerr-type optical parametric oscillators (Longhi 1996), magnetization in an easy-plane ferromagnetic exposed to an oscillatory magnetic field (Barashenkov *et al.* 1991; Clerc *et al.* 2008*b*) and parametrically driven damped chain of pendula (Alexeeva *et al.* 2000). Interaction of dissipative solitons and boundary effects has been studied qualitatively—numerically and experimentally—in the framework of non-propagating hydrodynamic solitons (Wu *et al.* 1984; Wang & Wei 1997*a,b*). However, a quantitative study of the interaction of these particle-type solutions is absent to our knowledge.

The aim of this paper is to characterize theoretically and experimentally the interaction of the dissipative solitons in a vertically driven rectangular water container. Close to the Faraday instability, the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation models this system. This model allows one to characterize the pair interaction law between localized states, which decreases exponentially with the distance between the dissipative solitons and is attractive or repulsive depending on whether they are in phase or out of phase, respectively. The merging of two attractive dissipative solitons is characterized by the radiation of two small perturbations and the appearance of only one dissipative soliton. Experimentally we have a good agreement with the pair interaction law.

## 2. Parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation

The dynamics of a layer of incompressible fluid that is driven by a sinusoidal force with frequency  $\Omega$  normal to the free surface is modelled by the dimensionless parametrically driven and damped nonlinear Schrödinger equation (Miles 1984; Zhang & Viñal 1995)

$$\partial_t \psi = -i\nu\psi - i|\psi|^2\psi - i\partial_{xx}\psi - \mu\psi - \gamma\bar{\psi}, \quad (2.1)$$

where  $\psi(x, t)$  is a one-dimensional complex field and  $\bar{\psi}$  stands for the complex conjugate of  $\psi$ . The surface displacement from flat interface  $h(x, t)$  and the velocity potential at the free surface  $\phi(x, t)$  are slave variables that are of the form  $h = \psi e^{-i\Omega t/2} + c.c.$  and  $\phi(x, t) = -i\psi e^{-i\Omega t/2} + c.c.$ , respectively (see Zhang & Viñal 1995 and references therein).  $\nu$  is the detuning parameter, which is proportional to the difference between the observed standing wave frequency and  $\Omega/2$ ,  $\mu$  is the damping parameter that is proportional to the kinematic viscosity of the fluid and  $\gamma$  is the forcing acceleration amplitude. For  $\mu = \gamma = \eta = 0$ , equation (2.1) becomes the well-known nonlinear Schrödinger equation (Newell 1985), which describes the envelope of an oscillatory system. This model is a time-reversal Hamiltonian system with the transformation  $\{t \rightarrow -t, \psi \rightarrow \bar{\psi}\}$ . The terms proportional to  $\mu$  and  $\gamma$  break the time-reversal symmetry, and represent energy dissipation and injection, respectively. The higher order terms in equation (2.1) are ruled out by a scaling analysis, since  $\mu \ll 1$ ,  $\nu \sim \mu \sim \gamma$ ,  $|\psi| \sim \mu^{1/2}$ ,  $\partial_x \sim \mu^{1/2}$  and  $\partial_t \sim \mu^{1/2}$ .

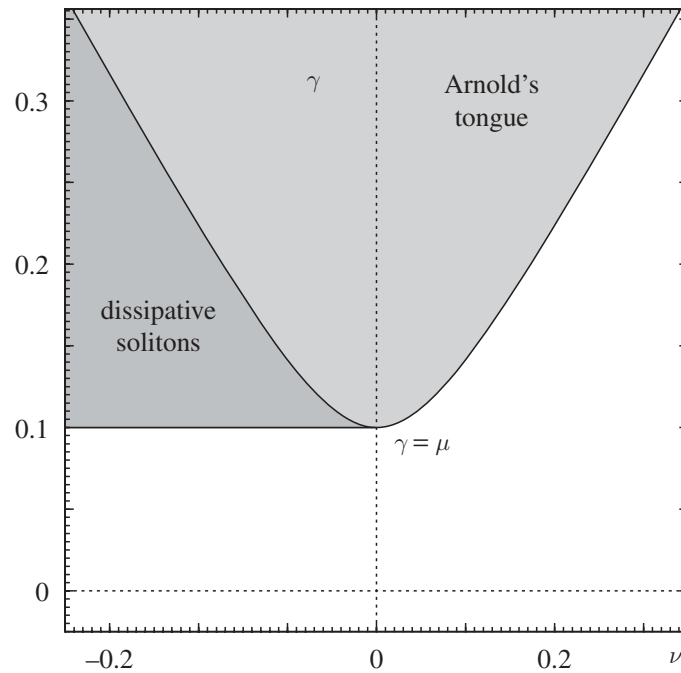


Figure 1. Bifurcation diagram of the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation (2.1). The light grey area shows the Arnold tongue.

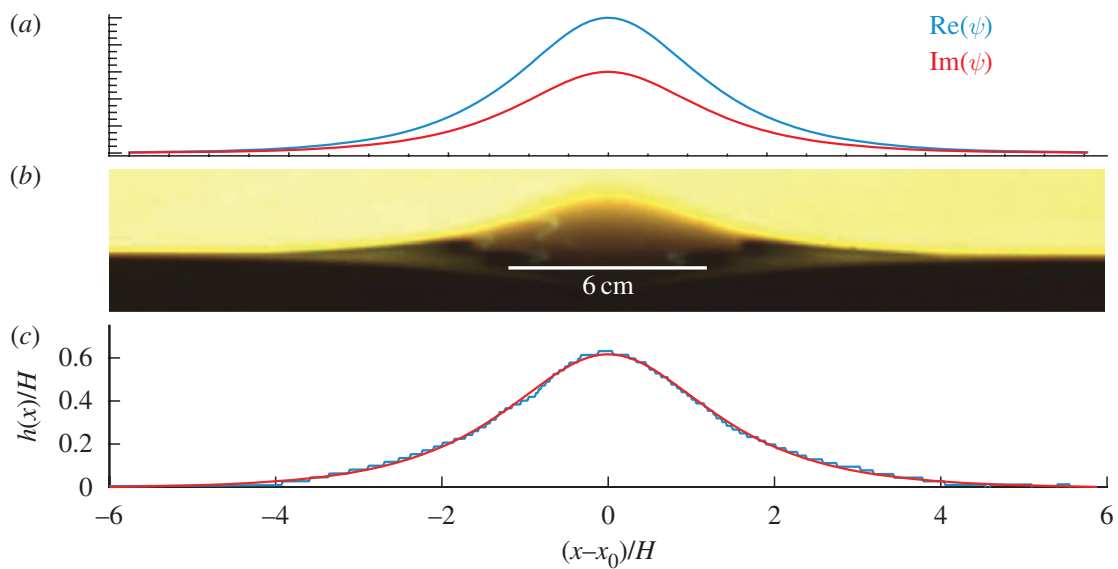


Figure 2. Dissipative soliton in parametrically resonant systems. (a) Stable dissipative soliton observed in the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation model (2.1). (b) Snapshot of a non-propagating hydrodynamic soliton observed in a vertically driven 45 cm long and 2.54 cm wide rectangular container, filled with  $H = 1.5$  cm of water. Only two-thirds of the channel is shown. (c) Instantaneous surface profile (blue line) from image shown in (b). The solid red line shows the fit  $h(x) = A_s \operatorname{sech}[(x - x_0)/w]$ . Adjusted parameters are  $A_s/H = 0.63 \pm 0.02$  and  $w/H = 1.10 \pm 0.03$ .

A trivial state of equation (2.1) is the homogeneous state  $\psi_0 = 0$ , which represents the flat and quiescent solution of the fluid layer. For negative detuning,  $\nu < 0$ , the  $\psi_0 = 0$  state becomes unstable through a subcritical stationary instability at  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$  (cf. figure 1), which corresponds to a subharmonic instability of the flat fluid layer. Inside this region—the Arnold tongue—the system has three unstable uniform solutions  $\psi_0 = 0$ , and  $\psi_{\pm} = x_0 \pm i\sqrt{(\mu - \gamma)/(\mu + \gamma)}x_0$ , where  $x_0 \equiv \sqrt{(\gamma - \mu)(-\nu + \sqrt{\gamma^2 - \nu^2})/2\gamma}$ . These three states merge together through a pitchfork bifurcation at  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$ , with  $\nu > 0$ . However, for positive detuning, the quiescent state is only stable for  $\gamma < \mu$ , because this state exhibits a spatial instability at  $\gamma = \mu$ , which gives rise to a spatial periodic state with wave number  $k_c = \sqrt{\nu}$ . This state represents subharmonic surface waves—Faraday waves.

### (a) Dissipative solitons

For negative  $\nu$ , the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation exhibits localized states supported asymptotically by the quiescent state. In order to obtain these localized states, we use the Madelung transformation  $\psi(x, t) = R(x, t)e^{i\theta(x, t)}$ , then the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation reads

$$\partial_t R = 2\partial_x R \partial_x \theta + R \partial_{xx} \theta - \mu R + \gamma R \cos(2\theta), \quad (2.2)$$

$$R \partial_t \theta = -\nu R - R^3 - \partial_{xx} R + R(\partial_x \theta)^2 - \gamma R \sin(2\theta). \quad (2.3)$$

Non-trivial steady homoclinic solutions—solutions that connect the quiescent state with itself—of the previous model are (dissipative solitons; see Barashenkov *et al.* 1991 and references therein)

$$\cos(2\theta) = \frac{\mu}{\gamma}, \quad (2.4)$$

$$R_{\pm}(x) = \sqrt{2\delta_{\pm}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\delta_{\pm}}[x - x_0]\right), \quad (2.5)$$

where  $\delta_{\pm} \equiv -\nu \pm \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} = -\nu - \gamma \sin(2\theta)$ . The amplitude and width of the dissipative solitons are characterized by  $\sqrt{2\delta_{\pm}}$  and  $1/\sqrt{\delta_{\pm}}$ , respectively. As a consequence of the spatial translation symmetry of model (2.1), the dissipative solitons are a family of states parametrized by a continuous parameter  $x_0$ . This parameter stands for the position of the maximum of the localized state. Figure 2a shows a typical dissipative soliton observed in the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation. Hence, the above model has localized states if  $\nu < 0$ ,  $\gamma \geq \mu$  and  $\gamma^2 < \mu^2 + \nu^2$ . This parameter region is depicted by the dark grey area in figure 1. In this region, the relation  $\cos(2\theta) = \mu/\gamma$  has four solutions in the interval  $[-\pi, \pi]$ . Figure 3 illustrates this relation and the respective particle-type solutions. From this picture, one can infer that the localized states appear or disappear by simultaneous saddle-node bifurcations when  $|\gamma| = \mu$ . The support state of these localized states becomes unstable at the Arnold tongue, therefore the dissipative soliton becomes unstable at  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$  ( $\nu < 0$ ). The stable solutions are characterized by  $\operatorname{Re}(\psi)\operatorname{Im}(\psi) > 0$ , that is both fields are simultaneously positive or negative (Barashenkov *et al.* 1991). Hence, there are two types of stable dissipative solitons.



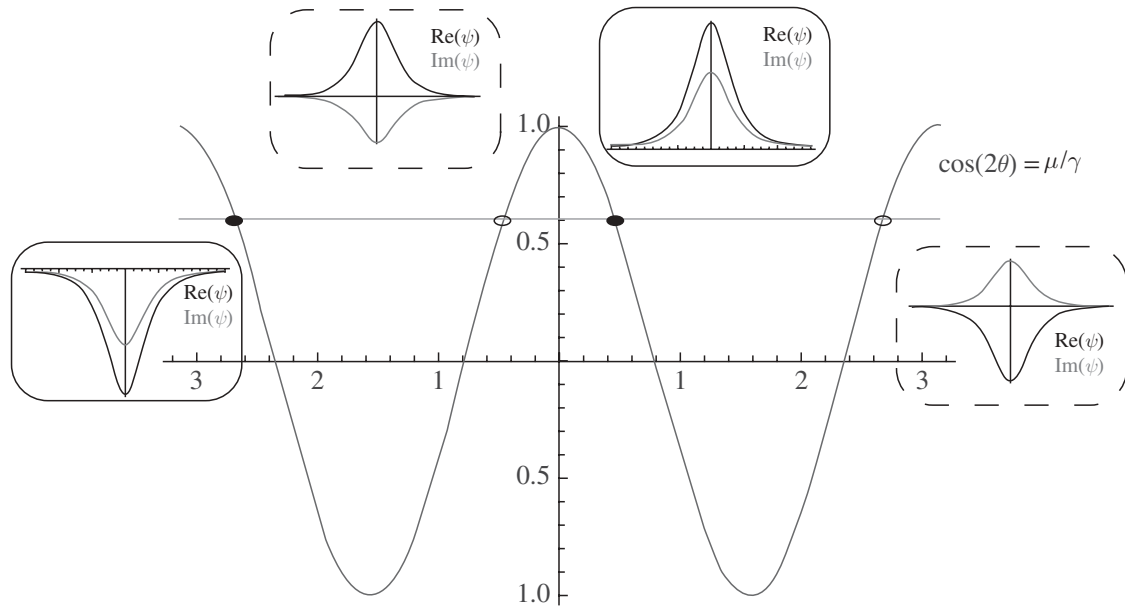


Figure 3. Schematic representation of the different dissipative solitons. The circles represent the different solutions of  $\cos(2\theta) = \mu/\gamma$ : filled (open) circles correspond to stable (unstable) localized states. The inset figures depict the different types of dissipative solitons.

In brief, close to the tip of the Arnold tongue, the dissipative solitons appear with finite amplitude by a saddle-node bifurcation at  $\gamma = \mu$ . Increasing the forcing amplitude  $\gamma$ , the amplitude and the width of stable dissipative solitons increase and decrease, respectively. Increasing  $\gamma$  more, these localized states become unstable at the Arnold tongue ( $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$  and  $\nu < 0$ ). When one increases the modulus of the detuning—far from the tip of the Arnold tongue—the amplitude of the dissipative soliton exhibits an Andronov–Hopf bifurcation and increasing more the detuning the amplitude of the dissipative soliton exhibits double-period scenarios (Shchesnovich & Barashenkov 2002). Recently, these bifurcations have been verified experimentally (Zhang *et al.* 2007).

### 3. Derivation of pair interaction law

The interaction of dissipative solitons has been studied qualitatively—numerically and experimentally—in the framework of non-propagating hydrodynamic solitons (Wang & Wei 1997*a,b*). In particular, it has been shown that two dissipative solitons in a large channel that are in (out of) phase experience an attractive (repulsive) interaction. In order to study quantitatively this dynamical process, we consider two dissipative solitons that are initially well separated (remote pair of dissipative solitons), such that the distance between the respective maxima is larger than the typical soliton width. Figure 4 illustrates the configuration under study. In this circumstance, we can consider the ansatz

$$R(x, t) = R_+ \left( x + \frac{\Delta(t)}{2} \right) + \chi R_+ \left( x - \frac{\Delta(t)}{2} \right) + \rho(x, \Delta), \quad (3.1)$$

$$\theta(x, t) = \theta_0 + \varphi(x, \Delta), \quad (3.2)$$

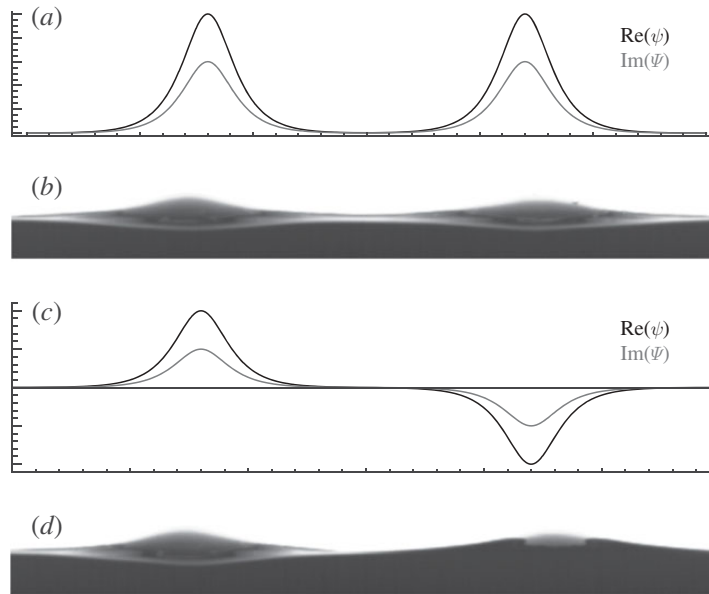


Figure 4. Dissipative soliton pair in parametrically resonant systems. (a) Two solitons in phase observed in model (2.1) and (b) in a vertically driven rectangular water container. (c) Two solitons out of phase observed in model (2.1) and (d) in a vertically driven rectangular water container.

where  $\Delta(t)$  accounts for the distance between the two maxima and  $\chi$  is a parameter that considers if dissipative solitons are in phase or out of phase, that is  $\chi = \pm 1$ . Hence, to take into account the effect of one localized state on the other one, we promote the soliton separation distance  $\Delta(t)$  to a variable—*parameter variation method*—and we modify slightly the dissipative soliton solutions including the small correction fields  $\rho(x, \Delta)$  and  $\varphi(x, \Delta)$  ( $\rho, \varphi \ll 1$ ). Furthermore, we consider  $\Delta \cdot \delta_+^{1/2} \gg 1$ . We can then assume that  $\Delta(t)$  evolves slowly in time ( $\ddot{\Delta} \ll \dot{\Delta} \ll 1$ ), since the effect of one dissipative soliton on the other one decreases exponentially with the distance between them (soliton tail). For simplicity, we introduce the notation

$$\begin{aligned} R_{+,+}(z_+) &= R_+(z_+ \equiv x + \Delta/2), \\ R_{+,-}(z_-) &= R_+(z_- \equiv x - \Delta/2), \\ W &= (R_{+,+} + \chi R_{+,-}), \end{aligned}$$

where  $z_+$  and  $z_-$  are the respective moving coordinates.

Introducing the above ansatz in equation (2.2) and linearizing in  $\rho$  and  $\varphi$ , we obtain

$$\frac{\dot{\Delta}}{2} (\partial_{z_+} R_{+,+} - \chi \partial_{z_-} R_{+,-}) = W \partial_{xx} \varphi + 2\partial_x W \partial_x \varphi - 2\sqrt{\gamma^2 - \mu^2} W \varphi. \quad (3.3)$$

This equation is integrable and we obtain the recursive relation

$$\varphi = \int_{-\infty}^x dx' \frac{\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}}{W^2} \int_{-\infty}^{x'} dy W^2 \varphi(y, t) + \int_{-\infty}^x \frac{dx' \dot{\Delta}}{2W^2} \int_{-\infty}^{x'} dy W (\partial_{z_+} R_{+,+} - \chi \partial_{z_-} R_{+,-}).$$

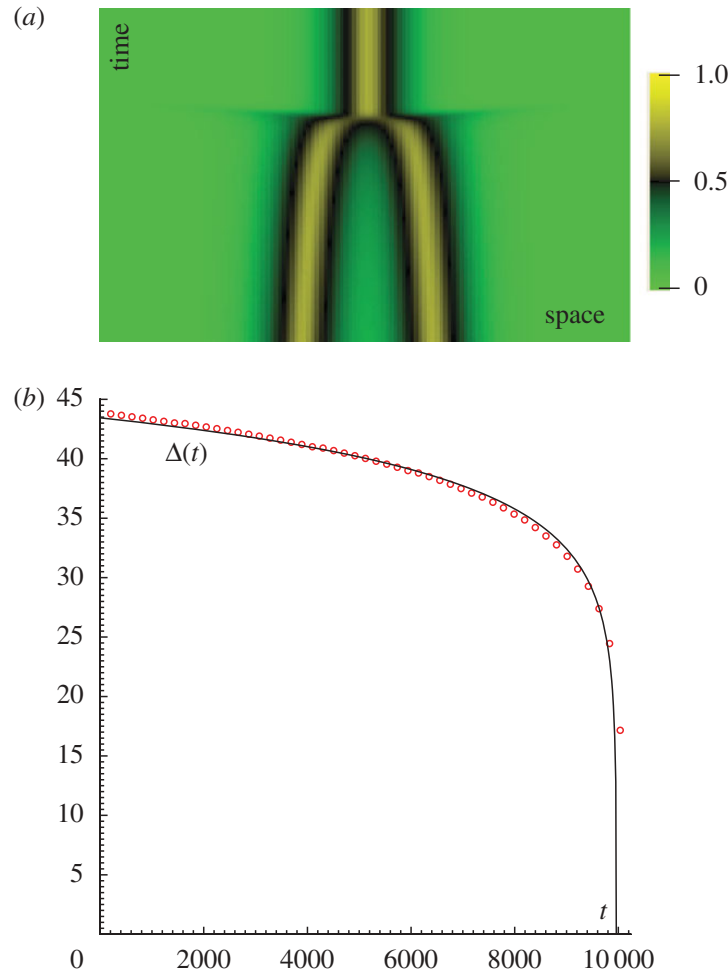


Figure 5. Interaction and collapse processes of two solitons. (a) Density plot of the spatio-temporal diagram of the imaginary part of  $\psi$  obtained by numerical simulation of model (2.1) with  $\mu = 0.115$ ,  $\gamma = 0.27$  and  $\nu = -0.063$ . (b) Temporal evolution of corresponding soliton distance  $\Delta(t)$ . Red circles stand for the soliton pair separation distance obtained numerically and the continuous curve is obtained from the formula (3.11).

Close to the saddle-node bifurcation ( $\gamma - \mu \ll 1$ ), we can use the Born approximation, that is,

$$\varphi = \dot{\Delta} \Theta(x, \Delta) + O(\sqrt{\gamma - \mu}), \quad (3.4)$$

with

$$\Theta(x, \Delta) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{2W^2} \int_{-\infty}^{x'} dy W(\partial_{z_+} R_{+,+} - \chi \partial_{z_-} R_{+,-}).$$

Hence, the phase correction is of the order of the temporal variation of distance between the dissipative solitons.

Analogously, we can introduce the ansatz (3.2) in equation (2.3) and linearizing in  $\rho$  and  $\varphi$ , we obtain

$$W \partial_t \varphi = \mathcal{L} \rho - 2\mu W \varphi - 3\chi R_{+,+}^2 R_{+,-} - 3R_{+,-}^2 R_{+,+} \quad (3.5)$$

with

$$\mathcal{L} \equiv -v + \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} - 3(R_{+,+} + \chi R_{+,-})^2 - \partial_{xx}. \quad (3.6)$$

Using the approximation (3.4), the above equation reads at the dominant order

$$\mathcal{L}\rho = -2\mu W(x)\Theta(x)\dot{\Delta} - 3\chi R_{+,+}^2(x)R_{+,-}(x) - 3R_{+,-}(x)R_{+,+}^2(x). \quad (3.7)$$

Introducing the inner product

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx,$$

the linear operator  $\mathcal{L}$  is self-adjoint ( $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ ). The kernel of this linear operator—set of functions  $\{v\}$  that satisfy  $\mathcal{L}v = 0$ —is of dimension 2. Due to  $\mathcal{L}\partial_x R_{+, \pm} \approx 0$  being exponentially small ( $e^{-\delta_+^{1/2}\Delta}$ ), the functions  $R_{+, \pm}$  are pseudo-eigenfunctions of the kernel of  $\mathcal{L}$ . Therefore, the field  $\rho$  has a solution if (solvability condition)

$$\begin{aligned} & \langle \partial_{z+} R_{+,+} | 2\mu W\Theta \rangle \dot{\Delta} + \langle \partial_{z+} R_{+,+} | 3\chi R_{+,+}^2 R_{+,-} \rangle \\ & + \langle \partial_{z+} R_{+,+} | 3R_{+,+} R_{+,-}^2 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

We obtain an equivalent result if we use the other element of the kernel  $\partial_{z+} R_{+,-}$  by  $\partial_{z+} R_{+,+}$ . Because  $\partial_{z+} R_{+,+}$  is a function of order one close to the soliton position of  $R_{+,+}$  and it decays exponentially close to the soliton position of  $R_{+,-}$ , then the last term of the above equation is neglected in comparison to the second one, that is

$$\dot{\Delta} = -\frac{3\chi \langle \partial_{z+} R_{+,+} | R_{+,+}^2 R_{+,-} \rangle}{2\mu \langle \partial_{z+} R_{+,+} | W\Theta \rangle}, \quad (3.9)$$

where

$$\langle \partial_{z+} R_{+,+} | W\Theta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_{+,+} W(z) \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{2W^2(x')} \int_{-\infty}^{x'} dy W(y) \Lambda(y)$$

is a positive number by symmetry arguments,  $\Lambda(y) \equiv \partial_{z+} R_{+,+}(y) - \chi \partial_{z-} R_{+,-}(y)$  and

$$\langle \partial_{z+} R_{+,+} | R_{+,+}^2 R_{+,-} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_{+,+}(z) R_{+,+}^2(z) R_{+,-}(z + \Delta).$$

In order to estimate this integral, we evaluate it close to the soliton position of  $R_{+,+}$ , where  $R_{+,-}(z + \Delta) \approx \sqrt{2\delta_+} e^{-\delta_+(z+\Delta)}$  and then

$$\langle \partial_{z+} R_{+,+} | R_{+,+}^2 R_{+,-} \rangle \approx \sqrt{2\delta_+} e^{-\delta_+\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_{+,+}(z) R_{+,+}^2(z) e^{-\delta_+z}.$$

Hence,

$$\dot{\Delta} \approx -\mathcal{R}\chi e^{-\delta_+\Delta}, \quad (3.10)$$

where

$$\mathcal{R} = \frac{3\sqrt{2\delta_+} \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_{+,+}(z) R_{+,+}^2(z) e^{-\delta_+z}}{\mu \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_{+,+} W(z) \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{2W^2(x')} \int_{-\infty}^{x'} dy W(y) \Lambda(y)}$$

is a positive constant. Therefore, the interaction between two dissipative solitons has an exponential law as function of the soliton distance. This interaction

is attractive (repulsive) when solitons are in (out of) phase, that is for  $\chi = 1$  ( $\chi = -1$ ).

For a given initial condition, we can integrate the evolution of the soliton distance and it takes the form

$$\Delta(t) = \delta_+^{-1} \ln[-\chi \delta_+ \mathcal{R}(t - t_0)], \quad (3.11)$$

where  $t_0$  is determined by the initial condition as

$$t_0 = \chi \frac{e^{\delta_+ \Delta(t=0)}}{\delta_+ \mathcal{R}}.$$

Hence, two dissipative solitons that are in phase are characterized by a logarithmic decrease of soliton separation distance. Figure 5 shows the temporal evolution of the soliton distance for two in-phase dissipative solitons. Red circles stand for the soliton pair separation distance obtained numerically and the continuous curve is obtained from the formula (3.11). Note that this formula has a quite good agreement even for small soliton distance, where this expression loses its soundness (cf. figure 5). In this case ( $\chi = 1$ ), the above expression is valid for  $t \leq \tau \equiv -1/\delta_+ \mathcal{R} + t_0$ , where  $\tau$  is the collapse time, the time for which both dissipative solitons merge together. Numerically, we observe that after the collapse, only one dissipative soliton survives. The process of two merging solitons is accompanied by the radiation of two perturbations as is depicted in figure 5*a*. A similar process is observed during the merging of two solitons in a non-integrable Hamiltonian system (Dyachenko *et al.* 1989). In this framework, to characterize the coarsening process was developed a statistical theory based on entropic arguments (Rumpf & Newell 2003). The interaction process described here does not render account of the collapse, and the subsequent radiation and prevalence of one dissipative soliton, because the validity of the pair interaction law is for remote dissipative solitons. Understanding this process and coarsening is in progress.

In the case of out-of-phase dissipative solitons ( $\chi = -1$ ), the pair interaction law is valid for  $t > t_0$ , where the parameter  $t_0$  is related to an initial time for which both dissipative solitons are close.

#### 4. Experimental study of the soliton pair interaction law

When a rectangular container partially filled with water is vertically driven at an appropriate frequency and amplitude, non-propagating hydrodynamic solitons can be observed (Wu *et al.* 1984; Wang & Wei 1997*a,b*). We have performed experiments in a vertically vibrating stainless steel channel with Plexiglas front and back walls,  $L_x = 45$  cm long,  $L_z = 9$  cm high, and  $L_y = 2.54$  cm wide. The channel is filled with water to a depth  $H = 1.5$  cm. Several drops of the wetting agent Kodak Photo-Flo are added to minimize surface pinning at the walls. The container is vibrated vertically with a harmonic oscillation of the form  $y(t) = A \sin(\omega t)$ , where the frequency under consideration is  $f = \omega/2\pi = 10.2$  Hz. Forcing is provided by means of a function generator (Agilent 33220A), whose sinusoidal signal is amplified by a power amplifier, which in turn feeds an electromechanical shaker (Dynamic Solutions VTS80). The amplitude  $A$  is the experimental control parameter that is of the order of

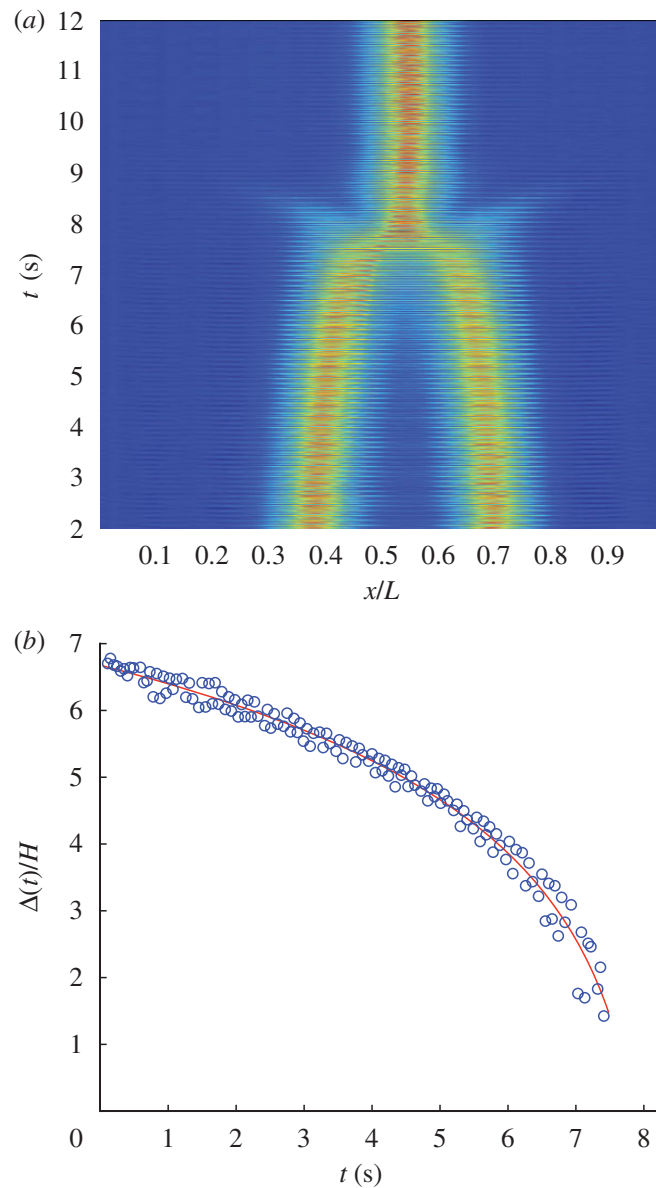


Figure 6. Interaction and collapse processes of two solitons in phase obtained experimentally in a vertically driven rectangular water container. (a) Density plot of the spatio-temporal diagram of the surface profile  $h(x, t)$ . (b) Temporal evolution of soliton separation distance  $\Delta(t)$ . Experimental data are shown with symbols (open circles) and the continuous curve is the corresponding fit  $\Delta(t) = a \cdot \ln(-b \cdot (t - t_0))$  motivated by formula (3.11). Adjusted parameters are  $a/H = 2.1 \pm 0.2$ ,  $b = 2.8 \pm 0.6 \text{ s}^{-1}$  and  $t_0 = 8.2 \pm 0.2 \text{ s}$ .

0.3 mm. Hence, the typical container acceleration is 10 per cent of the gravity acceleration. The container acceleration is measured by means of a piezoelectric accelerometer (PCB 340A65) connected to a lock-in amplifier (SR830) providing a precision of  $0.01\%g$ . Figure 2*b,c* show the characteristic non-propagating hydrodynamic soliton observed at a given time and the corresponding surface profile  $h(x)$ , where the soliton width and height are  $w = 1.65 \text{ cm}$  and  $A_s = 0.95 \text{ cm}$ , respectively.

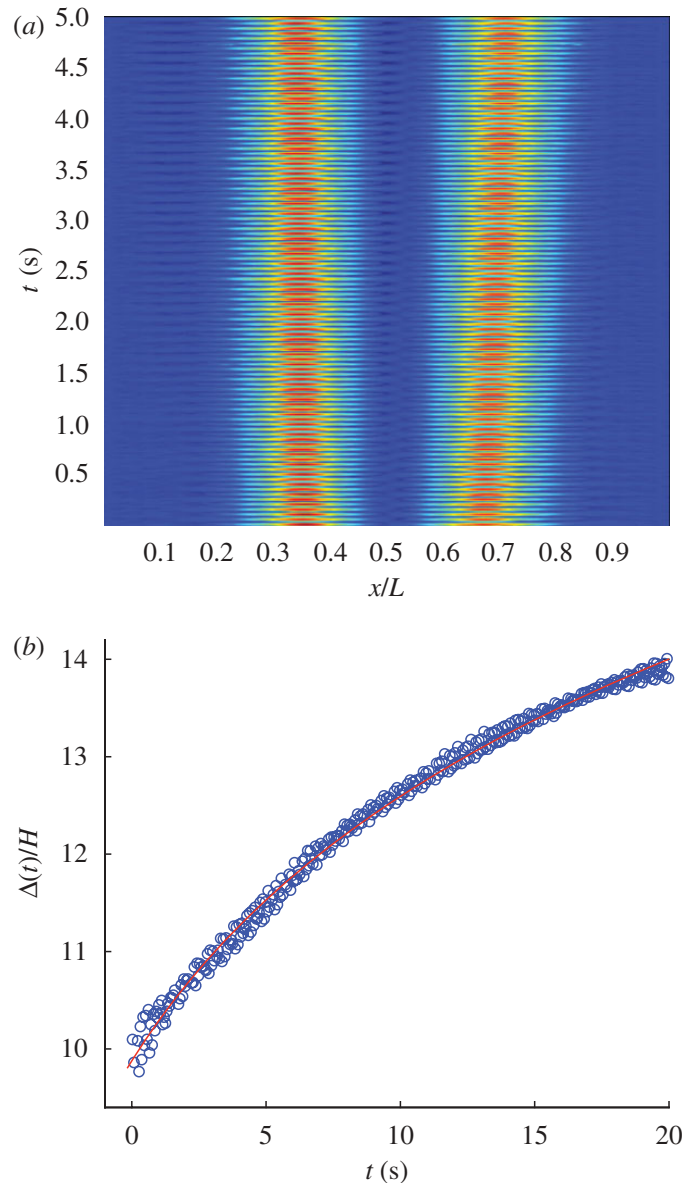


Figure 7. Interaction and collapse processes of two solitons out of phase obtained experimentally in a vertically driven rectangular water container. (a) Density plot of the spatio-temporal diagram of the surface profile  $h(x, t)$ . (b) Temporal evolution of soliton separation distance  $\Delta(t)$ . Experimental data are shown with symbols (open circles) and the continuous curve is the corresponding fit  $\Delta(t) = a \cdot \ln(b \cdot (t - t_0))$  motivated by formula (3.11). Adjusted parameters are  $a/H = 3.0 \pm 0.2$ ,  $b = 3.8 \pm 0.9 \text{ s}^{-1}$  and  $t_0 = 6.9 \pm 0.6 \text{ s}$ .

We have experimentally studied the interaction of two non-propagating hydrodynamic solitons. Close to the parametric resonance, this system is described by the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation (Miles 1984; Zhang & Viñal 1995). Figure 4*b, d* depict snapshots of a pair of non-propagating hydrodynamic solitons in phase and out of phase, respectively.

These solitons are created manually with a metallic ruler, 2.5 cm wide, by ‘sloshing’ the water surface at a frequency close to the subharmonic response of the shaker (Wu *et al.* 1984). The relative phase of the two solitons is defined at



the creation of the second one, in principle randomly although the out-of-phase situation seems more easy to establish. In order to study their interactions, two solitons in phase are intended to be excited at a large separation distance but close enough such that their interaction dominates side-wall effects. Contrary, two solitons out of phase are intended to be excited close enough such that they are clearly distinct, but far enough such that the excitation of the second one does not destroy the first one. The cases reported here are representative cases of such good situations.

Figure 6*a* shows the spatio-temporal diagram of the surface profile  $h(x, t)$  obtained experimentally for two non-propagating hydrodynamic solitons in phase, which exhibit very similar dynamic behaviour to the one presented by the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation. The temporal evolution of the separation distance  $\Delta(t)$  between the two non-propagating hydrodynamic solitons is presented in figure 6*b*. The continuous curve is the corresponding fit  $\Delta(t) = a \cdot \ln(-b \cdot (t - t_0))$  motivated by formula (3.11), which shows an excellent quantitative agreement with this model. The adjusted parameters are related to  $\delta_+$  and  $\mathcal{R}$ , which are then considered as free parameters in order to fit the experimental data. We note that in the experimental space–time diagram presented in figure 6*a*, we clearly observe two waves that are radiated from the two soliton collapse processes. As the final single soliton keeps the shape of an initial single stable soliton, the extra mass that is accumulated during the collapse of the two solitons has to be radiated towards the rest of the system.

An analogous analysis is performed with a pair of interacting non-propagating hydrodynamic solitons that are out of phase. A representative spatio-temporal diagram of the surface profile  $h(x, t)$  and the corresponding pair interaction law  $\Delta(t)$  is shown in figure 7. Again, an excellent agreement between the experimental data and the pair interaction law deduced in the theoretical framework of the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation is obtained.

## 5. Conclusions

Conservative or time-reversible systems perturbed with small injection and dissipation of energy (quasi-reversal systems) can exhibit wealthy spatio-temporal dynamics. Parametrically driven quasi-reversal systems close to the parametric resonance are described in a unified way by the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation. This model exhibits coherent states usually denominated dissipative solitons. These particle-type solutions are parametrized by one continuous parameter, the soliton position. We have deduced theoretically the pair interaction law for two remote localized states, which decreases exponentially with the separation distance and it is attractive (repulsive) for two dissipative solitons that are in phase (out of phase). Hence, we speculate that the dynamics of a dilute gas of dissipative solitons should be mediated by the pair interaction law. For example, we also expect that the coarsening dynamics of such dilute soliton gas should be dominated by the pair interaction law presented here. Work in this direction is in progress.



We have experimentally characterized the interaction law for two in-phase and out-of-phase non-propagating hydrodynamic solitons in a vertically driven rectangular water container. We have found a very good agreement with the pair interaction law deduced from the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation. One of the main reasons for an exponential law for pair interaction is that the soliton tail affects the other non-propagating hydrodynamic soliton exponentially.

The authors thank Thomas Séon for his preliminary experimental study of non-propagating hydrodynamic solitons. The simulation software DimX developed at INLN, France, has been used for all the numerical simulations. We acknowledge the support of Anillo ACT 15 of the Programa Bicentenario de Ciencia y Tecnología of the Chilean government. M.G.C. and N.M. thank the support of FONDAF grant 11980002. M.G.C., S.C. and N.M. thank the financial support of Fondecyt grants 1090045, 3080041 and 1070349, respectively.

## References

- Alexeeva, N. V., Barashenkov, I. B. & Tsironis, G. P. 2000 Impurity-induced stabilization of solitons in arrays of parametrically driven nonlinear oscillators. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3053–3056. (doi:10.1103/PhysRevLett.84.3053)
- Barashenkov, I. V., Bogdan, M. M. & Korobov, V. I. 1991 Stability diagram of the phase-locked solitons in the parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger equation. *Europhys. Lett.* **15** 113–118. (doi:10.1209/0295-5075/15/2/001)
- Barashenkov, I. V. & Zemlyanaya, E. V. 1999 Stable complexes of parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger solitons. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2568–2571. (doi:10.1103/PhysRevLett.83.2568)
- Clerc, M., Couillet, P. & Tirapegui, E. 1999a Lorenz bifurcation: instabilities in quasi-reversible systems. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3820–3823. (doi:10.1103/PhysRevLett.83.3820)
- Clerc, M., Couillet, P. & Tirapegui, E. 1999b The Maxwell–Bloch description of 1/1 resonances. *Opt. Commun.* **167** 159–164. (doi:10.1016/S0030-4018(99)00283-7)
- Clerc, M., Couillet, P. & Tirapegui, E. 2000 Reduced description of the confined quasi-reversible Ginzburg Landau equation. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **139**, 337–343.
- Clerc, M., Couillet, P. & Tirapegui, E. 2001 The stationary instability in quasi-reversible systems and the Lorenz pendulum. *Int. J. Bif. Chaos* **11**, 591–603. (doi:10.1142/S0218127401002316)
- Clerc, M. G., Encina, P. & Tirapegui, E. 2008a Shilnikov bifurcation: stationary quasi-reversal bifurcation. *Int. J. Bif. Chaos* **18**, 1905–1915. (doi:10.1142/S0218127408021440)
- Clerc, M. G., Coulibaly, S. & Laroze, D. 2008b Localized states beyond asymptotic parametrically driven amplitude equation. *Phys. Rev. E* **77**, 056 209. (doi:10.1103/PhysRevE.77.056209)
- Couillet, P. 2002 Localized patterns and fronts in nonequilibrium systems. *Int. J. Bif. Chaos* **12**, 2445–2457. (doi:10.1142/S021812740200614X)
- Denardo, B., Galvin, B., Greenfield, A., Larraza, A., Putterman, S. & Wright, W. 1992 Observations of localized structures in nonlinear lattices: domain walls and kinks. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1730–1733. (doi:10.1103/PhysRevLett.68.1730)
- Dyachenko, S., Zakharov, V. E., Pushkarev, A. N., Shvets, V. F. & Yankov, V. V. 1989 *Sov. Phys. JETP* **69**, 1144–1162.
- Kutz, J. N., Kath, W. L., Li, R. D. & Kumar, P. 1993 Long-distance pulse propagation in nonlinear optical fibers by using periodically spaced parametric amplifiers. *Opt. Lett.* **18**, 802. (doi:10.1364/OL.18.000802)
- Longhi, S. 1996 Stable multiple pulses in a nonlinear dispersive cavity with parametric gain. *Phys. Rev. E* **53**, 5520–5522. (doi:10.1103/PhysRevE.53.5520)
- Miles, J. W. 1984 Parametrically excited solitary waves. *J. Fluid Mech.* **148**, 451–460. (doi:10.1017/S0022112084002433)
- Newell, A. 1985 *Solitons in mathematics and physics*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Rumpf, B. & Newell, A. C. 2003 Localization and coherence in nonintegrable systems. *Physica D* **184**, 162–191. (doi:10.1016/S0167-2789(03)00220-3)
- Shchesnovich, V. S. & Barashenkov, I. V. 2002 Soliton–radiation coupling in the parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger equation. *Physica D* **164**, 83–109. (doi:10.1016/S0167-2789(02)00358-5)
- van Saarloos, W. & Hohenberg, P. C. 1990 Pulses and fronts in the complex Ginzburg–Landau equation near a subcritical bifurcation. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 749–752. (doi:10.1103/PhysRevLett.64.749)
- Wang, X. & Wei, R. 1997*a* Dynamics of multisoliton interactions in parametrically resonant systems. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2744–2747. (doi:10.1103/PhysRevLett.78.2744)
- Wang, X. & Wei, R. 1997*b* Interactions and motions of double-solitons with opposite polarity in a parametrically driven system. *Phys. Lett. A* **227**, 55–60. (doi:10.1016/S0375-9601(97)00022-4)
- Wu, J., Keolian R. & Rudnick, I. 1984 Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1421–1424. (doi:10.1103/PhysRevLett.52.1421)
- Zhang, W. & Viñal J. 1995 Secondary instabilities and spatiotemporal chaos in parametric surface waves. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 690–693. (doi:10.1103/PhysRevLett.74.690)
- Zhang, L., Wang, X. & Tao, Z. 2007 Spatiotemporal bifurcations of a parametrically excited solitary wave. *Phys. Rev. E* **75**, 036602. (doi:10.1103/PhysRevE.75.036602)

## **A.2. ¿Es posible forzar el movimiento de los solitones hidrodinámicos no propagativos?**

En este artículo se presenta un estudio experimental y teórico del manejo de solitones hidrodinámicos no propagativos en una celda rectangular, inclinada y vibrada verticalmente. Experimentalmente se observa que al inclinar la celda se induce un movimiento al solitón hacia una posición de equilibrio mediante un proceso de relajación. Se estudia teóricamente este sistema utilizando la ecuación de Schrödinger no lineal con forzamiento paramétrico y disipación, ecuación que modela el sistema. El efecto de la inclinación de la celda se modela promoviendo los parámetros que caracterizan el sistema, por ejemplo la disipación, el forzaje y la desintonización en frecuencia, a funciones dependientes del espacio. Se puede deducir una ley para el movimiento del solitón bajo estos supuestos. El modelo obtenido, que incluye una velocidad constante y una relajación lineal, reproduce muy bien el movimiento observado experimentalmente.

# Can non-propagating hydrodynamic solitons be forced to move?

L. Gordillo<sup>1,a</sup>, T. Sauma<sup>1</sup>, Y. Zárate<sup>1</sup>, I. Espinoza<sup>2</sup>, M.G. Clerc<sup>1</sup>, and N. Mujica<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile

<sup>2</sup> Departamento de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile, Av. Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile

Received 1st June 2010 / Received in final form 15 October 2010

Published online 17 December 2010 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2010

**Abstract.** Development of technologies based on localized states depends on our ability to manipulate and control these nonlinear structures. In order to achieve this, the interactions between localized states and control tools should be well modelled and understood. We present a theoretical and experimental study for *handling* non-propagating hydrodynamic solitons in a vertically driven rectangular water basin, based on the inclination of the system. Experiments show that tilting the basin induces non-propagating solitons to drift towards an equilibrium position through a relaxation process. Our theoretical approach is derived from the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation which models the system. The basin tilting effect is modelled by promoting the parameters that characterize the system, e.g. dissipation, forcing and frequency detuning, as space dependent functions. A motion law for these hydrodynamic solitons can be deduced from these assumptions. The model equation, which includes a constant speed and a linear relaxation term, nicely reproduces the motion observed experimentally.

## 1 Introduction

During the last years, emerging macroscopic particle-type solutions or localized states in macroscopic extended dissipative systems have been observed in different fields, such as: domains in magnetic materials, chiral bubbles in liquid crystals, current filaments in gas discharge, spots in chemical reactions, localized states in fluid surface waves, oscillons in granular media, isolated states in thermal convection, solitary waves in nonlinear optics, just to mention a few. The variety of this type of phenomena evidences the universality of these particle-type solutions. Although these states are spatially extended, they exhibit properties typically associated with particles. Consequently, one can characterize them with a family of continuous parameters such as position, amplitude and width. Hence, these coherent states are particle-type solutions. This is exactly the type of description and strategy used in fundamental physical theories like quantum mechanics and particle physics. Indeed, localized states emerging in extended dissipative systems are composed by a large number of atoms or molecules (of the order of Avogadro's number) that behave coherently. The paradigmatic example of a macroscopic localized state is the existence of solitons, as those reported in fluid dynamics, nonlinear optics and Hamiltonian systems [1]. These solitons arise from a robust balance between dispersion and nonlinearity. The generalization of this concept to dissipative and out of

equilibrium systems has led to several studies in the last decades, in particular to the definition of *localized structures* intended as patterns appearing in a restricted region of space [2,3].

In one-dimensional spatial systems, an adequate geometrical theoretical description of localized states has been established based on spatial trajectories connecting a steady state with itself. They arise as homoclinic orbits from the viewpoint of dynamical systems theory (see the review [4] and references therein), while domain walls or fronts are seen as spatial trajectories joining two different steady states – heteroclinic curves – of the corresponding spatial dynamical system [5]. Localized patterns can be understood as homoclinic orbits in the Poincaré section of the corresponding spatial-reversible dynamical system [4–7]. They can also be understood as a consequence of the front interaction with oscillatory tails [8,9]. There is another type of stabilization mechanism that generates localized structures without oscillatory tails based on non-variational effects [10,11], where front interaction is led by the non-variational terms [12].

Quasi-reversible systems<sup>1</sup> are the natural theoretical framework in which one expects to observe localized structures. Time-reversible and Hamiltonian systems exhibit a family of localized states described by a set of continuous parameters [1]. Thus, when one considers energy injection and dissipation, only few or none solutions of the

<sup>1</sup> Time-reversible systems subjected to small injection and dissipation of energy [13–17].

<sup>a</sup> e-mail: ljgordillo@gmail.com

family survive. The prototype model that presents localized structures or dissipative solitons in quasi-reversible systems is the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation [18]. This model has been derived in several contexts to describe patterns and localized structures, such as vertically oscillating layer of water [19–21], nonlinear lattices [22], optical fibers [23], Kerr type optical parametric oscillators [24], magnetization in an easy-plane ferromagnetic exposed to an oscillatory magnetic field [25–28], and parametrically driven damped chain of pendula [29,30].

In the last two decades, the properties and mechanisms of creation of localized structures have been established as well as their interactions. However, few studies have been focused on manipulation and control of these coherent states. In the pioneering work of Wu et al. [32], the authors mention that hydrodynamic non-propagating solitons are sensitive to depth gradients. They found that solitons move toward less deep regions with an average velocity of 0.05 cm/s for a 3° tilt angle. This fact suggests that tilting the basin can be used as a spatial control tool, as it induces motion of solitons. A quantitative detailed study of the dynamics of the soliton needs to be performed in order to achieve this. Recent efforts have been accomplished in the context of optical cavities in semiconductors [31], through the use of a phase gradient which induces a drift of cavity solitons.

The aim of this manuscript is to characterize theoretically and experimentally a method of manipulation and control of non-propagating hydrodynamic solitons in a vertically driven rectangular water container based. More precisely, this control is attained by tilting the bottom surface normal with respect to gravity. Close to the Faraday instability, the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation models this system. The effect of the container inclination is incorporated into the amplitude equation through space-dependent dissipation, injection and detuning. Considering that the tilt angle is small, we deduce an equation for the position of non-propagating hydrodynamic solitons. This equation is characterized by two terms: a constant speed and a linear relaxation process. Therefore, at a given inclination of the cell, the dissipative soliton travels to an equilibrium position through a relaxation process. In the case that the inhomogeneous injection and dissipation of energy are of the same order, the dominant mechanism in the propulsion of dissipative solitons is governed by the inhomogeneous detuning. Experimentally, we have found good agreement with the proposed dynamics of dissipative hydrodynamic solitons under the influence of tilt angle.

The manuscript is organized as follows: the description of the experimental setup and the procedures used in the characterization of the dynamics of dissipative solitons in a tilted cell are presented in Section 2. The theoretical description of the basin subjected to vertical oscillations and deduction of the equation for the position of dissipative solitons under the influence of an inclination is presented in Section 3. Finally, the conclusions are presented in Section 4.

## 2 Motion of non-propagating hydrodynamic soliton in tilted container

Non-propagating hydrodynamic solitons arise when a quasi 1-D rectangular basin filled with water is excited vertically at certain range of frequencies and amplitudes [32]. These localized states have a subharmonic nature depicted by oscillations at half the forcing frequency. They appear as localized transverse *sloshing* structures on the free surface. The dissipative solitons nucleate from disturbances of the stable flat state. In practice, they can be created by perturbing the water surface with a paddle in such a way that the swaying resembles solitons typical *sloshing* motion.

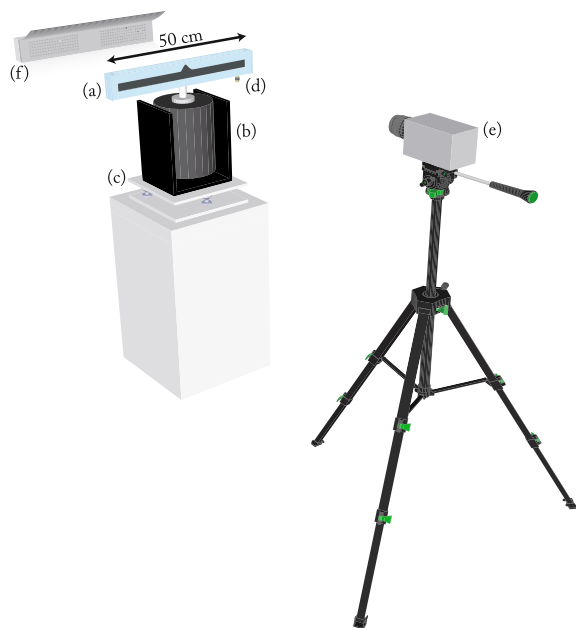
### 2.1 Experimental setup and procedure

The experiments are done with a rectangular plexiglas basin,  $L_x = 50.0$  cm long,  $L_y = 2.54$  cm wide and  $L_z = 10.0$  cm high. The cell was carefully machined on a plexiglas block to ensure parallelism of lateral walls. The basin is filled up to  $H = 2$  cm in depth with a mixture of 252 cm<sup>3</sup> of water, 2 cm<sup>3</sup> of Kodak Photo Flo<sup>®</sup> 200<sup>2</sup> and some drops of black ink. The mixture is prepared a day before measurements are done. Free surface saturation with contaminants plays an important role for reproducibility [33].

The cell is driven sinusoidally by an electromechanical shaker lying on a three-point leveling system which allows longitudinal tilting (see Fig. 1). The tilt angle  $\phi$  is considered positive for a counter-clockwise rotation of the cell with respect to the horizontal when visualized from the front. The shaker is fed with an amplified sinewave signal generated by a function/arbitrary waveform generator and a power amplifier. Thus, the cell vibration is along the axis of the shaker, with form  $y(t) = A \sin(\omega t)$ . Solitons can exist at frequencies  $f = \omega/2\pi$  slightly below 11 Hz, and normalized accelerations  $\Gamma = A\omega^2/g$  around 0.15. The basin acceleration is measured using a piezoelectric accelerometer attached to its bottom surface. It is connected to a signal conditioner, from which the acceleration signal is measured by a lock-in amplifier synchronized with the forcing signal (see Fig. 2a). Acceleration values are provided with precision of 0.001 g. An analog tilt sensor is also placed on the external bottom of the basin. This MEM device is connected to an analog/digital converter which measures angle values within an error of 0.01°.

Two different types of measurements are made on the free surface. Sequences of images taken with a high speed camera provide spatial measurements. On the other hand, local measurements are done using the phase fluctuations of the output signal of a resonant capacitive device.

<sup>2</sup> This chemical product creates a film which improves significantly wetting at the walls.



**Fig. 1.** (Color online) The basin filled with a dyed mixture of water and Kodak Photo Flo (a) is vibrated vertically by an electromechanical shaker. (b). The tilt angle  $\phi$  can be controlled using a three-point level system. Positive  $\phi$  means counter-clockwise rotation of the cell with respect to the horizontal when visualized from the front (c). Acceleration is measured using an accelerometer (d). A high speed camera (e) acquires images of the fluid illuminated from behind by an array of LED lamps (f).

### 2.1.1 Profile extraction from images

Figure 2a shows the general scheme of the devices involved in the image acquisition process. The basin is illuminated from behind with a LED array as it is shown in Figure 1. This allows a good contrast between the dyed mixture and the white background in the images. Imaging can also be synchronized with an external signal so stroboscopic sequences can be acquired. When this is done, the phase between the the forcing and the camera sync signal is fixed in such a way that the soliton seems to be steady at its maximum.

A Matlab program that uses an adaptive threshold finder<sup>3</sup> detects the contact line between the free surface and the frontal wall from greyscale images. To increase vertical resolution, the algorithm interpolates the vertical position in the grey level domain to match a local threshold.

### 2.1.2 Local capacitive measurements

When an insulated thin wire is immersed in a conducting fluid, it behaves as an electrical cylindrical capacitor. The

<sup>3</sup> By adaptive, we mean that background light local mean value is used for determining a local threshold.

capacity is proportional to the length of the fluid coating the wire. By means of this, a fixed wire can provide measurements of the fluid level at a single point of the horizontal domain.

Capacity fluctuations can be obtained by connecting the device to a RLC forced circuit (cf. Fig. 2b). When the fluid is in equilibrium, the frequency of the input signal can be tuned up into resonance, typically  $f_{RLC} \approx 70$  kHz. At this point, the phase on the resistance voltage becomes linear to capacity variations. High sensitive response in the phase can be attained by choosing properly the circuit elements. In order to measure phase fluctuations, the output signal is connected to a Lock-In amplifier which is synchronized with the RLC circuit forcing input signal (see Fig. 2b).

## 2.2 Experimental results

We report measurements performed at a fixed vibration frequency  $f = 10.4$  Hz and acceleration amplitudes around  $\Gamma = 0.1$ , region in which the existence and features of non-propagating hydrodynamic solitons have been studied in detail [21]. Typical tilt angles  $\phi$  are between  $\pm 1^\circ$ .

### 2.2.1 Spatio-temporal diagrams

Figures 3a and 3b show spatio-temporal diagrams for two different solitons with different time scales and tilt angles. Contact line profiles are extracted using the procedure explained in 2.1.1 and plotted against time.

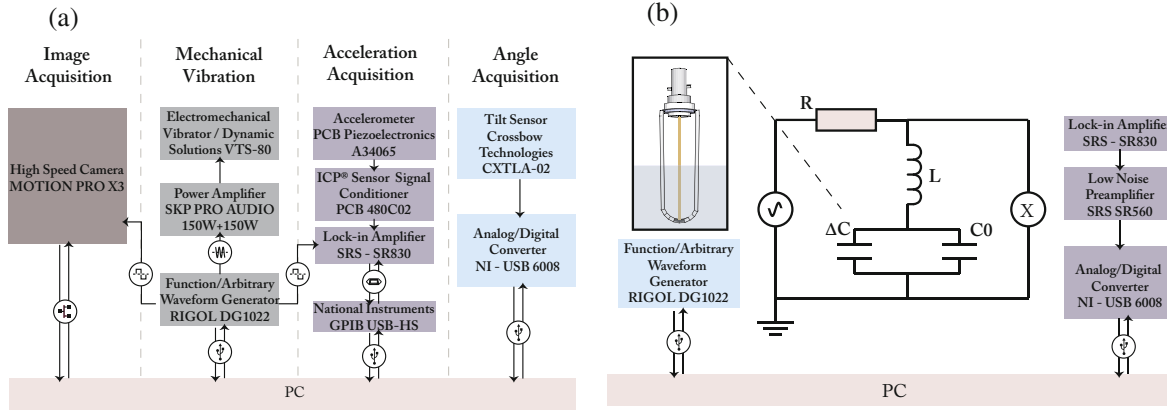
In Figure 3a, a soliton stands at a fixed position on the center of the basin. Here,  $\phi = 0$  and  $\Gamma = 0.088$ . The camera acquisition rate is 400 Hz, so the soliton fast *sloshing* motion can be observed. However, motion beneath the water baseline cannot be detected as no contrast is available. Thus, the contact lines at the front and rear walls switch on the image at each half cycle.

Figure 3b shows a long-time acquisition for  $\phi = -0.42^\circ$  and  $\Gamma = 0.110$ . The soliton was created at  $t = 0$  and images were taken stroboscopically at a fixed rate of 650 mHz. The diagram shows the motion of the particle-type solution, in this case toward shallower regions. These dissipative solitons can be attracted to lateral boundaries and even pinned on them depending on the driving amplitude and frequency [34]. In this study, solitons remain far enough from lateral walls as they move across the principal axis. Lateral boundary effects are negligible if a soliton is a few centimeters apart from the wall.

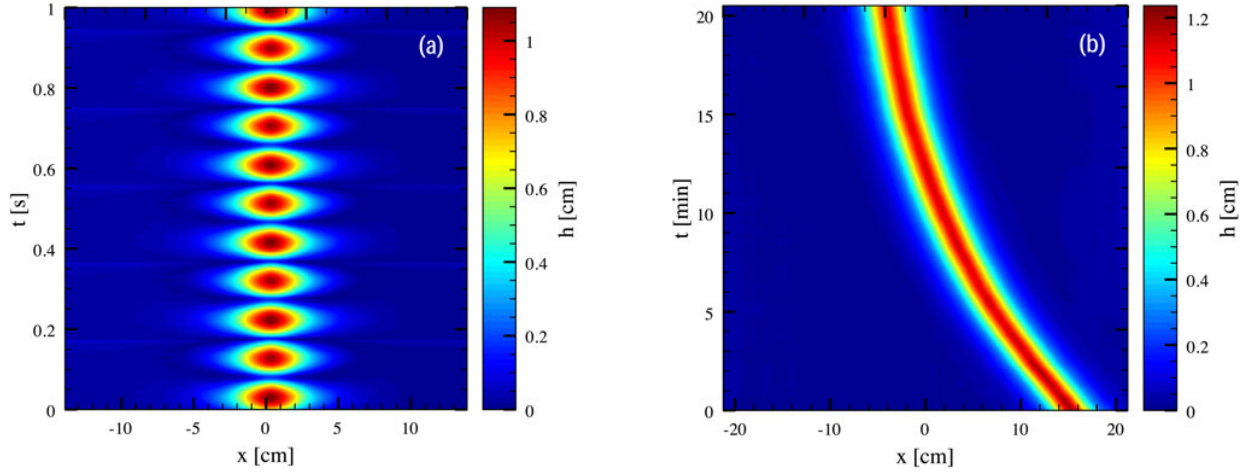
The trajectories of the dissipative solitons reveal non-trivial time dependence. At a first stage, the center of the solution attains rapidly a constant speed. Wu et al. referred to this short-time scale stage in their work [32]. At a long-time scale stage, solitons converge to a fixed position rather than to a constant velocity as is clearly illustrated in Figure 3b.

Long-time acquisitions were strongly motivated by the fact that the initial velocity for short-time acquisition depends on the locus where the soliton is created. The break





**Fig. 2.** (Color online) (a) The scheme shows the measurement procedures used for spatial acquisitions. (b) Local acquisitions scheme. The capacitor  $\Delta C$  represents capacity fluctuations and can be negative.  $C_0$  represents parasitic and zero-level capacity.



**Fig. 3.** (Color online) Spatio-temporal diagrams for solitons at different timescales. (a) A soliton *sloshes* back and forth with half the driven frequency, at  $\Gamma = 0.088$  and  $\phi = 0$ . (b) A soliton travels to a shallower region for  $\phi = -0.42^\circ$  (clockwise rotation). Here,  $f = 10.4$  Hz and  $\Gamma = 0.110$ . Images are taken stroboscopically when the soliton reaches its maximum after every eight cycles.

of translational symmetry suggests that the speed does not depend only on the depth gradient but also on the local depth.

### 2.2.2 Velocity vs. position

Soliton dynamics on tilted basins can be well understood by means of the velocity versus position plane. Figure 4a shows *phase plane tracks* for different solitons at different angles. Time series were run twice for each angle to check experimental reproducibility.

For each image sequence, the contact line profile is fitted using the 4-parameters function predicted by theory:  $h(x) = A_s \operatorname{sech}[(x - x_o)/w] + h_0$  (see Sect. 3.1, Fig. 8 and Ref. [21]). The positions  $x_o$  plotted in Figure 4a are obtained from the parameter which represents the position at which maximum height takes place. Velocities, on the

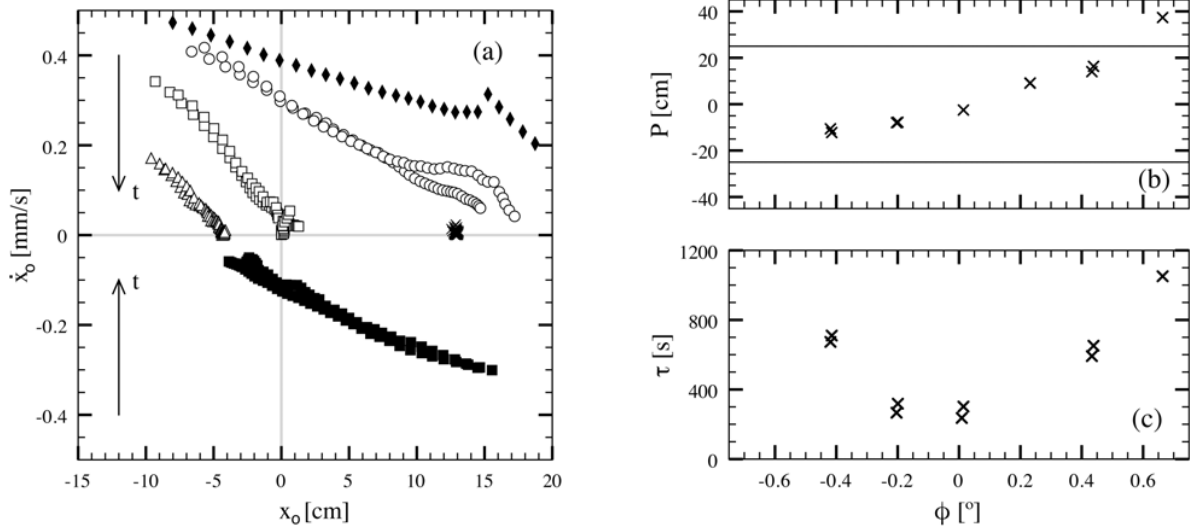
other axis, are evaluated by differentiating smoothed position data with respect to time.

From the results obtained in the central area of the cell – where edge effects are negligible – the diagram shows that soliton are governed by the simple motion law (cf. Fig. 4a)

$$\dot{x}_0 = -\frac{1}{\tau(\phi)} [x_0 - P(\phi)], \quad (1)$$

where  $x_0$  stands for the position of the maximum of the dissipative soliton,  $\phi$  is the tilt angle of the basin,  $\tau$  accounts for a relaxation time which characterizes the dynamics of  $x_0$ ,  $P/\tau$  is a characteristic speed of propagation and  $P$  is the equilibrium position towards which the dissipative soliton converges.

The model (1) is invariant under spatial and time translations as expected. Lateral boundary effects appear as a change in the slope for positions above  $|x_0| = 15$  cm (see Fig. 4a). This equation implies that solitons are



**Fig. 4.** (a) Soliton velocity  $\dot{x}_o$  versus position  $x_o$  plots for different tilt angles  $\phi$ :  $-0.42^\circ$  (■),  $-0.20^\circ$  (△),  $-0.01^\circ$  (□),  $0.23^\circ$  (×),  $0.43^\circ$  (○),  $0.66^\circ$  (◆) at constant vertical  $\Gamma = 0.131$ . The arrows show time direction in the series of points. Solitons can propagate upward (○, ◆), downward (△, □, ■), or even stay at their position (×), depending on their initial position with respect to equilibrium. Two experiments are shown for each angle except for  $\phi = -0.66^\circ$  (◆). (b) Equilibrium position versus tilt angle.  $P$  is located in shallower regions as  $\phi$  increases. For  $\phi = -0.66^\circ$  (◆), the equilibrium position is *virtually* located beyond the basin edge (indicated by horizontal solid lines). (c) Position decay time  $\tau$  dependence on  $\phi$ . As  $\phi$  increases, convergence to equilibrium position becomes slower. In (b) and (c) errorbars of each realization, obtained by confidence values of fitted parameters, are smaller than symbol size. The scatter of two data points for each angle show that the final errors due to reproducibility are of order of the symbol size.

attracted to an equilibrium position  $P(\phi)$  following an exponential law.

Both the equilibrium position  $P$  and the exponential decay time  $\tau$  depend on  $\phi$ . As the tilt angle increases, the equilibrium position is pulled out from the center of the basin even surpassing the basin boundaries. Figure 4a shows phase-space tracks on which solitons get pinned at their equilibrium positions after moving *upward*<sup>4</sup> or *downward*, respectively. Angle dependence of these two parameters is shown in Figure 4b. Note that the decay time  $\tau$  is larger for larger angles. Dependence on the angle is plotted in Figure 4c.

### 2.2.3 Local shape

Solitons amplitude is very sensitive to the fluid depth in homogeneous layers ( $\phi = 0$ ) as it is shown in Figure 5a (symbol ■).

When the basin is tilted, traveling solitons change as they move across the basin. Their amplitude decrease as they move to their equilibrium position. Two cases can be well identified depending on the tilt angle.

When the skew angle is higher than  $1^\circ$  so the equilibrium position is beyond lateral boundaries, the amplitude variations can be understood in terms of the local mean depth as it is shown in Figure 5 (symbols □, △, ○, ◇).

By contrast, when the tilt angle is small enough to allow equilibrium inside the boundaries (symbol +), the

<sup>4</sup> We define *upward* direction against depth gradient.

amplitude dependence becomes non trivial. Solitons still decrease their amplitude as they move but dependence with local mean depth is not monotonic. Amplitude minimum occurs very close to equilibrium position.

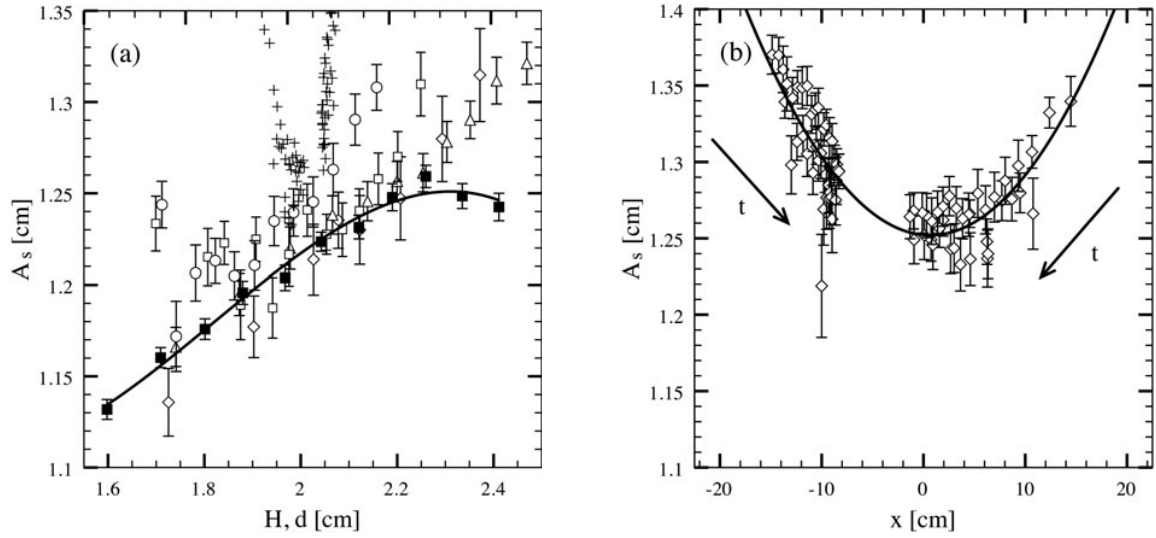
Figure 6 shows soliton local mean phase  $\theta$  as function of position for two tilt angles,  $\phi = -2^\circ$  and  $\phi = 2^\circ$ . To measure  $\theta$ , we obtain the maximum soliton height as a function of time  $A_s(x_o, t)$  for two periods of oscillation while the soliton moves across the basin. This function is then fitted to  $A_s(x_o)|\cos(\omega t + \theta)|$  for different soliton positions across the cell. Despite the large errorbars, a weak spatial dependence of  $\theta$  is observed. Theoretically, local phase is related to the ratio  $\mu/\gamma$  (see 3.1). The weak dependence of  $\theta$  on  $x$  is consistent with the weak dissipation space dependence that will be presented below. However, a spatial dependence of  $\gamma$  can not be discarded completely.

### 2.2.4 Soliton parameters and physical quantities

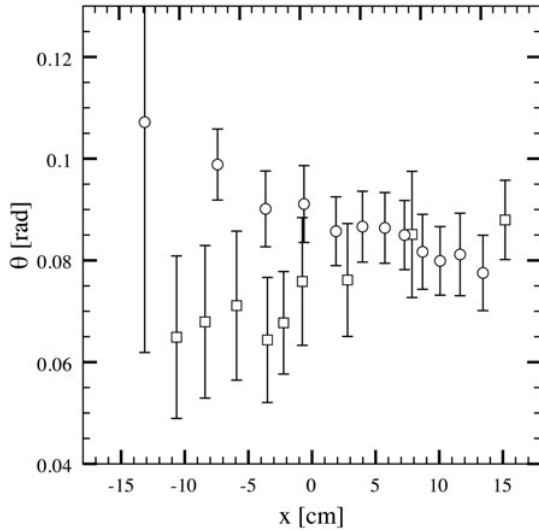
Results have shown that solitons parameters: amplitude and phase have different behaviors when the soliton propagates. Amplitude variations are important while phase remains almost constant when the soliton moves. One is tempted to ask how physical quantities as dissipation rate and detuning are related to these parameters when motion occurs.

Soliton damping rate depends mainly on three mechanisms: viscous effects in the boundary layers at walls, at the free surface and capillary hysteresis at the contact





**Fig. 5.** (a) Soliton amplitude  $A_s$  versus fluid depth  $H$  for an homogeneous fluid layer ( $\blacksquare$ ,  $\phi = 0^\circ$ ). In addition,  $A_s$  versus the soliton local mean depth  $d$  (at each position as it moves toward its equilibrium) is plotted for different  $\phi$ :  $-2.0^\circ$  ( $\triangle$ ),  $-1.0^\circ$  ( $\square$ ),  $0.3^\circ$  ( $+$ ),  $1^\circ$  ( $\circ$ ) and  $+2^\circ$  ( $\diamond$ ). Errorbars for  $\phi = 0.3^\circ$  are shown in (b). In all the tilted cases, the solitons equilibrium positions are located beyond domain boundaries, except for  $\phi = 0.3^\circ$ . For all cases  $f = 10.4$  Hz and  $\Gamma = 0.117$ . (b) Soliton amplitude versus position for  $\phi = 0.3^\circ$ . Here, the equilibrium position lies inside the basin. Consequently,  $A_s$  develops a minimum. Arrows indicate the time direction for each data set. Here,  $f = 10.4$  Hz and  $\Gamma = 0.121$ . In both figures, solid lines are guides to the eye.



**Fig. 6.** Soliton local mean phase  $\theta$  as function of position  $x$  for  $\phi = -2^\circ$  ( $\circ$ ) and  $\phi = 2^\circ$  ( $\square$ ) for  $\Gamma = 0.118$ . Errorbars are computed from confidence values of fitted parameters.

lines [33]. As water depth changes along the basin, dissipation may become non uniform as well.

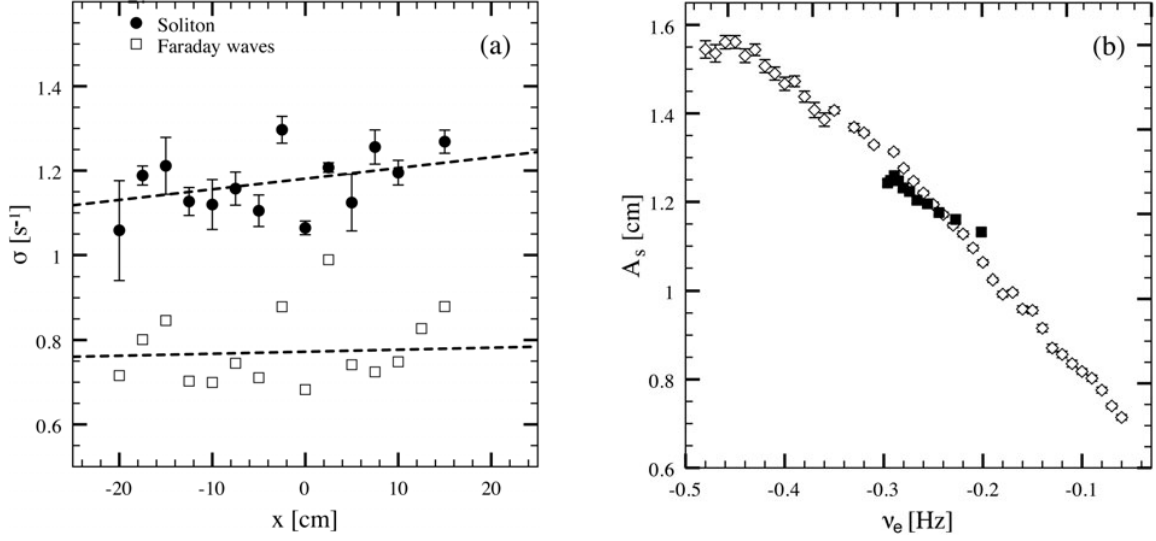
To measure how dissipation changes along the basin for a fixed angle, local capacitive measurements are performed with the soliton placed at several positions. When the soliton is close enough to the capacitive sensor, the vibration of the basin is interrupted. The soliton amplitude decays exponentially to the flat state. The damping rate

is obtained by applying linear fits to data on the semilog plane. Figure 7a shows the damping factor for different positions with  $\phi = -0.9^\circ$ . Similar data have been obtained for the pattern state, Faraday waves, which coexists in the same region of parameters.

Experimental measurements of the soliton decay rates show high variance. This is due to the lack of a large enough separation of timescales of the different modes. Oscillation rate is just five times larger than the damping rate. In spite of this, Figure 7a shows that the damping rate for solitons is sensitive to tilting and has a tendency to decrease towards shallower water, at least more than Faraday waves damping rate.

The fact that damping rate (and dissipation) increases for increasing depth is consistent with Miles [33] dissipation estimations for homogeneous layers. His theoretical estimations for the three mechanisms point to different height dependences for each one of them: damping rate of viscous effects at the walls first decreases as function of  $H$  and then increases after a characteristic length; surface damping rate is a decreasing function of  $H$ ; finally, the contact line damping rate increases as function of  $H$ . Our results indicate that probably the first and third mechanisms are dominant. Miles also stresses the fact that the basin wall polishing has a strong effect on dissipation, which could explain the large scatter of damping rates across the cell and the correlation between lower and larger damping rates for solitons and Faraday waves.

Detuning is related with the forcing frequency and the natural frequency of the first transverse mode which supports the soliton. As this natural frequency depends on the fluid depth (see [33]), detuning may change across



**Fig. 7.** (a) Amplitude damping rate versus position for Faraday waves ( $\square$ ) and dissipative solitons ( $\bullet$ ) for  $\phi = -0.9^\circ$  and  $\Gamma = 0.111$ . Errorbars of soliton data are obtained from statistics of four acquisitions. Faraday waves damping rates were measured once. Solitons decay rate dependence on  $\phi$  seems to be asymmetrical revealing non-homogeneity along the principal axis of the basin. (b) Soliton amplitude versus experimental detuning  $\nu_e = f/2 - f_o$  for  $\phi = 0^\circ$ . Open symbols ( $\diamond$ ) correspond to variations of forcing frequency  $f$  [ $\nu_e = \nu_e(f)$ ]; solid symbols ( $\blacksquare$ ) correspond to variations of fluid depth  $H$  [ $\nu_e = \nu_e(H)$ ]. In the first case,  $\Gamma = 0.125$ , whereas for the second case,  $\Gamma = 0.117$ . The plot shows high sensitivity of  $A_s$  to detuning parameter  $\nu_e$ .

the basin too. Detuning measurements are not performed directly. Instead, amplitude sensitivity to detuning parameter is measured.

Figure 7b presents the amplitude dependence on the experimental detuning  $\nu_e = f/2 - f_o$  for an homogeneous layer at a fixed forcing amplitude. Here,  $f_o$  is the natural frequency of the first transverse mode ( $f_o = 5.47$  Hz for  $H = 2$  cm).  $f_o$  depends on the basin's geometry and layer depth  $H$  through the gravity wave dispersion relation

$$\omega_o^2 = gk \tanh(kH), \quad (2)$$

where  $\omega_o = 2\pi f_o$ . Thus,  $\nu_e$  can be controlled by variation of  $f$  or  $H$  (symbols  $\diamond$  and  $\blacksquare$  respectively). In Figure 7b, the data obtained by varying  $H$  are the same as those presented in Figure 5a ( $\blacksquare$ ). The agreement with the data obtained by changing  $f$  is quite good.

The importance of these physical quantities will be discussed in Section 4.

### 3 Theoretical description

The dynamics of a layer of incompressible fluid that is driven by a sinusoidal force with frequency  $\Omega$  normal to the free surface is modeled by the dimensionless parametrically driven and damped nonlinear Schrödinger equation [19,20]

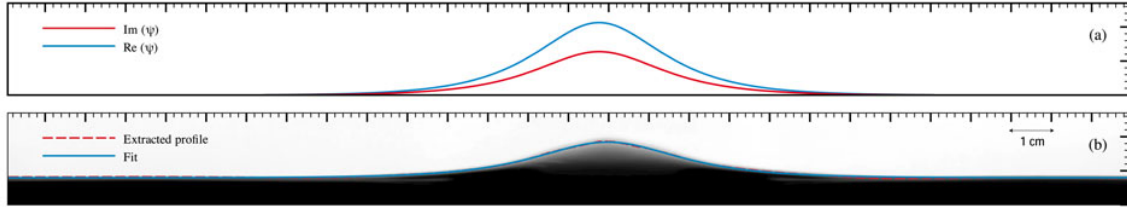
$$\partial_t \psi = -i\nu\psi - i|\psi|^2\psi - i\partial_{xx}\psi - \mu\psi + \gamma\bar{\psi}, \quad (3)$$

where the order of parameter  $\psi(x, t)$  is a one dimensional complex field, and  $\bar{\psi}$  stands for the complex conjugate

of  $\psi$ . The surface displacement from flat interface  $h(x, t)$  and the velocity potential at the free surface  $\phi(x, t)$  are slave variables which are of the form  $h = \psi e^{-i\Omega t/2} + c.c.$  and  $\phi(x, t) = -i\psi e^{-i\Omega t/2} + c.c.$ , respectively (see [20] and references therein). The detuning parameter is  $\nu$ , which is proportional to the difference between  $\Omega/2$  and the resonant standing wave angular frequency. The damping parameter is  $\mu$ , which is proportional to the kinematic viscosity of the fluid, which accounts for the dissipation mechanisms of the system and  $\gamma$  is the forcing acceleration amplitude. For  $\mu = \gamma = \eta = 0$ , equation (3) becomes the well-known nonlinear Schrödinger equation [1], which describes the envelope of an oscillatory system. This model is a time reversal Hamiltonian system with the transformation  $\{t \rightarrow -t, \psi \rightarrow \bar{\psi}\}$ . The terms proportional to  $\mu$  and  $\gamma$  break the time reversal symmetry, and represent energy dissipation and injection, respectively. The higher-order terms in equation (3) are ruled out by a scaling analysis, since  $\mu \ll 1$ ,  $\nu \sim \mu \sim \gamma$ ,  $|\psi| \sim \mu^{1/2}$ ,  $\partial_x \sim \mu^{1/2}$ , and  $\partial_t \sim \mu^{1/2}$ .

#### 3.1 Dissipative solitons

A trivial state of equation (3) is the homogeneous state  $\psi_0 = 0$ , which represents the flat or quiescent solution of the fluid layer. For negative  $\nu$ , the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation exhibits localized states supported asymptotically by the quiescent state. In order to obtain these localized states we use the transformation  $\psi(x, t) = R(x, t)e^{i\theta(x, t)}$ . Then the parametrically



**Fig. 8.** (Color online) Dissipative soliton in parametrically resonant systems. (a) Stable dissipative soliton observed in the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation model (3). (b) Snapshot of a non-propagating hydrodynamic soliton observed in a vertically driven 50 cm long and 2.54 cm wide rectangular container, filled with  $H = 2$  cm of water. The solid blue and red curve are, respectively, instantaneous surface profile and fit  $h(x) = A_s \operatorname{sech}[(x - x_0)/w] + h_0$ . Adjusted relevant parameters are  $A_s/H = 0.523 \pm 0.001$  and  $w/H = 0.786 \pm 0.004$ .

driven damped nonlinear Schrödinger equation reads

$$\begin{aligned} \partial_t R &= 2\partial_x R \partial_x \theta + \partial_{xx} R \theta - \mu R + \gamma R \cos(2\theta), \\ R \partial_t \theta &= -\nu R - R^3 - \partial_{xx} R + R(\partial_x \theta)^2 - \gamma R \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

A non trivial steady homoclinic solution – solutions that connect quiescent state with itself – of the previous model is (dissipative solitons, see [25] and references therein)

$$\cos(2\theta_0) = \frac{\mu}{\gamma}, \quad (6)$$

$$R_{\pm}(x) = \sqrt{2\delta_{\pm}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\delta_{\pm}}[x - x_0]\right), \quad (7)$$

where  $\delta_{\pm} \equiv -\nu \pm \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} = -\nu - \gamma \sin(2\theta_0)$ . The amplitude and width of the dissipative solitons are characterized by  $\sqrt{2\delta_{\pm}}$  and  $1/\sqrt{\delta_{\pm}}$ , respectively. As consequence of the spatial translation symmetry of model (3), the dissipative solitons are a family of states parameterized by a continuous parameter  $x_0$ . This parameter stands for the position of the maximum of the localized state. Figure 8 shows a typical dissipative soliton observed in the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation and the typical dissipative soliton observed experimentally, which shows a very good agreement with expression (7). Note that the above model has localized states if  $\nu < 0$ ,  $\gamma \geq \mu$  and  $\gamma^2 < \mu^2 + \nu^2$ . In this region, the relation  $\cos(2\theta) = \mu/\gamma$  has four solutions in the interval  $[-\pi, \pi]$ . From this relation, one can infer that the localized states appear or disappear by simultaneous saddle-node bifurcations when  $|\gamma| = \mu$ . The quiescent state becomes unstable at  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$ , therefore the dissipative soliton becomes unstable at  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$  with  $\nu < 0$ . The stable dissipative solitons are characterized by  $\operatorname{Re}(\psi)\operatorname{Im}(\psi) > 0$ , so both fields are simultaneously positive or negative [25]. Hence, there are two stable dissipative solitons, which are related by the reflection symmetry ( $A \rightarrow -A$ ). These solutions correspond to dissipative solitons in phase or out of phase. From expression (7), one can infer that increasing the forcing amplitude  $\gamma$ , the amplitude and the width of stable dissipative soliton increases and decreases, respectively.

### 3.2 Effect of basin inclination

As mentioned in section 2.2.4. The inclination of the basin is responsible of inhomogeneous dissipation, injection and detuning (cf. Figs. 5–7). From Figure 7, we can infer that the non-propagating hydrodynamic soliton dissipates less energy in shallow water regions, but changes are small. Direct measurements of energy injection are difficult to realize. However, the local phase measurements (see Fig. 6) show that it does not exhibit significant changes along the channel. Thus, using the relation (5), we conclude that energy injection has a similar spatial behavior to energy dissipation. From the previous statement, considering the formula (7) and the behavior of the soliton amplitude as a function of channel position and detuning, we infer that the detuning has a convex behavior along the channel. In fact, this is a simple consequence of small tilting angles. The local depth can be considered as a function of space:  $d(x) = H - x \tan(\phi)$ . The correction can be considered as a small perturbation. A Taylor series expansion of  $\omega_o$  from equation (2) shows that detuning will be a power series of  $x$ . The quadratic term turns out to be a good approximation for angles as large as  $1^\circ$ .

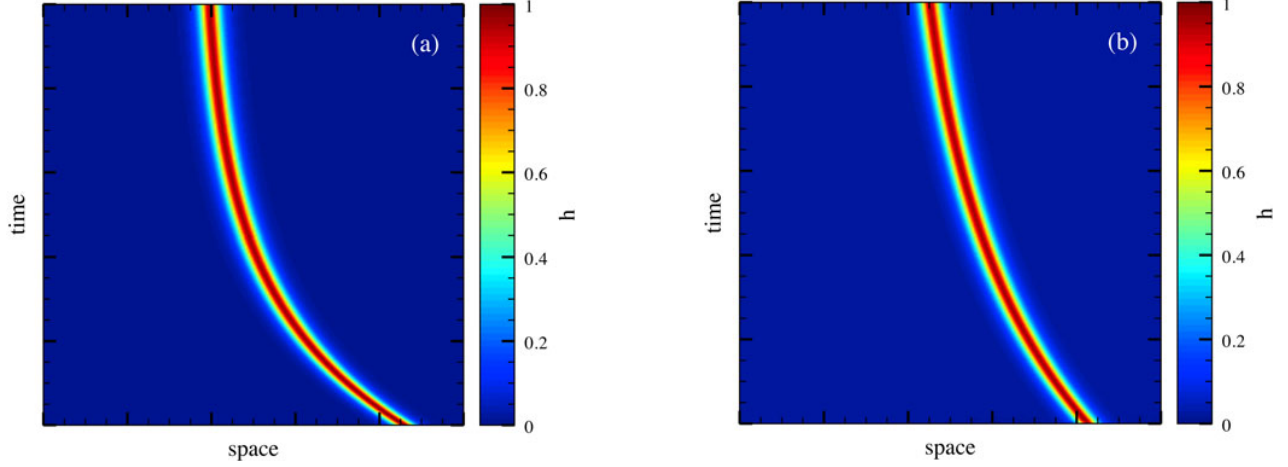
To account for these effects in our theoretical description, we consider that detuning, dissipation and injection of energy parameters in parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation become all inhomogeneous, i.e.

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu + \mu_1(x), \\ \nu(x) &= \nu + \nu_1(x), \\ \gamma(x) &= \gamma + \gamma_1(x). \end{aligned}$$

For small tilt angles, the inhomogeneous terms can be considered as perturbations ( $\mu_1(x) \ll 1$ ,  $\gamma_1(x) \ll 1$  and  $\nu_1(x) \ll 1$ ). Hence, equations (4) and (5) read

$$\begin{aligned} \partial_t R &= 2\partial_x R \partial_x \theta + \partial_{xx} R \theta - \mu R + \gamma R \cos(2\theta) \\ &\quad - \mu_1(x) R + \gamma_1(x) R \cos(2\theta), \\ R \partial_t \theta &= -\nu R - R^3 - \partial_{xx} R + R(\partial_x \theta)^2 - \gamma R \sin(2\theta) \\ &\quad - \nu_1(x) R - \gamma_1(x) R \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (8)$$

One expects that for small angles, the dissipative solitons are persistent. However, inhomogeneity generates two effects: (i) localized states are modified by the perturbation,



**Fig. 9.** (Color online) Spatio-temporal diagram of dissipative solitons obtained by numerical simulations of parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation model (3) over 250 points with periodic boundary conditions. The diagrams show 8400 cycles calculated with a time resolution of 1/200 period. (a)  $\gamma(x) = 0.40$ ,  $\nu(x) = -0.12 + 0.03x - 0.04x^2$ , and  $\mu(x) = 0.10$ . (b)  $\gamma(x) = 0.40$ ,  $\nu(x) = -0.12 + 0.03x - 0.04x^2$ , and  $\mu(x) = 0.10 - 0.03x + 0.04x^2$ .

and (ii) the spatial translational mode of the dissipative solitons – Goldstone mode – acquires a dynamic as a result of the translational symmetry breaking. Motivated by the experimental results, we have considered dissipation, injection and detuning with a quadratic profile along the basin. The space-time diagram of Figure 9 illustrates the typical behavior observed. The soliton propagates into an equilibrium position through a relaxation dynamics – that is, the soliton speed decays systematically until it finds an equilibrium position.

To account for these effects, we consider the following ansatz

$$R(x, t) = R_+(x - x_0(t)) + r(x, x_0),$$

$$\theta(x, t) = \theta_0 + \varphi(x, x_0),$$

where  $r(x, x_0)$  and  $\varphi(x, x_0)$  are the corrective functions, respectively. Besides, we consider the variable  $x_0(t)$  as a slow variable, that is,  $\ddot{x}_0 \ll \dot{x}_0 \ll 1$ , where  $\dot{x}_0(t)$  is the same order of the perturbation. Introducing the above expressions in the set of equations (8) and linearizing the perturbations functions, one finds at leading order

$$2\partial_x \varphi \partial_x R_+ + \partial_{xx} \varphi R_+ = 2\gamma \varphi \sin(2\theta_0) R_+ + \mu_1(x) R_+ - \gamma_1(x) \cos(2\theta_0) R_+ - \partial_z R_+ \dot{x}_0, \quad (9)$$

$$R_+ \partial_t \varphi = [-\nu - \gamma \sin(2\theta_0) - 3R_+^2 - \partial_{xx}] r - \nu_1(x) R_+ - 2\gamma R_+ \cos(2\theta_0) \varphi - \gamma_1(x) R_+ \sin(2\theta_0), \quad (10)$$

where  $z \equiv x - x_0(t)$  is the coordinate in the co-moving frame. Multiplying equation (9) by the integral factor  $R_+$

and after straightforward calculations, we obtain

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \int^x \frac{dx'}{R_+^2(x')} \int^{x'} dx'' [\mu_1(x'') - \gamma_1(x'')] R_+^2(x') \\ & + \int^x \frac{2\gamma \sin(2\theta_0) dx'}{R_+^2(x')} \int^{x'} dx'' \varphi(x'') R_+^2(x') \\ & - \int^x \frac{\dot{x}_0}{2} dx', \end{aligned} \quad (11)$$

which is a Fredholm integral equation for the field  $\varphi$  [35]. To solve the above integral equation, we consider the limit  $\gamma \sin(2\theta_0) = \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \ll 1$ , which is equivalent to consider similar injection and dissipation of energy ( $\gamma \sim \mu$ ). Based on this assumption, we can use the approximation

$$\begin{aligned} \varphi \approx & \int^x \frac{dx'}{R_+^2(x')} \int^{x'} dx'' [\mu_1(x'') - \gamma_1(x'')] R_+^2(x') \\ & - \int^x \frac{\dot{x}_0}{2} dx'. \end{aligned} \quad (12)$$

It is important to note that one can iteratively calculate the corrections to the previous approximation in a power series in the small parameter  $\sqrt{\gamma^2 - \mu^2}$  [35]. Introducing the linear operator

$$\mathcal{L} \equiv -\nu - \gamma \sin(2\theta_0) - 3R_+^2 - \partial_{xx},$$

equation (10) can be rewritten as

$$\mathcal{L}r = R_+ \partial_t \varphi + 2\gamma R_+ \cos(2\theta_0) \varphi + \nu_1 R_+. \quad (13)$$

To solve this linear equation, we use the Fredholm alternative [2]. Accordingly, we introduce the following inner product

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx.$$

The linear operator  $\mathcal{L}$  is self-adjoint ( $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ ) under this definition. The kernel of this linear operator – the set of functions  $\{v\}$  that satisfy  $\mathcal{L}v = 0$  – is of dimension 1. As a result of spatial translation invariance, one has  $\mathcal{L}\partial_x R_+ = 0$ . Therefore, the field  $r$  has a solution if the following condition is satisfied<sup>5</sup>

$$0 = \langle \partial_x R_+ | R_+ \partial_t \varphi + 2\gamma R_+ \cos(2\theta_0) \varphi + \nu_1(x) R_+ \rangle. \quad (14)$$

Using the approximation (12), and considering the dominant terms and after straightforward calculations, yields to

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 = & \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2(x) x} \left[ 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2(x) \int^x dx' \frac{1}{R_+^2(x')} \right. \\ & \times \int^{x'} dx'' (\mu_1(x'') - \gamma_1(x'')) R_+^2 \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2 \cdot \frac{\nu_1(x)}{\mu} \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

This expression gives us information of the dynamics of dissipative soliton as a function of spatial disturbance. For small angles and considering the experimental observations, we can consider as a first approximation

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu + \bar{\mu}_1 x + \bar{\mu}_2 x^2, \\ \gamma(x) &= \gamma + \bar{\gamma}_1 x + \bar{\gamma}_2 x^2, \\ \nu(x) &= \nu + \bar{\nu}_1 x + \bar{\nu}_2 x^2. \end{aligned}$$

The experimental results allow us to infer that the coefficients  $\bar{\mu}_2, \bar{\gamma}_2$  are small, and that  $\bar{\nu}_2$  is not small. Then, formula (15) can be rewritten

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 = & \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2(x) x} \left[ 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2 \int^x dx' \frac{1}{R_+^2} \right. \\ & \times \int^{x'} dz (\bar{\mu}_1 - \bar{\gamma}_1) z R_+(z)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_+(z)^2 \frac{\bar{\nu}_1}{\gamma} z \\ & + \left\{ 4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2 \int^x dx' \frac{1}{R_+^2} \right. \\ & \times \int^{x'} dz (\bar{\mu}_2 - \bar{\gamma}_2) z R_+(z)^2 \\ & \left. \left. + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_+(z)^2 \cdot \frac{\bar{\nu}_2}{\gamma} z \right\} x_0(t) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

<sup>5</sup> This is known as the solvability condition or Fredholm alternative.

Consequently, the position of the maximum of the dissipative soliton is ruled by equation (1), where

$$\begin{aligned} \tau^{-1} = & \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2(x) x} \left[ 4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2 \int^x dx' \frac{1}{R_+^2} \right. \\ & \times \int^{x'} dz (\bar{\mu}_2 - \bar{\gamma}_2) z R_+(z)^2 \\ & \left. + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_+(z)^2 \frac{\bar{\nu}_2}{\gamma} z x_0(t) \right], \\ P = & \frac{\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2(x) x} \left[ 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x R_+^2 \int^x dx' \frac{1}{R_+^2} \right. \\ & \left. \times \int^{x'} dz (\bar{\mu}_1 - \bar{\gamma}_1) z R_+(z)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dz \partial_z R_+(z)^2 \frac{\bar{\nu}_1}{\gamma} z \right]. \end{aligned}$$

Therefore, model (1) allows us to capture the dynamics of dissipative solitons observed experimentally in the forced tilted basin with water and numerical simulations of the equation parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation. Figure 9 presents numerical simulation results obtained considering a quadratic dependence on space for both detuning and dissipation. The dynamic evolution shown by these numerical simulations agree very well with experimental results.

It is important to note that when injection and dissipation of energy are of the same order, the system is well described by model (1). However, phase does not exhibit significant corrections in comparison with the maximum amplitude of the soliton. This is consistent with experimental observations.

## 4 Conclusions

Localized structures are ubiquitous in nature. During the last decade, a constant effort has been focused on the creation mechanisms and features of localized states. Undoubtedly, the next step to boost their potential applications is to advance the manipulation and control of these particle-type solutions. Here, we have presented a theoretical and experimental study of a method of manipulation and control of hydrodynamic solitons in a vertically driven rectangular water basin, based on the tilting of the system.

Experimentally, for a given tilt angle, solitons travel to equilibrium positions through a relaxation process. Long acquisitions are required to observe this behavior, because of the large decay time of the velocity. The equilibrium position depends on the tilt angle, and can be pushed out of the basin if the angle is large enough.

In this system, dissipation, energy injection and detuning are inhomogeneous. Dissipation grows in the direction of depth gradient, but changes are small. Indirect evidence from soliton local phase indicates that energy injections varies less or similarly than dissipation. In contrast, the detuning exhibits a convex behavior along the channel and has shown to have a strong effect on soliton dynamics.

Close to the parametric resonance, the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation models



this system. The effects of the tilting of the basin are incorporated into this model through space-dependent dissipation, energy injection and detuning. We have deduced an equation for the position of hydrodynamic solitons. This equation is characterized by two terms: a constant speed and a linear relaxation term. The theoretical description reproduces well the hydrodynamic soliton dynamics observed experimentally.

We gratefully acknowledge S. Coulibaly for fruitful discussions. M.G.C. is thankful for the financial support of FONDECYT project 1090045. L.G. thanks the grant support of CONICYT. The authors are also grateful for the fundings of ACT project 127.

## References

1. A.C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1985)
2. See, e.g., L.M. Pismen, *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics* (Springer Series in Synergetics, Berlin Heidelberg, 2006), and references therein.
3. M. Cross, H. Greenside, *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems* (Cambridge University Press, New York, 2009)
4. P. Couillet, *Int. J. Bifur. Chaos* **12**, 2445 (2002)
5. W. van Saarloos, P.C. Hohenberg, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 749 (1990)
6. P.D. Woods, A.R. Champneys, *Physica D* **129**, 147 (1999)
7. G.W. Hunt, G.J. Lord, A.R. Champneys, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **170**, 239 (1999)
8. M.G. Clerc, C. Falcon, *Physica A* **356**, 48 (2005)
9. U. Bortolozzo, M.G. Clerc, C. Falcon, S. Residori, R. Rojas, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 214501 (2006)
10. O. Thual, S. Fauve, *J. Phys. (Paris)* **49**, 1829 (1988)
11. O. Thual, S. Fauve, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 282 (1990)
12. V. Hakim, Y. Pomeau, *Eur. J. Mech. B* **S10**, 137 (1991)
13. M. Clerc, P. Couillet, E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3820 (1999)
14. M. Clerc, P. Couillet, E. Tirapegui, *Opt. Commun.* **167**, 159 (1999)
15. M. Clerc, P. Couillet, E. Tirapegui, *Prog. Theor. Phys.* **S139**, 337 (2000)
16. M. Clerc, P. Couillet, E. Tirapegui, *Int. J. Bifur. Chaos* **11**, 591 (2001)
17. M.G. Clerc, P. Encina, E. Tirapegui, *Int. J. Bifur. Chaos* **18**, 1905 (2008)
18. I.V. Barashenkov, E.V. Zemlyanaya, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2568 (1999)
19. J.W. Miles, *J. Fluid Mech.* **148**, 451 (1984)
20. W. Zhang, J. Viñal, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 690 (1995)
21. M.G. Clerc, S. Coulibaly, N. Mujica, R. Navarro, T. Sauma, *Phil. Trans. R. Soc. A* **367**, 3213 (2009)
22. B. Denardo, B. Galvin, A. Greenfield, A. Larraza, S. Putterman, W. Wright, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1730 (1992)
23. J.N. Kutz, W.L. Kath, R.D. Li, P. Kumar, *Opt. Lett.* **18**, 802 (1993)
24. S. Longhi, *Phys. Rev. E* **53**, 5520 (1996)
25. I.V. Barashenkov, M.M. Bogdan, V.I. Korobov, *Europhys. Lett.* **15**, 113 (1991)
26. M.G. Clerc, S. Coulibaly, D. Laroze, *Phys. Rev. E* **77**, 056209 (2008)
27. M.G. Clerc, S. Coulibaly, D. Laroze, *Int. J. Bifur. Chaos* **19**, 2717 (2009)
28. M.G. Clerc, S. Coulibaly, D. Laroze, *Physica D* **239**, 72 (2010)
29. N.V. Alexeeva, I.B. Barashenkov, G.P. Tsironis, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3053 (2000)
30. M.G. Clerc, S. Coulibaly, D. Laroze, *Int. J. Bifur. Chaos* **19**, 3525 (2009)
31. E. Caboche, F. Pedaci, P. Genevet, S. Barland, M. Giudici, J. Tredicce, G. Tissoni, L.A. Lugiato, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 163901 (2009)
32. J. Wu, R. Keolian, I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1421 (1984)
33. J.W. Miles, *Proc. Roy. Soc. A* **297**, 459 (1967)
34. W. Wei, W. Xinlong, W. Junyi, W. Rongjue, *Phys. Lett. A* **219**, 74 (1996)
35. G. Arfken, H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Elsevier Academic Press, Burlington, 2001).

### **A.3. Caracterización experimental de la ley de interacción de pares de vórtices disipativos.**

Utilizando un cristal líquido nemático en una celda homeotrópica con una pared fotosensible, es posible inducir pares de vórtices selectivamente utilizando una luz externa. Se caracteriza su ley de interacción. Los resultados muestran un excelente acuerdo con las predicciones teóricas de una fuerza inversamente proporcional a la distancia y se muestra una corrección debido a los efectos de la movilidad.

Este artículo se encuentra en referato para Physical Review Letters.

# Experimental characterization of the interaction law for dissipative vortex pairs

T. Sauma<sup>1,2</sup>, R. Barboza<sup>1,3</sup>, U. Bortolozzo<sup>1</sup>, G. Assanto<sup>3</sup>, M.G. Clerc<sup>2</sup> and S. Residori<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*INLN, Université de Nice-Sophia Antipolis, CNRS,  
1361 Route des Lucioles, 06560 Valbonne, France*

<sup>2</sup>*Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile*

<sup>3</sup>*NooEL-Nonlinear Optics and OptoElectronics Lab,  
University Roma Tre, Via della Vasca Navale 84, 00146 Rome, Italy*

Employing nematic liquid crystals in a homeotropic cell with a photosensitive wall, vortex pairs were selectively induced by external illumination and their interaction law characterized. The results are in excellent agreement with the theoretical prediction of a force proportional to the inverse of the distance and demonstrate the correction due to the effects of mobility.

PACS numbers: 61.30.Jf 47.32.C- 05.45.-a

Out of equilibrium systems can exhibit instabilities leading to spontaneous symmetry breaking and pattern formation [1]. Owing to fluctuations, different organizations may emerge in distinct regions of the same sample; hence, spatial structures are usually characterized by domains, separated by interfaces such as grain boundaries, or by defects such as dislocations [2], in analogy with solid state matter [3]. Among others, defects in rotationally invariant systems, i.e. vortices, deserve and have attracted a great deal of attention because of their universal character, as they are solutions of the complex Ginzburg-Landau equation (CGLE) which appear in such different systems as fluids, superfluids, superconductors, liquid crystals, magnetic media, optical dielectrics [4]. Vortices occur in complex fields and can be identified as topological defects, that is, point-like singularities which locally break the symmetry [5]. They exhibit a zero intensity at the singular point (origin) with a phase spiraling around it: the topological charge can be assigned by counting the number of spiral arms in the phase distribution, while the sign is provided by the sense of the spiral rotation. In optics, the latter procedure is equivalent to counting the number of extra or missing fringes in the corresponding dislocation of an interference pattern [6]. Optical vortices have recently stirred substantial interest towards applications, from optical tweezers [7, 8], to quantum computation [9], enhanced astronomical imaging [10] and high contrast coronagraph for exoplanet detection [11].

The implementation of suitable defect distributions in soft matter is considered one of the most efficient ways to generate vortices via the exchange of angular momentum between light and matter [12]. In liquid crystals, in particular, vortices can be spontaneously generated under the application of electric or magnetic fields [13] and appear as self-assembling topological defects, well described by the complex Ginzburg-Landau equation (CGLE) [14]. Their behavior is ruled by a dissipative dynamics characterized by a coarsening process [15] and several issues, still unresolved on both theoretical and experimental sides, prevent the full exploitation of their unique features. If this dynamics could be controlled, sponta-

neously generated defects in liquid crystal textures could be used, for instance, in light manipulation [16] or to fabricate self-assembled metamaterials [17] and photonic crystals or bio-sensors via colloidal structures [18]. In general vortices lack an analytical expression and are approximately described with Padé [2, 4]. Moreover, experimental questions remain open on the accurate determination of their interaction law. The main difficulties stem from the presence of long-range interactions peculiar of vortex dynamics: the first experimental results by Nagaya and coworkers [19] on vortex pair interaction were interlocutory and in contrast with the effective dynamics derived from the Frank energy formalism in nematic liquid crystals [13]. The dynamics of dislocations was later addressed in nematic electro-convection patterns accounting for gliding motion [20], but the pinning effects over the underlying stripes considerably altered the interaction law [2]. To the best of our knowledge, to date there is no satisfactory assessment of the interaction law between dissipative vortex pairs, much the less when nonlinear mobility is taken into account.

In this Letter we employ nematic liquid crystals in a cell with a photoconductive wall, also known as liquid crystal light-valve (LCLV), to investigate, both experimentally and theoretically, the interaction between light-generated vortex pairs. The liquid crystals are homeotropically aligned, that is, the nematic director  $\vec{n}$  is orthogonal to the confining boundaries, whereas local variations of the voltage across the nematic liquid crystal (NLC) layer are achieved by suitable selective illumination of the cell, inducing vortex pairs. Then, the interaction between pairs of oppositely charged vortices is measured experimentally and compared against theory in order to determine its governing law(s). The results confirm that the interaction force is proportional to the inverse distance between defects [21] and support the need for a correction introduced by a nonlinear, logarithmic, mobility via a phase renormalization [22, 23]. Besides the fundamental relevance of these findings in understanding vortex dynamics, they pinpoint the accuracy of the optical addressing approach and pave the



way to several further developments on the management of spontaneously generated vortices in soft matter.

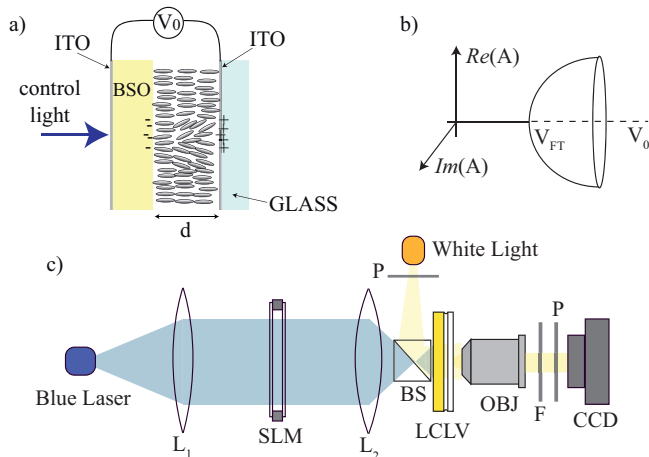


FIG. 1. (color online) a) Homeotropic light valve : BSO is the photosensitive wall; b) the degenerate pitchfork bifurcation describing the liquid crystal reorientation under the action of the control light;  $V_{FT}$  is the Fréedericksz transition voltage,  $V_0$  the applied voltage; c) experimental setup: the light valve, LCLV, is addressed with a control light beam shaped by a spatial light modulator (SLM); the imaging system consists of an objective lens OBJ, a neutral density filter F, crossed polarizers P and a CCD camera for recording.

*Experimental setup.*— Our experiments were conducted with the setup sketched in Fig.1. As illustrated in Fig.1a, a layer of nematic liquid crystals (MLC6618 from Merck) was sandwiched between the two parallel planar interfaces defining a liquid crystal light valve, i.e. a homeotropic cell of thickness  $d = 15 \mu\text{m}$  formed by a glass plate and a slab of the transparent photoconductor  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  (BSO). The latter was a  $25 \times 25 \text{mm}^2$  square crystal of thickness  $1 \text{mm}$ . The outer surface of the photoconductor and the inner surface of the glass plate were uniformly coated with thin transparent Indium-Tin-Oxide film electrodes in order to apply an external voltage  $V_0$  across the cell. The employed NLC is characterized by a negative dielectric anisotropy, i.e.  $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp} < 0$ , with  $\varepsilon_{\parallel}$  and  $\varepsilon_{\perp}$  the dielectric susceptibilities for low-frequency electric fields parallel and orthogonal to the long axis of the organic NLC molecules, respectively. By means of a suitable surface treatment prior to the cell assembly, the average orientation of the molecules was arranged with their long axes (i.e. director) orthogonal to the confining walls, i.e. a homeotropic alignment. When a (low-frequency) bias  $V_0$  is applied to the LCLV, due to the negative  $\varepsilon_a$  the NLC molecular director tends to reorient perpendicularly to the electric field lines; hence, the  $2\pi$  azimuthal degeneracy around the field direction imposes rotational invariance and the molecules can arbitrarily align in any direction, giving rise to the spontaneous formation of spatial domains separated by point-like defects or vortices [13]. The corre-

sponding degenerate pitchfork bifurcation is illustrated in Fig.1b, where  $A$  is the amplitude of the complex field that describes the molecular reorientation.

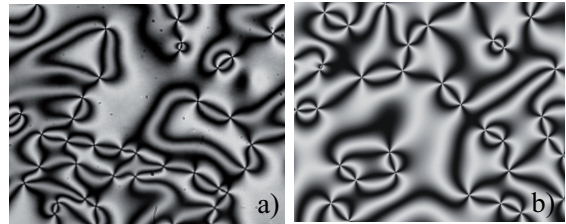


FIG. 2. Vortex gas: a) experimental snapshot recorded under white-light illumination for the cell in between crossed polarizers and for uniform laser illumination of the photosensitive wall, b) numerical simulations of Eq.(1) for parameters corresponding to the experimental conditions.

A laser beam of wavelength  $\lambda = 474 \text{nm}$  was expanded and collimated to a diameter of  $1 \text{cm}$ . As shown in Fig.1c, before impinging on the LCLV, the beam was amplitude modulated by a computer controlled spatial light modulator (SLM), the latter essentially consisting of a liquid crystal display (one inch diagonal size) with a resolution of  $1024 \times 768$  pixels and an 8 bit intensity dynamics. A lens could image the programmed SLM mask onto the photosensitive side of the LCLV, allowing the selective illumination of regions where light-induced reorientation could take place and vortices could emerge. Vortices were detected/imaged by placing the LCLV between crossed polarizers and using a CCD camera to record images under white-light illumination. As the bias  $V_0$  was increased beyond the Fréedericksz threshold ( $V_{FT} = 3.2 \text{V}$  in our sample), the NLC molecules started to reorient and vortices abruptly appeared; such creation process was later followed by a coarsening process with the mutual annihilation of vortices with opposite topological charges.

A typical snapshot acquired just above the Fréedericksz transition ( $V_0 = 6 \text{V r.m.s.}$ , frequency  $200 \text{Hz}$ ) is displayed in Figure 2a: the photoconductor was uniformly illuminated by the laser beam (intensity  $2.7 \text{mW/cm}^2$ ) and a homogeneous vortex gas was obtained. Each vortex is readily identified by the crossing of four black arms, corresponding to a  $2\pi$  phase-shift of the light passing through crossed polarizers; the sign of each charge is determined by rotating one of the polarizers and monitoring the azimuthal motion of the black arms around the defect. Figure 2b shows a vortex gas obtained by numerical simulations of the model Eq.(1) described below. By plotting  $[\sin(2\theta)]^2$ , where  $\theta$  is the director tilt, we obtain qualitatively the same pictures as those experimentally acquired through crossed polarizers. Fig.3a shows enlarged images of two neighboring vortices, with their interaction in time illustrated by four successive snapshots. The vortices annihilated before the snapshot in the last panel of Fig. 3a. Fig. 3b shows the corresponding numerical

simulations, with two interacting vortices displayed in four successive instants. Fig. 3b displays light intensity (top row), phase and director field (bottom).

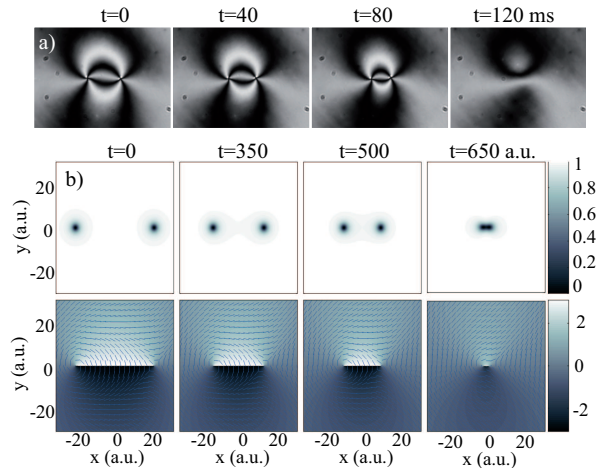


FIG. 3. Vortex pair interaction: a) experimental snapshots at four successive instant times; b) numerical simulations; top: intensity field, bottom: phase (gray levels) and nematic director distribution (lines).

*Theoretical description.*- In order to understand the above dynamical evolution with vortex nucleation, we derive a simple model in the vicinity of the Fréedericksz transition, a limit where analytical results are accessible as NLC molecules are weakly tilted from the longitudinal axis  $\hat{z}$  and backflow effects can safely be neglected. The dynamical equation for the molecular director  $\vec{n}$  reads [13, 21]  $\gamma \partial_t \vec{n} = K_3 [\nabla^2 \vec{n} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \nabla^2 \vec{n})] + (K_3 - K_1) [\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) - \vec{\nabla}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla})] + 2(K_2 - K_3) [(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{n})(\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{n}) - \vec{\nabla} \times \vec{n}) + \vec{n} \times \vec{\nabla}(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{n})] + \epsilon_a (\vec{n} \cdot \vec{E}) [\vec{E} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{E})]$ , where  $\gamma$  is the relaxation time,  $\{K_1, K_2, K_3\}$  are the NLC elastic constants. The homeotropic state,  $\vec{n} = \hat{z}$ , undergoes a stationary instability for critical values of the electric field,  $\vec{E} = E\hat{z}$ , which match the Fréedericksz transition threshold  $|E_{FT}| = \sqrt{-K_3\pi^2/d^2\epsilon_a}$ . Correspondingly, the NLC layer exhibits a transition for the critical voltage  $V_{FT} = \sqrt{-K_3\pi^2/\epsilon_a}$ . As illustrated in Fig.1b, owing to the rotational symmetry about the  $z$ -axis, the transition is a degenerate pitchfork bifurcation. Therefore, close to the transition point, we can introduce the ansatz

$$\vec{n} \approx \begin{pmatrix} u(r_\perp, t) \sin(\frac{\pi z}{d}) \\ w(r_\perp, t) \sin(\frac{\pi z}{d}) \\ 1 - \frac{(u^2 + w^2)}{2} \sin^2(\frac{\pi z}{d}) \end{pmatrix},$$

where  $z$  and  $r_\perp$  are longitudinal and transverse coordinates, respectively, and the elastic constants are assumed of the same order ( $K_1 \sim K_2 \sim K_3$ ). After straightforward calculations, by using the complex field  $A(\rho_\perp, t) = (u + iw)/\sqrt{4d^2\gamma/\pi^2(2K_1 - 3K_3)}$ , and scaling the space as  $r_\perp = \rho_\perp \sqrt{2/(K_1 + K_2)}$ , we obtain

$$\partial_t A = \mu A - |A|^2 A + \nabla_\perp^2 A, \quad (1)$$

where  $\mu \equiv (-\epsilon_a E_c^2 - K_3\pi^2/d^2)/\gamma$ . The above model is the well-known CGLE with real coefficients, which admits stable dissipative vortex solutions with topological charge  $\pm 1$  [2]. The analytical solutions, however, are unknown; adequate approximations are based on Padé. Fig.2 and 3 illustrate the observed vortex solutions.

The analysis of the interaction law between vortices is complicated because the energy associated with each vortex diverges logarithmically with the size of the system [21]. Thereby, the interaction between distant vortices has an infinite mobility [4]. When considering the role of propagation in the phase equation, we can renormalize the mobility by assuming that the vortices move in a quasi-stationary fashion, i.e., that the phase disturbance one of them undergoes due to the presence of another (or others) shifts infinitesimally; then, again, we can take the phase perturbation in the new vortex position and continuously generate the interaction. This procedure yields the vortex pair interaction-law [4]

$$\dot{r}M(\dot{r}) = v \log\left(\frac{v_0}{v}\right) = \frac{q}{r}, \quad (2)$$

which holds valid for distant vortices. Here  $r$  is the vortex separation,  $v \equiv \dot{r}$  its time derivative,  $q$  the product of the topological charges ( $q = \pm 1$ ) and  $v_0$  the order of the vortex collision speed ( $v_0 \approx 3.2$ ). The expression  $M(\dot{r}) \equiv \log(v_0/v)$  accounts for vortex mobility. Therefore, at low speed ( $v/v_0 \ll 1$ ) the mobility leads to a dynamics between vortices, whereas at large speed, close to  $v_0/3$  ( $v \sim v_0/e$ ), the mobility is of order 1. In this limit Eq.(2) can be integrated, yielding the analytical expression  $r(t) = \sqrt{q(t - t_0)}$ .

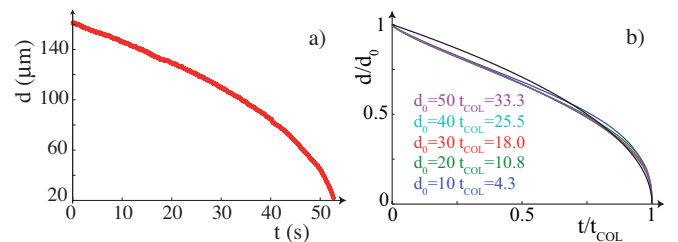


FIG. 4. (color online) Separation of two interacting vortices versus time. a) Experimental measurements, b) numerical simulations for different initial separations  $d_0$ .

*Verification of the vortex pair interaction law.*- By employing the SLM we could selectively create areas above the critical voltage  $V_{FT}$ , where we were able to isolate and manipulate pairs of oppositely charged vortices, as visible in Fig.3a. In order to study their interaction, we removed the polarizer and improved the contrast between illuminating beam and vortex core, the latter appearing as a well contrasted spot over an homogeneous background. Defining a grayscale threshold to identify a vortex, we employed a particle-tracker software to locate vortices and their trajectories during their interaction,

yielding data on vortex separation versus time,  $d(t)$ , and speed,  $v(t)$ . Fig. 4a plots the measured evolution of  $d(t)$ . For comparison, Fig. 4b graphs the numerically simulated vortex separation for various initial values  $d_0$  and, correspondingly, different collision times  $t_{COL}$ . Clearly the scaling  $d \sim t^{1/2}$ , predicted for a constant mobility, holds quite well at long times but originates appreciable deviations at short times.

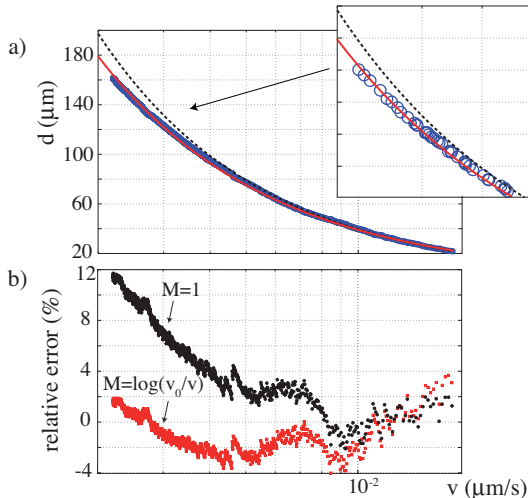


FIG. 5. (color online) a) Vortex separation  $d$  as a function of the speed  $v$ ; in the inset an enlargement of the initial part of the graph; dots: experimental points, dashed line: best fit with  $M = 1$ , solid line: best fit with  $M = \log(v_0/v)$ ; b) corresponding relative error.

In order to emphasize the effect of mobility, Fig. 5a plots vortex separation  $d$  versus speed  $v$  and compares the data against two interpolating functions, namely for  $M = 1$  and  $M = \log(v_0/v)$ . At high speeds (about  $v_0/e$ ) the two fits overlap; at small speeds the effect of a non-constant mobility is visible and dominates the dynamics. Fig. 5b plots the relative error for the case of constant mobility and renormalized mobility, emphasizing the one order of magnitude increased accuracy from the latter. Therefore, to zero order the effect of the speed in the mobility is a weak nonlinearity and a constant mobility is a reasonable approximation, consistent with previous observations [4, 19, 20]. Nevertheless, the role of a logarithmic mobility is fundamental from a theoretical point of view, as it renormalizes the effects of an infinite mobility. Moreover, a non-constant mobility affects the temporal evolution of the separating vortices.

Finally, we checked how the interaction law is modified by the presence of a third vortex. As illustrated in Fig. 6a, three vortices were induced by keeping the voltage  $V_0$  slightly below  $V_{FT}$  and illuminating the LCLV with two disks of laser-light (intensity  $4 \text{ mW/cm}^2$ ). A positive (charge  $+1$ ) vortex is induced inside each illuminated disk, while a negative vortex appears in between them, due to the required reconnection of the distorted

field lines of the nematic distribution. When one of the disk constraints is released (Fig. 6b), the (negative and positive) free vortices interact (Fig. 6c-e) and annihilate (Fig. 6f). Their measured distance  $d = d(t)$  versus time is plotted in Fig. 6g and compared with their separation in the absence of external perturbations. The deviation from the  $d \sim t^{1/2}$  law is significant, as the presence of the third defect slows down the interaction considerably because of the screening effect given by the presence of a third structure in the surrounding space [24].

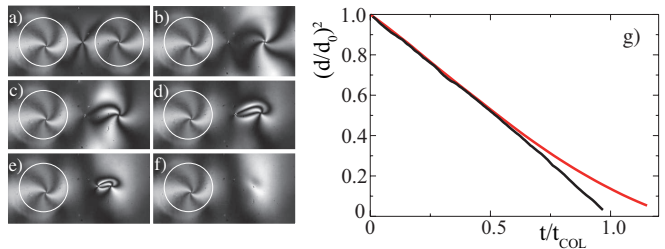


FIG. 6. (color online) Instantaneous snapshots showing a) three vortex induction and b-f) pair interaction; the white circle indicates the laser illuminated regions; g) measured distance versus times (brighter line) and comparison with the measurements without external perturbations (darker line); both curves are normalized to the vortex initial distance  $d_0$ .

*Conclusions.*- Using soft matter, namely nematic liquid crystals in a light valve geometry, we experimentally observed vortex generation and studied their interaction. The measurements pinpoint the importance of the propagation of the vortex phase as the latter effect introduces a weakly nonlinear mobility. A logarithmic ansatz for this nonlinear mobility results in good agreement with the experimental data. The presence of a third vortex substantially lowers the vortex-pair interaction speed.

We acknowledge helpful discussions with T. Nagaya. MGC, UB and SR acknowledge financial support from the ANR international program, project ANR-2010-INTB-402-02 (ANR-CONICYT39), "COLORS". MGC acknowledges funding from the FONDECYT project no. 127. GA acknowledges travel funding from the Program for Internationalisation at University Roma Tre.

- 
- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Non Equilibrium Systems* (J. Wiley & Sons, New York, 1977).
  - [2] L. M. Pismen *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics*, (Springer, Berlin Heidelberg 2006).
  - [3] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, (7th Edition, J. Wiley & Sons, New York, 1996).
  - [4] L. M. Pismen *Vortices in Nonlinear Fields*, (Clarendon press, Oxford 1999) and references therein.
  - [5] P. Couillet, L. Gil, and F. Rocca, *Opt. Commun.* **73** 403, (1989).
  - [6] F.T. Arecchi, et al., *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3749 (1991).

- [7] N.B. Simpson, L. Allen, and M. J. Padgett, *J. Mod. Opt.* **43**, 2485 (1996).
- [8] D.G. Grier, *Nature* **424**, 810 (2003).
- [9] H.H. Arnaut, and G.A. Barbosa, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 286 (2000).
- [10] F. Tamburini, et al., *Phys. Rev. Lett.* **97**, 163903 (2006).
- [11] E. Serabyn, D. Mawet, and R. Burruss, *Nature* **464**, 1018 (2010).
- [12] L. Marrucci, C. Manzo, and D. Paparo, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 163905 (2006).
- [13] P. G. de Gennes and J. Prost, *The physics of Liquid Crystals* (Oxford Science Publications, Clarendon Press, 2nd edition 1993).
- [14] T. Frisch, et al., *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1471 (1994).
- [15] A. N. Pargellis, S. Green, and B. Yurke, *Phys. Rev. E* **49**, 4250 (1994).
- [16] E. Brasselet and C. Loussert, *Opt. Lett.* **36**, 719 (2011).
- [17] O.D. Lavrentovich, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **108**, 5143 (2011).
- [18] I.I. Smalyukh, *Nature* **478**, 330 (2011).
- [19] T. Nagaya, H. Hotta, and H. Orihara, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**, 1572 (1991).
- [20] G. Goren, et al., *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1237 (1989).
- [21] S. Chandrasekhar *Liquid Crystals* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [22] L. M. Pismen, and J. D. Rodriguez, *Phys. Rev. A* **42**, 2471 (1990).
- [23] S. Rica and E. Tirapegui, *Phys. Lett. A* **161**, 53 (1991).
- [24] S. Serfaty, *J. Eur. Math Society* **9**, 383 (2007).

# Bibliografía

- [1] J. Wu, R. and I. Rudnick: 1984, ‘Observation of a Nonpropagating Hydrodynamic Soliton’. *Physical Review Letters* **52**, 1421–1424.
- [2] L D Landau, E. M. L., *A Course in Theoretical Physics - Fluid Mechanics*. Butterworth-Heinemann.
- [3] L. Gordillo, T. Sauma, Y. Z. I. E. M. C. and N. Mujica: 2011, ‘Can non-propagating hydrodynamic solitons be forced to move?’. *Phys. Rev. E* **84**, 036205.
- [4] Larraza, A. and S. Putterman: 1984, ‘Theory of non-propagating surface-wave solitons’. *Journal of Fluid Mechanics* **148**, 443–449.
- [5] M Clerc, S Coulibaly, L. G. N. M. R. N.: 2009, ‘Coalescence cascade of dissipative solitons in parametrically driven systems’. *Phil. Trans. R. Soc.* **367**, 3213–3226.
- [6] M Clerc, S Coulibaly, N. M. R. N. and T. Sauma: 2009, ‘Soliton pair interaction law in parametrically driven Newtonian fluid’. *Phil. Trans. R. Soc.* **367**, 3213–3226.
- [7] M. Faraday: 1831, ‘On a Peculiar Class of Acoustical Figures; and on Certain Forms Assumed by Groups of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces’. *Phil. Trans. R. Soc.* **121**, 299–340.
- [8] Miles, J. W.: 1967, ‘Surface-wave damping in closed basins’. *Proceedings of the Royal Society of London* **297**, 459–475.
- [9] Miles, J. W.: 1984a, ‘Nonlinear Faraday Resonance’. *Journal of Fluid Mechanics* **146**, 285–302.
- [10] Miles, J. W.: 1984b, ‘Parametrically excited solitary waves’. *Journal of Fluid Mechanics* **148**, 451–460.

- [11] Navarro, R.: 2008, '*Dinámica de dominios en sistemas forzados paramétricamente*'.
- [12] Pismen, L. M., *Vortices in Nonlinear Fields*. Oxford: Clarendon Press.
- [13] S. Fauve, O. T.: 1990, 'Solitary waves Generated by Subcritical Instabilities in Dissipative Systems'. *Physical Review Letters* **64**, 282–284.
- [14] S. Rica, E. T.: 1991, 'Dynamics of vortices in the Ginzburg-Landau equation'. *Physics Letters A* **161**, 53–59.
- [15] Wei Wang, Xinlong Wang, J. W. and R. Wei: 1996, 'Dynamical behavior of parametrically excited solitary waves in Faraday's water trough experiment'. *Physics Letters* **219**, 74–78.