

Cuaderno de Clases: CI41A

Capítulo A1: Análisis hidráulico de sistemas de tuberías.

Javier A. Rovegno Campos

19 de junio de 2007

Licencia del Documento: Creative Commons 3.0 [Detalles de la Licencia]¹

Este documento contiene una recopilación de los apuntes, tomados por el Autor, en las clases de Hidráulica del Año 2006 impartidas en la FCFM por los profesores:

- Aldo Tamburrino
- Yarko Niño

Datos del Autor:

Correos del Autor: jrovegno@ing.uchile.cl , tatadeluxe@gmail.com

Página Personal del Autor: <http://www.cec.uchile.cl/~jrovegno/>

Este Documento forma parte de la primera etapa BETA del *Proyecto Colaborativo WikiCursos*.

Para más información sobre WikiCursos visitar:
<http://ideaschile.wordpress.com/>

¹<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

CONTORNOS CERRADOS:

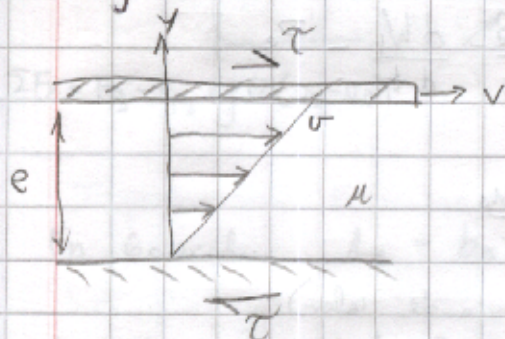
1. Análisis hidráulico de sistemas de tuberías.
 - 1.1. Introducción. Repaso de los conceptos de resistencia de los fluidos, régimen de escurrimiento, capa límite y pérdidas de energía.
 - 1.2. Singularidades (ensanche, contracción, difusor, curvas, orificios, etc). Aplicaciones.
 - 1.3. Sistemas de tuberías. Aplicaciones de sistemas de tuberías incluyendo estanques , válvulas intermedias y bombas. Bombas centrifugas. Tipos de bombas. Altura dinámica de elevación. Curvas características. Cavitación, Altura neta positiva de aspiración. Aplicaciones.
 - 1.4. Redes de tuberías. Método de Hardy Cross. Aplicaciones.
2. Régimen impermanente en tuberías.
 - 2.1. Aspectos generales. El fenómeno golpe de ariete.
 - 2.2. Método inelástico. fenómenos de oscilación en masa. Ecuaciones básicas. Aplicaciones.
 - 2.3. Método elástico. Ecuaciones del fenómeno.
 - 2.4. Métodos de solución: Métodos gráficos, analíticos y computacionales. Aplicaciones.

A. Contornos Cerrados

27/07/05

1.1 Repaso de Fluidos

Flujo de Couette:



$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} = \frac{U}{e}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \Rightarrow \tau_0 = \mu \frac{U}{e}$$

Navier Stokes: - Fluido Newtoniano - Fluido incompresible

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$\underbrace{-\nabla p + \vec{g}}_{1^{\text{a}} \text{ ley Newton}} \quad \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{u}}_{\text{ley constitutiva}}$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{variación Instantánea}} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}_{\text{componente Advection}}$$

- Fluido Incompresible. $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

Conservación de la masa: $\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) = 0$ (gases y líquidos)

Ley de Avogadro

N-S: - Trabajando propiedades del producto x

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \nabla B = \vec{u} \times \vec{\omega} - \nu (\nabla \times \vec{\omega})$$

Flujo: ($\vec{\omega} = 0$) Irrotacional $\Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \nabla B = 0$

Fluido ideal ($\nu = 0$) $\Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \nabla B = \vec{u} \times \vec{\omega}$

Caso Permanente o una LC

$$B_1 = B_2 + \frac{\nu}{\rho} \int_1^2 (\nabla \times \vec{\omega}) d\vec{r}$$

2da ley de la Termodinámica.

29/07/05

- Teo de Transporte de Reynolds para la Energía.

$$\rho Q (g(B_2 - B_1) + (u_2 - u_1)) = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW_f}{dt} - P_e$$

Si solo hay pérdida friccional

$$B_1 = B_2 + \Delta_f \Rightarrow \Delta_f = \frac{u_2 - u_1}{g}$$

- Sistema Adiabático (Sin transferencia de calor)

$$B_1 = B_2 + \Delta_f + \Delta_s + \frac{|P_T|}{\rho Q} - \frac{|P_B|}{\rho Q}$$

Pérdida Friccional

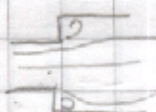
$$\Delta_f = J L \quad \text{donde}$$

$$J = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \text{Darcy-Weisbach}$$

1.2 Singularidades

- Cambios bruscos de vel (magnitud y sentido) - Desaceleración del flujo

ensanche



$$B_1 = B_2 + \Delta_s \Rightarrow \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \Delta_s$$

Contracción o Entrada

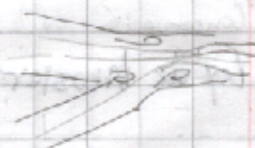


(Singular)
Codo

(Friccional)
curvatura



Exposición



Flujo TUBERÍA CURVA (Pérdida friccional)

Flujo laminar:

Prandtl (1949)

$$\frac{f}{f_0} = 0,37 \left[\frac{1}{2} \text{Re} \sqrt{\frac{D}{2r_c}} \right]^{0,36}$$

Adler (1934)

$$\frac{f}{f_0} = 0,1064 \left[\text{Re} \sqrt{\frac{D}{2r_c}} \right]^{1/2}$$

$$\text{Rango: } \text{Re} \sqrt{\frac{D}{2r_c}} \geq 630$$

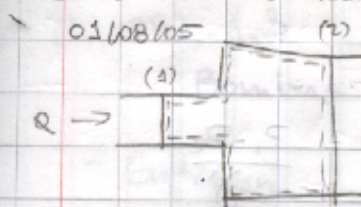
Flujo turbulento:

White (1932)

$$\frac{f}{f_0} = 1 + 0,075 \text{Re}^{1/4} \left(\frac{D}{2r_c} \right)^{1/2}$$

f_0 : factor de fricción tubería recta

Perforada de salida o ensanche



Exprimatel.: $F_{p1} = p_1 \cdot A_2$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} (v_2 - v_1)$$

$$\Sigma F_x = F_{p1} - F_{p2} = \rho Q (v_2 - v_1)$$

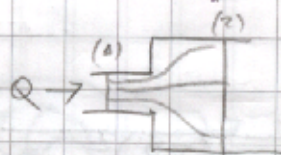
$$B_1 - B_2 = \Delta s \Rightarrow$$

Fórmula de Borda.

$$\Delta s = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

En General.

$$\Delta s = k_s \frac{v^2}{2g}$$



$$\Delta s = k_{s1} \frac{v_1^2}{2g} = k_{s2} \frac{v_2^2}{2g}$$

// Usando Borda.

$$\Delta s_1 = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

$$\text{// } Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

$$\Delta s_2 = \left(1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right)^2$$

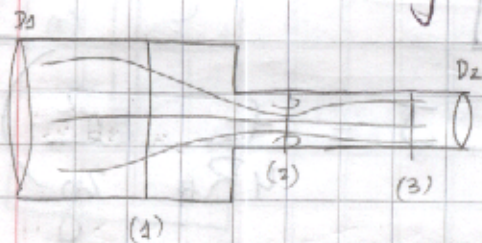
$$\Delta s_2 = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2 = \left(\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 - 1\right)^2$$

Caso especial ($v_2=0$) Estanque grandes dimensiones.

$$\Delta s = \frac{v^2}{2g}$$

$$k_s = 1 \quad (\text{Descarga})$$

Contracción de Flujo:



$$B_1 \approx B_2$$

$$B_2 = B_3 + \Delta s$$

$$\Rightarrow B_1 = B_3 + \Delta s$$

$$\text{Borda: } \Delta s = \frac{(v_2 - v_3)^2}{2g}$$

Def Coef. de Contracción (μ)

$$A_2 = \mu A_3 \Rightarrow \frac{v_2}{v_3} = \frac{1}{\mu}$$

* Kirchhoff: $\mu = \frac{\pi}{\pi + 2} \approx 0,611$

Teórico.

$$k_s = 0,49$$

Empírico

$$k_s = 0,5$$

(Entrada)

Placa Orificio



$$\Delta z = B_1 - B_2 = \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \gamma} = \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$$

Válvulas

$$Q = \sqrt{\gamma \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \frac{H}{(1 + k_e + k_v + \frac{fL}{D})}}$$

Ver: Manual de Pérdidas singulares. (Idelchik)

Pérdida Friccional.

Darcy - Weisbach (Para sección cualquiera)

$$\Delta f = \frac{f \cdot L}{4 R_H} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta f = J \cdot L \quad \wedge \quad J = \frac{f}{4 R_H} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta f = J \cdot R_H \cdot J$$

Caso de flujos con Re bajos, los valores de k dependen de Re (Relaves)
Hooper (1992) propone:

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

$$k = \frac{K_1}{Re} + \frac{K_2}{1 + 1/D_1}$$

D_1 : diámetro interior tubería
puergos

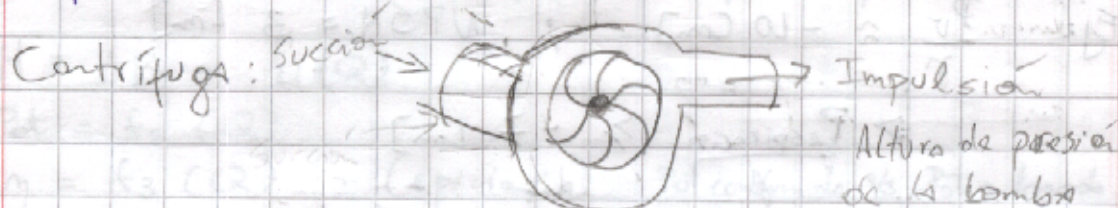
K_1 : coef para $Re = 1$

(03-08) 1.3. Sistema de Tuberías : $H \geq 9.11$ *

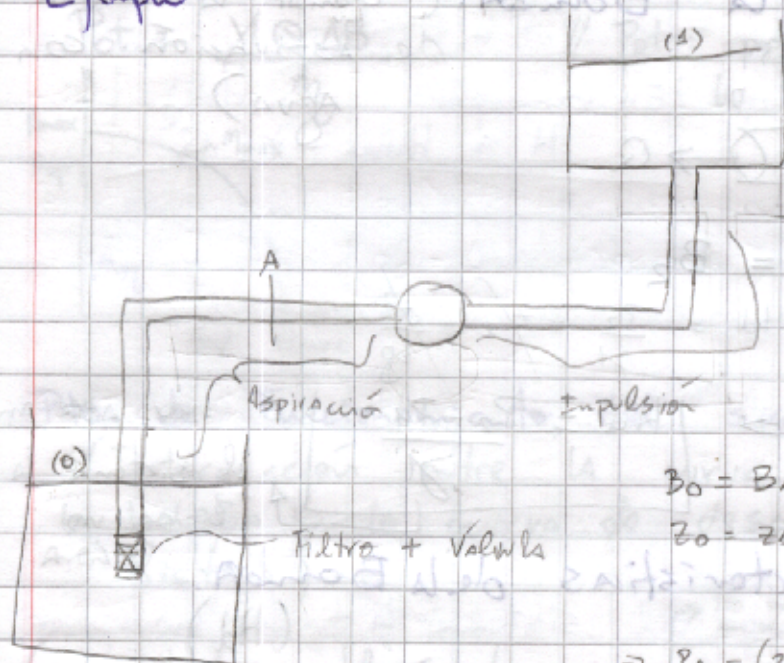
Bombas hidráulicas

- Entregan energía al sistema ($++B$)
- Aumentan los gradientes de presión $\rightarrow (++Q)$

Tipos de Bombas



Ejemplo.



es $H = cte$
Para el ΔP depende de la densidad del fluido

$$B_0 = B_A + \Delta f + \Delta s$$

$$z_0 = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + \Delta f + \Delta s$$

$$\Rightarrow \frac{p_A}{\gamma} = \underbrace{(z_0 - z_A)}_{< 0} - \underbrace{\frac{v_A^2}{2g}}_{< 0} - \underbrace{\Delta f - \Delta s}_{< 0}$$

En Bombas

$$\Delta B + B_0 = B_1 + \Delta f + \Delta s$$

$$\underbrace{\Delta B}_{H_d} = \underbrace{B_1 - B_0}_{H_e} + \underbrace{\Delta f + \Delta s}_{f(Q)}$$

$$\Rightarrow H_d = H_e + \Delta f + \Delta s$$

$$\frac{p_A}{\gamma} < 0$$

$\gamma \rightarrow$ mayor que P_{atm} .

H_d : altura dinámica de elevación

* **N.P.S.H :** $\frac{P_{aspiración}}{\gamma} = \frac{P_{sución}}{\gamma} + \frac{P_{succión}}{\gamma} - \frac{P_v}{\gamma}$ (Carga de succión positiva neta)

$\frac{P_{aspiración}}{\gamma} \geq \frac{P_v}{\gamma} + \text{NPSH}$ (presión de vapor)

$[\text{NPSH}] = [\text{m}]$

Ej: $\frac{P_v}{\gamma} \approx -10 \text{ [cm]}$; $\text{NPSH} = 3 \text{ [m]}$

$\Rightarrow \frac{P_{aspiración}}{\gamma} \geq -7 \text{ [m]}$

* **Cebado de la Bomba.** (Llamar la tubería de aspiración con agua)

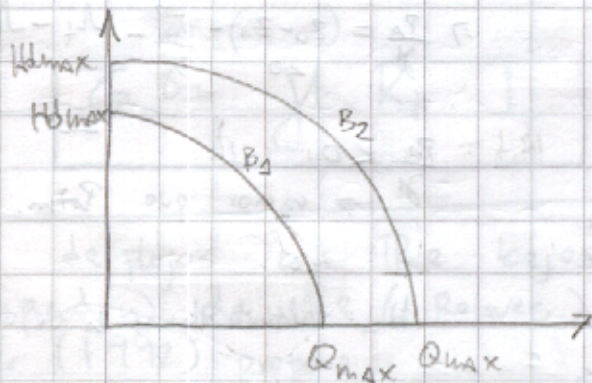


$B_1 + H_d = B_2$

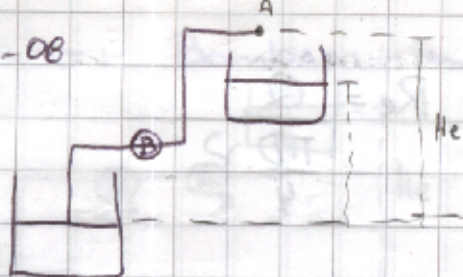
$\frac{P_1}{\gamma} = z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - H_d = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$

$\Rightarrow H_d = \frac{P_2 - P_1}{\gamma}$ (Si hay aire en el sistema la bomba no funciona)

Curvas Características de la Bomba. (H_d)



GT 05-08



$$H_d = H_e + \frac{Q^2}{2g} + \sum L_f + \sum L_s$$

$$(Q)_{tot} + gH = 10H$$

Curva característica: (fija, dada por el fabricante)

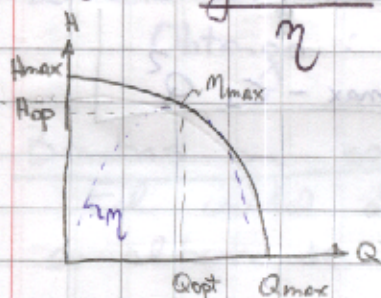
$$H \equiv \Delta B = f_1(Q)$$

$$Pot = f_2(Q)$$

$$\eta = f_3(Q) \quad (\text{eficiencia}) \quad Pot \text{ consumida} \propto Pot \text{ entregada.}$$

$$Pot = \frac{\gamma Q \Delta B}{\eta}$$

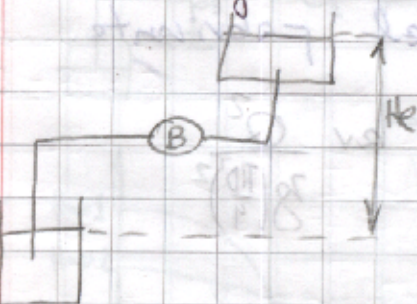
// Pot: potencia que consume la Bomba.



Pto. de Funcionamiento del sistema.

(Intersección entre la curva característica de la bomba y la curva de descarga (carga) del sistema)

Curva de carga del Sistema.



$$H_d = H_e + L_f + L_s$$

$$L_f = \frac{fL}{D} \cdot \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2}$$

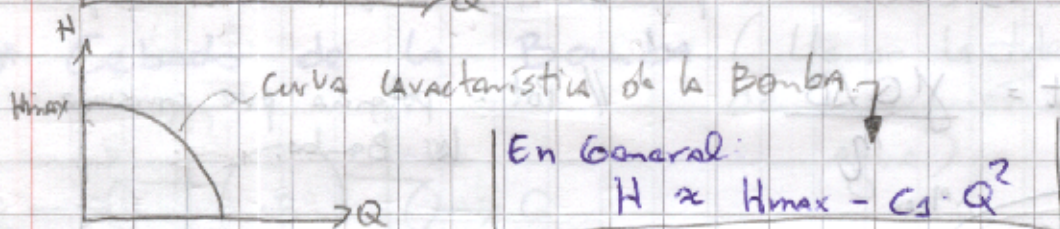
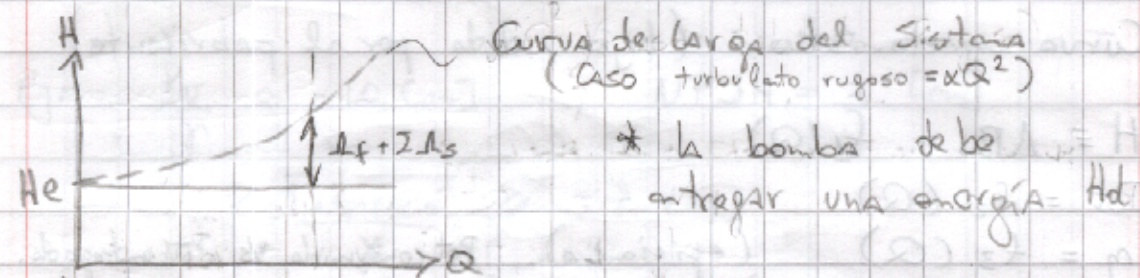
$$L_s = k_s \cdot \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2}$$

Pto más alto donde eleva el flujo. en la descarga.

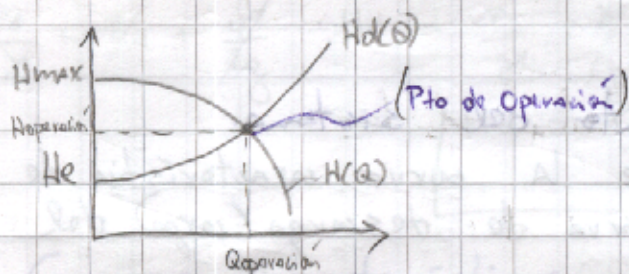
Curva de carga del sistema

$$f = f_m(Re, \frac{\epsilon}{D}) \quad ; \quad Re = \frac{Q}{\frac{\pi D \cdot \nu}{4}}$$

$$\Rightarrow H_d = H_e + f_m(Q)$$

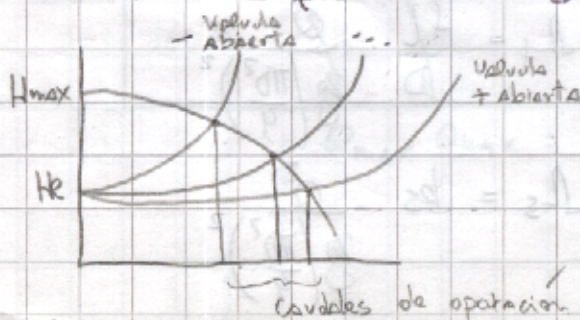


Pto de Operación del Sistema.

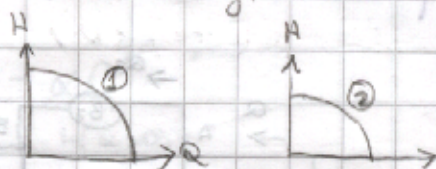
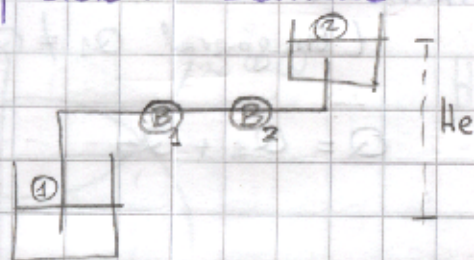


La curva de descarga del sistema la puede modificar con VALVULAS, la curva característica es "Fija" y es dada por el fabricante.

$$H_d = H_e + f_f(Q) + \sum f_s(Q) + k_v \frac{Q^2}{8 \left(\frac{\pi D}{4} \right)^2}$$



Ejercicio: Bombas en serie. (++ Energía)



Pto de Operación: $H = H_d$

- $H = H_{\max} - C_1 \cdot Q^2$
- $H_d = H_e + \underbrace{L_f(Q)}_{f_n(Q)} + \underbrace{I L_s(Q)}_{\frac{fL}{D} \cdot \frac{Q^2}{2g(\frac{\pi D^2}{4})^2} + I h_s \cdot \frac{Q^2}{2g(\frac{\pi D^2}{4})^2}}$

$\Rightarrow H_{\max} - C_1 \cdot Q^2 = H_e + \frac{fL}{D} \cdot \frac{Q^2}{2g(\frac{\pi D^2}{4})^2} + I h_s \cdot \frac{Q^2}{2g(\frac{\pi D^2}{4})^2}$

De esta ec.

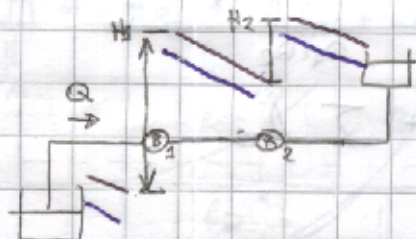
Obtengo: $Q_{\text{operación}}$; $H_{\text{operación}} = H_{\max} - C_1 Q_{\text{operación}}^2$

Bombas en serie:

El caudal de elevación es el mismo pero su altura de elevación se suma.

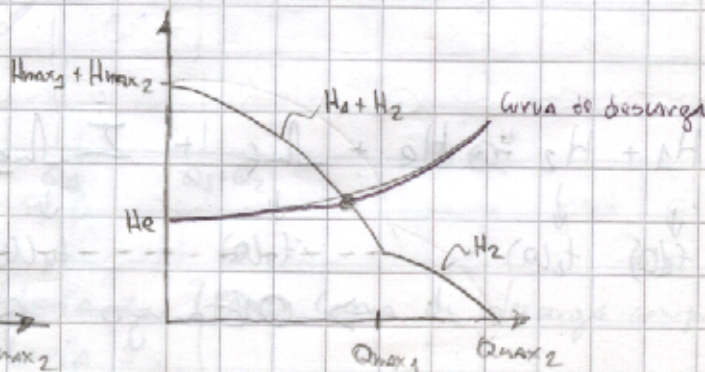
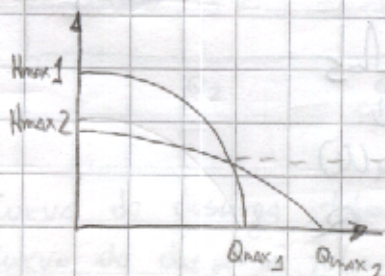
$$Z_1 + (H_1 + H_2) = Z_2 + L_f + I L_s$$

$$H_1 + H_2 = H_e + L_f + I L_s$$



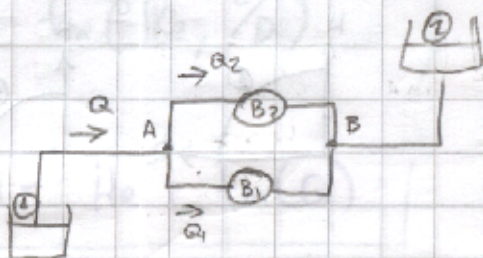
LE: Línea de energía

LCP: Línea de carga de potencial



Ejercicio: Bombas en Paralelo.

(En general $Q_1 \neq Q_2$)



$$Q = Q_1 + Q_2$$

Bombas en Paralelo:

Cuando quiero obtener un mayor caudal

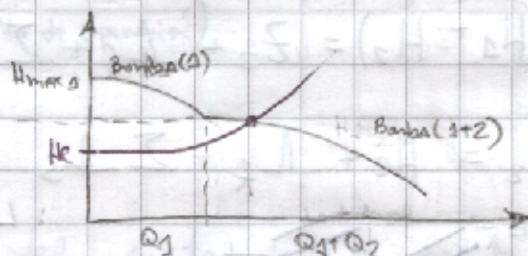
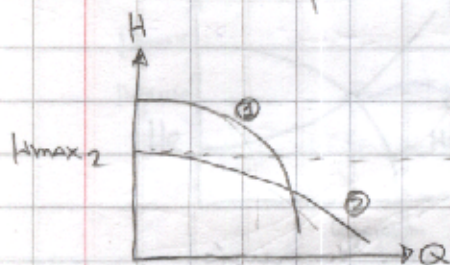
RAMA 1 $B_A + H_1 = B_B + \Delta h_{fAB_1} + \sum \Delta h_{sAB_1}$

RAMA 2 $B_A + H_2 = B_B + \Delta h_{fAB_2} + \sum \Delta h_{sAB_2}$

$$\Rightarrow H_1 = (B_B - B_A) + \Delta h_{fAB_1} + \sum \Delta h_{sAB_1}$$

$$H_2 = (B_B - B_A) + \Delta h_{fAB_2} + \sum \Delta h_{sAB_2}$$

Por simplicidad suponemos un sistema simétrico.



$$z_1 + (H_1 + H_2) = z_2 + \Delta h_f + \sum \Delta h_s$$

$$H_1 + H_2 = H_e + \Delta h_f + \sum \Delta h_s$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$f_1(Q) \quad f_2(Q)$$

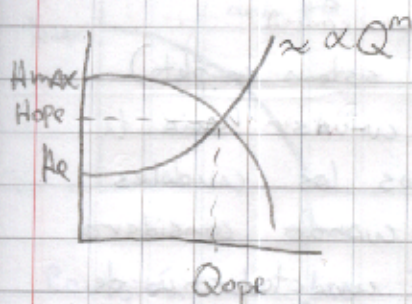
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$f_3(Q) \quad f_4(Q)$$

$\Rightarrow$ Obtengo Q

Est. (08/08)

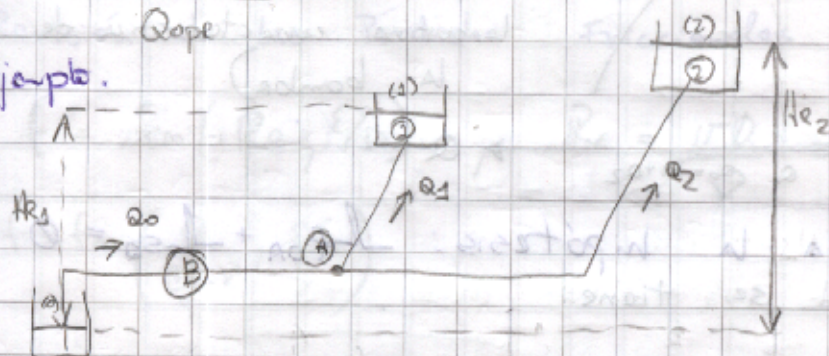
($m \leq 2$)



$$H = H_{\max} - \alpha Q^2$$

$L(\alpha > 0)$

Ejemplo.



$$z_0 + H = z_1 + \Delta f_{0A} + \Delta f_{A1} + \Delta s_{0A} + \Delta s_{A1}$$

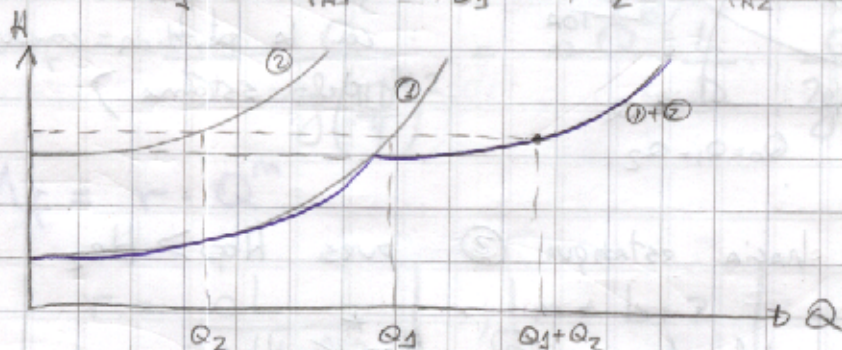
$$z_0 + H = z_2 + \Delta f_{0A} + \Delta f_{A2} + \Delta s_{0A} + \Delta s_{A2}$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 ; H = H_{\max} - \alpha Q_0$$

Ventajas del análisis gráfico previo a resolver matemático.
Supongamos inicialmente que:

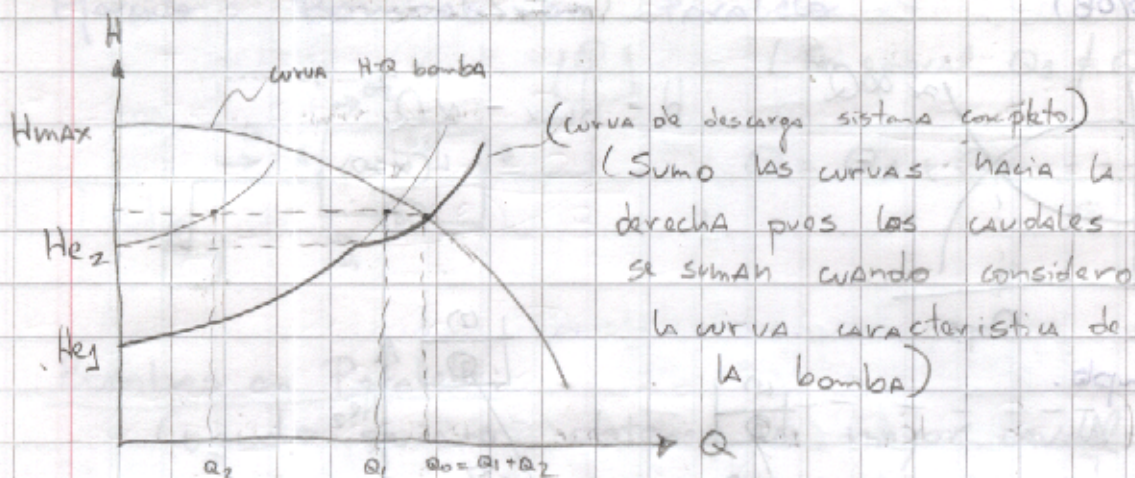
$$\Delta f_{0A} + \Delta s_{0A} = 0$$

$$\Rightarrow H = H_1 + \Delta f_{A1} + \Delta s_{A1} = H_2 + \Delta f_{A2} + \Delta s_{A2}$$

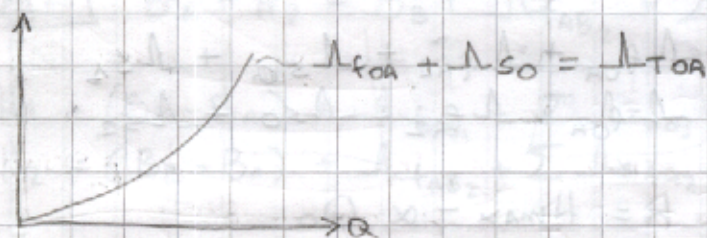


Parábolas en paralelo.

② Curva de descarga tubería 2. } ①+② Curva de descarga compuesta
① Curva de descarga tubería 1. }



* Volviendo a la hipótesis: $L_{foa} + L_{so} = 0$
 En realidad se tiene:



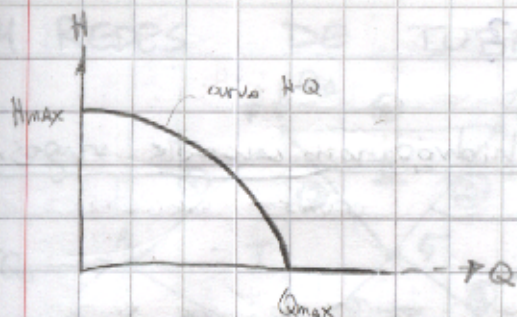
$$\Rightarrow H = H_{e1} + L_{fA1} + L_{s1} + \underline{L_{TOA}} = H_{e2} + L_{fA2} + L_{s2} + \underline{L_{TOA}}$$



(Se suma L_{TOA} en serie con la pérdida compuesta del sistema.)

Hay caudal hacia estanque ② pues $H_{op} > H_{e2}$

→ No hay caudal hacia ② $H_{op}^* < H_{e2}$
 Aún cuando ($H_{max} > H_{e2}$)



$$H = H_{max} - \alpha Q^2$$

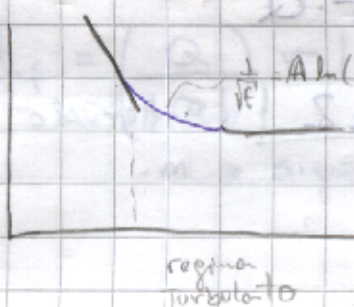
$$Q_{max} = \sqrt{\frac{H_{max} - H}{\alpha}}$$

Revisión de las Pérdidas Friccionales

$$f = f_m(Re, \epsilon/D), \quad Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{Q}{\frac{\pi D \nu}{4}}$$

$$f = f_m\left(\frac{Q}{\frac{\pi D \nu}{4}}, \epsilon/D\right)$$

$\log f$



1) Aísla una curva para ϵ/D fijo

2) Define la curva por tramos

3) Tramo intermedio transformo por ley de potencia

$$\log Re = \log\left(\frac{Q}{\frac{\pi D \nu}{4}}\right)$$

Ley de Potencia: $f = a Q^b$ (0,6 pts)

$$\Delta f = \frac{fL}{D} \cdot \frac{Q^2}{2g\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} = a Q^b \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{Q^2}{2g\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta f = r \cdot Q^m$$

$$\boxed{r = \frac{aL}{D 2g\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2}}; \boxed{m = b + 2}$$

Rango de la constante b ?

* Límite superior: Pared hidrodinamicamente rugosa

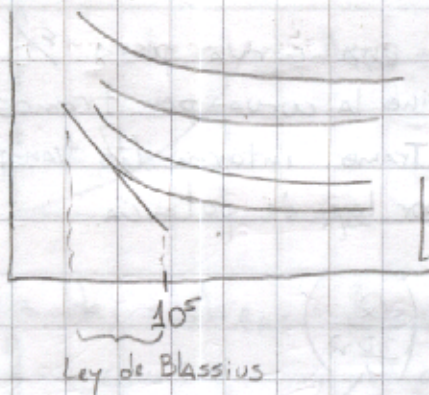
$$b = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = A \log\left(\frac{E}{D}\right) + B$$

* Límite inferior: Pared hidrodinamicamente lisa

Ley de Blasius: máx pendiente ($0,316 Re^{-1/4}$)
 $\Rightarrow b = -1/4$

$$m = b + 2 = -1/4 + 2 \Rightarrow m = 1,75$$

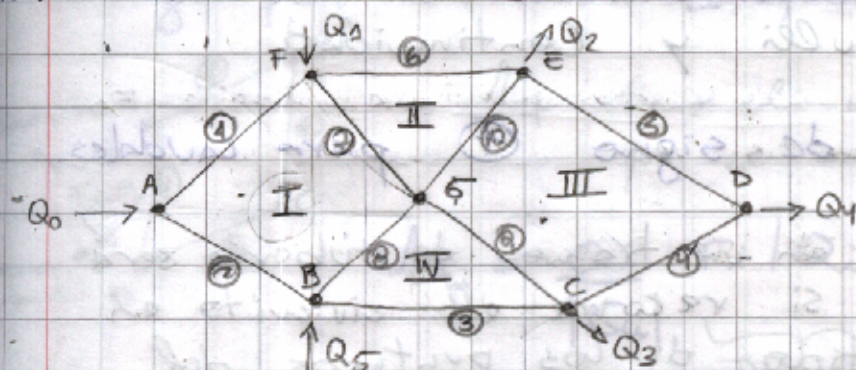


$$\Delta_f = r \cdot Q^m$$

$$1,75 \leq m \leq 2$$

Intervalo PARA m .

1.4 REDES DE TUBERIAS.



$$\begin{aligned} B_A &= B_B + \Delta f & \text{si } Q_{AB} > 0 \\ B_A &= B_B - \Delta f & \text{si } Q_{AB} < 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (*) \text{ los caudales tienen signo.}$$

- (*) Las pérdidas siempre hacen disminuir el Bernoulli
- (*) Siempre el caudal va de un B_{mayor} a un B_{menor}

$$\Delta f = \left(\frac{Q}{|Q|} \right) r |Q|^m$$

↳ signo de Q . (la pérdida tiene el mismo signo del caudal)

Def

• **Nodo (Nudo):** pto. donde convergen 2 o más tuberías.

• **Circuito:** conjunto de 3 o más tuberías (TRAMOS) (con 1 nudo común)

• **Propiedades de cada Tramo:**

- L
- D
- ϵ

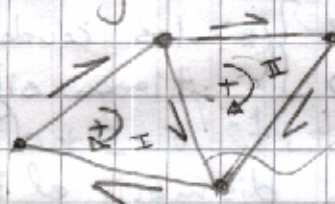
⇒ puede calcular (r, m)

• **Hipótesis:** las velocidades son pequeñas, podemos despreciar la altura de vel y considerar que la energía se aprox a la piezométrica.

Ec. Para resolver una RED.
- Bernoulli y Continuidad

Convención de signo $\oplus$ para vueltas.

Un vuolal en un tramo de tubería será positivo si recorre el circuito en el sentido de los punteros del reloj.

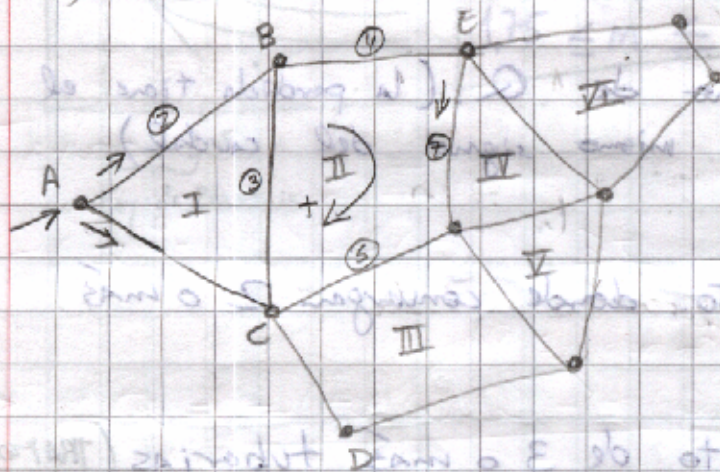


TRAMO COMPARTIDO:

PARA I es $\oplus$

PARA II es $\oplus$

(10-08)

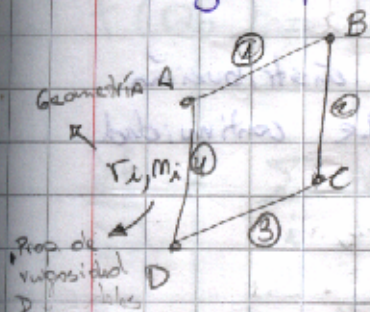


$Q_7 > 0$ en circuito II
 $Q_8 < 0$ en circuito IV

Continuidad en cada nodo

$$\sum Q_{entra} = \sum Q_{sale}$$

Energía para un circuito cualquiera. abstall



Δf : tiene el mismo signo que el caudal.

$$\Delta f_i = \frac{Q_i}{|Q_i|} r_i |Q_i|^m$$

Darcy Weisbach

$$\begin{cases} +1 & Q_i > 0 \\ -1 & Q_i < 0 \end{cases}$$

Ecs. de Bernoulli

$$B_A = B_B + \Delta f_1$$

$$B_B = B_C + \Delta f_2$$

$$B_C = B_D + \Delta f_3$$

$$+ B_D = B_A + \Delta f_4$$

$$0 = \Delta f_1 + \Delta f_2 + \Delta f_3 + \Delta f_4$$

En el circuito: $\sum_i \Delta f_i = 0$ ($\forall i \in \text{Circuito}$)

los Δf_i no pueden ser todos $\oplus$ o todos $\ominus$.

$\Rightarrow$ En el circuito.

$$\sum_i \frac{Q_i}{|Q_i|} r_i |Q_i|^m = 0$$

Bernoulli

Continuidad

Obtengo Q.

Forma de agrupar parábolas singulares: $\Delta s_{ij} = \frac{Q}{|Q_i|} \propto k s_{ij} Q^2$ 17

Método de Hardy Cross (1936)

1) Se estima arbitrariamente una distribución de caudales en la red que cumple continuidad

$$\Rightarrow Q_i^0$$

$$2) \sum_i \frac{Q_i^0}{|Q_i^0|} \cdot r_i |Q_i^0|^{m_i} \neq 0 \quad (\text{lo más probable})$$

3) Se introduce una corrección ΔQ

$$f(Q_i^0) \neq 0 \Leftrightarrow \sum h_f(Q_i^0) \neq 0$$

Tomo ΔQ tal que $f(Q_i^0 + \Delta Q) = 0$ (*)
Caudal corregido Q_i^1

Taylor

$$f(Q_i^0 + \Delta Q) = f(Q_i^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial Q_i} \right|_{Q_i^0} \Delta Q + \dots$$

terminos de 2º orden

$$\Rightarrow \Delta Q = \frac{f(Q_i^0 + \Delta Q) - f(Q_i^0)}{\left. \frac{\partial f}{\partial Q_i} \right|_{Q_i^0}}$$

(0 Impago *)

$$\Delta Q = - \frac{f(Q_i^0)}{\left. \frac{\partial f}{\partial Q_i} \right|_{Q_i^0}}$$

$$f(Q_0) = \sum_i \frac{Q_i^0}{|Q_i^0|} \cdot r_i \cdot |Q_i^0|^{m_i}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} = \sum_i r_i \left[\frac{\partial}{\partial Q_i} \left(\frac{Q_i}{|Q_i|} \right) |Q_i|^{m_i} + \frac{Q_i}{|Q_i|} m_i |Q_i|^{m_i-1} \frac{\partial |Q_i|}{\partial Q_i} \right]$$

donde $\frac{\partial}{\partial Q_i} \left(\frac{Q_i}{|Q_i|} \right) = \frac{1}{|Q_i|} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial Q_i} - Q_i \frac{1}{|Q_i|^3} \frac{\partial |Q_i|}{\partial Q_i}$

$$\frac{\partial |Q_i|}{\partial Q_i} = \frac{Q_i}{|Q_i|}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \frac{\sum_i \frac{Q_i \cdot r_i \cdot |Q_i|^{m_i}}{|Q_i|}}{\sum_i r_i \cdot m_i \cdot |Q_i|^{m_i-1}}}$$

generalmente
los r_i son
 m_i grandes

Ley de Potencia.

Darcy-Weisbach: $\Delta f = \frac{f \cdot L}{D} \frac{v^2}{2g}$ $\wedge$ DEF $f = a \cdot Q^b$

$$\Rightarrow \Delta f = a \left(\frac{L}{D} \frac{8}{\pi^2 v_g} \right) Q^{2+b}$$

// Sea $K = \frac{L}{D} \frac{8}{\pi^2 v_g}$

$$\Delta f_1 = a \cdot K \cdot Q_1^{2+b} = f_1 \cdot K \cdot Q_1^2$$

$$\Delta f_2 = a \cdot K \cdot Q_2^{2+b} = f_2 \cdot K \cdot Q_2^2$$

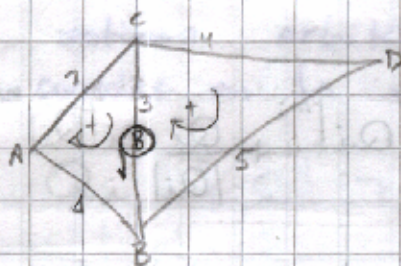
$$\div \Rightarrow \left[\begin{aligned} & \frac{\Delta f_1}{\Delta f_2} = \frac{Q_1^{2+b}}{Q_2^{2+b}} = \frac{f_1}{f_2} \\ & (Q_1/Q_2)^b = (f_1/f_2) \end{aligned} \right] \quad (1)$$

$$a \cdot K (Q_1^{2+b} + Q_2^{2+b}) = K (f_1 Q_1^2 + f_2 Q_2^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{f_1 Q_1^2 + f_2 Q_2^2}{Q_1^{2+b} + Q_2^{2+b}}} \quad (2)$$

Continúa en (**)

Donde Q_1, f_1 es lín inf y
 Q_2, f_2 lín sup de los posibles caudales.



$$\left. \begin{aligned} B_A &= B_C + \Delta t_2 \\ B_C + A_B &= B_B + \Delta t_3 \\ B_B &= B_A + \Delta t_1 \end{aligned} \right\} +$$

$$\begin{aligned} B_C &= B_D + \Delta t_4 \\ B_C + A_B &= B_B + \Delta t_3 \\ B_D &= B_B + \Delta t_5 \end{aligned}$$

1) Me doy una distribución ARBITRARIA que cumple continuidad Q_i^0

2) $\sum_i \Delta t_i (Q_i^0) \neq 0$

Corrijo Q_i^0 con ΔQ por circuito.

$$\sum_i \Delta t_i (Q_i^0 + \Delta Q) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta Q = - \frac{\sum_i Q_i^0 r_i |Q_i^0|^{n_i}}{\sum_i r_i n_i |Q_i^0|^{n_i+1}}$$

Por circuito I =

$$Q_2^I = Q_2^0 + \Delta Q$$



En el circuito I

Q_2 se corrige con

$$Q_2^I = Q_2^0 + \Delta Q^I - \Delta Q^I$$

En el circuito II

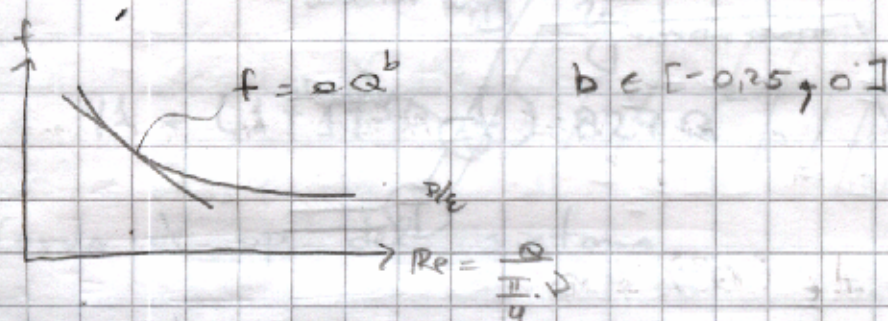
$$Q_2^I = Q_2^0 - \Delta Q^I + \Delta Q^I$$

Esta corrección respeta continuidad

Si $2aQ_1$ cumple $\rightarrow$ $2aQ_2$ también cumple

Cuando Terminamos de Iterar: $\frac{|AQ|}{|Q_{\min}|} < \epsilon$

Problema Cross on U-curves.



$$\Delta f = \frac{fL}{D} \frac{Q^2}{2g\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} \Rightarrow \Delta f = \Gamma \cdot Q^{2+b}$$

$\rightarrow$ (***) Para cada tubería:

1. Darse 2 caudales $\neq 0$ (Q_1 y Q_2) en el rango posible
2. Calcular Re para ambos caudales.
3. Calcular f_1 y f_2 (Moody o ecuación)
4. Obtener a y b con las ec. (1) y (2)
5. Obtener Γ_i y m_i , para todas las tuberías para finalmente hacer Cross

Tabla Tipo:

L	D	ϵ	ϵ/D	Q_1	Q_2	Re_1	Re_2	f_1	f_2	a	b	m	r
---	---	------------	--------------	-------	-------	--------	--------	-------	-------	-----	-----	-----	-----