

# Estudio de Sistemas *Cuasi-Reversibles*

Tesis

Entregada a La

Universidad De Chile

En Cumplimiento Parcial De Los Requisitos

Para Optar Al Grado De Doctor en Ciencias con mención

Física Facultad De Ciencias

Por

Pablo César Encina López

2007

Director de Tesis Dr. Marcel Gabriel Clerc Gavilán

# FACULTAD DE CIENCIAS UNIVERSIDAD DE CHILE

## INFORME DE APROBACION TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato.

Pablo César Encina López

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el 09, de Enero de 2008.

Director de Tesis

Dr. Marcel Gabriel Clerc Gavilán : .....

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Enrique Cerda Villablanca : .....

Dr. Nicolás Mujica Fernández : .....

Dr. Enrique Tirapegui Zurbano : .....

Dr. Juan Alejandro Valdivia Hepp : .....

## AUTOBIOGRAFÍA



Nací el 10 de Noviembre del 1975, en Santiago de Chile, mis estudios primarios los realice en la escuela A N 326 de Renca y los concluí en la escuela Miguel Dávila N 201, los secundarios en el liceo A N 9 de aplicación, mi pregrado lo realice en la universidad de Santiago de Chile estudiando ingeniería física, el postgrado lo realice en la Universidad de Chile.

# DEDICATORIA

Dedicada a toda mí GENTE: De los suburbios de Renca, La Santa Adriana, ahora, los de San Miguel y hermanos de las comunidades marianistas. En especial a Mirtha mí esposa, a Cecilia mí madre, a mí abuelo Manuel, a mí hermana Raiza, a mis hijos Isaac y Alejandro. Además mí agradecimiento a toda la oligarquía y poderes fácticos que confiaron en mí y me ayudaron financieramente para poder terminar mis estudios. Un agradecimiento especial al ulema Enrique Tirapegui por todo su apoyo para realizar este trabajo y a los profesores David Gottlieb, Alejandro Valdivia, Juan Carlos Retamal, y de una manera muy especial a mí profesor guía y amigo Marcel Clerc a todos muchas gracias. Sin olvidarme de mis amigos David Ratinoff, Claudio Rojas, El Negro Aguilar, Chico Victor, Roman, El piojo, Sandrino, Carlos Orellana, Gonzalo Gutiérrez, Carlos Esparza, Gabriel Elias, René Rojas, Saliya, Sergio Davis y una mención especial a Rodrigo Navarro.

blopa 2007.

El amor a mi hogar, mi mujer y mis hijos.

El amor a la tierra que me ayuda a vivir.

El amor a la educación y al trabajo.

El amor a los demás que trabajan por el bienestar común.

El amor a la justicia como instrumento del equilibrio para la dignidad del hombre.

El amor a la paz para gozar de la vida.

El amor a la libertad, no al libre albedrío, no la libertad de unos para vivir de otros, sino la libertad de todos.

La libertad para que yo exista, y existan mis hijos, y mi hogar, y el barrio, y la ciudad y los pueblos y todos los contornos donde nos ha correspondido forjar nuestro destino.

Sin yugos propios ni yugos extranjeros.

VICTOR JARA, 7 de Septiembre, 1973.

# ÍNDICE GENERAL

1. Introducción . . . . .	3
2. Generalidades. . . . .	11
2.1. Sistemas Reversibles, Sistemas Hamiltonianos y <i>Cuasi-</i> Reversibles. . . . .	12
2.1.1. Sistemas Reversibles . . . . .	12
2.1.2. Sistemas Hamiltonianos . . . . .	14
2.2. Sistemas disipativos . . . . .	19
2.2.1. Inestabilidades. . . . .	21
2.3. Inestabilidades en sistemas <i>cuasi</i> -reversibles. . . . .	28
3. Cálculo de la Forma Normal Minimal de la Bifurcation de Shilnikov	32
3.1. Forma Normal $O^3$ . . . . .	32
3.1.1. Forma Normal equivalente . . . . .	35
3.1.2. En el límite reversible . . . . .	40
4. Diagrama de bifurcación de la forma normal $O^3$ <i>cuasi</i> -reversible.	46

---

5. Caracterización de la dinámica en torno a la homoclina inestable.	51
6. Condición analítica para el caos de Shilnikov . . . . .	57
7. Ejemplo Mecánico De La Bifurcación de Shilnikov: Partícula de Shilnikov . . . . .	61
7.0.3. Inestabilidad <i>cuasi</i> -Reversible. . . . .	61
8. Conclusiones . . . . .	67
Bibliografía . . . . .	68
9. Formación de Patrones en Sistemas <i>Cuasi</i> -Reversibles e Influencia del Ruido. . . . .	72
9.1. Sistemas Forzados Paramétricamente. . . . .	72
9.2. Efecto de las Fluctuaciones Estocásticas. . . . .	77
9.3. Inestabilidad de Faraday. . . . .	85
9.4. Procedimiento Experimental. . . . .	86
9.5. Montaje Experimental. . . . .	88
9.6. Método De Medición. . . . .	88
9.7. Resultados . . . . .	92
10.El Ruido es precursor de Patrones . . . . .	98
10.1. Teoría del ruido en la inestabilidad de Faraday. . . . .	98

---

11. Conclusiones . . . . .	103
Bibliografía . . . . .	104
Apéndice . . . . .	106
A. Forzamiento paramétrico . . . . .	107
B. Inestabilidad estacionaria $O^2O$ . . . . .	109
C. Confusión de Frecuencias . . . . .	111
D. Publicaciones . . . . .	113

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Péndulo Plano, $L$ es largo del péndulo, $m$ la masa, $\theta$ es el ángulo con la vertical del lugar y el péndulo. El hilo es inextensible y de masa despreciable y $g$ es la aceleración de gravedad. . . . .	13
2.2. Inestabilidad Estacionaria caso Hamiltoniano . . . . .	16
2.3. A la izquierda sistema reversible con $\epsilon = 1$ , para $X = -1$ el punto de equilibrios inestable y para $X = 1$ el punto de equilibrio es un atractor; a la derecha sistema reversible con $\epsilon = -1$ . . . . .	18
2.4. En el esquema se representan que no todo sistema Hamiltoniano es reversible y la intersección en rojo representa los sistemas que son reversibles y Hamiltonianos. . . . .	19
2.5. En la figura se presenta el espacio de fase de un columpio con viscosidad, donde en $\theta = \pm(2n - 1)\pi$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ) están representados los puntos hiperbolicos. En $\theta = \pm 2n\pi$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ) están representados los puntos tipo foco. . . . .	21
2.6. Péndulo de Andronov. Este sistema consiste en un aro vertical y colocamos un anillo que puede moverse sobre el aro, se hace girar con frecuencia angular $\omega$ constante, donde $g$ es la aceleración de gravedad y $\theta$ es el ángulo formado por la recta $OP$ y la vertical del lugar que pasa por el centro del aro. . . . .	22



- 
- 2.7. Diagrama de Bifurcación de pitchfork, donde el eje vertical son los ángulos  $\theta$  de equilibrio de las soluciones estacionarias y  $\omega$  parámetro de bifurcación. Donde  $a$  y  $a'$  representan el intervalo donde el ángulo  $\theta = 0$  es el equilibrio estable e inestable respectivamente en esos intervalos y  $b_1$  y  $b_2$  son ramas estables de los nuevos equilibrios. . . . . 24
- 2.8. La manera mas genérica que un equilibrio de un sistema disipativo pierda estabilidad, es que al inyectar energía variando un parámetro un auto valor cruce el eje imaginario. . . . . 25
- 2.9. Inestabilidad genérica: Estacionaria, en esta inestabilidad colisionan dos autovalores a frecuencia cero. . . . . 26
- 2.10. Inestabilidad genérica: confusión de frecuencia, está inestabilidad ocurre inyectando energía a través del modo neutro o a través de la frecuencia de resonancia donde ocurre la inestabilidad. . . . . 27
- 2.11. Simulaciones numéricas del oscilador de Van der Pol:Fig. a-) se ve que para  $R < 0$  la solución  $I = 0$  es un atractor (foco). El espectro de este equilibrio es ilustrado en la Fig. b-) a medida que  $R$  aumenta la solución  $I = 0$  se vuelve inestable ( $R = 0$ ). Ya que el espectro cruza el eje imaginario para  $R = 0$ . Las simulaciones muestran la aparición de auto oscilaciones (ciclo limite) para ( $R > 0$ ) ver Fig.c . . . . . 28
- 2.12. Confusión de frecuencias en el caso que es perturbado, originando la inestabilidad. . . . . 29
- 3.1. Diagrama de espacio fase de la forma normal reversible. La linea segmentada y la continua representa el punto estable e inestable, respectivamente. La curva gruesa representa la solución homoclina. . . . . 41

---

3.2. Partícula de Shilnikov . . . . .	42
3.3. Diagrama de fuerzas, al variar la fuerza gravitacional, se observa el nacimiento de dos puntos de equilibrio mediante una bifurcación de Saddle node, siendo el círculo negro el punto de equilibrio estable. . .	43
3.4. Diagrama de bifurcación de la forma normal mecánica (3.28): (a) Bifurcación tipo saddle node, (b) Bifurcación supercrítica tipo Hopf Andronov Poicaré, (c) Bifurcación subcrítica Hopf Andronov Poicaré, (d) Bifurcación saddle node a ciclo límite, (e) Bifurcación a doblamiento de período y (f) caos Shilnikov. . . . .	45
4.1. Solución ciclo límite que exhibe el modelo (3.28) con $\beta = -0,814$ , $\delta = 1,0$ , $\mu = 0,6$ , a) $\nu = 0,31$ y b) $\nu = 0,295$ . . . . .	47
4.2. Representación esquemática de una bifurcación homoclina : Para $\lambda = 0$ tenemos la homoclina con un período $\infty$ , para $< 0$ la homoclina desaparece y solo tenemos trayectorias que divergen, $\lambda > 0$ tenemos ciclo límite con período finito. Aproximando $\lambda \rightarrow 0^+$ se observa que el período tiende a infinito. . . . .	50
5.1. Representación esquemática de una solución homoclina : El punto O es el punto fijo hiperbólico, donde la variedad inestable y estable es representada por la dirección de u y la dirección $\{v,w\}$ , respectivamente. El plano $\Pi$ es paralelo a la variedad inestable. . . . .	51
5.2. Extraño atractor exhibido por el modelo (3.28) $\nu = 1,0$ , $\beta = -1$ , $\delta = 1,0$ , y $\mu = 0,48$ . . . . .	55

---

5.3. Representación esquemática del primer mapa de vuelta (5.1) para diferentes valores de $\eta$ a) $\eta = -0,1$ and b) $\eta = 0,0$ . las estrellas son los puntos de equilibrio. . . . .	56
6.1. Movimiento del espectro de valores propios del modelo (6.1). . . . .	59
6.2. Función $f$ versus $w_0$ obtenida de forma numérica utilizando (3.28) y la condición (6.5). . . . .	60
7.1. Partícula de Shilnikov es un sistema compuesto por un anillo de masa $m$ , que se desliza sobre la barra $OA$ sin fricción. Esta barra junto con otra barra vertical $OB$ son un sólido rígido con un ángulo fijo $\alpha$ entre las dos, y todo el sistema puede rotar en torno al eje vertical $OB$ bajo la influencia del campo gravitatorio. . . . .	62
7.2. Ciclo límite de la partícula de Shilnikov, al variar los parámetros, se observa la aparición de un ciclo límite estable. estable. . . . .	63
7.3. Diagrama de fuerzas, al variar la fuerza gravitacional, se observa el nacimiento de dos puntos de equilibrio mediante una bifurcación de Saddle node, siendo el círculo negro el punto de equilibrio estable. . .	64
7.4. Doblamiento de periodo, el sistema bifurca de un ciclo límite a un doblamiento de periodo. . . . .	65
7.5. Atractor extraño tipo shilnikov, ejemplo mecánico <i>cuasi-reversible</i> . . .	66
9.1. Cadena de péndulos acoplados forzados de manera paramétrica. . . .	73
9.2. Para detuning negativo tenemos patrón, y para $\lambda < \mu$ se tiene que el estado homogéneo es estable . . . . .	78

9.3. En el diagrama espacio temporal se representa la evolución de un campo a) El precursor es una zona del espacio de parámetros donde podemos observar una longitud de onda en promedio, antes de llegar al punto de bifurcación analítico. b) Al cruzar el punto de bifurcación se puede observar una longitud de onda de forma clara y en cualquier instante. . . . .	80
9.4. Se ilustra como la distribución de probabilidades cambia al variar el parámetro de bifurcación $\epsilon$ . El grafico de bifurcación también se observa un cambio en la bifurcación al ir aumentando el ruido aditivo, adelantando el punto de bifurcación. . . . .	84
9.5. El diagrama muestra las distintas teorías que existen para interpretar la dinámica entorno al punto de bifurcación. . . . .	86
9.6. La celda es forzada de forma paramétrica. . . . .	87
9.7. Fotografía del montaje experimental. Una capa de 5 mm de agua es contenida en un canal de acero inoxidable que es forzado por un vibrador. La amplitud de la superficie es medida analizando el reflejo de un láser. . . . .	89
9.8. Diagrama del montaje experimental. Se representa la celda inclinada y el agua por gravedad mantiene un nivel resultando una diferencia entre los meniscos extremos de la canal de acero inoxidable. . . . .	90
9.9. En la fotografía se observa el amplificador de audio, generador de señales, osciloscopio y el acelerómetro. . . . .	91
9.10. En la fotografía se ve el montaje donde la canal esta sobre el vibrador, el láser que apunta sobre la superficie del fluido el cual se refleja en la pantalla. . . . .	91

- 
- 9.11. El plano tangente tiene dos grados de libertad, que son la inclinación del eje x y del eje y, de esta forma se crea la figura de Lissajou (el ocho) que es proporcional a la amplitud de la onda superficial. . . . . 92
- 9.12. En la fotografía se ve el ocho que se mide en la pantalla, la existencia del ocho es debido a la naturaleza *cuasi*-unidimensional del canal. El modo a lo largo del ancho del canal responde a una frecuencia similar a la del forzaje y el modo a lo largo del canal es sub-armonico luego responde a la mitad de la frecuencia de forzaje, como se demostró este ocho es proporcional a la amplitud de la onda superficial más una traslación. 93
- 9.13. Diagrama de bifurcación sin inclinación dan cuenta de una bifurcación supercrítica quíntica, los datos que estan sobre la linea segmentada con puntos pequeños son extraidos de [13], donde no se percataron que la bifurcación es supercritica quíntica, cuando el montaje está sin inclinación el sistema no exhibe una contribución de ruido aditivo significativo. . . . . 94
- 9.14. Diagramas de bifurcación para la amplitud promedio de las ondas de Faraday para diferentes ángulos de inclinación,  $\alpha = \{2,08^\circ, 1,3^\circ, 0,7^\circ, 0,0^\circ\}$ , de izquierda a derecha respectivamente, a  $F = 95$  Hz. La amplitud de la onda  $\langle A \rangle$  es medida en unidades arbitrarias. Las líneas continuas son la moda  $\langle A \rangle_{mp}$  obtenida desde la fórmula (10.5), con las correspondientes intensidades de ruido aditivo  $\eta_0 = 0,035, 0,029, 0,007$  y  $0,0$ , también de izquierda a derecha, respectivamente. Las líneas segmentadas indican las curvas de bifurcación determinista. . . . . 96
- 10.1. Intensidad del ruido en función (a) de la aceleración critica (b) del ángulo de inclinación  $\alpha$ . . . . . 102

---

C.1. Confusión de frecuencias. . . . . 112

## ÍNDICE DE CUADROS

9.1. Valores de los términos de la relación de dispersión, las unidades están en MKS. . . . .	95
---	----

## RESUMEN

Un Sistema Dinámico presenta simetría de reversibilidad temporal: *Cuando al observar un fenómeno no se puede distinguir si el sistema evoluciona hacia el futuro o hacia el pasado.* Por ejemplo en el péndulo plano sin roce, si aplicamos una velocidad inicial tal que este comience su movimiento de izquierda a derecha y en otro péndulo con las mismas características se le aplica una velocidad inicial en el sentido opuesto, es decir, de derecha a izquierda, y traemos un observador, este no puede afirmar cual está evolucionando con la flecha del tiempo hacia el futuro o hacia el pasado.

Los sistemas temporalmente reversibles que incluyen a los sistemas **Hamiltonianos** sin dependencia explícita del tiempo y sin fuerzas giroscópicas, exhiben dos inestabilidades genéricas; a saber, la **inestabilidad estacionaria** y la **confusión de frecuencias** para puntos de equilibrio, que son las dos maneras en que puede perder estabilidad un punto de equilibrio. En esta tesis nos concentramos en la **inestabilidad estacionaria de un equilibrio denominada  $O^3$** , este tipo de inestabilidad ocurre a frecuencia nula en presencia de un modo neutro. En esta inestabilidad genérica podemos inyectar energía al sistema a través del modo neutro (que representa alguna cantidad conservada; por ejemplo momento angular)

Los sistemas *cuasi*-reversibles son aquellos sistemas reversibles que mediante la inclusión de efectos perturbativos pierden la simetría de inversión temporal. Tales efectos perturbativos disipan o inyectan energía, logrando con esto quebrar la simetría temporal. En esta tesis estudiamos la **Inestabilidad Estacionaria *cuasi*-reversible**



---

( $O^3$ ). Mediante simulación numérica hemos logrado observar que el sistema exhibe comportamientos no triviales como movimientos periódicos (**Bifurcación de Andronov-Hopf**) y un comportamiento complejo conocido como **Caos de Shilnikov**. Puesto que este comportamiento complejo es el mecanismo más sencillo que presenta el caos de Shilnikov hemos construido un ejemplo mecánico simple que hemos denominado **Partícula de Shilnikov**, que presenta la inestabilidad estacionaria  $O3$ . En este caso se inyecta energía a través de un torque y se extrae energía a través de un roce húmedo, logrando además caracterizar analíticamente la zona donde hay caos.

Otro sistema *cuasi*-reversible que hemos estudiado en esta tesis son las ondas subarmónicas superficiales utilizando (**ondas de Faraday**) agua destilada como fluido. El agua destilada sustenta ondas superficiales que persisten en el tiempo sin amortiguación visible y las ondas estacionarias que conforman los patrones son de pequeña longitud de onda comparada con la profundidad del fluido y con una longitud de onda mucho mayor que la amplitud de la onda. Lo anterior constituye una modificación al experimento clásico de Faraday que utiliza fluidos de alta viscosidad. Además de la baja viscosidad del agua inclinamos la celda en un pequeño ángulo con el propósito de tener diferentes meniscos en la parte alta y la baja. En esta experiencia explicamos como el ruido aditivo es precursor de patrones, descubriendo una zoología de comportamientos producidos por el ruido aditivo y multiplicativo en bifurcaciones supercríticas quinticas y subcríticas mostrando como el ruido cambia drásticamente la bifurcación.

# 1. INTRODUCCIÓN

El tema central de esta tesis es el estudio de los sistemas *cuasi*-reversibles, y, en particular, la caracterización detallada de una inestabilidad genérica que ocurre en estos sistemas que aún no ha sido estudiada ni descrita. En la parte central de la tesis consideraremos el problema general para sistemas homogéneos en el espacio, es decir, consideramos situaciones que son descritas por un conjunto de variables  $\{q^\mu(t), \mu = 1, 2, \dots, n\}$ , donde  $t$  es un parámetro que nos sirve para describir la evolución del sistema, por ejemplo el tiempo.

La motivación para estudiar estos sistemas es su abundancia en la naturaleza. Basta en efecto que un sistema mecánico, con Hamiltoniano cuadrático en los momentun generalizados, que obviamente conserva su energía total, tenga inyección de energía o pérdidas de energía por roce u otro mecanismo, que sean pequeñas, para que tengamos un ejemplo de lo que llamamos un sistema *cuasi*-reversible. El nombre viene de que estos efectos típicamente quiebran la invariancia de reversibilidad del sistema cuando este la tiene, y como la quebradura es débil hablamos de *cuasi*-reversibilidad. El ejemplo más evidente puede ser un simple péndulo oscilando en un fluido (digamos la atmósfera) con un roce muy pequeño: en efecto tenemos aquí un sistema Hamiltoniano pierde su energía por el roce pero en un proceso muy lento, y además vemos inmediatamente que la modelización del roce fluido se hace con un término proporcional a  $\frac{d\theta(t)}{dt}$ , donde  $\theta$  es el ángulo del péndulo con la vertical, que quiebra automáticamente la reversibilidad. Esto último es además evidente porque el

sistema ahora va finalmente al reposo, o sea el péndulo se detiene y esto es claramente lo que uno entiende por una evolución irreversible.

Técnicamente un sistema reversible es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en el tiempo de la forma

$$\frac{dq^\mu(t)}{dt} = f^\mu(\vec{q}(t), \{\vec{\lambda}\}), \mu = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

donde  $\vec{q} = (q^1, \dots, q^n)$ , y  $\{\vec{\lambda}\} = \{\lambda^1, \dots, \lambda^r\}$  son un sistema de parámetros en los cuales depende la ecuación (1.1) que constituye un sistema dinámico. Observemos que el número de parámetros que intervienen en una situación dada (aquí  $r$ ) no tiene porque tener ninguna relación a priori con el número de variables dinámicas (aquí  $n$ ).

Por definición uno dice que el sistema es reversible si existe un operador lineal (matriz de  $n \times n$  en este caso)  $S$  tal que se cumpla  $S^2 = I$  y además se tenga

$$S^{-1} \vec{f}(S\vec{q}) = -\vec{f}(\vec{q}). \quad (1.2)$$

La justificación de la definición contenida en las dos fórmulas precedentes es la siguiente: si definimos las nuevas variables dinámicas  $Q^\mu, \mu = 1, 2, \dots, n$  para describir el sistema mediante la relación

$$\vec{Q}(t) = \vec{q}(t = -t') \quad (1.3)$$

entonces la ecuación de evolución (1.1) se escribe en las nuevas variables en la forma

$$\frac{dQ^\mu(t')}{dt'} = -f^\mu(\vec{Q}(t')). \quad (1.4)$$

Lo anterior no es nada más que una formulación más abstracta de lo que entendemos por invariancia  $t \rightarrow -t$  en los sistemas Hamiltonianos sin término impares en los momentums generalizados. Ilustremos esto en el caso más simple de una partícula de masa uno moviéndose en un potencial  $V(q)$ , en cuyo caso el Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q). \quad (1.5)$$

Las ecuaciones de movimiento correspondientes a (1.1) en este caso son:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad (1.6)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad (1.7)$$

y el operador  $S$  queda dado por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

y

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Es inmediato verificar que en este caso se cumple la definición anterior y también que  $H$  es invariante bajo la transformación inducida por  $S$ .

Un sistema cuasireversible es una perturbación de (1.1), lo que significa simplemente que los términos que hacen que se viole la simetría de reversibilidad dada por las ecuaciones (1.1,1.2,1.3,1.4) pueden ser tratados perturbativamente, o, dicho de otro

modo, que las propiedades del sistema que estudiamos están descritas al orden dominante por un sistema reversible. Esto es particularmente importante cuando estudiamos el problema de las bifurcaciones posibles de un sistema de este tipo. Resulta en efecto de lo anterior que estas bifurcaciones serán las de los sistemas reversibles, y los efectos de la quebradura débil de la simetría  $t \rightarrow -t$  solo aparecerán en el estudio de la bifurcación alrededor del punto crítico (alrededor en el espacio de parámetros del valor crítico del conjunto de parámetros en el cual el estado estudiado del sistema perdió su estabilidad) en el cual se produce la inestabilidad.

Como las inestabilidades genéricas, de codimensión 1, en los sistemas reversibles son conocidas, vemos de inmediato que tendremos las mismas en los sistemas *cuasi*-reversibles, y habremos así puesto en evidencia una nueva clase de fenómenos universales correspondientes cada clase a una inestabilidad genérica.

El punto de vista de esta tesis es entonces el de buscar fenómenos genéricos que son universales en el sentido que cerca de la inestabilidad genérica serán descritos por la misma ecuación (o sistema de ecuaciones) que es determinada únicamente por la inestabilidad: La llamada forma normal de un sistema para una inestabilidad dada. En este sentido lo que es físico es la forma normal ya que ella es una ecuación universal que describe todas las situaciones físicas que hagan la inestabilidad considerada (en un entorno del punto crítico del espacio de parámetros donde ocurre la inestabilidad). La física es entonces la forma normal en esta circunstancia.

Nuestra primera tarea será entonces describir las inestabilidades genéricas de los sistemas reversibles. Estas son de dos tipos y para convencerse de ello lo primero es notar que la propiedad de reversibilidad tiene consecuencias inmediatas en el espectro del operador lineal del sistema dinámico (1.1) alrededor de un punto de equilibrio. Sea en efecto  $\vec{q}^{(o)}$  un punto de equilibrio (solución estacionaria) de (1.1), o sea que se satisface  $\vec{f}(\vec{q}^{(o)}) = 0$ , y coloquemos  $\vec{q} = \vec{q}^{(o)} + \vec{x}$  (todos los símbolos con flechas son

vectores  $n$  dimensiones), entonces la ecuación (1.1) da linealmente en  $\vec{x}$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = L(\{\vec{\lambda}\})\vec{x} + O(\vec{x}^2), \quad (1.10)$$

donde  $L(\{\vec{\lambda}\})$  es una matriz de  $n \times n$  que depende obviamente de los parámetros de los cuales depende el sistema dinámico inicial. Para simplificar la discusión que sigue supongamos que hay un solo parámetro  $\lambda$  (o sea  $r = 1$  en la línea que sigue a la ecuación (1.1)). Esta discusión da la imagen general de lo que ocurre y basta para nuestros propósitos en esta Introducción. En el espacio de parámetros de dimensión  $r$  que habíamos considerado antes lo que hacemos equivale a moverse en una curva (que tiene dimensión uno y equivale entonces a variar un solo parámetro y de allí viene la terminología de decir que estamos hablando de inestabilidades de codimensión 1). De la propiedad (1.2) se deduce inmediatamente que se tiene para  $L$  la propiedad

$$S^{-1}LS = -L, \quad (1.11)$$

de donde resulta de inmediato que si  $\sigma$  es un valor propio de  $L$  entonces también  $-\sigma$  es un valor propio. Por otro lado como  $L$  es una matriz real vemos que si  $\sigma$  es un valor propio, también  $\sigma^*$ , el complejo conjugado de  $\sigma$  es un valor propio. Concluimos entonces que si tenemos un valor propio  $\sigma = \Re(\sigma) + i\Im(\sigma)$ , con la parte real y la parte imaginaria distinta de cero, entonces automáticamente tenemos 4 valores propios que son  $\{\Re(\sigma) + i\Im(\sigma), \Re(\sigma) - i\Im(\sigma), -\Re(\sigma) - i\Im(\sigma), -\Re(\sigma) + i\Im(\sigma)\}$ . Esto significa que el sistema es linealmente inestable ya que de  $\Re(\sigma)$  y  $-\Re(\sigma)$ , necesariamente uno de los dos es positivo y el sistema linealmente explota. (Nota: En un sistema lineal  $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = A\vec{y}$ , donde  $A$  es una matriz real de  $n \times n$  si  $\vec{y}$  es un vector de dimensión  $n$ , se dice que la solución nula es linealmente estable si todo los valores propios de  $A$  tienen parte real negativa, o sea si todo el espectro está a la izquierda del eje imaginario en el plano complejo. Esto se entiende ya que si  $\sigma$  es un valor

propio la solución correspondiente de la ecuación lineal es  $\vec{y}(t) = \vec{y}^{(0)} e^{\sigma t}$ , con  $\vec{y}^{(0)}$  una condición inicial a  $t = 0$ , esto tiende a 0 para  $t$  positivo, que son los tiempos que estamos considerando, o sea el sistema vuelve a la solución nula de partida, cuando  $\text{Re}\sigma$  es negativo). La única manera entonces para que en un sistema lineal reversible, como el que escribimos recién, sea estable, es que  $\text{Re}(\sigma) = 0$ , y en ese caso todos los valores propios de  $L$  están en el eje imaginario dispuestos en forma simétrica respecto al origen. En otras palabras el espectro de un sistema reversible linealmente estable consiste en valores propios 0 con sus multiplicidades y una colección de valores propios  $\{\pm i\sigma_j, j = 1, 2, \dots\}$ , cada par con sus multiplicidades. Moviendo un solo parámetro (codimensión 1) solo dos situaciones pueden ocurrir para producir una inestabilidad:

- ◊ Dos valores propios  $\pm i\varepsilon$ , con  $\varepsilon$  pequeño, se acercan al mover el parámetro, chocan en el origen, y crean partes reales que serán de la forma  $\pm\varepsilon'$ , con  $\varepsilon'$  real positivo. En este caso aparecerán dos modos críticos que llamamos  $(x, y)$ . Esta situación se llama la bifurcación estacionaria y podemos distinguir en ella dos casos interesantes: i) Se tiene la simetría  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$  y en este caso hemos demostrado que si se inyecta energía al sistema por un modo neutro y se agregan los términos de disipación (todos estos obviamente considerados como términos del unfolding) la forma normal es el célebre conjunto de ecuaciones de Lorenz según mostraron Clerc, Coulet y Tirapegui([12]). Así estas ecuaciones paradigmáticas que no tenían ninguna interpretación física conocida fueron asombrosamente promovidas a ecuaciones ‘‘universales’’ y obviamente los mismos autores ilustraron esta universalidad construyendo el más simple ejemplo mecánico que hiciera el fenómeno y que bautizaron el péndulo de Lorenz([14]); ii) No se tiene la simetría de reflexión del caso i) y si nuevamente inyectamos energía por un modo neutro y agregamos los términos disipativos vemos que aparece la inestabilidad  $0^3$  en la notación de Arnold (en el caso i) aparecía

---

la inestabilidad  $0^20$  en la notación de Arnold). Esta tesis está dedicada en su parte más extensa a este caso que no había sido estudiado y que ahora queda completamente caracterizado.

- ◇ Dos pares de valores propios  $\{\pm i\omega_1 \pm i\omega_2\}$  se mueven al variar el parámetro y colisionan (o sea  $i\omega_1$  colisiona con  $i\omega_2$ , y  $-i\omega_1$  colisiona con  $-i\omega_2$ ), y al colisionar salen del eje real y crean partes reales haciendo al sistema inestable (esto no ocurre en absoluto siempre, aún más, en la mayoría de los casos mecánicos los valores propios colisionan y se cruzan sin crear partes reales y el sistema sigue siendo estable). Cuando ocurre la inestabilidad se habla de la inestabilidad de Rocard quien fué el primero que la puso en evidencia en el problema de las dos oscilaciones acopladas de las alas de un avión, a saber la oscilación de torsión y la de flexión). Esta inestabilidad no es tratada en esta tesis. En presencia de un modo neutro fue caracterizada por Clerc, Coulet y Tirapegui ([13]) quienes mostraron que la forma normal era nada menos que el muy conocido conjunto de las ecuaciones de Maxwell-Block para el efecto laser. Poco después Clerc y Marsden [15] construyeron un simple ejemplo mecánico (un péndulo doble) que obedece estas ecuaciones universales y es el análogo mecánico del efecto laser.

Digamos entonces como resumen que en la parte principal de esta tesis se caracterizó el único caso genérico que no había sido estudiado en los sistemas *cuasi*-reversibles con lo que se completó el estudio de estos sistemas cuando no se consideran inhomogeneidades temporales. Resulta notable que este tercer caso genérico contiene en forma transparente el bien conocido caos de Shilnikov, y que aprovechándose de la universalidad del fenómeno demostrada en esta tesis se construyó el ejemplo mecánico más simple imaginable que realiza este caos y que bautizamos como la "partícula de Shilnikov".

En una segunda parte de esta tesis que es más breve y en la que aún queda



---

mucho trabajo por hacer quisimos hacer una primera exploración en los sistemas *cuasi-reversibles* espaciales, o sea en los casos en que consideramos las inhomogeneidades espaciales. Para ello nos concentramos en el conocido problema de la inestabilidad de Faraday con un fluido de muy baja viscosidad. Logramos construir la teoría apropiada a esta situación (que no es más que una modificación de la teoría conocida adaptada a nuestro caso) y sobre todo logramos realizar experimentalmente el fenómeno con un montaje simple que nos permitió estudiar el efecto del ruido y corroborar un hermoso análisis teórico hecho por Clerc y Agez [1] sobre el efecto de la estocasticidad en la curva de bifurcación estudiada.

Para concluir esta Introducción recordemos entonces los dos resultados nuevos obtenidos en esta tesis:

- ◊ La caracterización completa de la única inestabilidad genérica no conocida de los sistemas *cuasi-reversibles* temporales: La inestabilidad estacionaria sin simetría de reflexión, análoga del saddle-node en el caso disipativo, y que aquí conduce genéricamente a un escenario que presenta el caos de Shilnikov. Con este resultado cerramos el estudio de las preguntas más relevantes de los sistemas *cuasi-reversibles* temporales.
- ◊ Un primer estudio de un sistema *cuasi-reversible* espacial en el cual logramos además poner en evidencia un efecto robusto del ruido en el diagrama de bifurcación descubierto recientemente por Clerc y Agez [1].

## 2. GENERALIDADES.

El estudio de los sistemas dinámicos ha sido un eje principal en el desarrollo de la física clásica desde sus comienzos. Inicialmente estos estudios fueron analíticos con determinados modelos para la energía potencial. A partir del estudio de los cuerpos celestes, realizado por Poincaré en el año 1899, el enfoque del estudio de los sistemas dinámicos cambió, en efecto, más que la solución analítica del sistema se empezó a describir cualitativamente el comportamiento del sistema en el espacio de sus parámetros característicos. Lo anterior permite una interpretación geométrica que ayuda a la comprensión de los fenómenos subyacentes. El trabajo que desarrollamos está basado en este último punto de vista, es decir, se enmarca en el enfoque moderno de la teoría de los sistemas dinámicos.

En las siguientes secciones introducimos la clasificación acostumbrada de los sistemas dinámicos, que brinda un marco apropiado para la discusión que presentaremos.

## 2.1. *Sistemas Reversibles, Sistemas Hamiltonianos y Cuasi- Reversibles.*

### 2.1.1. *Sistemas Reversibles*

Los sistemas dinámicos reversibles, son aquellos de cuya evolución no se puede distinguir pasado o futuro. Lo anterior se describe matemáticamente mediante la ecuación (2.1):

$$\partial_t \vec{c} = \vec{f}(\vec{c}), \quad (2.1)$$

donde  $\vec{c}$  es un campo vectorial y  $\vec{f}(\vec{c})$  es el vector del campo. El sistema descrito por la ecuación (2.1) es invariante bajo las dos transformaciones  $t \rightarrow -t$  y  $\vec{c} \rightarrow S\vec{c}$ , donde  $S$  es un operador lineal que cumple las siguientes condiciones

$$\vec{f}(\vec{c}) = -S\vec{f}(S\vec{c}), \quad (2.2)$$

y

$$S^2 = I, \quad (2.3)$$

donde  $I$  es el operador identidad. Esta última propiedad corresponde al hecho, que si se aplica dos veces la transformación de reversibilidad la ecuación que gobierna el sistema queda invariante. Un ejemplo físico de sistema reversible es el péndulo plano, el cual se ilustra en la Fig. 2.1, donde  $\theta$  y  $\omega$  son el ángulo formado con la vertical y la velocidad angular respectivamente.

La ecuación de movimiento de este sistema es:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta. \quad (2.4)$$

Re-escribiendo la ecuación (2.4) cómo dos ecuaciones de primer orden se tiene

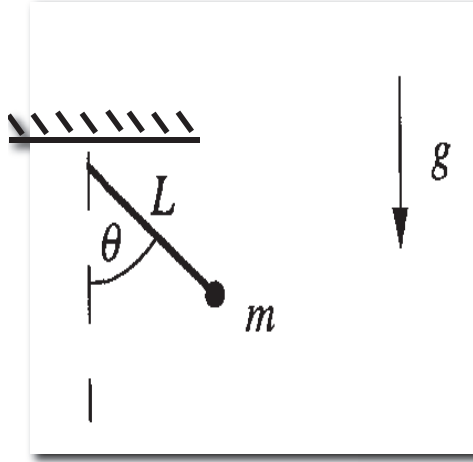


Fig. 2.1: Péndulo Plano,  $L$  es largo del péndulo,  $m$  la masa,  $\theta$  es el ángulo con la vertical del lugar y el péndulo. El hilo es inextensible y de masa despreciable y  $g$  es la aceleración de gravedad.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \\ -\frac{g}{L} \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Este sistema es invariante bajo  $t \rightarrow -t$ ; y el operador  $S$  es:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Notemos que el operador lineal  $S$  cambia la velocidad angular  $\Omega$  en  $-\Omega$ , de manera que considerando la inversión temporal la evolución del sistema descrita por la ecuación vectorial (2.5) quede invariante.

La dinámica en torno a los puntos de equilibrio en un sistema reversible presentan las siguientes propiedades en el espectro de autovalores de su operador lineal:

- ◇ Si el sistema tiene un operador lineal cuyos coeficientes son reales, el espectro

de autovalores debe cumplir que si  $\lambda$  es autovalor su complejo conjugado  $\lambda^*$  lo es también.

- ◊ El operador lineal ( $L_0$ ) del sistema reversible debe cumplir 2.2, es decir,  $L_0 = -SL_0S$ , luego podemos demostrar que si  $\lambda$  es autovalor de un vector propio,  $-\lambda$  es autovalor del vector propio transformado por el operador lineal  $S$ : Sea  $\vec{v}$  un autovector con un autovalor  $\lambda$  del operador lineal, obtenemos que  $S\vec{v}$  también es autovector:

$$L_0S\vec{v} = -SL_0\vec{v} = -\lambda S\vec{v}, \quad (2.7)$$

luego  $S\vec{v}$  es autovector de  $L_0$  con autovalor  $-\lambda$ .

### 2.1.2. Sistemas Hamiltonianos

Los sistemas hamiltonianos sin dependencia explícita del tiempo, están caracterizados por la función de Hamilton  $H(\vec{q}, \vec{p})$ , donde  $\vec{q}$  y  $\vec{p}$  representan coordenadas y momentos generalizados. Las ecuaciones de movimiento que satisfacen estas variables están dadas por las ecuaciones de Hamilton,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (2.8)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (2.9)$$

Hay muchos sistemas hamiltonianos, en mecánica es de la forma

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + U(\vec{q}), \quad (2.10)$$

donde el primer término del lado derecho es la energía cinética y el segundo es la energía potencial. Este sistema es reversible. En efecto bajo la transformación estándar

$(t \longrightarrow -t)$  y  $(p \longrightarrow -p)$ ; se verifica de inmediato que,  $H$  es invariante. Esto implica que las ecuaciones de movimiento (2.9) satisfacen las condiciones (2.2) y (2.3) y el sistema dinámico observado es entonces reversible. El péndulo es un ejemplo de esto, donde el hamiltoniano  $H$  toma la forma

$$H(\theta, P_\theta) = \frac{P_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta. \quad (2.11)$$

Ejemplo si estudiamos el siguiente hamiltoniano entorno a un punto de equilibrio, el hamiltoniano toma la forma (hamiltoniano cuadrático)

$$H(q, p) = g^{i,j} p_i p_j + \frac{1}{2} V_{i,j} q^i q^j \quad (2.12)$$

donde  $g^{i,j}$  y  $V_{i,j}$  son definidas positivas y simétricas, donde además esta última  $V_{i,j}$  es la matriz Hessiana del potencial, evaluada en uno de sus puntos de equilibrio. Realizando un cambio de variables para expresar en forma diagonal (para facilitar los cálculos) y obtener las siguientes ecuaciones de primer orden:

$$\partial_t \begin{bmatrix} \vec{Q} \\ \vec{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [-V] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Q} \\ \vec{P} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

donde se define el operador  $\hat{L}$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [-V] & [0] \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

para poder caracterizar la inestabilidad hay que estudiar el espectro del operador  $\hat{L}$  que tiene todos sus elementos o componentes reales, esto implica si  $\lambda$  es valor propio

de  $\hat{L}$  entonces su conjugado  $\lambda^*$  lo es también <sup>1</sup>, entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} [-\lambda I] & [I] \\ [-V] & [-\lambda I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \end{bmatrix} = \vec{0}. \quad (2.15)$$

De aquí obtenemos para que  $\lambda$  sea valor propio del operador  $\hat{L}$  se tiene que cumplir que  $\lambda^2$  tiene que ser valor propio del operador  $-V$ , con esto concluimos que el operador  $\hat{L}$  tiene invariancia  $\lambda \rightarrow -\lambda$ , este sistema Hamiltoniano permanecerá estable mientras los valores propios de  $V$  sean positivos, es decir, el espectro será imaginario, y si variando parámetros logramos que un valor propio sea negativo pasando por cero, esta situación es la inestabilidad estacionaria cómo se observa en la Fig. 2.2.

En la última década se ha desarrollado un estudio sistemático de las inestabilidades *cuasi-reversibles* donde es importante notar:

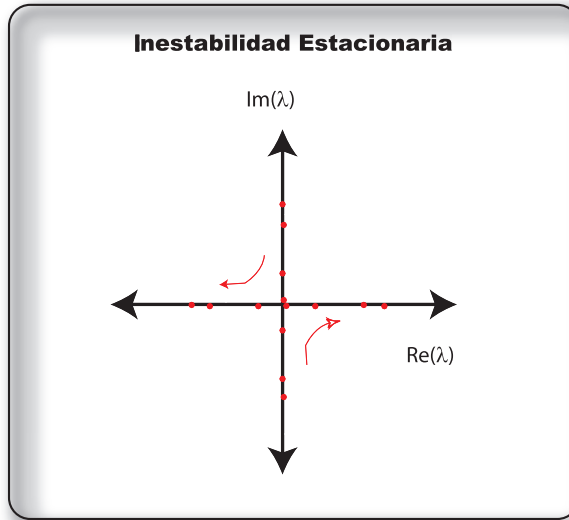


Fig. 2.2: Inestabilidad Estacionaria caso Hamiltoniano

<sup>1</sup> esto es una consecuencia del teorema fundamental del algebra que un polinomio a coeficientes reales tiene una solución compleja y el conjugado también es solución.

Que no todo sistema reversible es hamiltoniano y viceversa. Un ejemplo de sistema reversible no hamiltoniano es:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ \epsilon X - YX - X^3 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Este modelo podría representar un resorte no lineal con inyección de energía cuando el resorte se esta estirando y disipación de energía cuando se esta comprimiendo, este sistema es reversible pero no tiene estructura simpléctica, su transformación de reversibilidad viene dada por  $(t \longrightarrow -t)$ ,  $(X \longrightarrow -X)$  y  $(Y \longrightarrow Y)$ , el operador  $S$  para este sistema reversible es:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Al variar el parámetro  $\epsilon$  en el sistema (2.16) se encuentra un cambio cualitativo en la dinámica del sistema, es decir, cambia el diagrama de evolución del espacio de fases. En la teoría de sistemas dinámicos lo anterior se denomina una bifurcación [10], la cual se ilustra en este caso en la Fig. 2.3.

En la Fig. 2.3 se representa el diagrama de fase de este sistema para  $\epsilon > 0$  y  $\epsilon < 0$ . Es importante notar que para  $\epsilon < 0$  el sistema tiene un diagrama de fase como un sistema típicamente hamiltonianos con centros, por lo que, las órbitas son cerradas tanto cerca como lejos del centro (ver Fig. 2.3 de la derecha). Sin embargo, para  $\epsilon > 0$  el sistema exhibe un atractor y un repelot, es decir, no se cumple el teorema Liouville, puesto que el volumen del espacio de fase es incompresible, luego no puede ser un sistema hamiltoniano, note que para este caso el atractor  $(\sqrt{\epsilon}, 0)$ , se transforma en el repelot cuando se usa una transformación temporal  $(\sqrt{\epsilon}, 0) \rightarrow (-\sqrt{\epsilon}, 0)$ . Luego  $(\sqrt{\epsilon}, 0)$  no es solución reversible. Esto implica que el sistema (2.16) exhibe un quiebre



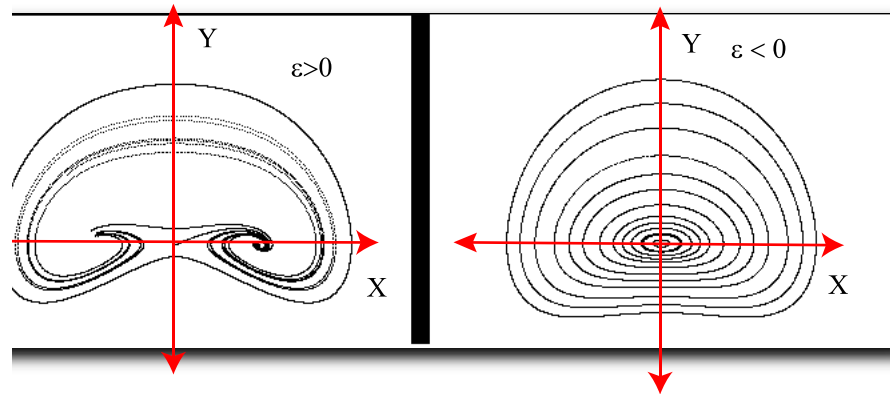


Fig. 2.3: A la izquierda sistema reversible con  $\epsilon = 1$ , para  $X = -1$  el punto de equilibrio es inestable y para  $X = 1$  el punto de equilibrio es un atractor; a la derecha sistema reversible con  $\epsilon = -1$ .

espontáneo de simetría temporal. Se tiene que para  $\epsilon$  positivo el sistema tiene tres puntos de equilibrio: Un repelente, atractor y un punto hiperbólico, como se ve en la Fig. 2.3 de la izquierda. Para condiciones iniciales lejanas de los puntos de equilibrio el sistema exhibe órbitas cerradas para, condiciones iniciales en la vecindad de los puntos de equilibrio, observando que las trayectorias caen en la cuenca del atractor.

En general, los sistemas reversibles se caracterizan por tener zonas del espacio de fase con descripción hamiltoniana y parches donde el sistema exhibe atractores y/o repelentes, es decir, zonas disipativas, como se puede observar en la parte central de la Fig. 2.3 de la izquierda. Topológicamente no pueden ir juntos dos puntos de la misma naturaleza: Repelente o atractor y por ende estos se alternan.

Para entender de una forma pictórica la diferencia entre un sistema reversible y un sistema hamiltoniano, consideremos al conjunto de los sistemas reversibles y hamiltonianos; se encuentra que estos conjuntos se intersectan, cómo se vé en la Fig. 2.4. Los sistemas hamiltonianos no reversibles son típicamente los que dependen explícitamente del tiempo o los que tienen una dependencia lineal en los momentos

generalizados. Los sistemas hamiltonianos clásicos descritos por la ecuación (2.10), se encuentran en la intersección con los sistemas reversibles.

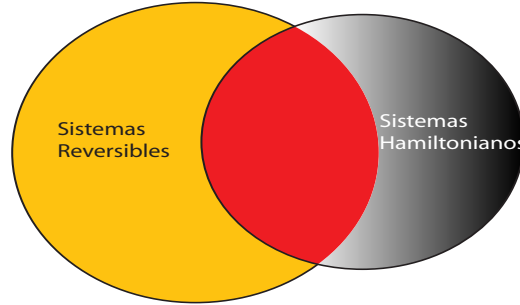


Fig. 2.4: En el esquema se representan que no todo sistema Hamiltoniano es reversible y la intersección en rojo representa los sistemas que son reversibles y Hamiltonianos.

## 2.2. *Sistemas disipativos*

La expresión *sistemas disipativos*, históricamente, fue una denominación para sistemas hamiltonianos con términos que dan cuenta de disipación o pérdida de energía, es decir, en las cuales hay una fuerza disipativa que se puede interpretar como una fuerza que depende de la velocidad de las partículas como una fuerza de roce húmedo o de Stokes. Expandiendo esta fuerza en serie de Taylor hasta el primer orden se tiene que la fuerza solo depende del término lineal puesto que a orden cero esta fuerza es cero en  $\vec{f}(\vec{v} = 0) = 0$ , luego tenemos que nuestras ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\sigma \dot{q}_i, \quad (2.18)$$

donde  $\sigma$  es una constante positiva y  $q_i$  son las coordenadas generalizadas. Al multiplicar por  $\dot{q}_i$  la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{dH}{dt} = -\sigma \dot{q}_i^2 = -R \quad (2.19)$$

obteniendo la función de Rayleigh no nula  $R$  y  $H$  es el Hamiltoniano del sistema.

En esta tesis se denominará *sistema disipativo* a un sistema que no es reversible y tampoco hamiltoniano autónomo, es decir, cuyo hamiltoniano depende explícitamente del tiempo, por lo que tiene en general un término que disipa energía.

Un ejemplo de sistema disipativo es un columpio rígido, que oscila en un plano y que se puede modelar como un péndulo plano. El efecto disipativo corresponde a la fricción del columpio con el aire. La ecuación diferencial para la variable angular  $\theta$  es:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta - \sigma\dot{\theta}, \quad (2.20)$$

donde  $\sigma > 0$  es el coeficiente de amortiguamiento. Para encontrar una integral se multiplica la ecuación (2.20) por  $\dot{\theta}$ , de manera que el lado izquierdo puede ser reescrito como una diferencial total, el sistema toma la forma

$$\frac{d(ml^2\dot{\theta}^2/2 - mgl \cos \theta)}{dt} = -\sigma\dot{\theta}^2, \quad (2.21)$$

es decir, en este sistema la energía se disipa y la función de Rayleigh es  $R = \sigma\dot{\theta}^2$ . Debido al efecto disipativo se observan en el espacio de fase trayectorias que dan cuenta de la pérdida de energía. En la Fig. 2.5 se ilustran las trayectorias que disipan energía en este sistema.

Es importante notar que la dinámica del sistema que estamos estudiando se describe por un hamiltoniano dependiente del tiempo, el modelo descrito por la ecuación (2.20) tiene un hamiltoniano no autónomo de la forma

$$H = \frac{P^2}{2ml^2}e^{-\sigma t} - mgl \cos \theta e^{\sigma t}, \quad (2.22)$$

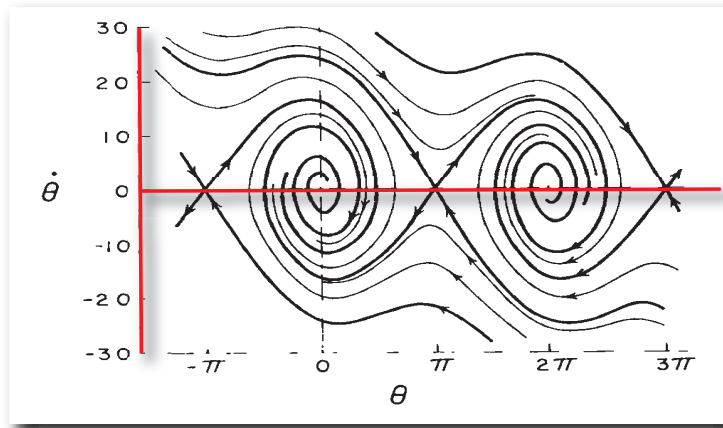


Fig. 2.5: En la figura se presenta el espacio de fase de un columpio con viscosidad, donde en  $\theta = \pm(2n - 1)\pi$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ) están representados los puntos hiperbolicos. En  $\theta = \pm 2n\pi$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ) están representados los puntos tipo foco.

si usamos las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{ml^2} e^{-\sigma t}, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta e^{\sigma t},\end{aligned}\quad (2.23)$$

reemplazando  $\dot{P}$  en la derivada temporal en  $\dot{\theta}$  se obtiene (2.20), luego el sistema es hamiltoniano pero no autónomo. Además de 2.21 se obtiene que la energía

$$E = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} - mgl \cos \theta, \quad (2.24)$$

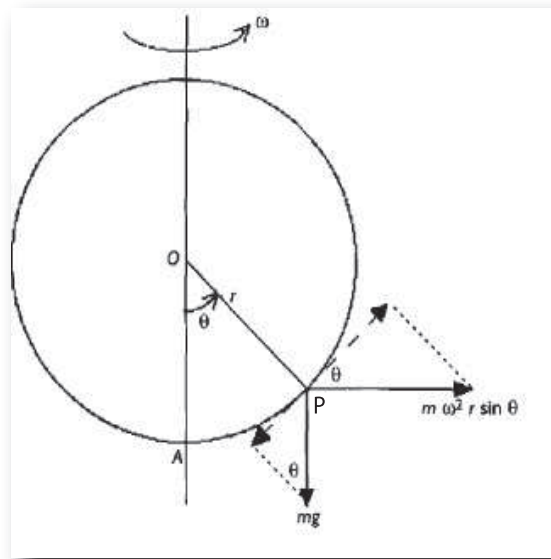
decrece, luego el sistema es disipativo.

### 2.2.1. Inestabilidades.

El estudio de las inestabilidades tienen un rol central en la teoría moderna de sistemas dinámicos. Ellas permiten tener un entendimiento cualitativo de la evolución

de estos sistemas [20]. La teoría de bifurcaciones permite describir estas inestabilidades de una forma universal.

Para profundizar el concepto de inestabilidad, analizaremos un ejemplo físico conocido como el péndulo de Andronov [4]. Este sistema está compuesto por un aro vertical en el que hay un anillo de masa  $m$ , que puede deslizarse sobre el aro vertical. Se hace rotar el aro alrededor del eje de la vertical del lugar, que pasa por el diámetro con una frecuencia angular  $\omega$  constante, colocando el anillo fuera de la posición de equilibrio como se muestra en la Fig. 2.6. En el sistema se observa la competencia entre la fuerzas que se ejercen sobre la partícula, estas son: Roce húmedo, centrífuga y gravitatoria, obteniendo que para una frecuencia angular pequeña en relación con  $g/r\omega^2 > 1$ , la partícula tiene un ángulo de equilibrio en  $\theta^* = 0$  que es estable.



*Fig. 2.6:* Péndulo de Andronov. Este sistema consiste en un aro vertical y colocamos un anillo que puede moverse sobre el aro, se hace girar con frecuencia angular  $\omega$  constante, donde  $g$  es la aceleración de gravedad y  $\theta$  es el ángulo formado por la recta  $OP$  y la vertical del lugar que pasa por el centro del aro.

La ecuación de movimiento del sistema es

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{r} \sin \theta - \mu \dot{\theta}, \quad (2.25)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de giro,  $r$  el radio del aro,  $m$  la masa del anillo,  $g$  la aceleración de gravedad y  $\mu$  es el coeficiente de roce húmedo con el aro. Los puntos de equilibrio de este sistema vienen dados por  $\theta^* = 0$  y

$$\cos \theta_{\pm} = \frac{mg}{mr\omega^2} \leq 1, \quad (2.26)$$

la expresión (2.26) es el cociente entre la fuerza de gravedad y la fuerza centrífuga,  $\theta_{\pm}$  indica si  $\theta$  es positivo o negativo respectivamente. Al incrementar un parámetro del sistema, por ejemplo la velocidad angular hasta cierto valor crítico  $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{r}}$ , el sistema presenta un cambio cualitativo en la dinámica; en efecto, surge una bifurcación, el ángulo  $\theta^* = 0$  se vuelve inestable, aparecen dos nuevos puntos estables  $\theta = \theta_{\pm}$  y  $\theta = 0$  se transforma en inestable como se muestra en la Fig. 2.7. Hay solo una región (a) en la cual existe solo un punto de equilibrio,  $g > r\omega^2$ , cuando la fuerza gravitatoria es mayor que la centrífuga. Cuando la fuerza centrífuga es mayor que la gravitacional aparecen dos nuevas soluciones estables  $\theta_+$  y  $\theta_-$ , donde  $\theta^* = 0$  persiste, pero se transforma en inestable, este tipo de bifurcación es conocida como bifurcación de pitchfork [3] (ver Fig. 2.7).

Para estudiar el péndulo de Andronov en torno del punto de bifurcación, se toma  $\theta(t) = x(t)$ ,  $x \ll 1$  reemplazando en la ecuación (2.25) y desarrollando en serie de Taylor. Al orden dominante se encuentra

$$\ddot{x} = \left(\omega^2 - \frac{g}{r}\right)x + \left(\frac{g}{6r} - \frac{2}{3}\omega^2\right)x^3 - \mu\dot{x}. \quad (2.27)$$

Este sistema se puede escribir cómo

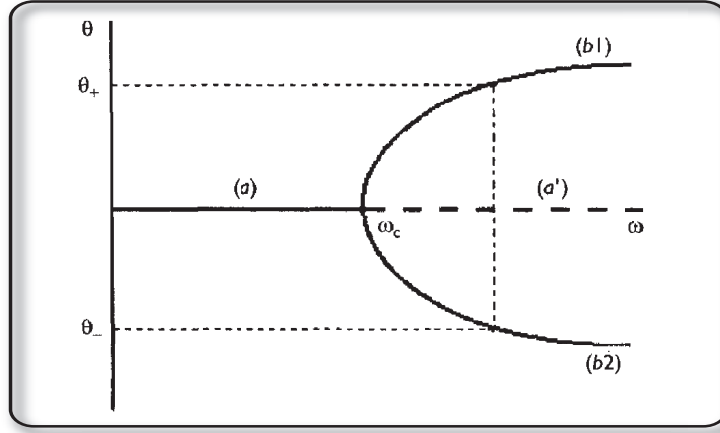


Fig. 2.7: Diagrama de Bifurcación de pitchfork, donde el eje vertical son los ángulos  $\theta$  de equilibrio de las soluciones estacionarias y  $\omega$  parámetro de bifurcación. Donde  $a$  y  $a'$  representan el intervalo donde el ángulo  $\theta = 0$  es el equilibrio estable e inestable respectivamente en esos intervalos y  $b1$  y  $b2$  son ramas estables de los nuevos equilibrios.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 - \frac{g}{r} & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\frac{g}{6r} - \frac{2}{3}\omega^2) x^3 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

De la ecuación (2.28) se tiene el operador lineal que caracteriza la dinámica en torno a  $x = 0$ , se tiene

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 - \frac{g}{r} & -\mu \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

y sus valores propios son

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4(\omega^2 - \frac{g}{r})}}{2}. \quad (2.30)$$

Los valores propios son funciones de los parámetros que caracterizan el problema en estudio. Analizando el espectro de los valores propios del operador lineal  $L_0$  en un

punto de equilibrio, según como sea la parte real del valor propio, podemos afirmar si es estable o inestable el punto de equilibrio.

Si un valor propio tiene parte real positiva, entonces es inestable y si todos tienen parte real negativa es estable, ya que esto implica que las perturbaciones crecen o decrecen exponencialmente. Si consideramos  $\mu = 0$  y estudiamos  $\lambda$  para los siguientes casos:  $\lambda$  real puro, el punto de equilibrio es hiperbólico,  $\lambda$  imaginario puro, es un centro el punto de equilibrio. Los términos no-lineales son responsables de la aparición de nuevos puntos de equilibrio. Es importante notar que la bifurcación del punto de equilibrio está caracterizado por su operador lineal.

La manera de perder estabilidad de un Sistema disipativo es variando un parámetro tal que la parte real de un valor propio  $Re(\lambda) < 0$  cruce el eje imaginario y tome algún valor positivo (ver Fig. 2.8) de forma genérica.

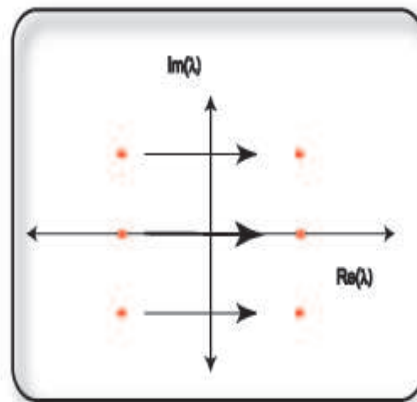


Fig. 2.8: La manera mas genérica que un equilibrio de un sistema disipativo pierda estabilidad, es que al inyectar energía variando un parámetro un auto valor cruce el eje imaginario.

Cambiando un parámetro, las dos bifurcaciones genéricas de un punto de equilibrio en un sistema reversible son: La bifurcación estacionaria (ver Fig. 2.9) y la confusión



de frecuencias (ver Fig. 2.10). La estacionaria corresponde a que un valor propio real negativo se haga positivo cruzando el eje imaginario. La bifurcación Hopf corresponde al caso que dos valores propios complejos y conjugados crucen el eje imaginario. Es importante hacer notar que esta última bifurcación está caracterizada por la aparición de oscilaciones permanentes.

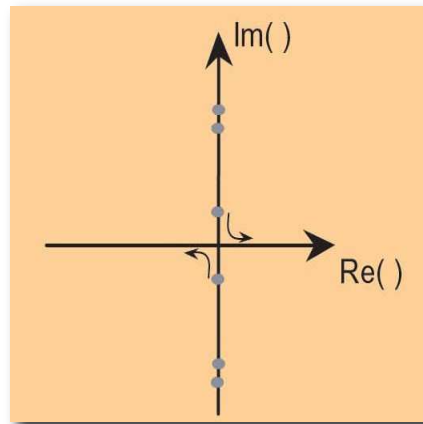


Fig. 2.9: Inestabilidad genérica: Estacionaria, en esta inestabilidad colisionan dos autovalores a frecuencia cero.

Un ejemplo de inestabilidad estacionaria es el péndulo de Andronov amortiguado ecuación (2.28), el espectro está caracterizado por dos valores propios complejos conjugados con parte real negativa. A medida que se aumenta la frecuencia estos valores propios colisionan en el eje real para  $\omega^2 = \frac{\sigma^2}{4} - \frac{g}{l}$  al seguir aumentando la frecuencia un valor propio cruza el eje imaginario, originando la inestabilidad de la solución vertical ( $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ ).

Un ejemplo clásico de bifurcación de Hopf-Andronov es el circuito de Van der Pol. Este circuito está compuesto por una inductancia, un condensador y un tubo de vacío. El tubo de vacío es una resistencia no lineal que para bajas corrientes se comporta

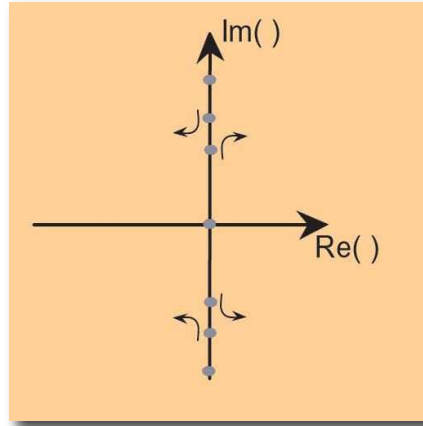


Fig. 2.10: Inestabilidad genérica: confusión de frecuencia, esta inestabilidad ocurre inyectando energía a través del modo neutro o a través de la frecuencia de resonancia donde ocurre la inestabilidad.

como una fuente de cargas, el voltaje que se aplica al tubo de vacío satisface

$$V = RI - aI^3 \quad (2.31)$$

luego el movimiento de cargas está gobernado por la ecuación diferencial no lineal

$$L\dot{I} + \frac{q}{c} = RI - aI^3. \quad (2.32)$$

Derivando la ecuación con respecto al tiempo e identificando  $\frac{d}{dt}q = I$  se obtiene el conocido oscilador de Van der Pol descrito por la ecuación

$$L\ddot{I} + \frac{I}{c} = (R - 3aI^2)\dot{I} \quad (2.33)$$

Este oscilador se puede interpretar como un oscilador lineal con inyección de energía proporcional al cambio de corriente  $R\dot{I}$  y disipación no lineal  $3aI^2\dot{I}$ .

Simulaciones numéricas del oscilador de Van der Pol se muestran en la Fig. 2.11 y se ve que para  $R < 0$  la solución  $I = 0$  es un atractor (foco). El espectro de este equilibrio es ilustrado en la Fig. 2.11b: a medida que  $R$  aumenta la solución  $I = 0$  se

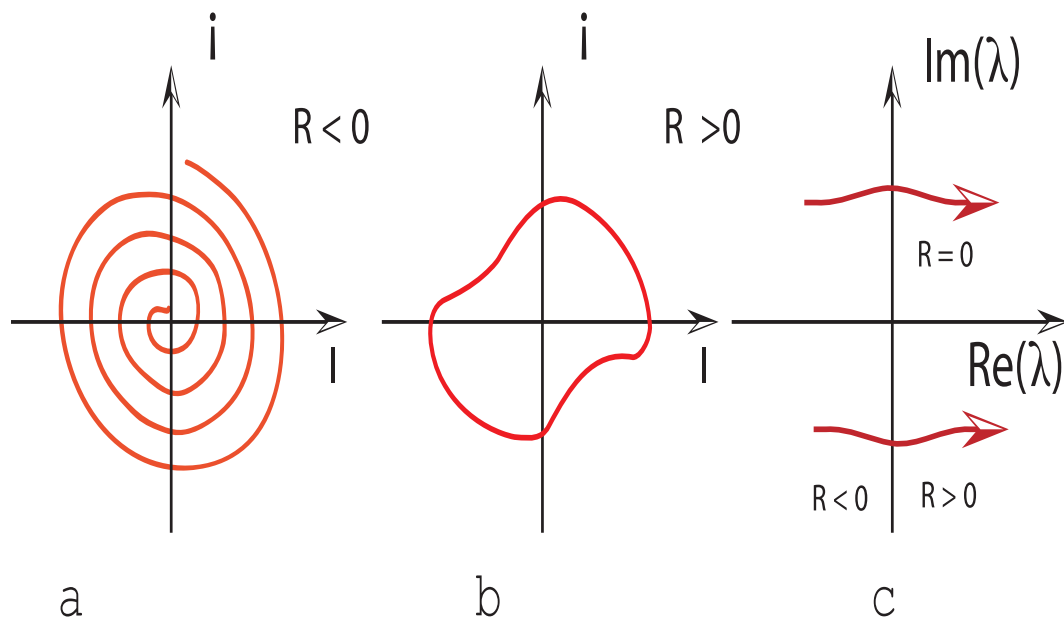


Fig. 2.11: Simulaciones numéricas del oscilador de Van der Pol: Fig. a-) se ve que para  $R < 0$  la solución  $I = 0$  es un atractor (foco). El espectro de este equilibrio es ilustrado en la Fig. b-) a medida que  $R$  aumenta la solución  $I = 0$  se vuelve inestable ( $R = 0$ ). Ya que el espectro cruza el eje imaginario para  $R = 0$ . Las simulaciones muestran la aparición de auto oscilaciones (ciclo limite) para ( $R > 0$ ) ver Fig.c

vuelve inestable ( $R = 0$ ), ya que el espectro cruza el eje imaginario para  $R = 0$ . Las simulaciones muestran la aparición de auto oscilaciones (ciclo limite) para ( $R > 0$ ) (ver Fig. 2.11).

### 2.3. Inestabilidades en sistemas *cuasi-reversibles*.

Los sistemas *cuasi-reversibles* son sistemas reversibles que consideran pequeñas pérdidas e inyecciones de energía como perturbaciones al sistema dinámico reversible los equilibrios del caso reversible deben persistir cuando perturbemos el sistema, ejemplo: Péndulo de Andronov. Estas perturbaciones quiebran la reversibilidad tempo-

ral, algunos ejemplos de esto son: La disipación de energía dentro de la cavidad de un láser, la disipación en las órbitas de los satélites, en una fibra óptica, en medios magnéticos y ondas superficiales en fluidos. Estas perturbaciones hacen que el espectro estable de un punto de equilibrio que solo tiene parte imaginaria adquiera una parte real muy pequeña y los valores propios quedan entonces muy cerca del eje imaginario. La forma para hacer perder la estabilidad a los sistemas *cuasi-reversibles* es que los valores propios complejos con parte real  $Re(\lambda) < 0$  colisionen y adquieran parte real positiva y negativa, las dos bifurcaciones genéricas son confusión de frecuencias e inestabilidad estacionaria. Se llama confusión de frecuencias cuando la resonancia es a frecuencia finita y si la resonancia es a frecuencia nula, será inestabilidad estacionaria en este caso la resonancia es de a pares, es decir, la resonancia es con su complejo conjugado (ver Fig. 2.12).

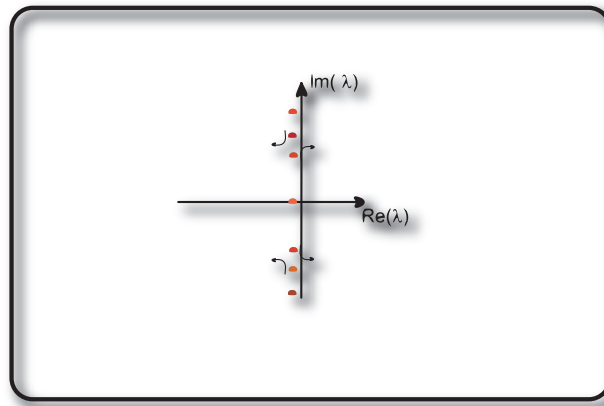


Fig. 2.12: Confusión de frecuencias en el caso que es perturbado, originando la inestabilidad.

Estudiaremos las inestabilidades estacionarias en sistemas *cuasi-reversibles* (ver Fig. ??), en donde la resonancia ocurre a frecuencia cero en presencia de un modo neutro. Esta bifurcación es denominada  $O^3$  en la notación de Arnold [10]. El origen físico del modo neutro, es debido a que este es el modo por el cual uno inyecta muy

naturalmente energía al sistema. Hay dos formas naturales de inyectar energía a un sistema: Una es por medio de un forzaje a frecuencia finita, que excita modos de frecuencias cercanas y la otra es un forzaje a frecuencia nula que exhiba los modos neutros, este tipo de inestabilidad ocurre en ausencia de fuerzas giroscópicas.

◊ Las inestabilidades genéricas de un sistema mecánico con un modo neutro son caracterizadas por tener tres valores propios en el origen del plano complejo con un solo autovector, esta inestabilidad es denotada en la notación de Arnold como  $(O^3)^2$ , si exigimos simetría de reflexión de una de sus variables su inestabilidad será  $(O^2)(O)$  en notación de Arnold, <sup>3</sup> la inestabilidad  $(O^2)(O)$  con simetría de reflexión ha sido estudiada en [12, 13, 14, 15], donde el resultado principal es que la dinámica de esta bifurcación casi reversible es equivalente al modelo de Lorenz<sup>4</sup>, luego el comportamiento complejo exhibido por este sistema es universal. Sin embargo la bifurcación mas general  $O^3$  aun no ha sido estudiada, el objetivo de esta tesis será caracterizar esta bifurcación  $O^3$ .

◊ Las Inestabilidades *cuasi-reversibles y también cuasi-hamiltonianas, la confusión de frecuencias en presencia de un modo neutro ( $i\Omega^2 O$ ) cuasi-reversible han sido estudiadas recientemente por [12, 15] donde los resultados principales son mostrar que la ecuación universal que describe esta inestabilidad es isomorfa*

<sup>2</sup> Donde  $O^3$  significa que tiene tres valores propios y un solo vector propio.

<sup>3</sup>  $(O^2)(O)$  significa que tiene tres valores propios que son cero y dos vectores propios.

<sup>4</sup> El modelo de Lorenz es el modelo simplificado propuesto por Ed Lorenz (1963) para entender la dinámica errática de los rollos de convección de la atmósfera de la forma

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

*a las ecuaciones del láser, (ecs. de Maxwell Bloch). Por lo tanto la dinámica exhibida por el láser es universal.*

*Otro sistema que exhibe este comportamiento es un péndulo doble, que es entonces un láser mecánico [15] que hemos bautizado como el péndulo de Rocard.*

El objetivo principal del próximo capítulo, será caracterizar la bifurcación  $O^3$  cuasi reversible y proponer un sistema mecánico simple que exhibe esta inestabilidad.

### 3. CÁLCULO DE LA FORMA NORMAL MINIMAL DE LA BIFURCATION DE SHILNIKOV

Estamos interesados en caracterizar la dinámica de la bifurcación *cuasi-reversible* estacionaria en presencia de un modo neutro (*cuasi-reversible*  $O^3$ ).

#### 3.1. Forma Normal $O^3$

La forma normal consiste en simplificar el problema en sus variables resonantes, el cual consiste en separar las variables en sus diferentes tiempos de escala, lo cual ocurre en la vecindad del punto de bifurcación. Se tendrá variables que relajan más rápido llamadas variables esclavas y por ende no son importantes para la descripción del problema a tiempos largos y las variables que evolucionan más lento pueden ser descritas por ecuaciones autónomas en las que ya no aparecen las variables rápidas. La variedad central, es simplemente la variedad de las variables lentas.

Tomando una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad (3.1)$$

dónde  $\vec{x} \in \mathfrak{R}^n$ , el tiempo  $t \in \mathfrak{R}$ , se cumple que  $\vec{x}^* = 0$  es el punto de equilibrio, es decir,  $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$ , expandiendo  $\vec{f}(\vec{x})$  en serie de Taylor en torno del punto de equilibrio  $\vec{x}^* = 0$  se obtiene:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathcal{L}_l \vec{x} + P(\vec{x}) + \vartheta(\vec{x}^k), \quad (3.2)$$

P es un polinomio que atrapa los términos resonantes de la expansión en serie de Taylor del campo vectorial  $\vec{f}(\vec{x})$ . La inestabilidad estacionaria en sistemas reversibles en el tiempo, tienen asociadas resonancias que ocurren a frecuencia nula. Esta resonancia tiene lugar cuando se modifica un parámetro o una constante de movimiento a través de un modo neutro. Esta vía es la forma que físicamente creamos una inestabilidad en un equilibrio relativo, es decir, este equilibrio es un punto fijo del Routhiano. La inestabilidad estacionaria *cuasi*-reversible de un equilibrio relativo en presencia de un modo neutro sin simetría de reflexión es ( $O^3$ ), caracterizada por la confluencia de tres valores propios en el origen del plano complejo con solo un auto vector. Esto implica que se puede escoger una base apropiada en la que el operador lineal  $\mathcal{L}_l$  tome la forma

$$\mathcal{L}_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Al caracterizar el polinomio P que depende de los términos resonantes se obtiene que [18]:

$$DP(x)\mathcal{L}_l^\dagger x = \mathcal{L}_l^\dagger P(x) \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \frac{\partial P_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_1} & \frac{\partial P_2}{\partial x_2} & \frac{\partial P_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial x_1} & \frac{\partial P_3}{\partial x_2} & \frac{\partial P_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Desarrollando esta última ecuación (3.4) se llega a la siguiente expresión:



$$\begin{aligned}
x_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial P_1}{\partial x_3} &= 0, \\
x_1 \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_3} &= P_1, \\
x_1 \frac{\partial P_3}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial P_3}{\partial x_3} &= P_2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Las ecuaciones (3.6) se pueden obtener de la derivada total con respecto a un parámetro  $\tau$  de las componentes del polinomio P (ver ecuación (3.7)).

$$\frac{d}{d\tau} = \dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{3.7}$$

De las ecuaciones (3.6) se obtiene los invariantes o los términos resonantes de las componentes del polinomio P. Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_3 = x_1, \\ \ddot{x}_3 \dot{x}_3 = x_1 \dot{x}_3, \\ \frac{d(x_2^2 - 2x_1 x_3)}{d\tau} = 0, \\ \dot{x}_1 = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Luego  $P_1, P_2$  y  $P_3$  dependen de las cantidades conservadas o invariantes de la siguiente manera  $P_i(x_1, x_2^2 - 2x_1 x_3), i = 1, 2, 3$ . Tomando las componentes de  $P_i$  de la forma más simple, es decir, lineal con coeficientes que dependan de los invariantes,  $P_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3$ , reemplazando en (3.6) se obtiene [18]

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 \\ b_2 - a_1 & c_2 - b_1 & -c_1 \\ b_3 - a_2 & c_3 - b_2 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

De este sistema sacamos que  $b_1 = c_1 = c_2 = 0, b_2 = c_3 = a_1$  y  $b_3 = a_2$  lo que da la

Forma Normal Minimal [18]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ g & f & 0 \\ 0 & g & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde  $f(x_1, x_2^2 - 2x_1x_3)$ ,  $g(x_1, x_2^2 - 2x_1x_3)$  y  $h(x_1, x_2^2 - 2x_1x_3)$  son funciones de los invariantes.

### 3.1.1. Forma Normal equivalente

La condición de existencia del cambio de variable asintótico a un orden cualquiera no tiene una solución única, se puede entonces encontrar otras formas normales equivalentes, donde el cambio de variable es modificado y la forma normal es modificada. La ventaja de esto es que se puede optar por la forma normal dónde se tenga una mayor intuición y comprensión de los parámetros.

A continuación, desde la forma normal minimal 3.10 deduciremos una forma normal más semejante a los sistemas mecánicos, ya que esto nos permitirá construir un análogo de los sistemas mecánicos. Si desarrollando  $f$  y  $g$  en serie de Taylor hasta primer orden en la forma normal minimal de  $O^3$ , (3.10), donde los coeficientes son parámetros, se tiene:

$$\begin{aligned} f &= a + bx \\ g &= e + dx. \end{aligned}$$

Reemplazando en (3.10) obtenemos un sistema no-lineal de segundo orden:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax_1 \\ ex_1 + ax_2 \\ ex_2 + ax_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bx_1^2 \\ dx_1^2 + bx_1x_2 \\ dx_1x_2 + bx_1x_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Donde tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ e & a & 0 \\ 0 & e & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bx_1^2 \\ dx_1^2 + bx_1x_2 \\ dx_1x_2 + bx_1x_3 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Realizando el siguiente cambio de variables, dónde  $f_\alpha^{[j]}(\vec{c})$  es una función escalar de orden  $j \geq 1$  en la componente de  $\vec{c}$

$$\vec{V} = \vec{U}^{[1]}(\vec{c}) + \vec{U}^{[2]}(\vec{c}) + \dots \quad (3.13)$$

$$\partial_t c_\alpha = f_\alpha^{[1]}(\vec{c}) + f_\alpha^{[2]}(\vec{c}) + \dots \quad (3.14)$$

y usando el siguiente ansatz:

$$\vec{U}^{[1]} = c_\alpha |\chi^\alpha \rangle,$$

se obtiene al primer orden

$$\partial_t \vec{V}^{[1]} = \left[ \partial_t c_\alpha \frac{\partial \vec{V}}{\partial c_\alpha} \right]^{[1]} \quad (3.15)$$

$$f_\alpha^{[1]} \frac{\partial \vec{U}^{[1]}}{\partial c_\alpha} = \hat{L}^0 \vec{U}^{[1]} \Rightarrow f_\alpha^{[1]} |\chi^\alpha \rangle = c_\alpha L_{\beta\alpha}^0 |\chi^\beta \rangle$$

$$\therefore f_\alpha^{[1]} = c_\beta L_{\alpha\beta}^0 \quad (3.16)$$

obtenemos a primer orden

$$\partial_t c_1 = c_2$$

$$\partial_t c_2 = c_3$$

$$\partial_t c_3 = 0. \quad (3.17)$$

Donde el operador homológico que caracteriza la variedad central [18] es

$$\mathcal{A}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_{\alpha\beta}^0 c_\beta \frac{\partial}{\partial c_\alpha} - \hat{\mathcal{L}}^0. \quad (3.18)$$

Luego a segundo orden tenemos

$$\begin{aligned} \left[ \partial_t \vec{V} \right]^{[2]} &= [\partial_t c_\alpha]^{[1]} \frac{\partial \vec{U}^{[2]}}{\partial c_\alpha} + f_\alpha^{[2]} \frac{\partial \vec{U}^{[1]}}{\partial c_\alpha} = \hat{L}^0 \vec{U}^{[2]} + \begin{bmatrix} bc_1^2 \\ dc_1^2 + bc_1 c_2 \\ dc_1 c_2 + bc_1 c_3 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}(L) \vec{U}^{[2]} &= \begin{bmatrix} bc_1^2 & -f_1^{[2]} \\ dc_1^2 + bc_1 c_2 & -f_2^{[2]} \\ dc_1 c_2 + bc_1 c_3 & -f_3^{[2]} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} bc_1^2 & -f_1^{[2]} \\ dc_1^2 + bc_1 c_2 & -f_2^{[2]} \\ dc_1 c_2 + bc_1 c_3 & -f_3^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc_1^2 \\ -dc_1^2 - 2bc_1 c_2 \\ dc_1 c_2 + bc_1 c_3 \end{bmatrix}$$

, por lo tanto

$$\vec{f}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2dc_1^2 + 3bc_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

y

$$\begin{aligned} \partial_t c_1 &= c_2, \\ \partial_t c_2 &= c_3 + 2dc_1^2 + 3bc_1 c_2, \\ \partial_t c_3 &= h. \end{aligned}$$

Ahora desarrollo el unfolding al orden  $[1, 1]$ , es decir, modificando los parámetros de aquellos críticos

$$\left[ \partial_t \vec{V} \right]^{[1,1]} = f_\alpha^{[1,1]} \frac{\partial \vec{U}^{[1]}}{\partial c_\alpha} + f_\alpha^{[1]} \frac{\partial \vec{U}^{[1,1]}}{\partial c_\alpha} = \hat{L}^0 \vec{U}^{[1,1]} + \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ e & a & 0 \\ 0 & e & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(L)\vec{U}^{[1,1]} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ e & a & 0 \\ 0 & e & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1^{[1,1]} \\ -f_2^{[1,1]} \\ -f_3^{[1,1]} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} ac_1 \\ ec_1 + ac_2 \\ ec_2 + ac_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ f_2^{[1,1]} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac_1 \\ -ec_1 - 2ac_2 \\ ec_2 + ac_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ f_2^{[1,1]} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3ac_2 + 2ec_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \ddot{c}_1 &= c_3 + c_1(3bc_1 + 2e) + 2dc_1^2 + 3ac_1 \\ \dot{c}_3 &= h. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Realizando el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{x}{2d} \\ c_2 &= y \\ c_3 &= \frac{z}{2d}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

reemplazando en 3.23 se tiene la forma normal equivalente a la mecánica:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= z + x\left(\frac{3b}{2d}y + 2e\right) + x^2 + 3ay \\ \dot{z} &= H \\ H &= 2dh. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como las constantes también son función de los invariantes entonces uno puede obtener la siguiente ecuación "forma normal mecánica"

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= z + G(x, \dot{x} - 2xz) + F(x, \dot{x} - 2xz)\dot{x} \\ \dot{z} &= H(x, \dot{x} - 2xz). \end{aligned} \quad (3.26)$$

La ecuación anterior es denominada forma normal mecánica pues el primer término es como un oscilador acoplado a otro modo. Es importante hacer notar que otra forma normal posible es la forma normal tipo Takens [?], [?]

$$\ddot{x} = H(x, \dot{x} - 2xz) + f(x, y - 2xz)\dot{x} + g(x, \dot{x} - 2xz)\ddot{x}, \quad (3.27)$$

Esta forma normal es obtenida análogamente a como hemos deducido (3.26). Es importante notar que (3.10, 3.26, 3.27) son todas ecuaciones análogas por medio de cambios de variables asintóticos, es decir, la dinámica exhibida por todas estas ecuaciones es similar, cerca de la bifurcación la dinámica estará conducida por términos dominantes, luego uno puede considerar la forma normal asintótica. Re-escalando la ecuación (3.25), es decir, tomamos  $z \sim \epsilon$ ,  $x \sim \sqrt{\epsilon}y \sim \epsilon^{\frac{3}{4}}$ ,  $\frac{d}{dt} \sim \epsilon^{\frac{1}{4}}$ ,  $3a = \mu \sim \epsilon^{\frac{1}{4}}$ ,  $\delta \sim \epsilon^{\frac{5}{4}}$ ,  $\nu \sim \epsilon^{\frac{3}{4}}$ ,  $\beta \sim \epsilon^{\frac{1}{4}}$  y  $\epsilon \ll 1$ . Al expandir H en serie de Taylor hasta el término cuadrático por el escalamiento obtenemos tres nuevos parámetros,  $\mu$ ,  $\nu$  y  $\delta$ . Luego la forma normal minimal que incluye los términos que quiebran la simetría temporal es :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= z + x^2 - \mu\dot{x} \\ \dot{z} &= \delta + \nu x + \beta x^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Los parámetros  $\mu$ ,  $\nu$  y  $\delta$  dan cuenta de la inyección y disipación de energía respectivamente y  $\beta$  es un término de saturación no lineal.

### 3.1.2. En el límite reversible

Para el límite reversible de  $O^3$ , es decir, las ecuaciones son invariantes bajo una transformación  $t \rightarrow -t, x \rightarrow x, z \rightarrow z$ , se tiene:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= z + xF(x, 2zx - \dot{x}^2), \\ \dot{z} &= 0,\end{aligned}\tag{3.29}$$

donde  $z$  es una constante de movimiento, el sistema es descrito por un campo vectorial bidimensional. La forma normal reversible asintótica considerando los términos dominantes se obtiene de la ecuación anterior, resultando

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= z \pm x^2, \\ \dot{z} &= 0,\end{aligned}\tag{3.30}$$

Para determinar el orden dominante se utiliza el método de escalamiento obteniendo  $z \sim \epsilon, x \sim \epsilon^{1/2}, \partial_t \sim \epsilon^{1/4}y\epsilon \ll 1$ . Este conjunto de ecuaciones (3.30) describen una bifurcación de saddle node en presencia de una cantidad conservada  $z$ . Dependiendo de la condición inicial se puede regular el valor de  $z$ , debido a la transformación  $x \rightarrow -x$  y  $z \rightarrow -z$ , consideraremos sin perder generalidad el signo menos de aquí en adelante en el término cuadrático. Aquí para  $z$  negativo el sistema no tiene puntos fijos y para cualquier condición inicial resultan trayectorias que van hacia el infinito. Para  $z$  positivo, el sistema tiene dos puntos fijos  $\{(\sqrt{z}, z), (-\sqrt{z}, z)\}$ , resultando un punto centro y el otro punto es hiperbólico, respectivamente.

El punto que es un centro  $(\sqrt{z}, z)$  exhibe una inestabilidad estacionaria en presencia del modo neutro cuando  $z = 0$ , el cual es caracterizado por la confluencia de tres valores propios en el origen del plano complejo con solo un auto vector. Por lo tanto para cada plano  $z$  constante en el espacio de fase tenemos un típico diagrama saddle node en el espacio de fase. En la Fig. 3.1 se representa este espacio de fase.

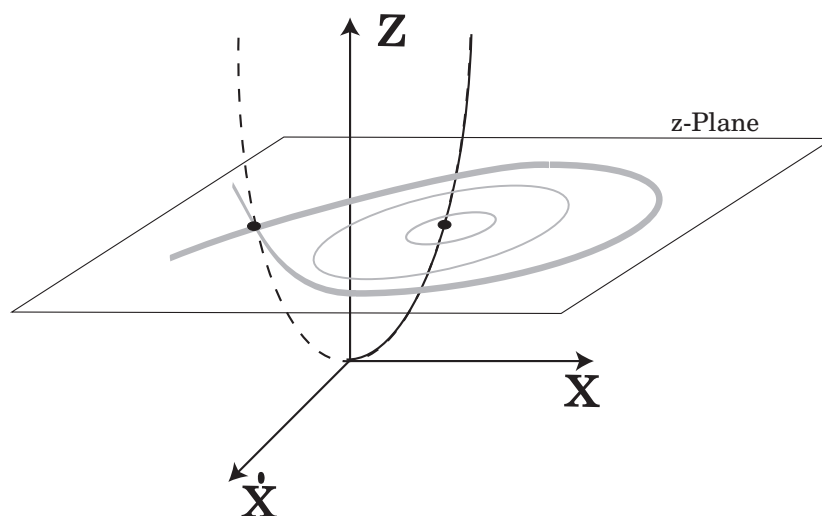


Fig. 3.1: Diagrama de espacio fase de la forma normal reversible. La línea segmentada y la continua representa el punto estable e inestable, respectivamente. La curva gruesa representa la solución homoclina.

Notemos que este sistema dinámico tiene una familia de curvas homoclinas, la cual es representada por una curva gruesa en el plano  $Z$  y tiene la expresión analítica:

$$x_h(z, t) = -\sqrt{z}[1 - 3\text{sech}^2(\sqrt[4]{\frac{z}{4}}(t - t_0))], \quad (3.31)$$

Esta solución tiene un rol central en la generación de un comportamiento complejo moviéndose al caos, cuando consideramos los términos que quiebran la simetría de reversibilidad temporal como veremos más adelante.

Como ejemplo de un sistema reversible que tiene la inestabilidad  $O^3$  consideremos la partícula de Shilnikov [1, 2] un sistema compuesto por un anillo de masa  $m$ , que se desliza sobre la barra  $OA$  sin fricción. Esta barra junto con otra barra vertical  $OB$  son un sólido rígido con un ángulo fijo  $\alpha$  entre las dos, (ver Fig. 7.1), todo el sistema puede rotar entorno al eje vertical  $OB$  bajo la influencia del campo gravitatorio. El



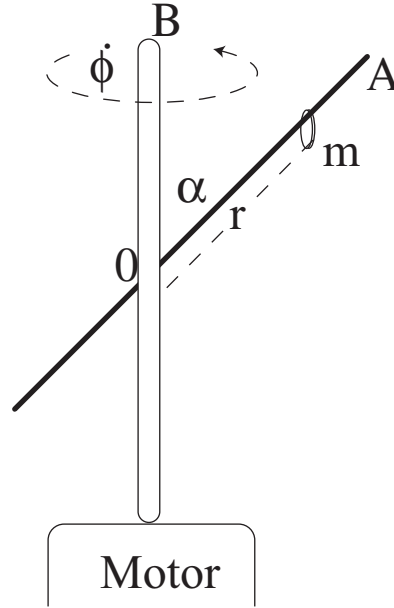


Fig. 3.2: Partícula de Shilnikov

lagrangiano  $\mathcal{L}$  que caracteriza este sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\phi}^2) + \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 - mgr \cos \alpha,$$

donde  $r$  representa la distancia entre el anillo y el punto de contacto entre las dos barras (punto  $O$  en la Fig. 7.1),  $\dot{\phi}$  es la velocidad angular azimutal del sistema,  $I$  es el momento de inercia vertical de las dos barras y  $g$  es la aceleración de gravedad. Note que el ángulo azimutal  $\phi$  es una variable cíclica, las ecuaciones de movimiento del sistema se reduce a

$$\ddot{r} = \frac{r \sin^2 \alpha P_\phi^2}{(I + mr^2 \sin^2 \alpha)^2} - g \cos \alpha, \quad (3.32)$$

$$P_\phi \equiv (I + mr^2 \sin^2 \alpha) \dot{\phi},$$

donde  $P_\phi$  es el momentum angular azimutal, el cual es una cantidad conservada. El término del lado derecho de la ecuación (3.32) son la fuerza centrífuga y gravitacional, respectivamente. La fuerza centrífuga tiene solo un máximo como función de  $r$  en (ver

Fig. 3.3)

$$r^* = \sqrt{\frac{I}{3m \sin^2 \alpha}}.$$

Aquí, para una fuerza centrífuga pequeña el sistema no tiene equilibrio y el anillo

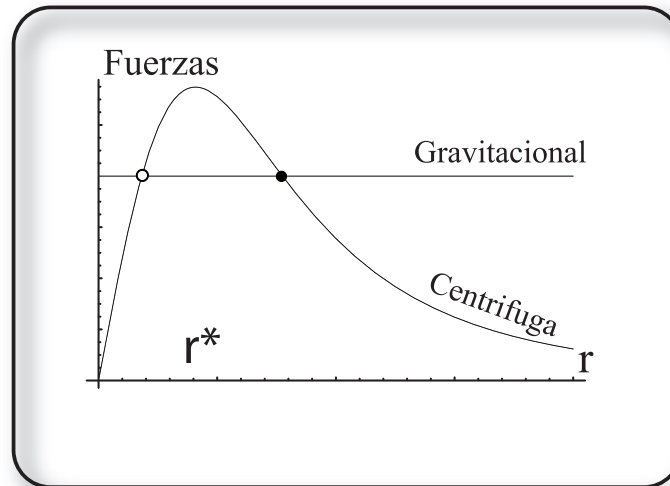


Fig. 3.3: Diagrama de fuerzas, al variar la fuerza gravitacional, se observa el nacimiento de dos puntos de equilibrio mediante una bifurcación de Saddle node, siendo el círculo negro el punto de equilibrio estable.

se mueve al punto  $O$ . Contrariamente, para fuerza centrífuga grande el sistema tiene dos puntos de equilibrio, uno estable y otro inestable. Por lo tanto, el sistema tiene un valor crítico para el momento angular azimutal para el cual el sistema exhibe una bifurcación de saddle-node

$$F_{\phi}^* = \left[ \frac{16\sqrt{3mI^3}}{9} g \cot \alpha \right]^{1/2}.$$

En la Fig. 3.3 se muestra la fuerza centrífuga y gravitacional como función de  $r$ , los puntos de equilibrio estable e inestable están representada por círculos llenos y vacíos, respectivamente. Note que el punto fijo inestable está más cerca del punto  $O$  que el estable.

Cerca de la bifurcación de saddle-node, podemos introducir el siguiente ansatz

$$\begin{aligned} r &= r^* + \rho_0 x, \\ P_\phi &= P_\phi^* + z_0 z, \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde  $\rho_0 \equiv 1/(6P_\phi^* \sin^3 \alpha / (I + mr^{*2} \sin^2 \alpha)^3 - 12m^2 r^{*2} \sin^4 \alpha / (I + mr^{*2} \sin^2 \alpha)^4)$  y  $z_0 \equiv \rho_0 (I + mr^{*2} \sin^2 \alpha)^4 / r^{*2} \sin \alpha$ , en la ecuación (3.32). El sistema es descrito hasta el orden dominante por (forma normal reversible  $O^3$ )

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= z - x^2, \\ \dot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Aquí, el sistema mecánico exhibe una bifurcación de saddle node forzado por la cantidad conservada, esto es, el modelo presenta una inestabilidad  $O^3$ .

#### *La forma normal cuasi-reversible.*

Al incluir pequeños términos de inyección y disipación de energía en el unfolding de la ecuación (3.30), estos quiebran la reversibilidad temporal resultando el sistema de ecuaciones (3.28).

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= z + x^2 - \mu \dot{x}, \\ \dot{z} &= \delta + \nu x + \beta x^2. \end{aligned}$$

Los parámetros  $\mu, \nu$  y  $\delta$  dan cuenta de la inyección y disipación de energía respectivamente y  $\beta$  es un término de saturación no lineal. Dependiendo de las diferentes combinaciones de signos de  $\{\nu, \beta\}$  los dos últimos términos de la ecuación en  $z$  son disipación e

inyección de energía. Un modelo similar con un término disipativo extra fue estudiado en el contexto de  $O^3$  en un oscilador no lineal excitado térmicamente en un contexto de inestabilidad disipativa [22, 11, 21]. Este modelo tiene un término cúbico extra y está bien estudiado en el mismo contexto por Pismen [23].

En el caso de no considerar sistemas *cuasi*-reversibles sino disipativos esta ecuación tiene más términos en particular disipación no lineal  $\ddot{x} = (\nu - x^2)\dot{x}$ .

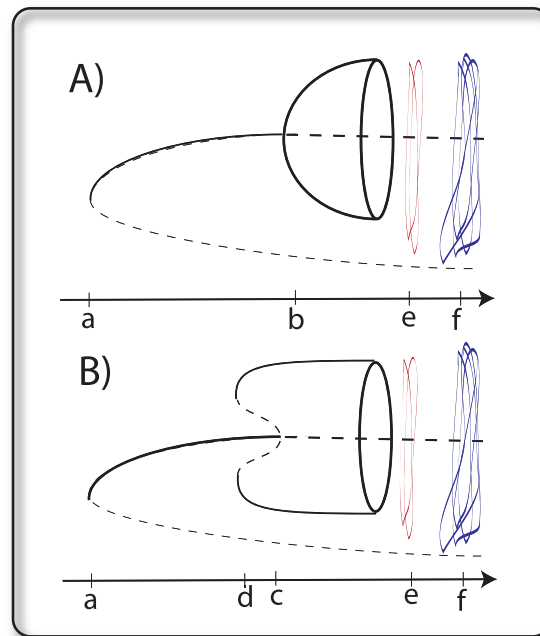


Fig. 3.4: Diagrama de bifurcación de la forma normal mecánica (3.28): (a) Bifurcación tipo saddle node, (b) Bifurcación supercrítica tipo Hopf Andronov Poicaré, (c) Bifurcación subcrítica Hopf Andronov Poicaré, (d) Bifurcación saddle node a ciclo límite, (e) Bifurcación a doblamiento de período y (f) caos Shilnikov.

## 4. DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN DE LA FORMA NORMAL $O^3$ CUASI-REVERSIBLE.

Con el objetivo de entender la dinámica de la forma normal *cuasi*-reversible (3.28) estudiamos sus puntos fijos que son

$$z = x_{\pm}^2,$$
$$x_{\pm} = \frac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\delta\beta}}{2\beta},$$

donde  $\nu^2 - 4\delta\beta > 0$ . Cuando esta desigualdad no se satisface todas las trayectorias se van a infinito, es decir, el infinito es el único atractor. Los dos puntos fijos  $(x_+, x_+^2)$  y  $(x_-, x_-^2)$  aparecen por una bifurcación de saddle node. En la Fig. 3.4 se muestran los diferentes diagramas de bifurcación del modelo dado por el sistema dinámico (3.28), la bifurcación de saddle node ocurre en el punto a. Cerca de esta bifurcación los puntos fijos  $(x_+, x_+^2)$  y  $(x_-, x_-^2)$  son estable y inestable, respectivamente. Los puntos estables pierden su estabilidad por una bifurcación Hopf-Andronov, es decir, un par de valores propios complejos conjugados cruzan el eje imaginario. De la condición de Hopf, se obtiene una relación para los valores propios (4.1) puesto que nuestra ecuación característica es cúbica solo tienen cabida dos valores propios imaginarios puros conjugados el uno del otro, obligando al otro valor propio a ser un real puro,

donde  $\omega$  es la frecuencia de la oscilación y  $h$  es un real

$$(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda + h) = 0. \quad (4.1)$$

Del operador lineal de  $(O^3)$  obtenemos que  $h = \mu, \omega^2 = 2x_+$  y

$$\omega^2 h = -(\nu + 2\beta x_+) \quad (4.2)$$

obteniendo el espacio de parámetros que esta dado por

$$\nu = (\mu + \beta) \frac{\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\delta\beta}}{\beta}.$$

Esta inestabilidad está representada por los b y c en la Fig. 3.4. Como se ve, esta bifurcación puede ser supercrítica ( punto b) o subcrítica ( punto c). En la Fig. 4.1 se muestra el tipo de ciclos límites observado en la forma normal.

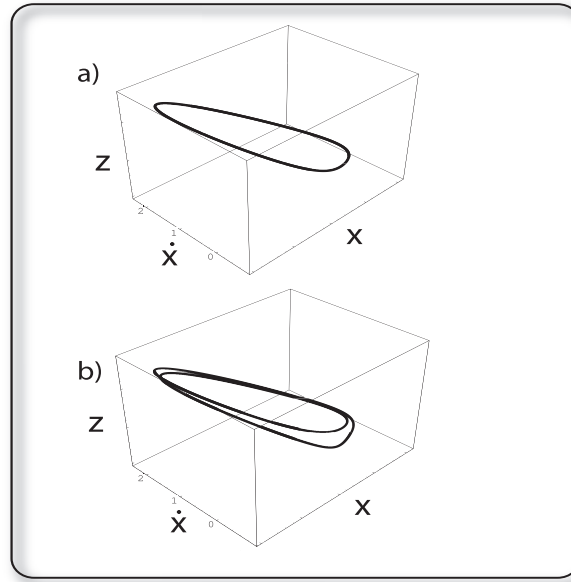


Fig. 4.1: Solución ciclo límite que exhibe el modelo (3.28) con  $\beta = -0,814$ ,  $\delta = 1,0$ ,  $\mu = 0,6$ ,  
a)  $\nu = 0,31$  y b)  $\nu = 0,295$ .

En orden a estudiar la dinámica alrededor de esta inestabilidad y basado en la teoría de las formas normales [18], introducimos el siguiente cambio de variables

asintótico

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2x_+} \\ i\mu\sqrt{2x_+} \end{pmatrix} + \bar{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2x_+} \\ -i\mu\sqrt{2x_+} \end{pmatrix} \\
&+ a_0 \left[ A^2 - 2|A|^2 - \frac{\bar{A}^2}{3} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2x_+} \\ i\mu\sqrt{2x_+} \end{pmatrix} \\
&+ a_0 \left[ \bar{A}^2 - 2|A|^2 - \frac{A^2}{3} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2x_+} \\ -i\mu\sqrt{2x_+} \end{pmatrix} \\
&+ [dA^2 + d\bar{A}^2 + e|A|^2] \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ 2x_+ \end{pmatrix} + t.o.s.,
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
a_0 &\equiv \frac{(2\sqrt{2x_+} - \beta\mu\sqrt{\frac{2}{x_+}}) + 2i(\beta + \mu)}{\sqrt{2x_+}(4\mu^2 + 8x_+)}, \\
d &\equiv \frac{(\beta + \mu)(\mu - 2i\sqrt{2x_+})}{(\mu^2 + 2x_+)(\mu^2 + 8x_+)}, \\
e &\equiv \frac{2(\beta + \mu)}{\mu(\mu^2 + 2x_+)},
\end{aligned}$$

en el modelo *cuasi*-reversible (3.28). La amplitud  $A$  satisface la siguiente ecuación de amplitud

$$\partial_t A = \left[ (\mu + \beta) \frac{\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\delta\beta}}{\beta} + i\sqrt{2x_+} \right] A + g|A|^2 A, \quad (4.3)$$

donde  $g$  viene dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
g &\equiv \left( -2(\beta + \mu) + i \left( 2\sqrt{2x_+} - \beta\mu\sqrt{2/x_+} \right) \right) \\
&\times [\Re(-a_0 2) + e + a_0 - \bar{a}_0/3 + d] / (2\mu^2 + 4x_+),
\end{aligned}$$

donde  $\Re$  es la parte real. Si  $\beta \approx -\mu$  la bifurcación de Hopf Andronov es supercrítica (ver Fig. 3.4) parte a o subcrítica Fig. 3.4 parte b, cuando  $(2\sqrt{2x_+} - \beta\mu\sqrt{2/x_+})$  es negativo o positivo, respectivamente. En la Fig. 3.4 ilustramos estas dos bifurcaciones. Desde el modelo dado por (4.3), deduciremos que la bifurcación de Hopf-Andronov da lugar a la aparición de la solución de ciclo límite con frecuencia  $\sqrt{2x_+}$ . El típico ciclo límite observado en este sistema se muestra en la Fig. 4.1.

En la bifurcación de Hopf Andronov subcrítica, el ciclo límite inestable desaparece por una bifurcación de saddle node que es representada por el punto d en la Fig. 3.4.

Cambiando los parámetros, el ciclo límite estable persistente, se mueve en la dirección del punto fijo inestable  $(x_+, x_+^2)$ . Aquí el ciclo límite al aproximarse al punto hiperbólico exhibe una bifurcación homoclina <sup>1</sup> [4]. Esto ocurre cuando hacemos chocar un ciclo límite con un punto saddle como se ilustra en la Fig. 4.2. La forma de hacer chocar el ciclo límite es haciendo variar un parámetro o un conjunto de parámetros.

Un ejemplo de un sistema que tiene una homoclina es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \lambda y + x - x^2 + xy.\end{aligned}$$

Numéricamente este sistema exhibe un ciclo límite para  $\lambda < \lambda_c \approx -0,8645$  y tiene una bifurcación homoclina para  $\lambda = \lambda_c$ , para  $\lambda > \lambda_c$  el único atractor de este sistema es infinito.

---

<sup>1</sup> Bifurcación homoclina es la formación o desaparición de una homoclina.



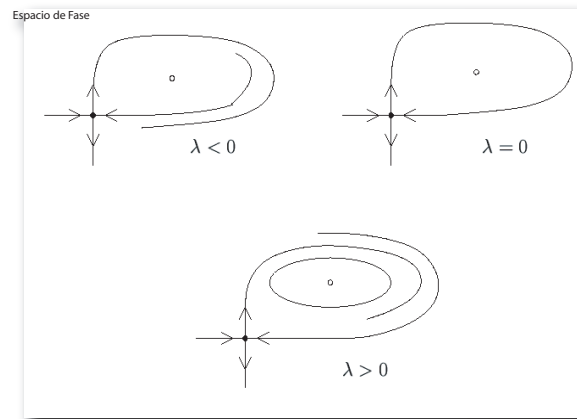
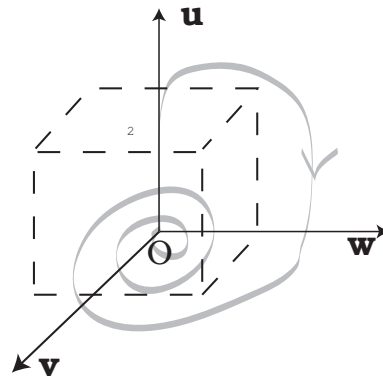


Fig. 4.2: Representación esquemática de una bifurcación homoclina : Para  $\lambda = 0$  tenemos la homoclina con un período  $\infty$ , para  $\lambda < 0$  la homoclina desaparece y solo tenemos trayectorias que divergen,  $\lambda > 0$  tenemos ciclo límite con período finito. Aproximando  $\lambda \rightarrow 0^+$  se observa que el período tiende a infinito.

## 5. CARACTERIZACIÓN DE LA DINÁMICA EN TORNO A LA HOMOCLINA INESTABLE.



*Fig. 5.1:* Representación esquemática de una solución homoclina : El punto  $O$  es el punto fijo hiperbólico, donde la variedad inestable y estable es representada por la dirección de  $u$  y la dirección  $\{v,w\}$ , respectivamente. El plano  $\Pi$  es paralelo a la variedad inestable.

La dinámica cerca del punto fijo hiperbólico está caracterizado por los valores propios  $\{-\lambda_- + i\omega, -\lambda_- - i\omega, \lambda_+\}$ . Los autovectores asociados a  $-\lambda_- \pm i\omega$  y  $\lambda_+$  caracterizan los valores propios de la variedad estable y la inestable, respectivamente. En la Fig. 5.1 representamos esquemáticamente una solución homoclina para un sistema 3D, donde el punto fijo hiperbólico es representado por  $O$ , el cual es el origen de coordenadas del sistema. La variedad inestable y estable del punto hiperbólico  $O$  están representadas por el plano  $\{v, w\}$  y la dirección de  $u$ , respectivamente. Aquí, la

dinámica alrededor de la solución homoclina es caracterizada: Dividiendo la homoclina en dos variedades una estable  $V, W$  y otra inestable por el plano  $\Pi$ , la evolución en torno al origen esta dado por

$$\dot{v} = -\alpha v + \omega w,$$

$$\dot{w} = -\alpha w - \omega v,$$

$$\dot{u} = \beta u.$$

Con  $\alpha, \beta$  positivos, para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas se utiliza el siguiente cambio de variables  $X = v + iw$  que reduce el problema a la siguiente ecuación

$$\dot{X} = -(\alpha + i\omega)X.$$

Re-escribiendo los parámetros para simplificar los cálculos, tomamos  $s = \alpha + i\omega$  y resolviendo las ecuaciones se obtiene que

$$X = X_0 e^{-st},$$

$$u = u_0 e^{\beta t}$$

para un plano arbitrario  $\Pi_2$  definido en  $u = h$ . Se tiene así el tiempo que toma una trayectoria en ir de  $u_0$  a  $h$ , en función de los parámetros:

$$t = \frac{1}{\beta} \ln \frac{h}{u_0}.$$

Además se parte como condición inicial en un punto del plano  $\Pi$  en  $t = 0$ . Se está en  $(v_0, 0, u_0)$  y obtenemos la siguiente relación

$$Xu^{\frac{s}{\beta}} = X_0 u_0^{\frac{s}{\beta}}.$$

escribimos  $X$  en su forma de Euler y luego lo expresamos en función de sus parámetros. Obteniendo:

$$\begin{aligned} X &= \rho e^{i\theta}, \\ \theta &= -\frac{\omega}{\beta} \ln \frac{h}{u_0} \\ \rho &= v_0 e^{\frac{\alpha\theta}{\omega}} \end{aligned}$$

Para hacer el mapa de primera aplicación, es decir, el mapa de Poincaré, seguimos el procedimiento desarrollado por Guckenheimer [20] para el modelo de Lorenz. El procedimiento consiste en tomar el flujo descrito por la parte lineal que es un foco y suponer que es tomado por la variedad inestable hasta el plano  $u = h$  y luego se hace una rotación y una traslación desde la variedad inestable para regresarlo a la variedad estable en el plano  $\Pi$  con una diferencia de fase y una traslación. Entonces se propone

$$\begin{aligned} v &= v_0 e^{-\frac{\alpha \ln \frac{h}{u_0}}{\beta}} \cos\left(\frac{\omega}{\beta} \ln \frac{u_0}{h} + \phi\right) + \tilde{v} \\ u &= v_0 e^{-\frac{\alpha \ln \frac{h}{u_0}}{\beta}} \sin\left(\frac{\omega}{\beta} \ln \frac{u_0}{h} + \phi\right) + \tilde{u} \end{aligned}$$

y se obtiene el siguiente mapa [5]

$$u_{n+1} = k u_n^\sigma \sin[\omega \ln(u_n) + \phi] + \eta, \quad (5.1)$$

donde  $u_n$  es la componente n-esima de la intercepción de una trayectoria dada con el plano  $\Pi$ , donde la dirección  $u$  caracteriza la variedad inestable del punto fijo hiperbólico. El plano  $\Pi_2$  es un plano arbitrario ortogonal a la dirección inestable, el cual está cerca del punto hiperbólico, lo que significa que éste punto hiperbólico no pertenece al plano  $\Pi_2$  (ver Fig. 5.1). Las constantes  $\{k, \phi\}$  son parámetros fijados por

la elección del plano  $\Pi_2$ ,  $\eta$  es el parámetro de bifurcación homoclina, esto es, cuando  $\eta = 0$  el sistema presenta solución homoclina. El parámetro  $\sigma \equiv |\lambda_-/\lambda_+|$  caracteriza la estabilidad de la curva homoclina, si  $\sigma < 1$  ( $\sigma \geq 1$ ) la solución homoclina es inestable (estable). Shilnikov mostró que si una solución homoclina tiene  $\sigma < 1$  esta es inestable, se origina una dinámica caótica en el vecindario [25].

Numéricamente, observamos que la razón  $\lambda_-/\lambda_+$  de el auto valor para el modelo (3.28) es menor que uno. Por lo tanto, la bifurcación homoclina da lugar a curvas homoclinas inestables. El mapa para  $\sigma < 1$  es representado en la Fig. (5.3) para diferentes valores de  $\eta$ . Los puntos fijos exhibidos por este mapa representa soluciones tipo ciclo límite para la forma normal *cuasi-reversible* (3.28). Cuando  $\eta$  es cambiado estos puntos fijos tienen la típica bifurcación de doblamiento de período del mapa logístico que representa el doblamiento de período en una bifurcación para la respectiva solución de ciclo límite. En la Fig. (4.1b) ilustramos la típica solución de ciclo límite del modelo (3.28) solamente después del doblamiento de período. Si continuamos cambiando  $\eta$ , el mapa exhibe una cascada de bifurcaciones de doblamiento de períodos [8], [19]. En la Fig. 5.2 mostramos un atractor extraño exhibido por el modelo (3.28). Cerca a la bifurcación homoclina  $\eta = 0$  el mapa de primera vuelta (5.1) tiene un número infinito de puntos de equilibrio y cada uno presenta doblamiento de períodos cuando  $\eta$  es modificado. La primera bifurcación de doblamiento de período y el comportamiento caótico son descrito por los puntos e y f en el diagrama de bifurcación de la Fig. 3.4. Aquí la dinámica en torno a la homoclina inestable es caracterizada por una bifurcación de cascadas de doblamiento de períodos. Esta dinámica es usualmente llamada escenario de Shilnikov. La dinámica de la forma normal *cuasi-reversible* (3.28) es caracterizada por tener infinitos atractores a lo largo del dominio de los parámetros. Cuando los parámetros son cambiados aparecen dos equilibrios por una bifurcación de saddle-node. Si continuamos modificando los parámetros los puntos fijos estables

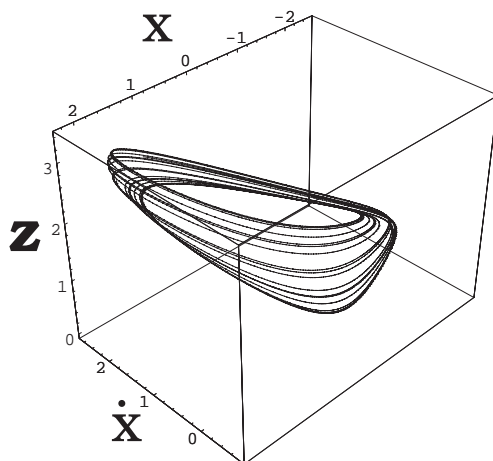


Fig. 5.2: Extraño atractor exhibido por el modelo (3.28)  $\nu = 1,0$ ,  $\beta = -1$ ,  $\delta = 1,0$ , y  $\mu = 0,48$ .

se hacen inestables a través de una bifurcación de Hopf-Andronov-Poincaré dando lugar a una solución ciclo límite. Incrementando más los parámetros el ciclo límite se mueve hacia un punto fijo hiperbólico dando lugar a una bifurcación homoclina. Como consecuencia de esta bifurcación el ciclo límite presenta sucesivos doblamiento de períodos: escenario de Shilnikov.

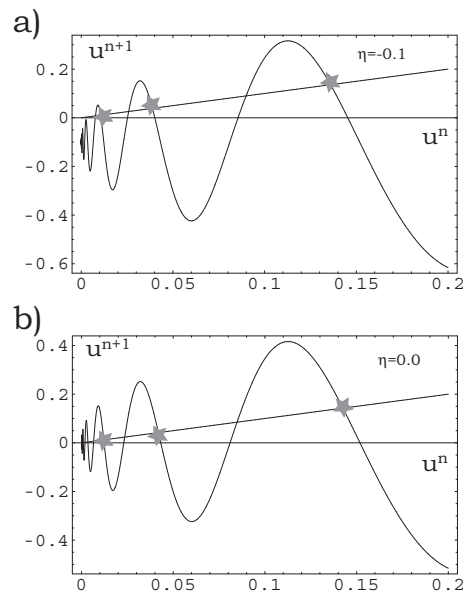


Fig. 5.3: Representación esquemática del primer mapa de vuelta (5.1) para diferentes valores de  $\eta$  a)  $\eta = -0,1$  and b)  $\eta = 0,0$ . las estrellas son los puntos de equilibrio.

## 6. CONDICIÓN ANALÍTICA PARA EL CAOS DE SHILNIKOV

Aunque en sistemas dinámicos disipativos es una tarea complicada obtener explícitamente soluciones homoclinas o heteroclinas, esto es bastante posible en sistemas dinámicos reversibles en el tiempo. Aquí, en sistemas *cuasi*-reversibles por medio de una persistencia o condición de Melnikov [9], uno puede atrapar soluciones homoclinas y heteroclinas [9, 13, 14]. La persistencia de la solución homoclina tridimensional, garantiza la existencia de caos cuando la condición de Shilnikov es satisfecha ( $\sigma < 1$ ).

En orden a estudiar la solución homoclina plana (3.31), consideremos los siguientes cambios de variable en la forma normal *cuasi*-reversible (3.28)

$$\begin{aligned}w &\equiv z - \mu\dot{x}, \\x &= x,\end{aligned}$$

y la ecuación toma la forma

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= w - x^2, \\ \dot{w} &= \delta + \nu x + (\beta + \mu)x^2 - \mu w.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Cuando  $\beta = -\mu$ ,  $\nu = 0$ , y re-escribiendo  $\delta = \mu w_0$  (*por simplicidad se asume que*



$w_0 > 0$ ), el modelo toma la forma

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= w - x^2, \\ \dot{w} &= -\mu(w - w_0).\end{aligned}\tag{6.2}$$

El sistema tiene dos puntos fijos  $\{(\sqrt{w_0}, w_0), (-\sqrt{w_0}, w_0)\}$ , donde  $(\sqrt{w_0}, w_0)$  es un atractor y  $(-\sqrt{w_0}, w_0)$  es un punto hiperbólico. El modelo tiene una solución homoclina plana

$$\begin{aligned}x_h(t, t_0) &= \sqrt{w_0} \left( -1 + 3 \operatorname{sech} \left[ \sqrt[4]{\frac{w_0}{4}} (t - t_0) \right] \right), \\ w &= w_0.\end{aligned}$$

Cuando consideramos la perturbación de la condición  $\{\beta = -\mu, \text{ y } \nu = 0\}$ , la homoclina comienza a ser tridimensional. Sin embargo, para tener comportamiento caótico, necesitamos que la variedad atractiva tenga un foco como atractor (el valor propio complejo relacionado con el punto fijo hiperbólico se debe tener parte real negativa) y la razón de módulos de la parte real del valor propio relacionado con la parte inestable y estable de la variedad del punto fijo hiperbólico debe ser menor que uno.

El punto fijo hiperbólico  $(-\sqrt{w_0}, w_0)$  del modelo (6.2) tiene tres valores propios  $\{\sqrt[4]{4w_0}, -\sqrt[4]{4w_0}, -\mu\}$ , la perturbación de la condición  $\{\beta = -\mu, \text{ y } \nu = 0\}$  en general produce tres nuevos valores propios reales. Para satisfacer la condición de Shilnikov, consideramos  $\mu = \sqrt[4]{4w_0}$ , y así los valores propios negativos son degenerados. Para una perturbación el valor propio toma una aproximación de la forma

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{4w_0} &\rightarrow \sqrt[4]{4w_0} + \frac{[(\beta + \sqrt[4]{4w_0}) \sqrt[4]{4w_0} - \nu]}{8\sqrt{w_0}}, \\ -\sqrt[4]{4w_0} &\rightarrow -\sqrt[4]{4w_0} \pm i \sqrt{\frac{(\beta + \sqrt[4]{4w_0}) \sqrt[4]{4w_0} - \nu}{\sqrt[4]{4w_0}}}.\end{aligned}$$

Si  $(\beta + \sqrt[4]{4w_0}) \sqrt[4]{4w_0} > \nu$ , entonces los valores propios son un real puro y dos complejos conjugados con parte real negativa como se representa en la Fig. 6.1. Note

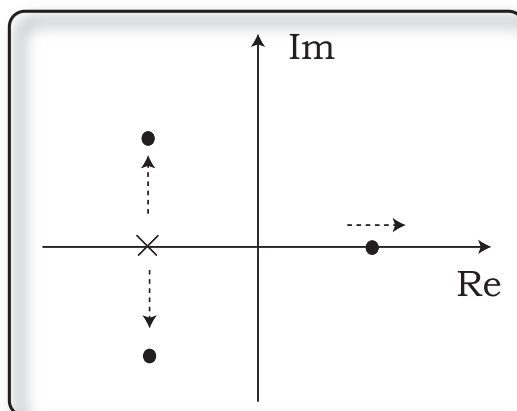


Fig. 6.1: Movimiento del espectro de valores propios del modelo (6.1).

que la razón de los módulos de la parte real del complejo conjugado del valor propio sobre el valor propio real puro es menor que uno. Aquí, si la solución homoclina plana persiste en tres dimensiones el sistema debe exhibir un comportamiento caótico. Podemos integrar  $w$  en el modelo (6.1) de la siguiente manera

$$\dot{w} + \mu w = \delta + vx + (\beta + \mu)x^2,$$

multiplicando el sistema por  $e^{\mu t}$  se obtiene

$$\frac{d(we^{\mu t})}{dt} = (\delta + vx + (\beta + \mu)x^2)e^{\mu t}.$$

Integrando y reemplazando en (6.1) el sistema queda

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= w_0 - x^2 \\ &+ e^{-\sqrt[4]{4w_0}t} \int_{-\infty}^t dt' e^{\sqrt[4]{4w_0}t'} (\nu x + (\beta + \sqrt[4]{4w_0}) x^2), \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde el último término se toma como una perturbación. Consideramos el siguiente ansatz

$$x(t) = x_h(t) + \zeta(t, x_h(t)), \quad (6.4)$$

donde  $\zeta(t, x_h(t))$  es una función corrección pequeña del orden de la perturbación. Introduciendo el ansatz en la ecuación (6.3) y linealizado en  $\zeta$ , obtenemos la siguiente condición para la persistencia de la solución homoclina (condición de Melnikov)

$$\nu = -(\beta + \sqrt[4]{4w_0}) f(w_0). \quad (6.5)$$

Luego, cuando el sistema satisface esta condición (6.5), por el teorema de Shilnikov entonces debemos tener caos. La función  $f(w_0)$  es

$$f(w_0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\sqrt[2]{4w_0}t} \partial_t x_h(t) \int_{-\infty}^t dt' e^{\sqrt[2]{4w_0}t'} x_h^2(t')}{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\sqrt[2]{4w_0}t} \partial_t x_h(t) \int_{-\infty}^t dt' e^{\sqrt[2]{4w_0}t'} x_h(t')}.$$

En la Fig. 6.2 graficamos la función  $f(w_0)$ , ya que no podemos integrar esta función. Una simulación numérica del modelo (3.28) usando la condición (6.5) es representada en la Fig. 5.2.

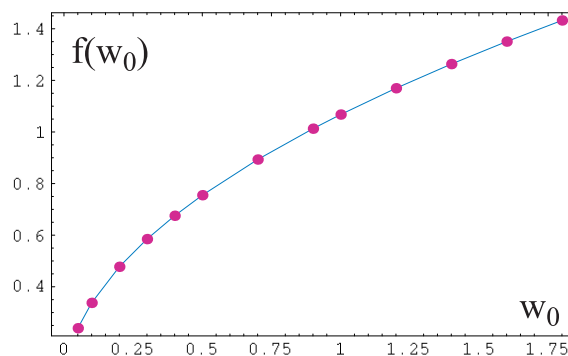


Fig. 6.2: Función  $f$  versus  $w_0$  obtenida de forma numérica utilizando (3.28) y la condición (6.5).

## 7. EJEMPLO MECÁNICO DE LA BIFURCACIÓN DE SHILNIKOV: PARTÍCULA DE SHILNIKOV

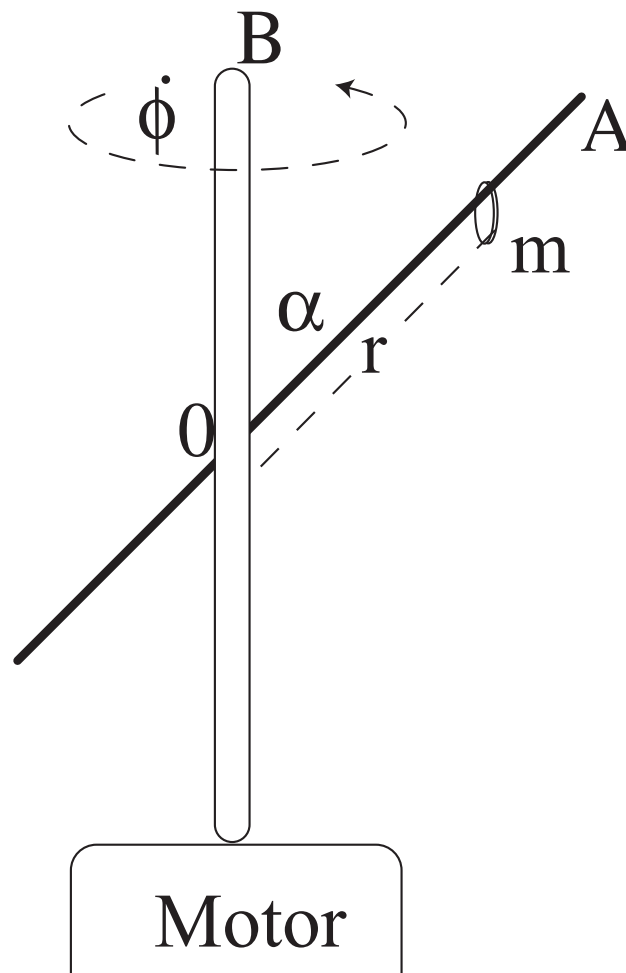
### 7.0.3. *Inestabilidad cuasi- Reversible.*

La partícula de Shilnikov es un sistema compuesto por un anillo de masa  $m$ , que se desliza sobre la barra  $OA$  sin fricción. Esta barra junto con otra barra vertical  $OB$ , son un sólido rígido con un ángulo fijo  $\alpha$  entre las dos, y todo el sistema puede rotar en torno al eje vertical  $OB$ , bajo la influencia del campo gravitatorio. Se pueden variar parámetros como la velocidad angular, el roce húmedo, la masa, el ángulo de inclinación o el momento de inercia, permitiendo investigar su dinámica y se observa la competencia entre la fuerza centrífuga y gravitacional como se muestra en la Fig. 7.3, encontrando de una manera robusta un ciclo límite (ver Fig.7.2), doblamiento de período (ver Fig.7.4).

$$\ddot{r} = \frac{r \sin^2 \alpha P_\phi^2}{(I + mr^2 \sin^2 \alpha)^2} - g \cos \alpha - \mu \dot{r},$$

$$\dot{P}_\phi = -\gamma \left( \frac{P_\phi}{(I + mr^2 \sin^2 \alpha)} - \omega_0 + \delta' \frac{P_\phi^2}{(I + mr^2 \sin^2 \alpha)^2} \right) - \frac{(\nu' + \beta' r^2 \sin \alpha) P_\phi}{(I + mr^2 \sin^2 \alpha)}, \quad (7.1)$$

Para comenzar a comprender físicamente el sistema anterior, debemos considerar los efectos disipativos relacionados con la naturaleza macroscópica del sistema y considerar la inyección de energía para equilibrar la disipación. El sistema entonces



*Fig. 7.1:* Partícula de Shilnikov es un sistema compuesto por un anillo de masa  $m$ , que se desliza sobre la barra  $OA$  sin fricción. Esta barra junto con otra barra vertical  $OB$  son un sólido rígido con un ángulo fijo  $\alpha$  entre las dos, y todo el sistema puede rotar en torno al eje vertical  $OB$  bajo la influencia del campo gravitatorio.

es descrito por

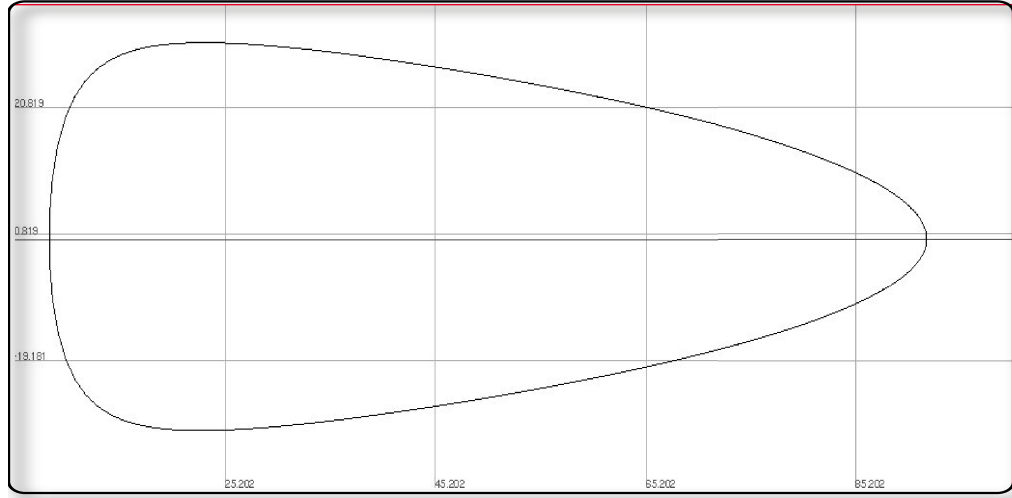


Fig. 7.2: Ciclo límite de la partícula de Shilnikov, al variar los parámetros, se observa la aparición de un ciclo límite estable. estable.

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{r \sin^2 \alpha P_\phi^2}{(I + mr^2 \sin^2 \alpha)^2} - g \cos \alpha - \mu \dot{r}, \\ \dot{P}_\phi &= -\gamma \left( \frac{P_\phi}{(I + mr^2 \sin^2 \alpha)} - \omega_0 + \delta' \frac{P_\phi^2}{(I + mr^2 \sin^2 \alpha)^2} \right) \\ &\quad - \frac{(\nu' + \beta' r^2 \sin \alpha) P_\phi}{(I + mr^2 \sin^2 \alpha)}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde la inyección de energía es por un motor con velocidad angular constante ( $\omega_0$  es la velocidad angular impuesta por el motor) aplicado en el apoyo de la barra vertical  $OB$ . El término proporcional a  $\gamma$  representa el motor, y ahora  $P_\phi$  es promovido a una variable dinámica. Hemos modelado el momento de rotación en la dirección azimutal, como una función polinomial de la velocidad angular con atractor en  $\omega_0$ , es decir,  $\gamma(\delta' \dot{\phi}^2 + \dot{\phi} - \omega_0)$  es el momento de rotación generado por el motor. La disipación ocurrirá por: a) La fricción en la rotación de la barra  $OB$  alrededor de su eje (está disipación es modelada por el término proporcional a  $\nu'$ ); b) fricción mojada

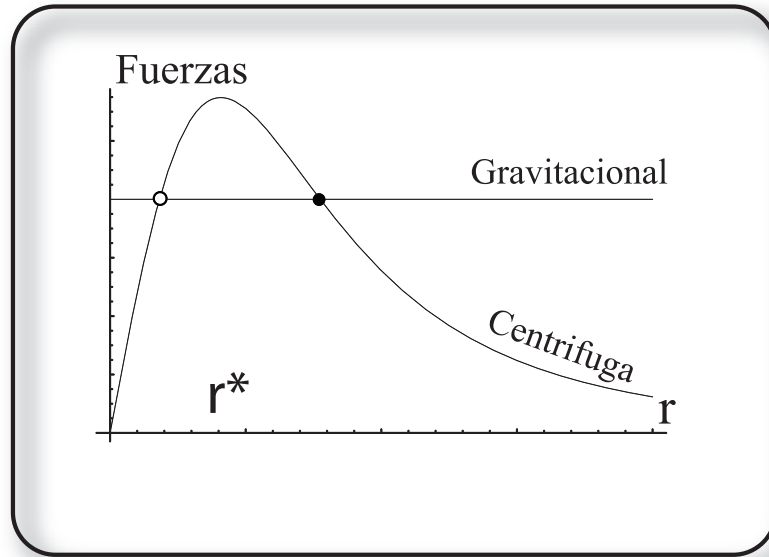


Fig. 7.3: Diagrama de fuerzas, al variar la fuerza gravitacional, se observa el nacimiento de dos puntos de equilibrio mediante una bifurcación de Saddle node, siendo el círculo negro el punto de equilibrio estable.

entre el anillo y la barra  $OA$ . Esta pérdida de energía es modelada por el término proporcional  $\mu$ ; c) debido al movimiento del anillo en el fluido que lo rodea (por ej. la atmósfera). Este efecto es descrito por el término proporcional a  $\beta'$ . Dicho parámetro está relacionado con la sección lateral del anillo.

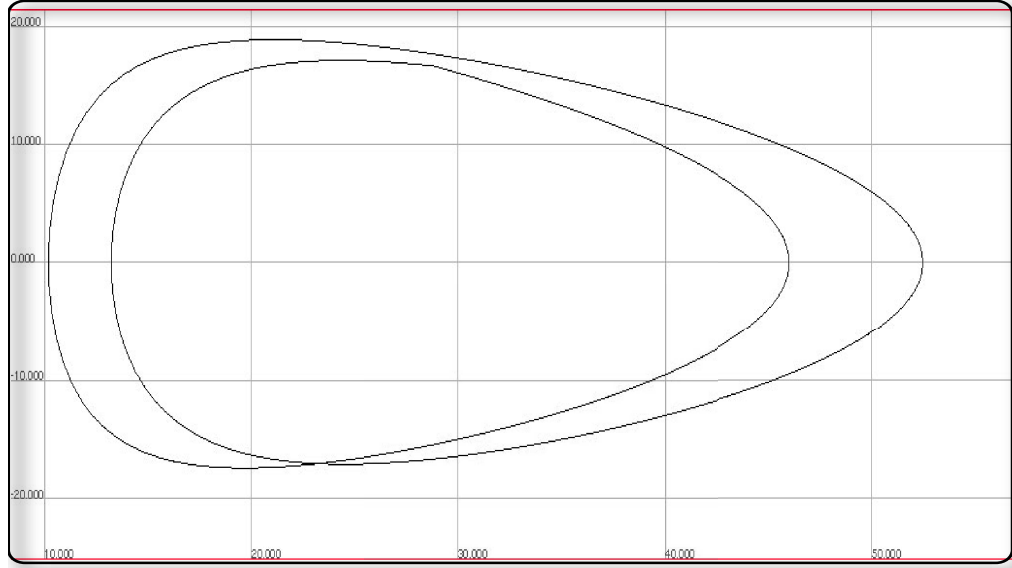


Fig. 7.4: Doblamiento de periodo, el sistema bifurca de un ciclo límite a un doblamiento de periodo.

Usando el ansatz 3.33, obtenemos el modelo (3.28), con los parámetros

$$\begin{aligned}\mu &= \mu, \\ \delta &= \frac{\gamma\omega_0}{z_0} - \frac{1}{z_0\sqrt[4]{3^3I^5m^3}} \left( g\gamma\sqrt[4]{3^5I^3m^5} \cot \alpha \right. \\ &\quad \left. + I\sqrt{g \cot \alpha} (3m(\gamma + \nu') + I\beta' \csc \alpha) \right), \\ \nu &= \frac{\rho_0}{2z_0\sqrt[4]{mI^7}} \left( 6g\gamma\sqrt[4]{I^3m^5} \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. + 3^{3/4}I\sqrt{g \cot \alpha} (m(\gamma + \nu') \sin \alpha - I\beta') \right), \\ \beta &= \frac{3\delta'\gamma g\rho_0^2 \sin(2\alpha)}{8z_0} \sqrt{\frac{3m^3}{I^3}}.\end{aligned}$$

La simulación numérica del sistema mecánico, exhibe un diagrama de bifurcación similar a(3.4). En la Fig. 7.5 presentamos el típico ciclo límite y la dinámica caótica que exhibe el modelo.



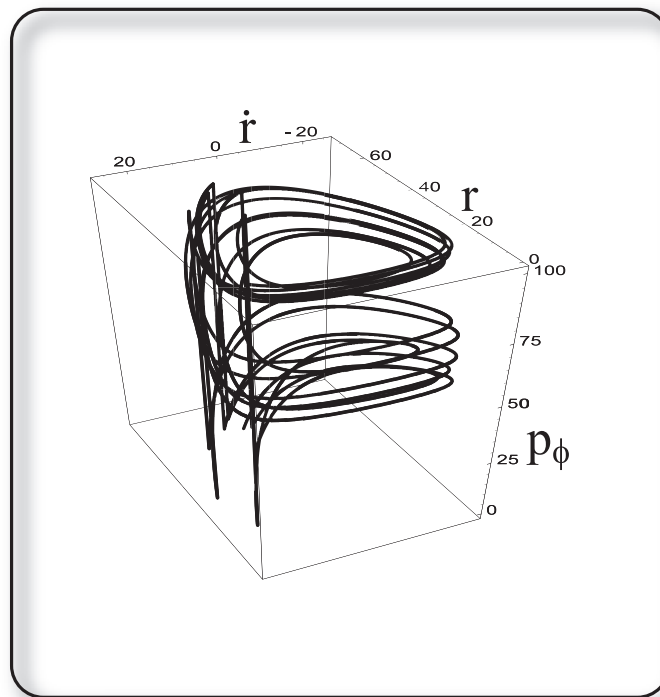


Fig. 7.5: Atractor extraño tipo shilnikov, ejemplo mecánico *cuasi*-reversible.

## 8. CONCLUSIONES

El entendimiento de bifurcaciones es una piedra angular para desarrollar una teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Dependiendo de la simetría los sistemas exhiben un tipo diferente de bifurcación. Sistemas reversibles exhiben una dinámica compleja como el caos Hamiltoniano, sin embargo la inclusión de una pequeña disipación e inyección de energía cambia drásticamente los comportamientos dinámicos. Hemos estudiado la inestabilidad  $0^3$  que surge en sistemas *cuasi*-reversibles, que es caracterizada por la confluencia de tres valores propios en el origen del plano complejo con sólo una auto vector. Mediante el uso de la forma normal, hemos caracterizado esta bifurcación y su dinámica. Proponemos un sistema mecánico simple la partícula de Shilnikov que presenta esta inestabilidad *cuasi*-reversible, y muestra la dinámica caótica del tipo Shilnikov .

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Marcel G. Clerc, Pablo C. Encina, Enrique Tirapegui [2007], "Shilnikov bifurcation: Stationary quasi-reversal bifurcation", preprint Int. J. of Bifur. Chaos.
- [2] A. Corvalán, Tesis de Magister Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.
- [3] Nonlinear Dynamics and Chaos. Steven H. Strogatz 1994.
- [4] Andronov A.A., Vitt A.A & Khaikin S.E. [1987] "Theory of Oscillators"(Dover, New York,1987)
- [5] Arneodo A., Couillet P.H., Spiegel E. A. & Tresser C. [1985], "Asymptotic Chaos", Physica D **14**, 327.
- [6] F. Takens [1973], "Singularities of vector fields", Pub. IHES 43 ,47-100.
- [7] F. Takens, "Forced oscillations and bifurcations". Applications of Global Analysis, Comm. 3 Math. Inst. Riksuniversitat Utrecht.
- [8] Couillet P., Tresser C. [1978], "Iteration d'endomorphismes et groupe de renormalisation", CR Acad. Sci. Paris 287A
- [9] Couillet P., Elphick C. [1987], "Topological defects and Melnikov's theory", Phys. Lett., A121, 234

- 
- [10] Arnold, V. [1980] Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires (MIR, Moscou, 1980), Chap 6, pp. 211-331.
- [11] Baker N.H., Moore D.W., & Spiegel E.A. [1971], "Aperiodic behaviour of a non-linear oscillator", *Quart. Journ. Mech. and Applied* 24, 394-422.
- [12] Clerc, M., Coulet P. & Tirapegui, E. [1999] "Lorenz Bifurcation: Instabilities in Quasireversible System" *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3820-3823.
- [13] Clerc, M., Coulet P. & Tirapegui E. [2000], "Reduced description of the confined quasi-reversible Ginzburg Landau equation" (with P. Coulet, E. Tirapegui) *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 139, 337-343.
- [14] Clerc, M., Coulet P. & Tirapegui, E. [1999] "The stationary instability in quasi-reversible systems and the Lorenz pendulum" *Int. J. of Bifur. Chaos* 11, 591-603 (2001).
- [15] Clerc, M., & Marsden J.E. [2001] "Dissipation-induced instabilities in an optical cavity laser: A mechanical analog near the 1:1 resonance" *Phys. Rev. E* **64**, 067603.
- [16] Coulet Spiguel
- [17] Cross M. & Hohenberg P. [1993], *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851-1112.
- [18] Elphick, C., Tirapegui, E., Brachet, M., Coulet, P. & Iooss, G. [1987] "A simple Global characterization for normal forms of singular vector fields" *Physica D* **29**, 95-127.
- [19] Feigenbaum, M. J. [1978] "Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations." *J. Stat. Phys.* 19, 25-52.

- 
- [20] Guckenheimer, J. & Holmes, P. [1983] *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields* (Springer-Verlag, New York) Chap. 3, pp. 117-156.
- [21] Marzec C.J. & Spiegel E.A. [1980], "Ordinary differential equations with strange attractor", *SIAM J. Appl. Math.* **38**, 403-420.
- [22] Moore D.W., & Spiegel E.A. [1966], "A thermally excited non-linear oscillator", *Astrophys. J.* **143** 871-887.
- [23] Pismen L.M. [1987], "Homoclinic explosion in the vicinity of bifurcation at the triple-zero eigenvalue", *Phys. Rev. A* **35**, 2709-2717.
- [24] L.P. Shilnikov [1965], "A case of the existence of a countable number of periodic motion", *Sov. Math. Dokl.* **6**, 163-166.
- [25] L.P. Shilnikov [1968], "A contribution of the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle type", *Math. U.S.S.R Sbornik* **6**, 427-438.
- [26] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
- [27] J. Garcia-Ojalvo and J. M. Sancho, *Noise in spatially extended systems*, (Springer-Verlag, New-York, 1999) and references therein.
- [28] M. G. Zimmermann, R. Toral, O. Piro, and M. San Miguel, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3612 (2000).
- [29] L.Q. Zhou, X. Jia and Q. Ouyang, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 138301 (2002).
- [30] R. Müller, K. Lippert, A. Kühnel and U. Behn, *Phys. Rev. E* **56**, 2658 (1997).

- 
- [31] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 850 (1993), and references therein.
- [32] F. Pétrélis, S. Aumaître, and S. Fauve *Phys. Rev. Lett.* **94**, 070603 (2005).
- [33] M. Clerc, P. Coulet and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3820 (1999); *Int. J. Bifurc. Chaos* **11**, (2001) 591; M. Clerc, P. Coulet, N. Vandenberghe, E. Tirapegui, *Phys. Lett. A* **287**, 198 (2001).

## 9. FORMACIÓN DE PATRONES EN SISTEMAS *CUASI-REVERSIBLES* E INFLUENCIA DEL RUIDO.

Hasta ahora hemos solo estudiado las inestabilidades *cuasi-reversibles* de sistemas sin espacio o no extendidos. El objetivo de este capítulo es estudiar teóricamente y experimentalmente la formación de ondas estacionarias en sistemas *cuasi-reversibles*.

### 9.1. *Sistemas Forzados Paramétricamente.*

Como se ha mencionado una forma de inyectar energía en sistemas *cuasi-reversibles* es por medio de un forzamiento con frecuencia finita y excitar los modos del sistema dinámico bajo estudio. Los dos forzamientos más estudiados son un forzamiento exterior, típicamente por medio de una fuerza oscilatoria, o por medio de un forzamiento paramétrico, es decir, un parámetro del sistema es modulado temporalmente. Cuando los sistemas son extendidos espacialmente, es decir, uno considera un sistema dinámico el cual se replica un gran número de veces en el espacio y se acoplan en los distintos puntos, uno espera que los forzamientos den origen a fenómenos propios de sistemas extendidos como formación de patrones.

Para ilustrar un sistema *cuasi-reversible* que exhibe formación de patrones, consideramos una cadena de péndulos acoplados que es descrita por

$$\ddot{\theta}_i = -\frac{g}{l} \sin \theta_i + k(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \quad (9.1)$$

donde  $\theta_i$  describe al péndulo  $i$ -ésimo,  $k$  es la constante elástica de torsión que acopla los péndulos. En la Fig. 9.1 se ilustra el sistema en estudio. Si tomamos el límite continuo y normalizamos el espacio del sistema este queda descrito por el modelo de Sine-Gordon ( $\theta_i \rightarrow \theta(x, t)$ )

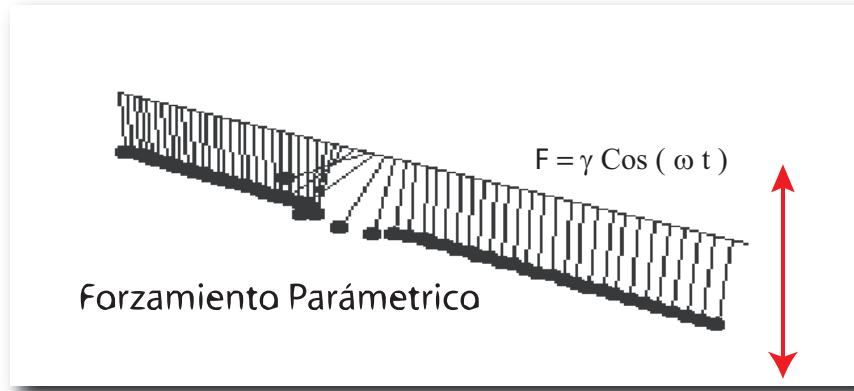


Fig. 9.1: Cadena de péndulos acoplados forzados de manera paramétrica.

$$\partial_{tt}\theta(x, t) = -\frac{g}{l} \sin \theta + \partial_{xx}\theta. \quad (9.2)$$

Este modelo es un sistema reversible ya que la dinámica queda invariante por ( $t \rightarrow -t, \theta \rightarrow \theta, \dot{\theta} \rightarrow -\dot{\theta}$ ).

Si ahora consideramos pequeños términos que dan cuenta de la disipación de energía, por ejemplo, la consideración del aire en la cadena péndulos y la lubricación en el punto de contacto de la cadena, entonces agregamos un término de amortiguamiento a la dinámica

$$\partial_{tt}\theta(x, t) = -\omega_0^2 \sin \theta - \gamma \partial_t \theta + \partial_{xx}\theta, \quad (9.3)$$

donde  $\gamma$  es el coeficiente de amortiguamiento.

Luego en este caso, el sistema es solo disipativo y el único equilibrio que uno espera es  $\theta(x, t) = 0$ , esto se puede entender ya que la ecuación anterior se puede escribir



como

$$\partial_{tt}\theta(x, t) = -\frac{\delta F}{\delta \theta} - \gamma\dot{\theta}, \quad (9.4)$$

con

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\omega_0^2 \cos \theta + \frac{(\partial_x \theta)^2}{2}\right) dx. \quad (9.5)$$

Luego si la ecuación es multiplicada por  $\dot{\theta}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\partial_t \theta)^2}{2} + F \right\} = -\gamma \dot{\theta}^2$$

es decir,  $\partial_t H = -\gamma(\partial_t \theta)^2 \ll 0$  con  $H = \frac{(\partial_t \theta)^2}{2} + F(\theta)$ , luego el sistema minimiza este funcional de Liapunov el cual tiene como mínimo  $\theta = 0$ . Con el objetivo de encontrar una dinámica más rica consideramos el eje horizontal sobre el cual se cuelgan los péndulos y este se mueve verticalmente, la dinámica de este sistema es descrita por

$$\partial_{tt}\theta(x, t) = -\omega_0^2 \sin \theta - \sigma \sin \theta \sin[2(\omega_0 - \nu)t] - \gamma \partial_t \theta + \partial_{xx} \theta, \quad (9.6)$$

donde los términos con  $\nu, \sigma$ , y  $\gamma$  dan cuenta del detuning, inyección y disipación de energía, respectivamente. En la Fig. 9.1 se ilustra el sistema. Es importante notar que la ecuación anterior se puede interpretar como si el sistema tuviese una gravedad efectiva en el sistema móvil

$$\ddot{\theta}(x, t) = -\omega^2(t) \sin \theta - \gamma \dot{\theta} + \partial_{xx} \theta, \quad (9.7)$$

con  $\omega^2(t) = \omega_0^2 + \sigma \sin[2(\omega_0 - \nu)t]$ . Vemos que simulaciones numéricas de la ecuación anterior muestran la aparición de ondas subarmónicas (ver Fig.9.3), independientemente de cuán pequeña sea la disipación e inyección de energía. Luego la formación de estas ondas estacionarias es una bifurcación *cuasi-reversible*. Para estudiar esta bifurcación consideramos transformar esta ecuación a una ecuación de amplitud utilizando el siguiente cambio de variables

$$\theta(x, t) = A(x, t)e^{i\omega_0 t} + \bar{A}(x, t)e^{-i\omega_0 t} + W(A, t). \quad (9.8)$$

donde  $W$  es un polinomio en  $A$  considerando  $\sin \theta$  en una expansión de serie de Taylor hasta el primer término no lineal. Además  $\sigma, \gamma$  son considerados pequeños. Se tiene

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6},$$

$$\sin \theta = Ae^{i\omega_0 t} + \bar{A}e^{-i\omega_0 t} + W - \frac{A^3}{6}e^{3i\omega_0 t} - \frac{\bar{A}^3}{6}e^{-3i\omega_0 t} - \frac{|A|^2 A}{2}e^{i\omega_0 t} - \frac{|A|^2 \bar{A}}{2}e^{-i\omega_0 t}.$$

Derivando  $\theta$  con respecto a  $t$ , se tiene

$$\theta_t = (A_t + i\omega_0 A)e^{i\omega_0 t} + C.C. + W_t,$$

$$\theta_{tt} = (A_{tt} + 2i\omega_0 A_t - \omega_0^2 A)e^{i\omega_0 t} + C.C. + W_{tt}$$

donde agregamos el supuesto de que la variación de la amplitud es lenta

$$A_{tt} \ll A_t \ll 1,$$

$$W_{xx} \ll W \ll 1,$$

$$\gamma \simeq \gamma_0 \epsilon, \sigma \simeq \sigma_0 \epsilon, \epsilon \ll 1.$$

reemplazando en el modelo de Sine-Gordon (9.7), se tiene

$$(2i\omega_0 A_t - \omega_0^2 A)e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 \delta A e^{i\omega_0 t} +$$

$$+ [\omega_0^2 + \frac{f}{2i}(e^{i2(\omega_0 - \nu)t} - e^{-i2(\omega_0 - \nu)t})][A^{i\omega_0 t} + \bar{A}^{-i\omega_0 t} - \frac{A^3}{6}e^{3i\omega_0 t} - \frac{\bar{A}^3}{6}e^{-3i\omega_0 t} +$$

$$- \frac{|A|^2 A}{2}e^{i\omega_0 t} - \frac{|A|^2 \bar{A}}{2}e^{-i\omega_0 t}] = A_{xx}$$

(9.9)

tomando los términos resonantes se llega a (condición de solubilidad)

$$A_t = -\frac{\gamma}{2}A - \frac{\omega_0^2}{4}|A|^2 A - i\partial_{xx}A + \frac{\sigma}{4\omega_0}\bar{A}e^{i2\nu t}. \quad (9.10)$$

tomando  $A = Be^{-i\nu t}$  y re-escribiendo  $\mu = \frac{\gamma}{2}$ ,  $\lambda = \frac{f}{4\omega_0}$  y  $\alpha = \frac{1}{2\omega_0}$  se obtiene la ecuación de Schrodinger Nolineal con inyección y disipación de energía

$$\boxed{B_t = (-\mu + i\nu)B - \frac{\omega_0}{4}|B|^2B + \lambda\bar{B} - i\alpha B_{xx}} \quad (9.11)$$

Este modelo es hamiltoniano reversible en el tiempo (cuando no consideramos los términos que inyectan y disipan energía) con la transformación  $\{t \rightarrow -t, B \rightarrow \bar{B}\}$ . Los términos proporcionales a  $\mu$  y  $\lambda$  quiebran la simetría temporal, y representan disipación de energía e inyección de energía, respectivamente. Los términos de orden superior en la ecuación (9.1) son despreciados por un análisis de escala, ya que  $\mu \ll 1$ ,  $\nu \sim \mu \sim \lambda$ ,  $|B| \sim \mu^{1/2}$ ,  $\partial_x \sim \mu^{1/2}$ , y  $\partial_t \sim \mu^{1/2}$ .

El modelo (9.1) también ha sido usado para describir patrones y solitones en muchos otros sistemas, tales como estructuras localizadas en una red cristalina no lineal [11], pulsos de luz en una fibra óptica [12], osciladores ópticos paramétricos tipo Kerr [7], solitón de magnetización en un plano ferromagnético expuesto a un campo magnético oscilatorio [2], y un forzamiento paramétrico de una cadena de péndulos [3], por mencionar algunos.

Tomando el siguiente ansatz  $B = (X_0 + iY_0)e^{\sigma t} \cos(qx)$  para estudiar la estabilidad y la región donde hay ondas estacionarias se obtiene que el siguiente determinante debe ser cero

$$\begin{bmatrix} -\sigma + \lambda - \mu & -\nu - \frac{q^2}{2\omega_0} \\ +\nu + \frac{q^2}{2\omega_0} & -\sigma - \lambda - \mu \end{bmatrix}. \quad (9.12)$$

Se obtiene una ecuación para  $\sigma$

$$\sigma = -\mu \pm \sqrt{\lambda^2 - \left(\nu + \frac{q^2}{2\omega_0}\right)^2}. \quad (9.13)$$

Para la situación marginal (estacionaria)  $\sigma = 0$  y homogénea  $q = 0$ , se tiene  $\lambda = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$  y en la zona exterior de la curva segmentada de la Fig. 9.2, es decir, la zona amarilla, rosada y celeste la situación homogénea es estable a  $q = 0$ , al interior

de la curva la solución homogénea se vuelve inestable. Para perturbaciones con un número de onda  $q$ , se encuentra que la solución homogénea es inestable para  $\lambda \geq \mu$ , observando detuning negativo, ondas estacionarias en la región de color amarillo,  $\lambda$  está entre  $\mu$  y  $\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$  y se tiene una familia de ondas estacionarias de *Faraday*. En la Fig. 9.2 se representa la superficie del fluido observando el espacio de parámetros. En el régimen estudiado experimentalmente no se observa detuning positivo, luego por motivos de simplicidad el estudio será restringido para detuning negativo y en la vecindad de  $\lambda = \mu$ , en el interior de la curva segmentada la dinámica que se observa experimentalmente, es más compleja encontrándose eyección de gotas y caos espacio temporal entre otros fenómenos.

Cuando  $\mu = \lambda = 0$  la ecuación es denominada ecuación de Schrodinger no lineal. La cual da cuenta de la evolución de la amplitud de pequeñas oscilaciones para osciladores no disipativos acoplados.

La ecuación *cuasi-reversible* (9.1) ha sido utilizada para estudiar fluidos, sistemas magnéticos (ver artículo [4]). Los parámetros que caracterizan (9.10) son  $\nu$  detuning,  $\mu$  dumping, y  $\lambda$  forzamiento, pero la dinámica para  $\mu$  pequeño queda bien representada ( $\nu$  y  $\lambda$ ).

Hemos mostrado que un sistema *cuasi-reversible* exhibe formación de ondas estacionarias. En la próxima sección estudiaremos experimentalmente un sistema físico que exhibe esta inestabilidad.

## 9.2. Efecto de las Fluctuaciones Estocásticas.

Hasta ahora solo hemos considerado los efectos de inyección y disipación de energía, en un sistema *cuasi-reversible* extendido, sin embargo, un estudio experimental además debe considerar los efectos de las fluctuaciones, las cuales típicamente son de origen

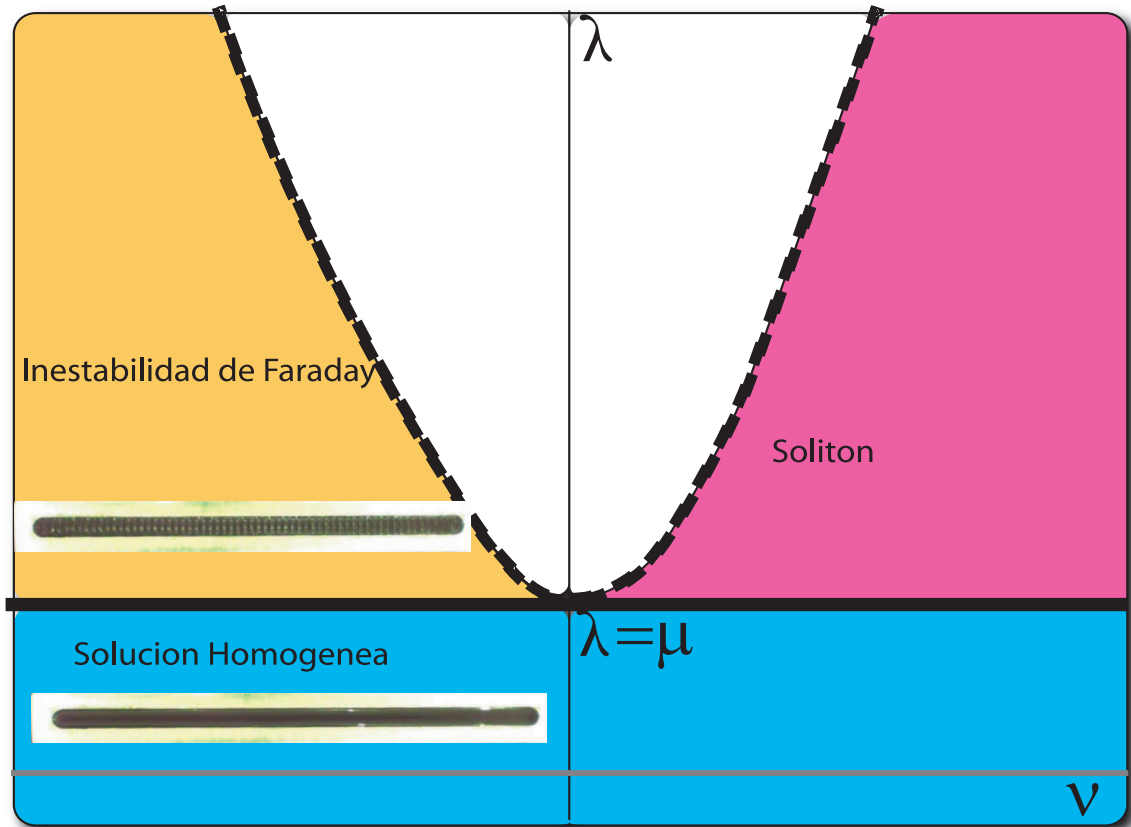


Fig. 9.2: Para detuning negativo tenemos patrón, y para  $\lambda < \mu$  se tiene que el estado homogéneo es estable

térmico. Para dar cuenta de este efecto consideramos la cadena de péndulos forzada y amortiguada con el efecto de fluctuaciones térmicas debido al aire, luego la cadena se describe por la ecuación estocástica

$$\theta_{tt}(x, t) = -(\omega_0^2 + \gamma \sin(2(\omega_0 - \nu))) \sin \theta - \delta \theta_t + \partial_{xx} \theta + \sqrt{\eta_0} \zeta(x, t), \quad (9.14)$$

donde el término  $\zeta(x, t)$  es el ruido térmico que toma valores en cada punto del espacio aleatoriamente y  $\eta_0$  es la intensidad de este ruido. Estos valores son tomados de una

distribución gaussiana que satisface

$$\langle \zeta \rangle = 0 \quad (9.15)$$

$$\langle \zeta(x, t) \zeta(x^*, t^*) \rangle = \delta(x - x^*) \delta(t - t^*), \quad (9.16)$$

es decir, en promedio es cero y el valor en cada instante y posición del espacio es independiente. Este tipo de fluctuaciones se le denomina ruido blanco [18]. Simulaciones numéricas del sistema con ruido nos muestra que en la región que observamos patrones, estos son ligeramente afectados por las fluctuaciones, donde la fase y la amplitud fluctúan (ver Fig. 9.3b), se puede observar que el sistema tiene dominios con una longitud de onda que va alternando en el tiempo en la región del espacio de los parámetros donde la solución homogénea es estable y está cerca de la bifurcación espacial, este último fenómeno es conocido como precursor [1]. Luego a diferencia del sistema determinista que exhibe una clara transición entre el estado homogéneo y el estado patrón (en la Fig. 9.3b se observa un estado donde se tiene una longitud de onda en todo el espacio sin ruido) el sistema con ruido muestra una transición continua. Por lo tanto nacen las siguientes preguntas relevantes:

- ◊ ¿Dónde está el punto de bifurcación? Es importante notar que el punto de bifurcación representa típicamente un cambio de balance de fuerzas.
- ◊ ¿Qué tipo de diagrama de bifurcación exhibe un patrón con ruido? Para responder esta pregunta usaremos la ecuación de amplitud de las secciones anteriores.

Si consideramos la cadena de péndulos

$$B_t = (-\mu + i\nu)B - \frac{\omega_0}{4}|B|^2B + \gamma\bar{B} - i\alpha B_{xx} \quad (9.17)$$

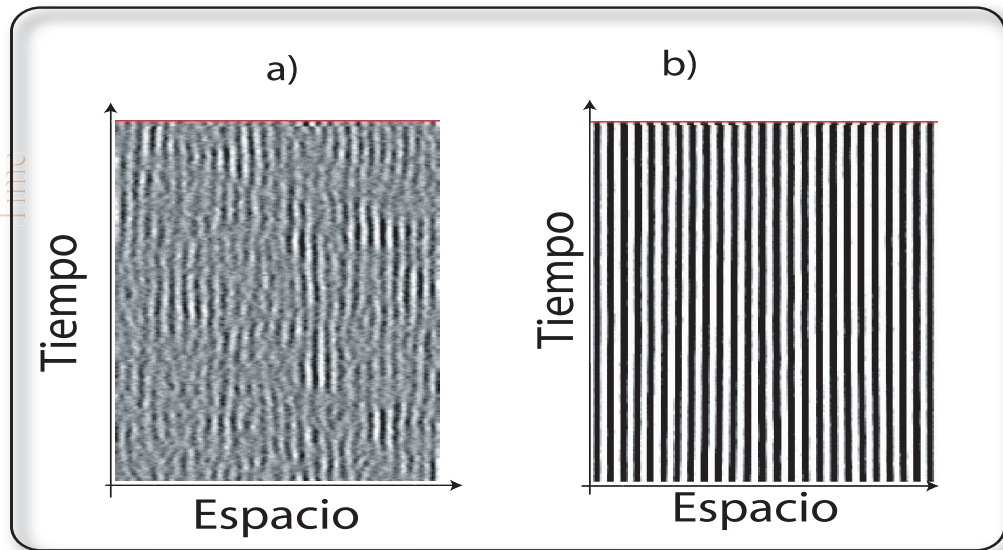


Fig. 9.3: En el diagrama espacio temporal se representa la evolución de un campo a) El precursor es una zona del espacio de parámetros donde podemos observar una longitud de onda en promedio, antes de llegar al punto de bifurcación analítico. b) Al cruzar el punto de bifurcación se puede observar una longitud de onda de forma clara y en cualquier instante.

realizando un análisis de estabilidad a la parte lineal tomando  $B = X + iY$  se obtienen dos ecuaciones diferenciales

$$\dot{X} = (\gamma - \mu)X - \nu Y + \alpha Y_{xx} \quad (9.18)$$

$$\dot{Y} = \nu X - (\mu + \gamma)Y - \alpha X_{xx} \quad (9.19)$$

Reemplazando el siguiente ansatz en la situación crítica

$$X = X_0 e^{\lambda t} e^{ik_c x}$$

$$Y = Y_0 e^{\lambda t} e^{ik_c x}$$

obtenemos

$$\begin{bmatrix} \lambda + \mu - \gamma & \nu + \frac{k_c^2}{2\omega_0} \\ -\nu - \frac{k_c^2}{2\omega_0} & \lambda + \mu + \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = 0. \quad (9.20)$$

Luego para que el sistema tenga solución el determinante debe ser cero obteniéndose dos soluciones para  $\lambda$

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\gamma^2 - \left(\nu + \frac{k_c^2}{2\omega_0}\right)^2} \quad (9.21)$$

La condición estacionaria es  $\lambda = 0$

$$k_c^2 = 2\omega_0(-\nu + \sqrt{\gamma^2 - \mu^2}) \quad (9.22)$$

obteniendo ondas estacionarias para detuning negativo. Parándose en esa situación esto significa que  $\gamma = \mu$ ,  $\Gamma = 0$  el unfolding, y las soluciones son de la forma

$$X = X_k e^{ik_c x}$$

$$Y = Y_k e^{ik_c x}$$

reemplazando se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_k \\ \dot{Y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} - \frac{\omega_0}{4}(X_k^2 + Y_k^2) \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

utilizando formas normales

$$\vec{V} = \vec{U}(\vec{A})^{[1]} + \vec{U}(\vec{A})^{[2]} + \dots$$

$$\partial_t A_i = f_i^{[1]} + f_i^{[2]} + \dots$$

a primer orden



$$\partial_t \vec{V}^{[1]} = \partial_t A e^{ik_c x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\mu \end{bmatrix} A e^{ik_c x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.24)$$

luego  $\partial_A = 0$  a primer orden y a segundo orden

$$\partial_t \vec{V}^{[2]} = \partial_t A e^{ik_c x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \partial_A \vec{U}^{[2]} + \bar{f}^{[2]} \partial_A \vec{U}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\mu \end{bmatrix} \vec{U}^{[2]} \quad (9.25)$$

obteniendo  $\vec{U}^{[2]} = \bar{f}^{[2]} = 0$  a orden 3

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{V}^{[3]} &= \bar{f}^{[1]} \frac{\partial \vec{U}^{[3]}}{\partial A} + \bar{f}^{[2]} \frac{\partial \vec{U}^{[2]}}{\partial A} + \bar{f}^{[3]} \frac{\partial \vec{U}^{[1]}}{\partial A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\mu \end{bmatrix} \vec{U}^{[3]} - \\ &\frac{\omega_0}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ A^3 e^{3ik_c x} + 3|A|^2 A e^{ik_c x} + 3|A|^2 \bar{A} e^{-ik_c x} + \bar{A}^3 e^{-3ik_c x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.26)$$

obteniendo  $\bar{f}^{[3]} = 0$  y el cambio de variables

$$\vec{U}^{[3]} = e^{ik_c x} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-3}{8\mu} |A|^2 A \end{bmatrix} + e^{-3ik_c x} \begin{bmatrix} \frac{\omega_0}{32\nu} A^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

contribuyen con términos solo los impares en  $A$ , luego podemos saltar el término de orden cuarto para calcular el quinto orden

$$\partial_t \vec{V}^{[5]} = \bar{f}^{[5]} \frac{\partial \vec{U}^{[1]}}{\partial A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\mu \end{bmatrix} \vec{U}^{[5]} - \begin{bmatrix} \frac{3\omega_0^2}{32\mu} (|A|^2 A^3 e^{3ik_c x} + 3|A|^4 A e^{ik_c x}) \\ \frac{\omega_0^2}{128\nu} (-B^5 e^{5ik_c x} - 2|B|^2 B^3 e^{3ik_c x}) \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

donde

$$\partial_t A = -\frac{9\omega_0^2}{32\mu} |A|^4 A \quad (9.29)$$

considerando el unfolding

$$\partial_t \vec{V}^{[1,1]} = \bar{f}^{[1,1]} \frac{\partial \vec{W}^{[0,1]}}{\partial A} = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{bmatrix} A e^{ik_c x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

luego  $f^{[1,1]} = \Gamma A$  resultando una nueva ecuación de amplitud equivalente

$$\partial_t A = \Gamma A - \frac{9\omega_0^2}{32\mu} |A|^4 A \quad (9.31)$$

con ruido, se obtiene la ecuación de los patrones [1]

$$\partial_t A = \epsilon A - |A|^4 A + f(A, \zeta(t)) \quad (9.32)$$

donde este término de ruido debe cumplir las propiedades de ruido gaussiano:

$$\langle \zeta \rangle = 0, \quad (9.33)$$

$$\langle \zeta(x, t) \bar{\zeta}(x^*, t^*) \rangle = \delta(x - x^*) \delta(t - t^*), \quad (9.34)$$

$$\langle \zeta(x, t) \zeta(x^*, t^*) \rangle = 0 \quad (9.35)$$

donde  $\sqrt{\eta_0}$  es un parámetro proporcional a la intensidad del ruido del problema original. Como ya hemos mostrado la amplitud del patrón satisface  $\epsilon^{1/4}$  cuando el ruido aditivo no es significativo, es decir, el ruido multiplicativo es más significativo.

$$\langle A \rangle_{eq} = \begin{cases} 0 & \epsilon < 0, \\ \sqrt[4]{\epsilon} & \epsilon > 0. \end{cases} \quad (9.36)$$

En el caso de considerar el ruido debemos determinar el valor medio de este, para esto se utiliza la distribución de probabilidad estacionaria [1]

$$P_{est} = ce^{-\frac{(\epsilon|A|^2 - |A|^4)}{\eta}} |A| d|A|. \quad (9.37)$$

En la Fig. 9.4 se ilustran distribuciones de probabilidad antes y después de la bifurcación

El valor medio tiene una expresión complicada para poder trabajar con ella, por eso en un trabajo de Clerc y Agez [1], se discute que experimentalmente se mide

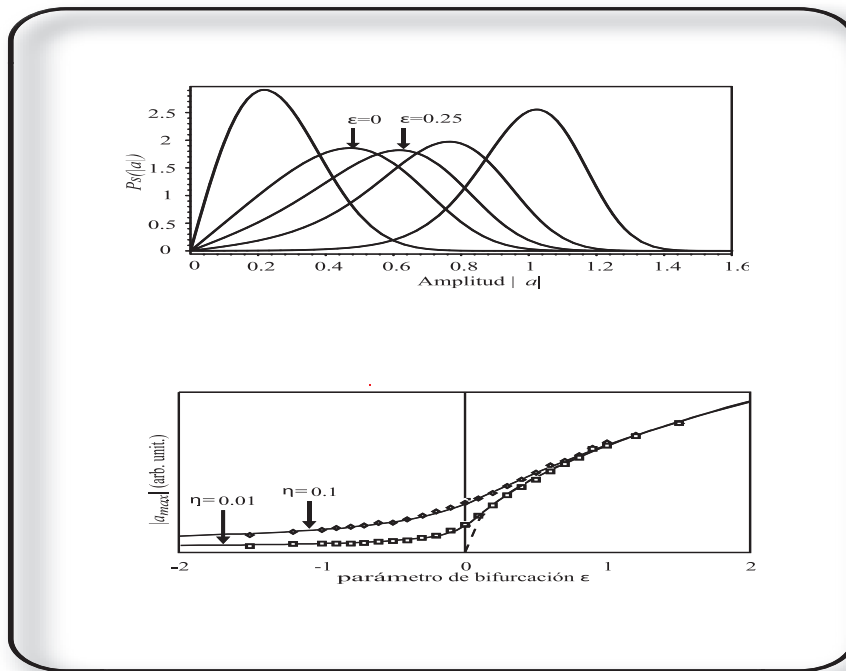


Fig. 9.4: Se ilustra como la distribución de probabilidades cambia al variar el parámetro de bifurcación  $\epsilon$ . El grafico de bifurcación también se observa un cambio en la bifurcación al ir aumentando el ruido aditivo, adelantando el punto de bifurcación.

la moda, el valor más probable, luego de la distribución de probabilidad calculan el máximo, (ver Fig. 9.4) obteniendo la moda como una función del parámetro de bifurcación, luego para  $\epsilon < 0$  el sistema tiene una amplitud no trivial, esta zona la denominan como precursor (el ruido aditivo estimula modos que sin este ruido no estarían). Este se entiende como un balance entre el modo crítico y el ruido que lo excita. En vez de usar como estadígrafo el valor medio, dado su complicada fórmula analítica, uno puede usar el valor de la moda que tiene una expresión más simple. En efecto, independientemente de la cantidad de parámetros que tenga nuestro sistema en estudio, se obtiene que la amplitud de equilibrio en función del parámetro de

bifurcación se ajusta con solo el ruido aditivo, donde la amplitud equilibrio es:

$$\langle A \rangle_{eq} = \sqrt{\frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 2\eta_0}}{2}} \quad (9.38)$$

La fórmula anterior, es la curva segmentada de la Fig. 9.5, de (9.38) se tiene que

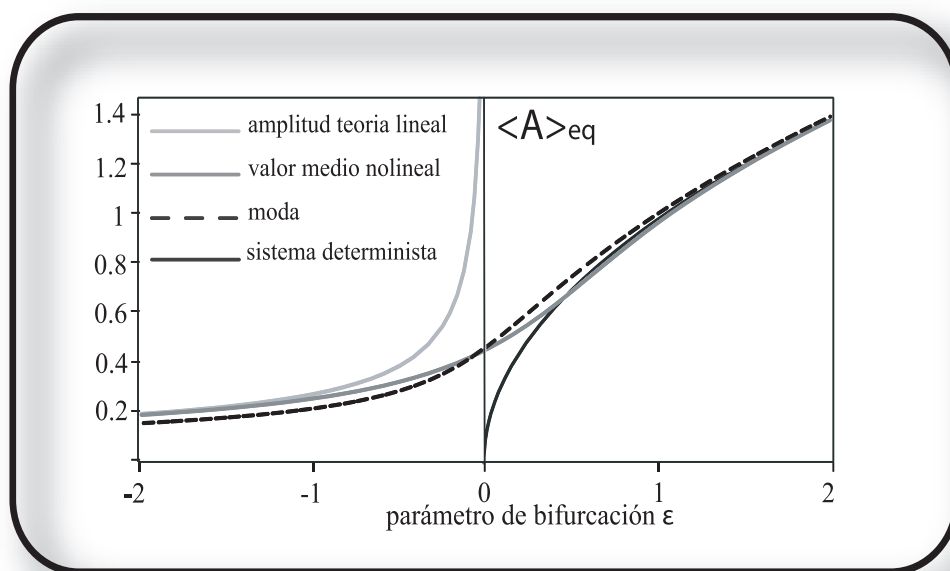


Fig. 9.5: El diagrama muestra las distintas teorías que existen para interpretar la dinámica entorno al punto de bifurcación.

para  $|\epsilon| \gg 1$  y negativo la moda converge  $(\eta_0/2\epsilon)^{1/2}$  y para  $\epsilon \gg 1$  y positivo la moda converge  $\epsilon^{1/2}$  esto nos permitio darnos cuenta de dos situaciones extraordinarias, primero que este sistema sin ruido aditivo tiene una bifurcación supercritica cuántica que en un estudio de un sistema con ruido multiplicativo [13] (ver 9.13) no se dieron cuenta de esto y su interpretación fue que la bifurcación era supercritica cubica. La presencia del ruido aditivo transforma la bifurcación que dependiendo de la región de parametros que se estudie puede ser supercritica, o subcritica cuántica ‘presentando en este ultimo caso histeresis la bifurcación.

### 9.3. Inestabilidad de Faraday.

Faraday estudió en el siglo XIX, las ondas superficiales producidas por un forzamiento vertical con una frecuencia  $\Omega$  observando el cambio de la estabilidad de una superficie homogénea a una onda estructurada con una frecuencia  $\frac{\Omega}{2}$ , también llamada frecuencia subarmónica. La dinámica de estas ondas subarmónicas en dos dimensiones es compleja debido a la aparición de dominios y defectos, (ver Fig. 9.3). En este trabajo se realiza un estudio it cuasi uni-dimensional, lo cual evita la dinámica de dominios y facilita el estudio teórico. Es importante notar que la condiciones de borde son importantes y la complejidad de las ecuaciones que describen este sistema son un problema complejo.

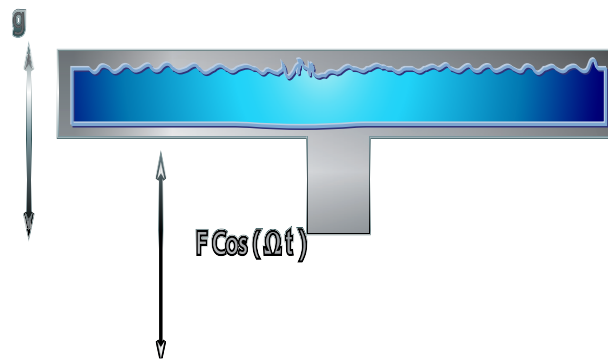


Fig. 9.6: La celda es forzada de forma paramétrica.

En este capítulo, examinamos teóricamente y experimentalmente los efectos del ruido sobre la configuración experimental estudiada por Faraday, obteniendo la descripción del fenómeno, el que es explicado también por una ecuación *cuasi*-reversible supercrítica cuántica. Debido a que el sistema es *cuasi*-reversible debemos también tomar en cuenta los efectos del ruido.

#### 9.4. Procedimiento Experimental.

Para examinar los efectos del ruido en una bifurcación supercrítica cuántica, se procede a perturbar paramétricamente un canal rígido cuasi unidimensional, es decir, cuyo largo es mucho mayor que su ancho (ver Fig. 9.7) cuyas dimensiones son 16,7cm de largo, 0,7cm de ancho y 1,0cm de profundidad, es importante notar que en estas condiciones el tamaño de los meniscos el cual puede ser estimado a 0,7cm, luego los estudios teóricos en estas condiciones son complejos, la mayoría de estos considera infinito o cero el sistema en la dirección horizontal, es decir, ignora la dinámica horizontal o el efecto de los meniscos.

Este último caso sera el marco donde nuestro sistema se desarrolla. En el interior del canal se coloca agua destilada. Para perturbar la canal utilizamos un vibrador electromagnético modelo *VTS80*, conectado a un amplificador y este al generador de señales modelo Agilent 33220A, la aceleración es medida con un acelerómetro de piezoelectric modelo *PCB340A65*. Al caracterizar la salida del vibrador se obtiene solo aceleración vertical puesto que la aceleración transversal es menor que el 2% de la aceleración vertical, esta aceleración horizontal fue medida por medio de conectar el piezo eléctrico en la dirección horizontal y estudiar como el sistema responde en el rango de parámetros en estudio. Luego, el generador de señales se programa con una función senoidal a la cual se le puede variar la frecuencia, y la aceleración del vibrador, utilizando el generador de señales, este sistema es manejado como un sistema de codimensión uno, puesto que se fija la frecuencia y se hace un barrido en la aceleración, todo el estudio se realiza en torno al punto de bifurcación, las amplitudes que se estudian en la vecindad de la bifurcación son pequeñas luego para poder medirlas se utiliza un láser que se refleja en la superficie libre del fluido y las variaciones de la altura se miden de una forma indirecta en una pantalla midiendo la amplitud de una

figura de Lissajou, en este caso se forma un ocho (ver Fig.9.8).

### 9.5. Montaje Experimental.

El montaje representado por la Fig. 9.8 muestra al vibrador de manera que el eje de este es perpendicular al canal, además el sistema puede ser inclinado. En la Fig. 9.9 se observa el amplificador de audio, generador de señales, osciloscopio y el acelerómetro que es el instrumental de medición que se utilizó. En la Fig. 9.10 se puede ver todo el montaje donde el láser apunta la superficie del canal y es reflejado en la pantalla.

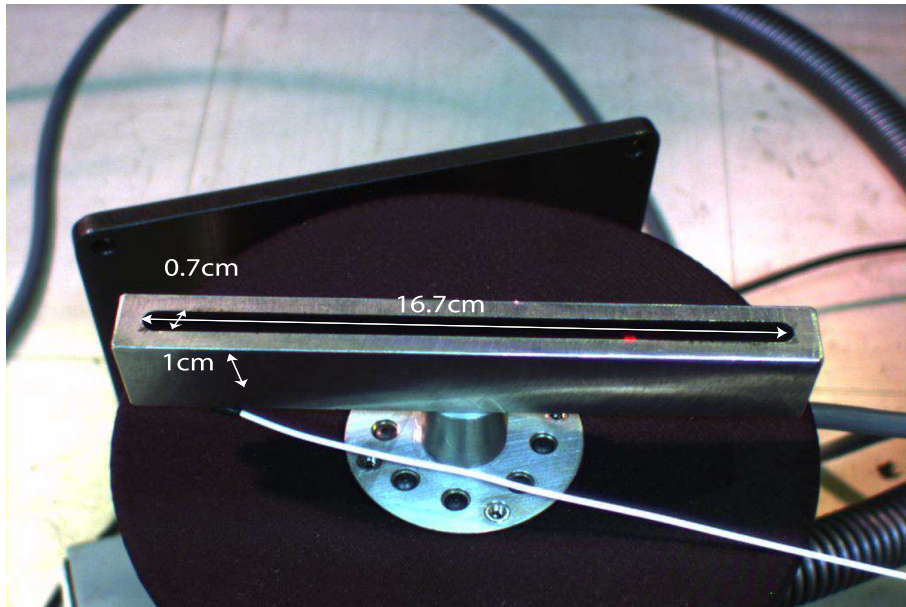


Fig. 9.7: Fotografía del montaje experimental. Una capa de 5 mm de agua es contenida en un canal de acero inoxidable que es forzado por un vibrador. La amplitud de la superficie es medida analizando el reflejo de un láser.

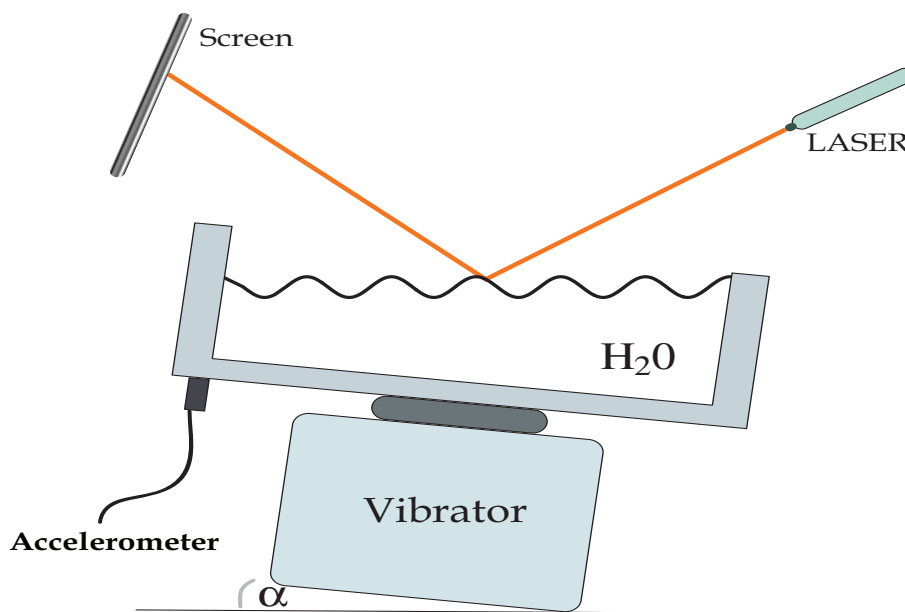


Fig. 9.8: Diagrama del montaje experimental. Se representa la celda inclinada y el agua por gravedad mantiene un nivel resultando una diferencia entre los meniscos extremos de la canal de acero inoxidable.

### 9.6. Método De Medición.

La medición de la amplitud de las ondas superficiales se realiza usando un sistema óptico propuesto por [17] y utilizado en [14] (ver Fig. 9.11).

Tomemos  $\partial_y \zeta = 0$  para hacer más sencillo el cálculo y tomando  $PP'$  como la distancia entre el plano  $Z = 0$  en la figura (9.11) y  $P$  y  $DD'$  como la distancia entre el punto de incidencia del láser y la pantalla. Cuando el plano tangente coincide con el plano  $Z = 0$  tenemos la siguiente relación

$$\tan \theta + 2\partial_x \zeta \sec^2 \theta = \frac{P}{D} \quad (9.39)$$



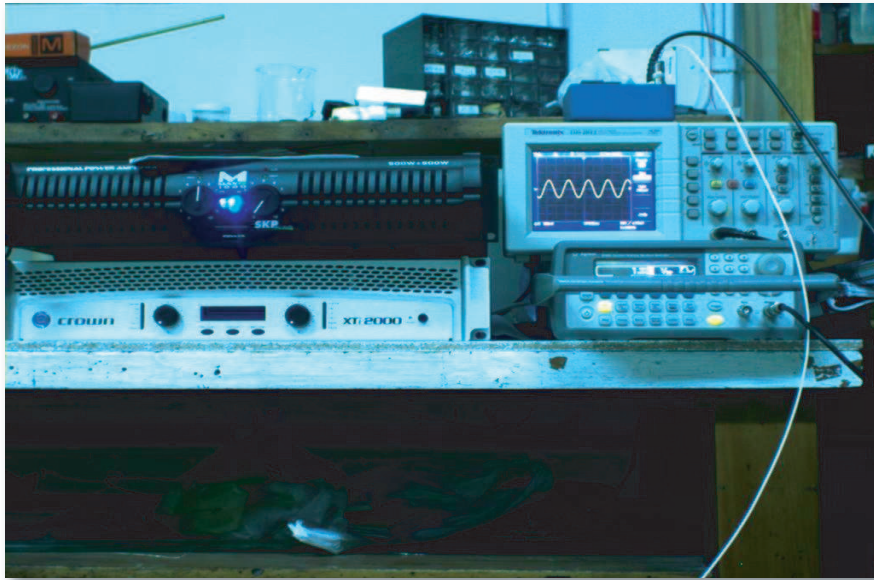


Fig. 9.9: En la fotografía se observa el amplificador de audio, generador de señales, osciloscopio y el acelerómetro.

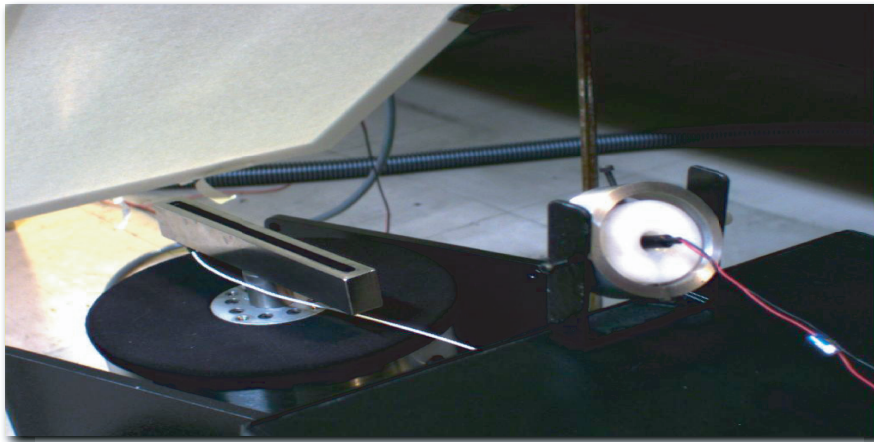


Fig. 9.10: En la fotografía se ve el montaje donde la canal esta sobre el vibrador, el láser que apunta sobre la superficie del fluido el cual se refleja en la pantalla.

$$\frac{PP'}{DD'} = \tan \theta \left( 1 - 4 \frac{\partial_x \zeta}{\sin 2\theta} \right), \quad (9.40)$$

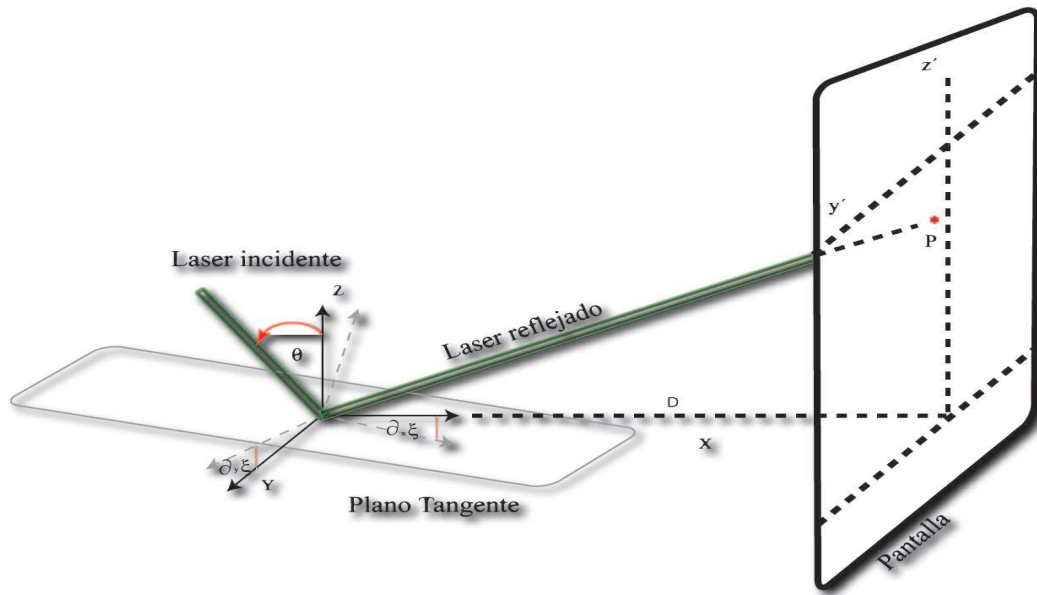


Fig. 9.11: El plano tangente tiene dos grados de libertad, que son la inclinación del eje x y del eje y, de esta forma se crea la figura de Lissajou (el ocho) que es proporcional a la amplitud de la onda superficial.

$$A_8 = K_1 + K_2 \partial_x \zeta. \quad (9.41)$$

Tenemos que la onda estacionaria es de la forma

$$\partial_X \zeta = k_x A \cos(k_x X) \sin(\omega_0 t) \quad (9.42)$$

$$\partial_Y \zeta = k_y A \cos(k_y Y) \sin(2\omega_0 t + \phi). \quad (9.43)$$

Luego el gradiente del plano tangente de la superficie del fluido es proporcional a la amplitud. Luego podemos estimar de una manera indirecta la amplitud de la onda estacionaria, donde  $K_1$  y  $K_2$  son constantes que depende del ángulo de incidencia del láser, luego la amplitud tiene una relación lineal con la amplitud del ocho Fig.9.12.

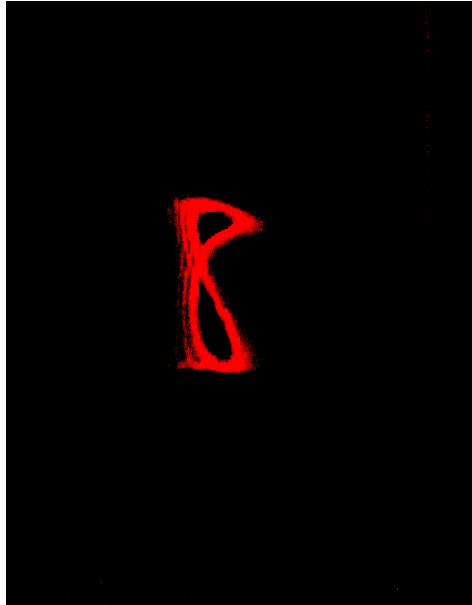
Reemplazando 9.42 en 9.41 se tiene

$$A_8 = K_1 + K_2 k_x A \cos(k_x X) \sin(\omega_0 t). \quad (9.44)$$

La onda cerca del punto de bifurcación tiene décimas de milímetro, esto dificulta su medición puesto que queremos caracterizar y medir el punto de bifurcación. La proyección del láser es una figura de Lissajou (ver Fig.9.12), la distancia que separa los extremos de la proyección es proporcional a la amplitud de la onda superficial en el caso de un modo simple de excitación en este experimento como ya mostramos. Este método no permite medir instantáneamente la amplitud ya que el movimiento del láser reflejado en la pantalla es muy rápido, luego medimos la amplitud de la figura de lissajou sobre la pantalla. La amplitud, es una amplitud promedio en el tiempo  $\langle A \rangle$ . Obtenida utilizando una cámara digital modelo AVT Marlin 80, la cual la calibramos con una regla para relacionar la longitud con los pixeles de la pantalla, para hacer la medición utilizamos el software ImageJ. El sistema puede ser inclinado en un ángulo  $\alpha$  pequeño como muestra el diagrama Fig.9.8, al inclinar el sistema se logra que este pierda simetría, es decir, los meniscos son distintos, también aparece una fuerza horizontal, debido a que el canal ahora es vibrado horizontalmente, produciendo frentes, emisión de ondas las cuales colisionan con las ondas subarmónicas generando una dinámica compleja.

## 9.7. Resultados

En el caso sin inclinación ( $\alpha = 0 \pm 0,05$  rad), la amplitud promedio  $\langle A \rangle$  de la onda en la vecindad del umbral de la inestabilidad de faraday es presentado en la Fig. 9.13 como una función de el parámetro aceleración normalizada para  $F = 95Hz$  y  $F = 60Hz$ . Para que el sistema sea fuertemente afectada por la dinámica quebrada por los meniscos hemos escogido frecuencias donde el tamaño de los meniscos son



*Fig. 9.12:* En la fotografía se ve el ocho que se mide en la pantalla, la existencia del ocho es debido a la naturaleza *cuasi*-unidimensional del canal. El modo a lo largo del ancho del canal responde a una frecuencia similar a la del forzaje y el modo a lo largo del canal es sub-armónico luego responde a la mitad de la frecuencia de forzaje, como se demostró este ocho es proporcional a la amplitud de la onda superficial más una traslación.

comparables a la amplitud, es decir, hay un fuerte acoplamiento entre los meniscos y la amplitud de la onda. Para ambas frecuencias, se observa detuning negativo (aproximadamente  $-2,5Hz$ ) a  $95Hz$ . La longitud de onda observada está de acuerdo con la aproximación de agua profunda y es del orden de  $3mm$ , Benjamin y Ursell (1954) trabajaron en la ecuación de Euler para un fluido no viscoso y mostraron que cada modo normal (para pequeñas amplitudes) actúa como un oscilador armónico cuya relación de dispersión es:

$$\omega_0^2 = \left[ gk + \sigma \frac{k^3}{\rho} \right] \tanh(kh)$$

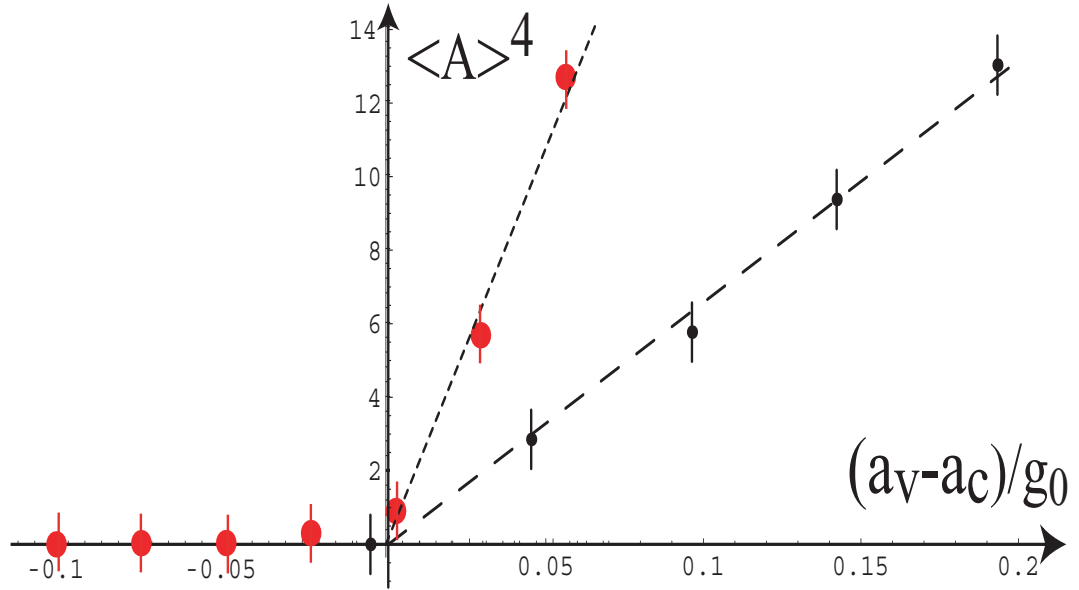


Fig. 9.13: Diagrama de bifurcación sin inclinación dan cuenta de una bifurcación supercrítica quíntica, los datos que estan sobre la linea segmentada con puntos pequeños son extraidos de [13], donde no se percataron que la bifurcación es supercritica quíntica, cuando el montaje está sin inclinación el sistema no exhibe una contribución de ruido aditivo significativo.

donde  $g$  es la aceleración de gravedad,  $k$  el número de onda,  $\rho$  la densidad del fluido,  $\sigma$  es la tensión superficial del fluido, y  $h$  la profundidad del fluido. La aproximación de agua profunda es  $\tanh(kh) \sim 1$  luego la relación de dispersión para agua profunda queda

$$\omega_0^2 = gk + \sigma \frac{k^3}{\rho}.$$

Para  $F = 95Hz$  se midió la relación de dispersión con los valores de la tabla 9.7 obteniendo una  $F = 95,69Hz$ , los valores de la tabla están en MKS

La aceleración del contenedor es  $a_v = \gamma\Omega^2$ , donde  $\gamma$  y  $\Omega = 2\pi F$  son la amplitud

$\lambda$	$\sigma$	$g$	$\rho$	$F$
0.00278	0.0295	9.8	1000	95.69

Tab. 9.1: Valores de los términos de la relación de dispersión, las unidades están en MKS.

de la vibración y la frecuencia angular respectivamente. La bifurcación es limitada superiormente por la eyección de gotas, es decir, a medida que aumenta la aceleración del vibrador la forma de la onda superficial cada vez es más puntiaguda dando origen a emisión de gotas a partir de un valor crítico de la aceleración. El comportamiento de  $\langle A \rangle$  como función  $a_v$  para la situación supercrítica satisface la ley  $\langle A \rangle \propto (a_v - a_c)^{1/4}$ , donde  $a_c$  es la aceleración crítica por la cual el sistema exhibe la inestabilidad de Faraday. Generalmente, una bifurcación supercrítica satisface la ley  $\langle A \rangle \propto (a_v - a_c)^{1/2}$ , la cual es consecuencia de una ecuación de amplitud cúbica no lineal [31] para el patrón. En verdad, los diagramas de bifurcación supercríticos mostrados en la Fig. 9.13 se deben a la saturación de ondas superficiales por no linealidades quinticas. De ahí, la inestabilidad de Faraday para una amplia gama de parámetros expone una bifurcación supercrítica quintica, desde el punto de vista de las bifurcaciones una bifurcación supercrítica quintica es de codimensión dos, es decir, no es una bifurcación genérica, sin embargo, para sistemas *cuasi*-reversibles como hemos mostrado en las secciones anteriores, es una situación genérica. Notamos que el estudio de este tipo de sistemas es interesante ya que permite estudiar bifurcaciones que son poco frecuentes.

Es importante notar que en las medidas experimentales sin inclinar no observamos un suavizamiento de la curva debido a las fluctuaciones, luego el sistema no tiene una fuente aditiva de ruido sino multiplicativo y el diagrama de bifurcación va como  $\epsilon^{1/4}$ , es decir, para amplitud cero el ruido es despreciable. Desde un punto de vista de ecuaciones de amplitud, esto queda modelado como (a la Stratonovich) [18]. Cuando está presente la inclinación la amplitud va como  $\epsilon^{1/4}$  (ver Fig. 9.14)

$$\partial_t A = \epsilon A - |A|^4 A + Af(|A|, \zeta(t)).$$

Luego uno espera una transición abrupta, es decir, continua pero no diferenciable en el diagrama de bifurcación. Debido a la naturaleza macroscópica del sistema, debemos

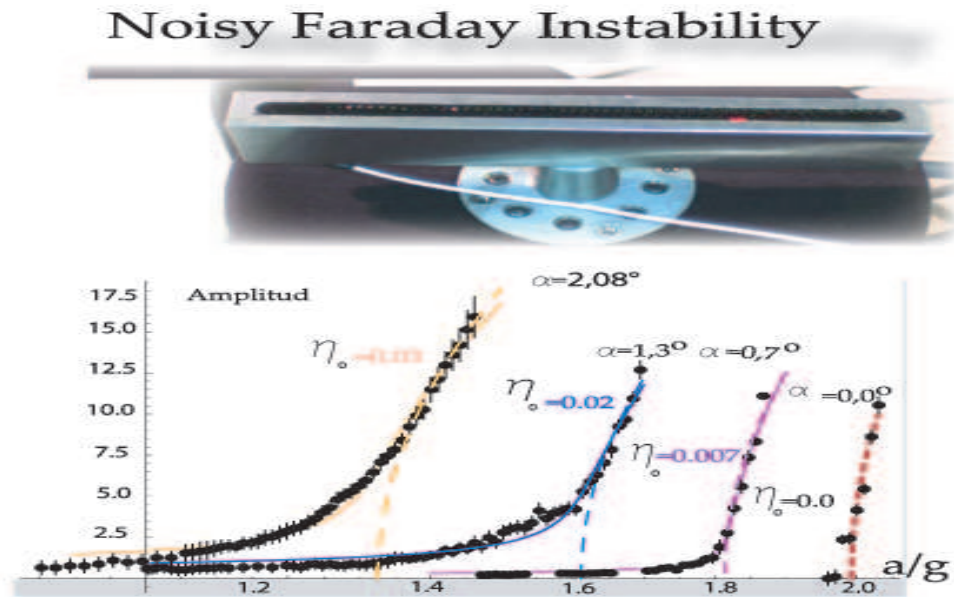


Fig. 9.14: Diagramas de bifurcación para la amplitud promedio de las ondas de Faraday para diferentes ángulos de inclinación,  $\alpha = \{2,08^\circ, 1,3^\circ, 0,7^\circ, 0,0^\circ\}$ , de izquierda a derecha respectivamente, a  $F = 95$  Hz. La amplitud de la onda  $\langle A \rangle$  es medida en unidades arbitrarias. Las líneas continuas son la moda  $\langle A \rangle_{mp}$  obtenida desde la fórmula (10.5), con las correspondientes intensidades de ruido aditivo  $\eta_0 = 0,035, 0,029, 0,007$  y  $0,0$ , también de izquierda a derecha, respectivamente. Las líneas segmentadas indican las curvas de bifurcación determinista.

considerar las fluctuaciones que exhibe este sistema. En general, una fuente fluctuante proporcional a la amplitud de la onda *ruido multiplicativo* no es un fenómeno robusto en la naturaleza, porque cualquier imperfección o perturbación en el montaje suma

términos que fluctúan constantemente y representan un *ruido aditivo* que no se anula cuando la amplitud es cero. Con el objetivo de estudiar como el ruido afecta esta bifurcación, se inclina ligeramente la canal en un ángulo  $\alpha$  (ver Fig. 9.8), tal que el eje de vibración también es inclinado ligeramente de la dirección vertical. La pequeña vibración horizontal induce emisión de ondas superficiales desde los meniscos con la onda estable sub-armónica, estableciéndose una complicada dinámica de ondas en la superficie. Aquí, la de los meniscos engendran una perturbación compleja las ondas superficiales sub-armónicas, en particular son una fluctuación aditiva, que es independiente del valor de la amplitud superficial. En la Fig. 9.14, se presentan las curvas de bifurcación para diferentes ángulos de inclinación para una frecuencia de excitación dada. Al inclinar el sistema la modificación de su forma y de su punto de bifurcación es abrupta para los pequeños ángulos impuestos. Por lo tanto, observamos que una pequeña modificación origina un drástico cambio en el diagrama de bifurcación, el cual es gatillado por las fluctuaciones.



## 10. EL RUIDO ES PRECURSOR DE PATRONES

### 10.1. Teoría del ruido en la inestabilidad de Faraday.

Explicaremos la bifurcación anterior y como el ruido afecta esta inestabilidad cuasi reversible. Consideraremos una capa de fluido incompresible la cual es forzada por una fuerza sinusoidal normal a la superficie libre, situación que modelaremos por la ecuación de Schrödinger no lineal amortiguada,

$$\partial_t \psi = -i\nu\psi - i|\psi|^2\psi - i\partial_{xx}\psi - \mu\psi - \gamma\bar{\psi} + \sqrt{\eta}\xi(\psi, t, x), \quad (10.1)$$

donde  $\psi(x, t)$  es un campo complejo uni-dimensional,  $\bar{\psi}$  es el complejo conjugado de  $\psi$ . El desplazamiento superficial de la interfaz plana  $h(x, t)$  y la velocidad potencial de la superficie libre  $\phi(x, t)$  son variables esclavas que son de la forma  $h = \psi e^{-i\Omega t/2} + c.c.$  y  $\phi(x, t) = -i\psi e^{-i\Omega t/2} + c.c.$ , respectivamente [4]. El parámetro detuning  $\nu$  es proporcional a la diferencia entre la frecuencia de la onda estacionaria observada y  $\Omega/2$ .  $\mu$  es el parámetro de amortiguamiento el cual es proporcional a la viscosidad cinemática del fluido y  $\gamma$  es la amplitud de la aceleración del forzamiento.  $\xi$  es una función estocástica que modela el gran número de variables rápidas eliminadas. Para  $\mu = \gamma = \eta = 0$ , la ecuación (10.1) es conocida como la ecuación de Schrödinger no lineal [10].

Un estado trivial de la ecuación (10.1) es el estado homogéneo  $\psi_0 = 0$ , el cual

representa el estado plano de la capa de fluido. Para detuning negativo,  $\nu < 0$ , el estado  $\psi_0 = 0$  llega a ser inestable a través de la inestabilidad estacionaria subcrítica en  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$ , el cual corresponde a una inestabilidad subarmónica de la capa plana del fluido. Dentro de la región (lengua de Arnold) el sistema tiene tres soluciones uniformes inestables  $\psi_0 = 0$ , y  $\psi_{\pm} = x_0 \pm i\sqrt{(\mu - \gamma)/(\mu + \gamma)}x_0$ , donde  $x_0 \equiv \sqrt{(\gamma - \mu)(-\nu + \sqrt{\gamma^2 - \nu^2})/2\gamma}$ . Estos tres estados emergen juntos a través de una bifurcación de pitchfork en  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$ , con  $\nu > 0$ . Sin embargo, para detuning positivo el estado homogéneo es estable sólo para  $\gamma < \mu$ , porque este estado exhibe una inestabilidad espacial en  $\gamma = \mu$ , la cual da origen a un estado periódico espacial con un número de onda  $k_c = \sqrt{\nu}$ . Este estado representa a ondas superficiales subarmónicas de la capa de líquido (ondas de faraday). Para estudiar esta inestabilidad espacial, se introduce un cambio de variable para detuning positivo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} &= Ae^{ik_c x} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{4\mu}|A|^2 Ae^{ik_c x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{A^3}{32\nu} e^{ik_c x} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c.c + h.o.t. \end{aligned} \quad (10.2)$$

El campo  $A(x, t)$  es la amplitud de las ondas de Faraday, y satisface la ecuación de amplitud supercrítica quíntica

$$\partial_t A = \Gamma A - \frac{9}{16\mu}|A|^4 A + \partial_{xx} A + A\zeta(A, x, t), \quad (10.3)$$

donde  $\Gamma \equiv \gamma - \mu \ll 1$  es el parámetro de bifurcación de la inestabilidad espacial y  $\zeta$  es un termino estocástico obtenido desde la ecuación estocástica (10.1) usando el método de la forma normal estándar (ver apéndice A en ref. [16]), el cual por argumentos genéricos de la forma normal estocástica puede ser modelado como la

suma de una función de ruido blanco, es decir,  $\zeta(A, x, t) = \sum_{i=1, j=1} \sqrt{\eta_{i,j}} \zeta_{i,j}(x, t) A^i \bar{A}^j$  con el valor medio y correlación cero  $\langle \zeta_{i,j}(x, t) \zeta_{p,q}(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t') \delta_i^p \delta_j^q$ . Aquí  $\eta_{i,j}$  representa la intensidad del ruido para diferentes términos.

El modelo determinista (10.3) tiene una familia de soluciones periódicas de la forma  $A(X, T) = 2\sqrt[4]{(\gamma - \mu - k_c^2)\mu/9} e^{ik_c x}$ . Por lo tanto, cerca de la bifurcación espacial, la amplitud de la onda estacionaria crece como la raíz cuarta del parámetro de bifurcación. Experimentalmente, esta bifurcación es abrupta (ver diagrama 9.13), por lo tanto, la naturaleza del ruido en este sistema es multiplicativa, esto es, el término estocástico es proporcional a la amplitud. Términos de orden superior, considerados en el modelo (10.1), como la disipación no lineal la cual es despreciada en el límite cuasi reversible, puede dar la bifurcación espacial supercrítica usual [4], porque estos términos producen una no linealidad cúbica en (10.3). Para detuning negativo, numéricamente la solución periódica desaparece por una bifurcación de saddle-node cerca de  $\gamma^2 = \mu^2 + \nu^2$ . Por lo tanto, para detuning negativo el estado homogéneo tiene una bifurcación supercrítica que da origen a estados de patrón.

Para entender las curvas de bifurcación presentadas en la figura 9.14 donde se va moviendo el punto de bifurcación, debemos tomar el hecho que la ecuación (10.3) ha sido derivada a través de un cambio de variables. Por lo tanto, los términos estocásticos deben ser interpretados a la Stratonovich [18], lo cual es equivalente a (interpretar a la Ito equivale a la Stratonovich agregando términos apropiados)

$$\begin{aligned} \partial_t A &= (\Gamma + \eta\tilde{\gamma})A - \eta\tilde{\beta}|A|^2 A - \left(\frac{9}{16\mu} + \eta\tilde{\delta}\right)|A|^4 A \\ &\quad + \partial_{xx} A + \sum_{i=0, j=0} \sqrt{\eta_{i,j}} \zeta_{i,j}(x, t) A^i \bar{A}^j, \end{aligned} \quad (10.4)$$

donde el promedio sobre realizaciones del ruido satisface  $\langle \zeta_{i,j}(x, t) A^i \bar{A}^j \rangle = 0$ . Por lo tanto, la evolución no estocástica del sistema tiene una dependencia explícita de la intensidad del ruido ( términos proporcionales a  $\eta$ ) y los coeficientes  $\{\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}\}$  son

funciones de  $\alpha$ ,  $\tilde{\gamma}$  renormaliza el umbral de la bifurcación, y  $\tilde{\beta}$  caracteriza el tipo de bifurcación; Para  $\tilde{\beta}$  positivo (negativo) la bifurcación es supercrítica (subcrítica) y  $\tilde{\delta}$  renormaliza la no linealidad cuántica. En el caso que este coeficiente sea negativo y más grande que  $9/16\mu$ , el ruido puede inducir biestabilidad de la onda superficial paramétrica, como se observa en [13]. En la figura (9.14) es claro que dado por una pequeña inclinación del sistema, el umbral de la bifurcación es drásticamente modificado. Para  $\alpha \sim 2^\circ$  el umbral de la bifurcación disminuye por un factor 2. Por lo tanto, los términos deterministas (es decir,  $\eta = 0$ ) son del mismo orden los términos estocásticos inducidos. La dinámica de la bifurcación es manejada por el comportamiento coherente del ruido, el cual da lugar a una dinámica efectiva (drift). El modelo (10.4) nos predice que el ruido puede transformar la bifurcación en una de tipo supercrítica (con no linealidad cubica). En este caso la dinámica es caracterizada por la intensidad del ruido y el punto de bifurcación  $\zeta, a_c$ . Sobre la aceleración crítica  $a_c$ , la amplitud promedio para el sistema levemente inclinado es una buena aproximación dada por la ley  $\langle A \rangle \sim (a_v - a_c)^{1/2}$ . Esto confirma entonces que el termino cubico inducido por el ruido cambia el tipo de bifurcación. Por lo tanto, la no linealidad cúbica inducida conduce la dinámica cerca del punto de bifurcación, esto es, la bifurcación llega a ser supercrítica . Recientemente se propuso la forma universal de la bifurcación supercrítica con ruido para el valor más probable de la amplitud  $\langle A \rangle_{\text{mp}}$  [1], la cual es

$$\langle A \rangle_{\text{mp}} = \sqrt{\frac{g_0^{-1}(a_v - a_c) + \sqrt{g_0^{-2}(a_v - a_c)^2 + 2g_0^{-2}\eta_0}}{2}}, \quad (10.5)$$

donde  $g_0$  es el parámetro del fiteo con unidades de aceleración y  $\eta_0$  es la intensidad del ruido aditivo. Note que en nuestro marco teórico, la curva de bifurcación de la amplitud de la onda promedio (la cual tiene una expresión complicada)es cerca de la curva de bifurcación del valor más probable [1]. Esto indica para el caso de la data

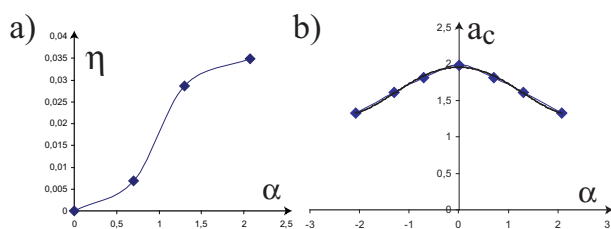


Fig. 10.1: Intensidad del ruido en función (a) de la aceleración crítica (b) del ángulo de inclinación  $\alpha$ .

presentada en la figura Fig. 9.14, desde la cual se puede obtener la intensidad del ruido  $\eta_0$ , el punto de bifurcación  $a_c$ , y  $g_0$  para los diferentes ángulos  $\alpha$ . En esta figura, las curvas segmentadas representan las bifurcación determinista. Desde el análisis, se pueden obtener ambos: la intensidad de ruido aditivo y la aceleración crítica como una función de  $\alpha$ , lo cual es descrito en la figura 10.1. Por lo tanto, por cambios de  $\alpha$ , se controla la intensidad de ruido aditivo y también el umbral de la bifurcación.

## 11. CONCLUSIONES

La bifurcación supercrítica quíntica es una inestabilidad crítica que conecta dos tipos de transiciones: la supercrítica con la subcrítica. La inclusión de pequeñas fluctuaciones estocásticas perturban el cuadro de esta bifurcación. Sin embargo, cuando la intensidad del ruido es del mismo orden de la corriente determinista, el ruido cambia drásticamente el umbral, el tipo, y la forma de la bifurcación, por lo tanto, el ruido fuerza la bifurcación. Se mostró que el ruido en la inestabilidad de Faraday es un ejemplo de esta última situación.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Gonzague Agez, Marcel G. Clerc, and Eric Louvergneaux, submitted to Phys. Rev. E (arXiv:nlin/0702057v1).
- [2] I.V. Barashenkov, M.M. Bogdan, and V.I Korobov, Europhys. Lett. **15**, 113 (1991).
- [3] N.V. Alexeeva, I.B. Barashennkov, and G.P. Tsironis, Phys. Rev. Lett. **84**, 3053 (2000).
- [4] W. Zhang and J. Viñals, Phys. Rev. Lett. **74**, 690 (1995) and references therein.
- [5] G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, Phys. Rev. A **74**, 043814 (2006).
- [6] Rocard, Y. [1943] Dynamique Générale des Vibrations (Masson et cie.,Paris) Chap. 14 pp. 224-236.
- [7] S. Longi, Phys. Rev. E **53**, 5520 (1996).
- [8] W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-induced transitions: Theory and applications in physics, chemistry and biology*, (Springer, Berlin, 1984).
- [9] M.G. Clerc, C. Falcon, E. Tirapegui, Phys. Rev. Lett. **94**, 148302 (2005); Phys. Rev. E **74**, 011303 (2006).

- 
- [10] A. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1985).
- [11] B. Denardo et. al., Phys. Rev. Lett. **68**, 1730 (1992).
- [12] J.N. Kutz et. al., Opt. Lett. **18**, 802 (1993).
- [13] S. Residori, R. Berthet, B. Roman, and S. Fauve, Phys. Rev. Lett. **88**, 024502 (2001).
- [14] S. Douady, Tesis de doctorado. 38, 40 (1989).
- [15] S. Douady, J. Fluid Mech. 221, 3383 (1990).
- [16] M.G. Clerc, C. Falcon, E. Tirapegui, Phys. Rev. E 74, 011303 (2006)
- [17] J. walker Scientific American, (1985), Dic., 108-111. "How the sun's reflection from water offers a means of calculating the slopes of waves"
- [18] N. G. van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry* (Elsevier North-Holland, Amsterdam, 1981).



# APÉNDICE

## A. FORZAMIENTO PARÁMETRICO

Estudiaremos aquí un ejemplo simple de forzamiento paramétrico el cual es un péndulo plano cuyo pivote lo hacemos vibrar verticalmente de una forma sinusoidal:

$$\vec{y} = \gamma \sin(\omega t) \hat{j}. \quad (\text{A.1})$$

Tal como el péndulo plano siente una gravedad efectiva que depende del tiempo, luego su lagrangiano es

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 - \frac{2\omega\gamma}{l} \cos(\omega t) \sin(\theta)\dot{\theta}) + mgl \cos(\theta) \quad (\text{A.2})$$

Note que los términos que son de una derivada total con respecto al tiempo del lagrangiano no contribuyen a las ecuaciones de movimiento, por lo tanto no son necesarios para obtener la ecuación de movimiento, luego el momento canonico conjugado de  $\theta$  es

$$P_\theta = ml^2\dot{\theta} - \omega\gamma ml \cos(\omega t) \sin(\theta) \quad (\text{A.3})$$

tomando la derivada temporal del momento angular, se obtiene:

$$\frac{dP_\theta}{dt} = ml^2\ddot{\theta} + \omega^2\gamma ml \sin(\omega t) \sin(\theta) - \omega\gamma ml \cos(\omega t) \cos(\theta)\dot{\theta}, \quad (\text{A.4})$$

derivando el lagrangiano con respecto a  $\theta$  se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\omega\gamma ml \cos(\omega t) \cos(\theta)\dot{\theta} - mgl \sin(\theta), \quad (\text{A.5})$$

---

obteniendo la ecuación de movimiento de un péndulo plano forzado paramétricamente es

$$\theta_{tt} = -\frac{g}{l}\left(1 + \frac{\omega^2\gamma}{g}\sin(\omega t)\right)\sin(\theta). \quad (\text{A.6})$$

si consideramos la cadena de péndulos planos acoplados, que están inmersos en un fluido con viscosidad pequeña se obtiene la ecuación de Sine-Gordon:

$$\theta_{tt} = -\frac{g}{l}\left(1 + \frac{\omega^2\gamma}{g}\sin(\omega t)\right)\sin(\theta) - \mu\theta_t + k\partial_{xx}\theta. \quad (\text{A.7})$$

## B. INESTABILIDAD ESTACIONARIA $O^2O$

La inestabilidad estacionaria  $O^2O$  (en notación de Arnold) representa la confluencia de tres valores propios en el origen del plano complejo y dos autovectores fue caracterizada por (Clerc et al., [12]) donde proponen un ejemplo el péndulo de Lorenz, el operador lineal que caracteriza esta inestabilidad es

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

la dinámica de este operador lineal esta dada por la siguiente forma normal mecánica:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= F(x, z) + \dot{x}G(x, z), \\ \dot{z} &= K(x, z). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

y su forma normal mecánica asintótica *cuasi*-reversible hasta su termino dominante

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \epsilon - x^2 + azx \pm z^2 - \nu\dot{x}, \\ \dot{z} &= \rho + \gamma x + \mu z, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde  $\nu, \mu, \gamma$  son del orden  $\epsilon^{1/4}$  y  $\rho$  es del orden  $\epsilon^{3/4}$ . El sistema consiste de un péndulo que oscila en un plano vertical fijo con respecto al soporte, el cual gira en torno a la vertical del eje del soporte teniendo la siguiente energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}(I + Ml^2 \sin^2 \theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 \quad (\text{B.4})$$

donde  $M$  es la masa de la partícula,  $L$  es longitud del péndulo,  $I$  es el momento de inercia de el soporte con respecto al eje vertical de rotación. La energía potencial es

$$V = -MgL \cos \theta \quad (\text{B.5})$$

y el Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2} \frac{P_\theta^2}{ML^2} + \frac{1}{2} \frac{P_\phi^2}{(I + ML^2 \sin^2 \theta)} - MgL \cos \theta. \quad (\text{B.6})$$

Al considerar los efectos de disipación como la ley de Stokes, es decir, como un roce húmedo se llega a las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} (ML^2 + I_2)\ddot{\theta} &= \frac{ML^2 + I_1 - I_3}{2} \sin(2\theta)\dot{\phi}^2 - MgL \sin(\theta) - \tilde{\mu}\dot{\theta}, \\ \frac{[(I + I_3 + (ML^2 + I_1 - I_3) \sin^2 \theta)\dot{\phi}]}{dt} &= \tau - \tilde{\mu}\dot{\phi}, \end{aligned}$$

al expandir estas ecuaciones en torno a sus puntos de equilibrios se obtiene la forma normal asintótica hasta el término dominante.

## C. CONFUSIÓN DE FRECUENCIAS

Un ejemplo clásico de confusión de frecuencias es la inestabilidad de las alas de un avión estudiado por Rocard. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos que dan cuenta de la torsión y flexión de un ala de avión ver Fig. (C.1), entonces para pequeñas oscilaciones estos modos están acoplados elásticamente, es decir:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= -\Omega_1^2\alpha + \mu\beta \\ \ddot{\beta} &= \Omega_1^2\beta + \mu\alpha.\end{aligned}$$

Sin embargo, cuando el avión se mueve de acuerdo a como sea la torsión, el flujo de aire induce un torque, dando origen a una flexión de la forma

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= -\Omega_1^2\alpha + \mu\beta + cv^2\beta \\ \ddot{\beta} &= -\Omega_2^2\beta + \mu\alpha.\end{aligned}$$

donde  $v$  es la velocidad del avión. Su operador lineal es:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & M + cv^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ M & 0 & -\omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si uno estudia la estabilidad de la solución  $\alpha = \beta = 0$  para  $v = 0$  el sistema tiene dos frecuencias propias pero para un valor crítico de  $v$  los valores propios y

sus complejos conjugados colisionan a una frecuencia dada y después salen del eje imaginario dando origen a una inestabilidad. Es importante notar que en este modelo la velocidad es un modo neutro que satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = 0. \quad (\text{C.1})$$

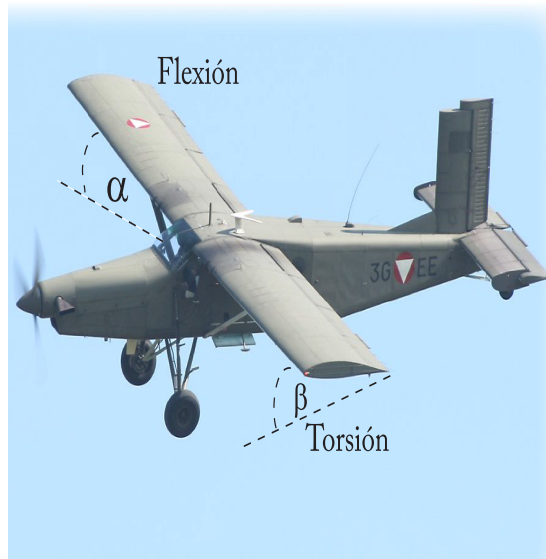


Fig. C.1: Confusión de frecuencias.

## D. PUBLICACIONES

Aceptada en la Int. J. of Bifur. Chaos.

A generic stationary instability that arise in quasi-reversible systems is studied. It is characterized by the confluence of three eigenvalues at the origin of complex plane with only one eigenfunction. We characterize the dynamics through the normal form that exhibits in particular, Shilnikov chaos, for which we give an analytical prediction. We construct a simple mechanical system, Shilnikov particle, which exhibits this quasi-reversal instability and displays its chaotic behavior.

Sometida a la Phys. Rev. Lett.

An experimental and theoretical study on the effect of noise on a supercritical bifurcation leading to the parametric amplification of surface waves in a quasi-one-dimensional system is reported. At the onset of Faraday instability, surface waves amplitude increases with the fourth root of bifurcation parameter for positive detuning. From a prototype model—parametrically driven damped nonlinear schrodinger equation—we deduce the amplitude equation for the standing waves and the amplitude law. Inclusion of stochastic fluctuations changes drastically the threshold, the type and



the shape of bifurcation. Experimentally this dynamical behavior is verified through a tilted configuration of a traditional Faraday setup.

















































