



**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DISEÑO DE ESTRATEGIAS DE CONTROL PREDICTIVO NO LINEAL PARA  
LA OPERACIÓN DINÁMICA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE PÚBLICO**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN  
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**FREDDY MATIAS MILLA NANJARÍ**

PROFESOR GUÍA:

DORIS SÁEZ HUEICHAPAN

PROFESOR CO-GUÍA:

CRISTIÁN CORTÉS CARRILLO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

MANUEL DUARTE MERMOUD

ALDO CIPRIANO ZAMORANO

DANIEL SBARBARO HOFER

SANTIAGO DE CHILE

ABRIL, 2012

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL  
GRADO AL GRADO DE DOCTOR EN  
INGENIERÍA ELÉCTRICA  
POR : FREDDY MATIAS MILLA NANJARÍ  
FECHA : 02/04/2012  
PROF. GUÍA : SRA. DORIS SÁEZ H.  
PROF. CO-GUÍA : SR. CRISTIÁN CORTÉS C.

## **DISEÑO DE ESTRATEGIAS DE CONTROL PREDICTIVO NO LINEAL PARA LA OPERACIÓN DINÁMICA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE PÚBLICO**

El estudio de sistemas complejos de gran escala se ha hecho imprescindible en muchos campos de la ingeniería, y requieren modelos, así como técnicas de control avanzado, para lograr las metas y niveles de servicio exigidos actualmente por la industria. En este contexto, la principal contribución de esta tesis es la utilización de distintas técnicas de control avanzado para resolver el problema de alta complejidad, correspondiente al diseño de controladores para gestionar la operación de un sistema de transporte público. Esto es, se diseña una serie de controladores avanzados para la gestión de flota de sistemas de transporte público, incluyendo métodos de diversa complejidad, los que son aplicados sistemáticamente a modelos del sistema de creciente complejidad.

En una primera etapa, se diseñaron dos controladores difusos para un sistema de una ruta de transporte público, con el objeto de reducir el tiempo total de espera de los pasajeros; el primero intenta mantener cada grupo de tres buses consecutivos equidistantes en un corredor, con el fin de regularizar el tiempo de espera entre buses de todo el sistema, mientras que el segundo considera la asignación de valores de tiempo de espera entre buses para cada paradero en función de su demanda, obteniendo ambos controladores beneficios superiores al 53% con respecto al tiempo de espera resultante de sistemas comparables en lazo abierto. En una segunda etapa, sobre este mismo sistema de transporte público, se diseñaron dos controladores predictivos híbridos (HPC); el primero considera índices de comportamiento dirigidos a la disminución del tiempo de espera y de viaje, mientras que el segundo controlador considera un análisis multiobjetivo que compara los costos del usuario versus los del operador. En ambos controladores se obtuvieron beneficios superiores al 57% con respecto al tiempo de espera resultante de sistemas comparables en lazo abierto. En una tercera etapa, sobre un sistema de transporte público compuesto por dos rutas y una estación de transbordo, se diseñaron controladores para sistemas de gran escala (centralizados, descentralizados y distribuidos) con algoritmos difusos y HPC. En tales casos se consideran índices de comportamiento de control de ruta, sincronización y maximización de la intensidad del transbordo. El controlador distribuido HPC obtuvo beneficios que son un 9.6% superior con respecto al tiempo de espera resultante de un sistema comparable al cual se aplica un controlador descentralizado HPC. Por último, para un sistema de transporte público compuesto por tres rutas locales, tres rutas troncales y tres estaciones de transbordo, se diseñó un control jerárquico (compuesto de controladores distribuido HPC y descentralizado difuso, lográndose un beneficio 9.75% superior con respecto al tiempo de espera de un sistema comparable en el cual se aplica un controlador descentralizado difuso.

## **DESIGN OF NONLINEAR PREDICTIVE CONTROL STRATEGIES FOR THE DYNAMICAL OPERATION OF PUBLIC TRANSPORTATION SYSTEMS**

The study of large-scale complex systems has become essential in many fields of engineering, and require models and advanced control techniques to achieve the goals and service levels currently required by the industry. In this context, the main contribution of this thesis is the use of various advanced control techniques to solve the problem of high complexity for the design of controllers to manage the operation of a public transport system. That is, designing a series of advanced controllers for fleet management systems for public transport, including methods of varying complexity, which are systematically applied to system models of increasing complexity.

In a first step, we designed two fuzzy controllers for a system of public transport route, in order to reduce the total waiting time of passengers, the first attempts to keep each group of three consecutive equidistant buses in a corridor, in order to regularize the waiting time between buses the entire system, while the second considers the allocation value of waiting time between buses to each stops in function of their demand, both controllers obtaining benefits in excess of 53% compared to waiting time arising from comparable open-loop systems. In a second stage, on the same public transport system, we designed two hybrid predictive controllers (HPC), the first considers behavioral indices directed at the reduction of waiting time and travel time, while the second controller considers a multiobjective analysis comparing the user costs versus the operator. Both controllers were obtained profit in excess of 57% compared to the waiting time resulting from comparable open-loop systems. In a third stage, on a public transport system consists of two routes and transfer station, controllers were designed for large-scale systems (centralized, decentralized and distributed) with fuzzy algorithms and HPC. In such cases are considered behavioral indices of route control, synchronization, and maximizing the intensity of transfer. The HPC distributed controller benefits were 9.6% higher with respect to the waiting time resulting from a comparable system which applies a decentralized controller HPC. Finally, for a public transportation system composed of three local routes, three trunk routes and three transfer stations, we designed a hierarchical control (HPC composite distributed and decentralized controllers diffuse, achieving a 9.75% higher profit with respect to time waiting for a comparable system which applies a decentralized fuzzy controller.

a *Claudia, Daniel y David*

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a la Dra. Doris Sáez por la confianza en mi trabajo y por la invitación a participar en el programa de doctorado, así como la ayuda en la organización y síntesis de esta tesis. Agradezco al Dr. Cristián Cortés por la ayuda en la validación de mi análisis teórico en el área de transportes, lo cual me permitió por fin arribar a buen puerto con este trabajo.

También quiero agradecer a los profesores de la comisión, Dr. Manuel Duarte, Dr. Aldo Cipriano y Dr. Daniel Sbarbaro por sus críticas y comentarios del texto.

Agradezco al apoyo de: proyecto ACT-32 “Control Inteligente y en Tiempo Real para Sistemas Integrados de Transporte Público”, proyecto Fondecyt No. 1100239 e Instituto Milenio Sistemas Complejos de Ingeniería (ICM: P-05-004-F, CONICYT: FBO16).

# Índice

ÍNDICE .....	6
INTRODUCCIÓN.....	11
1.1. FUNDAMENTO GENERAL .....	11
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	12
1.2.1. Control difuso.....	12
1.2.2. Control predictivo basado en modelos .....	14
1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	15
1.3.1. Diseño de estrategias de control difuso de un sistema de transporte público .....	15
1.3.2. Diseño de estrategias de control predictivo híbrido de un sistema de transporte público .....	16
1.4. OBJETIVOS .....	17
1.4.1. Objetivo general .....	17
1.4.2. Objetivos específicos .....	17
1.5. ALCANCE DEL TRABAJO.....	18
1.6. ESTRUCTURA DE LA TESIS.....	18
CAPÍTULO II.....	21
CONTROL PREDICTIVO DE SISTEMAS HÍBRIDOS.....	21
2.1. MODELOS HÍBRIDOS.....	22
2.1.1. Sistemas dinámicos y lógicos mixtos .....	22
2.1.2. Sistemas lineales por tramos.....	23
2.2. CONTROL PREDICTIVO HÍBRIDO.....	25
2.2.1. Control predictivo basados en modelos MLD .....	26
2.2.2. Control predictivo de sistemas PWA.....	27
2.2.3. Control predictivo híbrido con programación multiparamétrica .....	29
2.4. SOLUCIÓN DE LOS CONTROLADORES PREDICTIVOS POR OPTIMIZACIÓN CON ALGORITMOS EVOLUTIVOS O DE ENJAMBRES DE PARTÍCULAS .....	30
2.5. ESTABILIDAD DEL CONTROL PREDICTIVO.....	32
Necesidad de la región terminal invariante.....	34
Necesidad del coste terminal como función de Lyapunov.....	35
2.6. DISCUSIÓN .....	36
CAPÍTULO III .....	38
SISTEMA DE GRAN ESCALA.....	38
3.1. PRINCIPIO DE INCLUSIÓN.....	40
3.1.1. Caracterización dinámica del principio de inclusión.....	44
Existencia de las matrices $U$ y $V$ .....	44
Definición de restricción y agregación de un sistema .....	45
Transformaciones complementarias .....	46
3.2. CONTROL DESCENTRALIZADO.....	46
3.2.1. Estabilidad para un sistema descentralizado .....	48
3.2.2. Estabilidad de un controlador descentralizado con realimentación dinámica .....	50
Definición de los modos fijos .....	52
Determinación de los modos fijos.....	53
3.2.3. Control descentralizado con algoritmos MPC .....	54
3.3. CONTROL DISTRIBUIDO .....	56
3.3.1 Estabilidad de los sistemas distribuidos.....	61

Geometría del MPC basado en algoritmos no-cooperativos .....	65
Estrategia MPC basado en algoritmos cooperativos .....	68
<b>3.4. CONTROL JERÁRQUICO .....</b>	<b>70</b>
3.4.1. <i>Control jerárquico de una capa</i> .....	70
3.4.2. <i>Control jerárquico de los sistemas de múltiples capas</i> .....	72
3.4.3. <i>Control jerárquico de sistemas de escalas de tiempo múltiples</i> .....	72
3.4.4. <i>Control de sistemas con estructura jerarquizada</i> .....	73
3.4.5. <i>Aplicación del control jerárquico en la optimización de la planta completa</i> .....	76
<b>3.5. CONTROL COORDINADO DE SISTEMAS INDEPENDIENTES .....</b>	<b>80</b>
<b>3.6. DISCUSIÓN .....</b>	<b>81</b>
<b>CAPÍTULO IV .....</b>	<b>85</b>
<b>SISTEMAS DE TRASPORTE PÚBLICO .....</b>	<b>85</b>
<b>4.1. DISEÑO DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO .....</b>	<b>85</b>
4.1.1. <i>La planificación de un sistema de transporte público</i> .....	87
4.1.2. <i>Selección del mejor sistema</i> .....	88
4.2. SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO CON TRANSBORDOS .....	97
<b>4.3 CONTROL DINÁMICO DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE .....</b>	<b>101</b>
<b>4.4. SIMULADOR DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO DE UNA RUTA .....</b>	<b>103</b>
4.4.1. <i>Intervalo de diseño</i> .....	105
<b>4.5. SIMULADOR DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO CON TRANSBORDOS .....</b>	<b>113</b>
<b>4.6. DISCUSIÓN .....</b>	<b>114</b>
<b>CAPÍTULO V .....</b>	<b>115</b>
<b>ESTRATEGIA DE CONTROL DIFUSO PARA UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO DE UNA RUTA POR UBICACIONES RELATIVAS DE LOS BUSES .....</b>	<b>115</b>
<b>5.1. ESTRATEGIA DE CONTROL BASADAS EN SISTEMAS DIFUSOS .....</b>	<b>115</b>
<b>5.2. ESTRATEGIA DE CONTROL PROPUESTA .....</b>	<b>118</b>
<b>5.3. DESCRIPCIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE CONTROL PROPUESTAS .....</b>	<b>120</b>
5.3.1. <i>Control experto</i> .....	120
Esquema de control con <i>holding</i> basado en reglas .....	122
Esquema de control con <i>stop-skipping</i> basado en reglas .....	122
5.3.2. <i>Control difuso</i> .....	122
Esquema de control con <i>holding</i> basado en reglas difusas .....	123
Esquema de control con <i>holding</i> y <i>stop-skipping</i> basado en reglas difusas .....	126
5.3.3. <i>Sintonización de parámetros de los controladores difusos</i> .....	127
Optimización por enjambre de partículas .....	128
<b>5.4. PRUEBAS POR SIMULACIÓN .....</b>	<b>131</b>
5.4.1. <i>Selección de paraderos donde aplicar holding o stop-skipping usando un controlador experto</i> .....	132
5.4.2. <i>Resultados de las estrategias propuestas</i> .....	134
5.4.3. <i>Sensibilidad del controlador difuso con respecto a la velocidad</i> .....	137
5.4.4. <i>Solución de la variabilidad de la velocidad del controlador difuso</i> .....	138
Controlador experto con velocidad variable .....	139
Control difuso con velocidad variable .....	140
<b>5.5. DISCUSIÓN .....</b>	<b>141</b>
<b>CAPÍTULO VI .....</b>	<b>143</b>
<b>ESTRATEGIA DE CONTROL DIFUSO PARA UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO POR ASIGNACIÓN DE HEADWAY POR PARADERO EN FUNCIÓN DE SU DEMANDA .....</b>	<b>143</b>
<b>6.1. ESTRATEGIA DE CONTROL EXPERTO .....</b>	<b>144</b>
6.1.2. <i>Diseño de un controlador experto</i> .....	146
<b>6.2. ESTRATEGIA DE CONTROL DIFUSO .....</b>	<b>150</b>
6.2.1. <i>Descripción del experimento</i> .....	152
6.2.2. <i>Sintonización de parámetros de los controladores difusos</i> .....	154

6.2.3. Resultados de la estrategia propuesta.....	156
6.2.4. Sensibilidad del controlador difuso con respecto a la velocidad .....	161
6.2.5. Solución de la variabilidad de la velocidad del controlador difuso .....	162
6.3. DISCUSIÓN .....	163
<b>CAPÍTULO VII.....</b>	<b>165</b>
<b>CONTROL PREDICTIVO HÍBRIDO PARA LA OPTIMIZACIÓN EN TIEMPO REAL DE LA OPERACIÓN DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO DE UNA RUTA CON SINTONIZACIÓN PSO .....</b>	<b>165</b>
7.1. DISEÑO DE UN CONTROLADOR PREDICTIVO HÍBRIDO PARA UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO DE UNA RUTA. ....	168
7.1.1. Formulación del problema .....	168
7.1.2. Modelo predictivo 1.....	172
7.1.3. Modelo predictivo 2.....	176
Actualización de la posición de los buses.....	177
Evolución temporal del sistema.....	179
Representación de la demanda por paradero y carga de los buses para una ruta única.....	183
7.1.4. Restricciones operacionales.....	187
7.1.5. Función objetivo .....	189
7.2. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN CORRESPONDIENTE AL CONTROLADOR PREDICTIVO HÍBRIDO .....	191
7.2.1. Solución del problema de optimización basada en algoritmo de poda probabilística.....	191
7.3. RESULTADOS DE LA ESTRATEGIA PROPUESTA .....	198
7.3.1. Descripción del experimento.....	198
7.3.2. Sintonización de parámetros de la función objetivo .....	200
7.3.3. Sensibilidad del controlador HPC-PP con respecto a la velocidad.....	204
7.3.4. Solución de la variabilidad de la velocidad del controlador HPC-PP.....	205
7.4. DISCUSIÓN .....	206
<b>CAPÍTULO VIII. ....</b>	<b>208</b>
<b>CONTROL PREDICTIVO HÍBRIDO PARA LA OPTIMIZACIÓN EN TIEMPO REAL DE LAS OPERACIONES DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO BASADO EN LA OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO .....</b>	<b>208</b>
8.1. MODELO DINÁMICO PARA EL DISEÑO DE UN CONTROLADOR PREDICTIVO HÍBRIDO.....	213
8.1.1 Formulación.....	213
8.1.2 Función objetivo .....	215
8.2. CONTROL PREDICTIVO HÍBRIDO BASADO EN LA OPTIMIZACIÓN MULTI-OBJETIVO. ....	218
8.2.1. Descripción de la estrategia HPC-MO.....	218
8.2.2 Algoritmos de búsqueda en el árbol de decisiones con poda probabilística (PP) para el problema HPC-MO .....	220
8.3. EXPERIMENTOS DE SIMULACIÓN.....	221
8.4. DISCUSIÓN .....	229
<b>CAPÍTULO IX. ....</b>	<b>231</b>
<b>CONTROL AVANZADO DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO CON ESTACIONES TRANSBORDO.....</b>	<b>231</b>
9.1. CRITERIOS DE SELECCIÓN DE LA ESTRATEGIA DE CONTROL PARA UN SISTEMA DE TRANSPORTE CON ESTACIÓN DE TRANSBORDO .....	234
9.2. CARACTERÍSTICAS DE LA DEMANDA DEL SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO UTILIZADO.....	237
9.3. MODELO DINÁMICO DE SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO CON ESTACIÓN DE TRANSBORDO PARA UN CONTROLADOR DIFUSO. ....	241
9.4. CONTROLADOR DESCENTRALIZADO DIFUSO.....	243
9.5. CONTROLADOR DISTRIBUIDO DIFUSO .....	244
9.5.1. Diseño de reglas de sincronización .....	245
Diseño de reglas de sincronización para controlador experto difuso.....	248



9.5.2. <i>Diseño de reglas para administrar el transbordo</i> .....	250
9.5.3. <i>Combinación de reglas de sincronización con reglas de administración del transbordo</i> .....	251
9.5.4. <i>Sintonización de parámetros de los controladores difusos</i> .....	255
<b>9.6. DISEÑO DE UN CONTROLADOR PREDICTIVO DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO CON UNA ESTACIÓN DE TRANSBORDO Y DOS RUTAS</b> .....	256
9.6.1. <i>Antecedentes</i> .....	256
9.6.2. <i>Modelo dinámico de sistema de transporte público con estación de transbordo para un controlador predictivo</i> .....	262
9.6.3. <i>Representación dinámica de la demanda de paraderos y carga de buses para rutas conectadas por una estación de transbordo</i> .....	263
Demanda por paradero con rutas con transbordo .....	263
Carga de los buses en rutas con transbordo .....	267
Estimación del parámetro $r$ de proporción de transbordo .....	267
<b>9.7. CONTROLADOR PREDICTIVO HÍBRIDO DESCENTRALIZADO</b> .....	268
9.7.1. <i>Estructura de control descentralizado</i> .....	268
9.7.2. <i>Función objetivo</i> .....	269
<b>9.8. CONTROLADOR PREDICTIVO HÍBRIDO DISTRIBUIDO</b> .....	271
9.8.1. <i>Estructura de control distribuido</i> .....	272
9.8.2. <i>Índice de comportamiento de sincronización</i> .....	274
Tiempos de llegada de los buses más cercanos a la estación de transbordo .....	275
Demanda en la estación de transbordo .....	276
9.8.3. <i>Índice de comportamiento de incentivo del transbordo</i> .....	277
9.8.4. <i>Restricciones para la administración eficiente del transbordo</i> .....	280
Implementación de las reglas .....	284
<b>9.9. CONTROLADOR PREDICTIVO HÍBRIDO CENTRALIZADO</b> .....	288
<b>9.10. ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE LA ESTRATEGIA PROPUESTA</b> .....	291
9.10.1. <i>Descripción del experimento</i> .....	291
9.10.2. <i>Sintonización de parámetros de la función objetivo</i> .....	292
9.10.3. <i>Análisis con demanda estándar</i> .....	295
9.10.4. <i>Resultados de la estrategia propuesta para demanda estándar</i> .....	298
9.10.5. <i>Resultados de la estrategia propuesta para demanda estándar con perturbaciones</i> .....	304
9.10.6. <i>Análisis por paradero</i> .....	308
<b>9.11. DISEÑO DE UN CONTROL JERÁRQUICO DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE PÚBLICO CON ESTACIONES DE TRANSBORDO</b> .....	312
9.11.1. <i>Modelo dinámico de sistema de transporte público con estaciones de transbordo para un controlador jerárquico</i> .....	313
9.11.2. <i>Representación de la demanda en paraderos y carga de buses para tres rutas con estaciones de transbordo</i> .....	315
Demanda en paraderos en rutas con transbordo .....	315
Carga de los buses en rutas con transbordo .....	316
9.11.3. <i>Criterios de asignación del controlador</i> .....	318
9.11.4. <i>Control jerárquico</i> .....	320
Tipo de control seleccionado para rutas troncales .....	320
Tipo de control seleccionado para rutas locales .....	322
9.11.5. <i>Control jerárquico difuso</i> .....	323
9.11.6. <i>Descripción del experimento</i> .....	330
9.11.7. <i>Resultados experimentales del controlador jerárquico</i> .....	333
<b>9.12. DISCUSIÓN</b> .....	336
<b>CAPÍTULO X</b> .....	<b>340</b>
<b>CONCLUSIONES</b> .....	<b>340</b>
<b>PUBLICACIONES GENERADAS</b> .....	<b>345</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>346</b>
<b>ANEXO A</b> .....	<b>364</b>

<b>A.1. EN LOS SISTEMAS MLD LAS EXPRESIONES LÓGICAS DE LA PARTE DISCRETA DE UN SISTEMA HÍBRIDO SE PUEDEN EXPRESAR POR RESTRICCIONES LINEALES .....</b>	<b>364</b>
<b>ANEXO B.....</b>	<b>371</b>
<b>B.1. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE INCLUSIÓN.....</b>	<b>371</b>
<b>B.2. ESTABILIDAD DE CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS LINEALES MÁS GENERALES .....</b>	<b>374</b>
<b>ANEXO C.....</b>	<b>377</b>
<b>C.1 LÓGICA DIFUSA .....</b>	<b>377</b>
<b>C.2 PSO CON CONVERGENCIA GARANTIZADA .....</b>	<b>378</b>
<b>ANEXO D.....</b>	<b>380</b>
<b>ANEXO E.....</b>	<b>382</b>

# Capítulo I

## Introducción

### 1.1. Fundamento general

Si se considera un sistema complejo, a un sistema compuesto por varios subsistemas interconectados cuyos vínculos crean información adicional no visible con anterioridad por el observador, donde se considera el número de subsistemas componentes y su grado de interconexión la medida de la complejidad del sistema.

Los sistemas complejos a gran escala aparecen en muchos campos de la ingeniería, tales como micro-electromecánicos, procesos de fabricación, industria aeroespacial, ingeniería civil, ingeniería eléctrica e ingeniería en transporte. El trabajo con estos sistemas a menudo exige modelos complejos y técnicas de control avanzado para lograr las metas exigidas actualmente por la industria.

En particular, en el área de transporte público, donde se estudia el traslado de personas entre puntos distantes de una ciudad (considerando en la mayoría de los casos un medio de

transporte motorizado) se plantea como meta asegurar un sistema operacional y económicamente eficiente, adecuadamente integrado al entorno. Esto plantea como objetivo obtener un control suficientemente eficaz, para lograr un servicio a los usuarios y operadores que garanticen ventajas sobre el tiempo de espera y de viaje, entre otros factores del sistema. Luego, el intento de lograr este objetivo utilizando técnicas de control avanzado, da origen a esta tesis.

## **1.2. Planteamiento del problema**

En esta tesis se plantea el diseño de una estrategia de control para un sistema complejo, en particular se considera la utilización de distintas técnicas de control avanzado para resolver un problema de alta complejidad como es el diseño de controladores para un sistema de transporte público. Se utiliza, en un sistema de transporte público simple (de una ruta), controladores basados en lógica difusa como también controladores predictivos basados en modelos, y posteriormente se plantea una solución combinada con técnicas de control de sistemas de gran escala y una generalización, del conocimiento adquirido, en un sistema de control de transporte público de mayor tamaño. Esto es, inicialmente dos rutas y una estación de trasbordo, luego un análisis de una estructura equivalente de mayor dimensión. A continuación se hace una breve descripción de los enfoques matemáticos que son base de las soluciones diseñadas.

### **1.2.1. Control difuso**

Por información difusa entendemos información que encierra alguna imprecisión o incertidumbre. Una de las principales características de la lógica difusa es su capacidad para operar con conceptos vagos o ambiguos propios del razonamiento cualitativo, fundado sobre un soporte matemático que permite extraer conclusiones cuantitativas a partir de un conjunto de observaciones (antecedentes) y reglas cualitativas (base de conocimiento). La lógica difusa se aplica principalmente en sistemas de control que utilizan expresiones ambiguas para formular reglas que controlen el sistema. Un sistema de control difuso usa el conocimiento experto para generar una base de conocimientos que dará al sistema la

capacidad de tomar decisiones sobre ciertas acciones que se presentan en su funcionamiento

El control difuso es la aplicación de la inferencia difusa a la automatización de procesos. Un controlador difuso típicamente infiere los consecuentes de un conjunto más o menos grande de reglas simples (base de conocimiento); tal proceso de razonamiento se puede realizar en paralelo, obteniéndose el resultado (consecuente) mediante una sencilla suma lógica. Esta capacidad de procesamiento en paralelo permite que incluso controladores relativamente complejos puedan realizar la inferencia difusa en un tiempo de cálculo razonable. Además, debido a las características de la lógica difusa, muchas veces es posible llegar a diseñar un regulador bien ajustado al proceso aprovechando la experiencia previa de un operador, eliminando de esta manera la necesidad de complejos y laboriosos estudios técnicos del problema de control.

En otras palabras, el control difuso representa actualmente una novedosa e importante rama de la técnica de regulación. Los procedimientos convencionales no se sustituyen, sino que se complementan de forma considerable en función del campo de desarrollo, alcanzando los mayores éxitos en el campo de las aplicaciones industriales y comerciales. Los controladores difusos son estructuras no-lineales, que por medio de la selección adecuada de funciones de pertenencia y el establecimiento de una base de reglas, se pueden compensar no-linealidades en el sistema de regulación de procesos. Las funciones de pertenencia son modelos matemáticos para los términos lingüísticos, como por ejemplo, las funciones de pertenencia triangulares, trapezoidales o gaussianas. Como en el caso de un controlador convencional, en el controlador difuso se transforman variables de entrada en variables de salida, que actúan en el proceso o en el sistema de control. Múltiples variables de entrada y salida se pueden enlazar entre sí de forma que los sistemas complejos se pueden regular fácilmente. Los valores de entrada y salida son valores exactos en forma de señales. La imprecisión típica de los métodos difusos desempeña un papel sólo dentro del controlador. En un controlador difuso se ejecutan tres pasos de procesamiento: fusificación, inferencia y defusificación. El diseño de un regulador difuso contiene la selección de variables de entrada/ salida, el establecimiento de funciones de pertenencia y la disposición

de la base de reglas. Por último de acuerdo a la experiencia acumulada en los últimos años, el empleo del control difuso es recomendable en los siguientes casos (Feng, 2006):

- Para procesos muy complejos, cuando no hay un modelo matemático simple.
- Para procesos altamente no lineales.

### **1.2.2. Control predictivo basado en modelos**

El Control predictivo (*Model Predictive Control*, MPC), se define como, una técnica de control que recopila la información pasada, la presente y la predicción de la información futura a través del uso explícito de un modelo del proceso para obtener la señal de control resultante de la minimización de una función objetivo. Fundamentalmente este control se basa en la utilización de un horizonte de control finito y deslizante que implica el cálculo de la secuencia de control para todo el horizonte, pero con la aplicación de la primera señal de la secuencia y la repetición de todo el proceso en el siguiente instante de muestreo. (Camacho y Bordóns, 1999).

En particular se plantea la utilización de técnicas de control predictivo híbrido, donde se define un sistema híbrido como un proceso tal, que para describir su dinámica, es necesario incluir (aparte de las naturales variables continuas o discretas), variables cuantizadas, esto es, variables que pertenecen a un conjunto con cardinalidad reducida. En los últimos años se ha logrado grandes avances en el desarrollo de técnicas de control predictivo para procesos híbridos (Bemporad y Morari, 1999). La idea es formular una metodología que permita considerar dentro del mismo marco teórico del algoritmo de control, las dinámicas y variables de decisión continuas o discretas, las reglas de operación lógicas y las variables de decisión cuantizadas.

En este contexto, esta tesis considera el diseño e implementación de distintas estrategias de control difuso y control predictivo híbrido que entreguen soluciones satisfactorias y eficientes para el control de los sistemas de transporte público. En especial, los sistemas de control predictivo permiten objetivos de control tanto económicos como de calidad de servicio, además de los tradicionales seguimientos de una referencia. Finalmente, se plantea

generalizar los resultados aplicándolos al control de un sistema de mayor dimensión y utilizar la estructura teórica de control de sistemas de gran escala, que implica subdividir el control del proceso en un conjunto de subsistemas controlados individualmente. Esto es, analizar la diferencia de resultados entregados por un controlador centralizado con respecto a controladores descentralizados de cada subsistema en que se divide el proceso (en los cuales no hay comunicación entre las unidades de control básicas y las interrelaciones entre cada subsistema se asume como una perturbación) y con controladores distribuidos de cada subsistema en que se divide el proceso (que comparten información entre las unidades de control básicas, y la integran al modelo de proceso). Para finalmente realizar las generalizaciones necesarias y resolver el problema del control de un sistema de transporte público de mayor dimensión.

## **1.3. Formulación del problema**

### **1.3.1. Diseño de estrategias de control difuso de un sistema de transporte público**

Los sistemas de control difuso permiten describir un conjunto de reglas que utilizaría un operador para controlar un proceso y a partir de éstas, generar acciones de control. En particular en este trabajo, las estrategias de control difuso incluyen estrategias clásicas de transporte, como la realización de *holding*, que consiste en la espera de un tiempo extra de un bus en una estación determinada y *stop-skipping*, acciones donde se pretende manipular los tiempos de espera del sistema saltándose estaciones. Estas estrategias son aplicadas por medio de un conjunto de reglas representativas de un sistema de control experto difuso. Para profundizar el análisis de un sistema de transporte, se implementará un controlador difuso adicional, que monitoreará las estaciones de trasbordo. Esto es, una estructura de control difuso que considere la relevancia de las cargas transportadas por los buses que serán sincronizados entre dos rutas vecinas.

### **1.3.2. Diseño de estrategias de control predictivo híbrido de un sistema de transporte público**

Las técnicas de control de sistemas son herramientas fundamentales para obtener un desempeño óptimo de cualquier sistema dinámico, por lo que su aplicación a un sistema de transporte público resulta muy adecuada. Además de la propuesta de control predictivo híbrido presentada en Yinghui y Xilin (2010) y Sáez *et al.*, (2012) en la literatura de transporte público, las estrategias de control son habitualmente desarrolladas en forma heurística y no poseen en general la sistematización del control tradicional, que toma sus acciones de control solamente en base a comportamientos actuales y pasados, en cambio, en el control predictivo, además de tomar en cuenta estas acciones, incluyen el comportamiento futuro del sistema, lo que entrega decisiones con mayor información.

En este trabajo, se deriva un modelo de un sistema dinámico de transporte público, para el diseño de una estrategia de control predictivo híbrido. Estas estrategias optimizan en tiempo real, los tiempos de viaje y los tiempos de espera de los usuarios de un sistema de buses compuesto de recorridos fijos, interconectados a través de estaciones de transbordo. Esta estructura de interconexión es muy necesaria ya que en algunas áreas metropolitanas, el transporte público convencional no puede proveer un servicio directo para todos los pasajeros, por diferentes razones; como por ejemplo, no ser económicamente conveniente o tener densidades de demanda bajas. Luego, es recomendable que en algunos sistemas de transporte público se realicen transferencias de pasajeros. De ahí, la importancia del desarrollo de un sistema coordinado, que tome en cuenta el número de buses; sus rutas y la frecuencia óptima asociada y pueda reducir los tiempos de viaje de los pasajeros. Lo que implica minimizar conjuntamente los tiempos de espera en las estaciones de transbordo así como en los paraderos restantes.

Las estrategias de control predictivo incluyen también las estrategias clásicas de transporte, como la realización de *holding* y *stop-skipping*. Estas estrategias son aplicadas como penalizaciones en la función objetivo del problema de optimización a resolver por el controlador predictivo.



## **1.4. Objetivos**

### **1.4.1. Objetivo general**

Esta tesis de doctorado tiene como objetivo principal el diseño de un conjunto de estrategias de control avanzado, para un sistema de transporte público. Este sistema presenta complejas dinámicas no lineales con variables continuas o discretas, variables cuantizadas y perturbaciones considerables.

Se desea encontrar un formalismo matemático adecuado, que pueda representar la evolución del sistema en términos que faciliten la manipulación de sus principales variables y se pretende determinar soluciones al problema de control, utilizando técnicas de control avanzado para grados crecientes de complejidad del proceso.

### **1.4.2. Objetivos específicos**

1.- Diseñar estrategias de control difuso para un sistema de transporte público de un recorrido, considerando la ubicación relativa de los buses viajando en la ruta, donde la meta de control sea minimizar los tiempos de viaje y espera de los usuarios del sistema de transportes.

2.- Diseñar estrategias de control difuso para un sistema de transporte público de un recorrido, considerando en el diseño la diferencia relativa de la demanda de pasajeros en cada uno de los paraderos de la ruta, donde la meta de control sea minimizar los tiempos de viaje y espera de los usuarios del sistema de transportes.

3.- Diseñar estrategias de control predictivo híbrido para un sistema de transporte público de un recorrido, considerando la demanda como perturbación en la estrada del sistema, donde la función objetivo del problema de optimización correspondiente contenga índices

de comportamiento que impliquen minimizar los tiempos de viaje y espera de los usuarios del sistema.

4.- Programar un simulador de transporte público compuesto de recorridos fijos interconectados a través de estaciones de transbordo.

5.- Diseñar estrategias de control difuso para un sistema de transporte público con dos recorridos y una estación de transbordo, para minimizar en tiempo real, los tiempos de viaje y espera de los usuarios.

6.- Diseñar estrategias de control predictivo híbrido para un sistema de transporte público con dos recorridos y una estación de transbordo, para minimizar, en tiempo real, los tiempos de viaje y espera de los usuarios.

7.- Inferir de los resultados anteriores, lineamientos para generalizar los métodos de control en un sistema de transporte público de gran escala.

## **1.5. Alcance del trabajo**

El alcance de este trabajo incluye, el diseño e implementación de un conjunto de controladores avanzados para un sistema de transporte público, los cuales son validados mediante simulación. Los controladores desarrollados sobre el sistema de transporte público, operan con estrategias de control definidas en tiempo real tales como *holding* y *stop-skipping*. Para validarlos, se desarrollan simuladores que se implementan en ambiente Matlab.

## **1.6. Estructura de la tesis**

El contenido de este trabajo por capítulos se resume a continuación.

El primero capítulo contiene la motivación para la realización del trabajo de investigación, los objetivos generales y específicos que están acotados por los alcances considerados.

El segundo capítulo resume el estado del arte de la teoría de control predictivo de sistemas híbridos, la forma de clasificar los sistemas y aspectos teóricos más relevantes.

El tercer capítulo resume el estado del arte de la teoría de control de sistemas de gran escala, la forma de clasificar los sistemas y los resultados teóricos más relevantes.

El cuarto capítulo describe los sistemas de transporte público su diseño, el simulador de una ruta y dos rutas con estación de trasbordo implementado, se incluye la formulación de problema y las estrategias de solución tales como retención y salto de estación.

El quinto capítulo contiene el diseño de una estrategia de control difuso para un sistema de transporte público de una ruta, el cual, se basa en las ubicaciones relativas de los buses en un marco teórico que implica estrategias de retención y salto de estación. Se plantea la optimización de los parámetros del controlador por un algoritmo de enjambres de partículas (PSO).

El sexto capítulo, contiene el diseño de una estrategia de control difuso para un sistema de transporte público de una ruta. Esta estrategia está basada en la asignación del *headway* por paradero en función del inverso de la demanda. Este controlador es formulado con estrategias de *holding* y *stop-skipping*. Se plantea la optimización de los parámetros del controlador por un algoritmo de enjambres de partículas (PSO).

El séptimo capítulo, contiene el diseño de una estrategia de control predictivo híbrido para la optimización en tiempo real de la operación de un sistema de transporte público de una ruta. Se plantea una solución del problema de optimización por un algoritmos de búsqueda en el árbol de decisiones con poda probabilística. La sintonización de los parámetros que ponderan los índices de comportamiento de la función objetivo, se realizaron con un algoritmo de enjambre de partículas (PSO). El controlador es formulado con estrategias de *holding* y *stop-skipping*.

El octavo capítulo contiene, el diseño de una estrategia de control predictivo híbrido para la optimización en tiempo real de las operaciones de un sistema de transporte público basado en un enfoque multiobjetivo. Se plantea una solución del problema de optimización por un algoritmos de búsqueda en un árbol de decisiones con poda probabilística. La sintonización de los parámetros que ponderan, los índices de comportamiento de la función objetivo, se encuentran con un algoritmo de enjambre de partículas (PSO). El controlador es formulado con estrategias de de *holding* y *stop-skipping*.

El noveno capítulo, contiene el diseño de estrategias de control avanzado para un sistema de transporte público que consta de dos rutas y una estación de transbordo. Las estrategias incluyen controladores difusos y predictivos. La sintonización de los parámetros que ponderan, los índices de comportamiento de la función objetivo, se determinan con un algoritmo de enjambre de partículas (PSO). El controlador es formulado con estrategias de *holding* y *stop-skipping*. Se plantea soluciones bajo las directrices de la teoría de sistemas de gran escala, en especial control descentralizado, distribuido y centralizado.

En el capítulo 10 se plantea una generalización al problema del control de un sistema de transporte de mayor dimensión que incluye estaciones de transbordo. La solución del problema, se logra por medio un controlador jerárquico, el cual considera la integración de los controladores ya diseñados en los capítulos anteriores.

El último capítulo, se presenta las conclusiones generales de esta tesis y se proponen las líneas futuras de investigación.

# Capítulo II

## Control predictivo de sistemas híbridos

Los sistemas híbridos se han modelado de distintas formas: como un grafo de transición de estados (con dinámica continua dentro de cada estado) o bien como un conjunto de ecuaciones diferenciales con variables continuas, o en ecuaciones de diferencias con variables discretas (Favela, 1999). Esta última descripción es la seleccionada en este trabajo, ya que se adapta a las necesidades de modelación y control del sistema estudiado.

## 2.1. Modelos híbridos

Los sistemas híbridos se han modelado como un conjunto de ecuaciones diferenciales, o de diferencias, con variables discretas. Existen variadas representaciones de los modelos híbridos que se presentan a continuación:

### 2.1.1. Sistemas dinámicos y lógicos mixtos

Una forma de modelar sistemas dinámicos híbridos es mediante sistemas dinámicos y lógicos mixtos (sistemas MLD, "*Mixed Logical Dynamical Systems*"). Este tipo de sistemas propuestos en Bemporad y Morari, (1999) corresponde al siguiente planteamiento:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + B_1u(k) + B_2\delta(k) + B_3z(k) \\y(k) &= Cx(k) + D_1u(k) + D_2\delta(k) + D_3z(k) \\E_1\delta(k) + E_2z(k) &\leq E_3u(k) + E_4x(k) + E_5\end{aligned}\tag{2.1}$$

Si entendemos por variable cuantizada una variable que pertenece a un conjunto con cardinalidad reducida. Tenemos que la variable de estado,  $x(k) = [x^r(k) \quad x^b(k)]$  siendo  $x^r(k) \in \mathbb{R}^n$  la parte continua (o discreta) del vector de estado y  $x^b(k) \in \{0,1\}^{n_b}$  la parte cuantizada. La variable de salida tiene una estructura similar  $y(k) = [y^r(k) \quad y^b(k)]$  donde  $y^r(k) \in \mathbb{R}^m$  es la parte continua (o discreta) y la parte cuantizada viene dada por  $y^b(k) \in \{0,1\}^{m_b}$ . El vector de entradas  $u(k) = [u^r(k) \quad u^b(k)]$  está compuesto por una parte continua (o discreta)  $u^r(k) \in \mathbb{R}^l$  y otra cuantizada  $u^b(k) \in \{0,1\}^{l_b}$ . La descripción requiere variables auxiliares continua (o discreta)  $z(k) \in \mathbb{R}^r$  y cuantizadas  $\delta(k) \in \{0,1\}^{r_b}$ . Además, las matrices  $A, B_1, B_2, B_3, C, D_1, D_2, D_3, E_1, E_2, E_3, E_4$  y  $E_5$  son matrices de tamaño adecuado.

En los sistemas MLD las expresiones lógicas de la parte discreta de un sistema híbrido se pueden expresar por restricciones lineales (ver detalles en el anexo A).

Son variadas las áreas de aplicaciones para el marco teórico de modelamiento MLD, como por ejemplo, se ha aplicado a un sistema de suministro de gas (Bemporad y Morari, 1999). También, a un sistema de generación distribuido formado por una celda de combustible y un sistema de paneles fotovoltaicos (del Real *et al.*, 2007). Además, un modelo de la simulación del flujo de peatones se introduce sobre la base de un sistema MLD. Basado en el modelo propuesto, se investiga el efecto de un obstáculo colocado delante de la salida en términos del coeficiente de caudal y el tiempo de evacuación (Koukaki y Kojima 2009). En todos los sistemas analizados intervienen variables híbridas cuya representación por un sistema MLD permite pasar del un sistema dinámico no-lineal a un sistema dinámico con restricciones lineales.

### 2.1.2. Sistemas lineales por tramos

Un sistema dinámico lineal a tramos (sistema PWA, “*Piece Wise Affine*”) se puede describir como:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^i x(k) + B^i u(k) + f^i \quad \text{para} \quad \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in X_i \\ y(k) &= C^i x(k) + g^i \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $\{X_i\}_{i=1}^s$  es una partición poliédrica del espacio de estado-entrada. Cada  $X_i$  está dada por:

$$X_i \equiv \left\{ \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad Q^i \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \leq q^i \right\} \quad (2.3)$$

donde  $x(k), u(k), y(k)$  denotan los vectores de estados, de las entradas y salida, respectivamente. Cada subsistema  $S^i$  definido por la 6-tupla  $(A^i, B^i, C^i, f^i, Q^i, q^i)$ ,

$i \in \{1, 2, \dots, s\}$  denominado componente del sistema PWA. En (2.2)  $A^i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B^i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  y  $(A^i, B^i)$  es un par controlable.  $C^i \in \mathfrak{R}^{r \times n}$ ,  $Q^i \in \mathfrak{R}^{p_i \times (n+m)}$ ,  $f^i$ ,  $g^i$  y  $q^i$  son vectores constantes adecuados. Note que  $n$  es un número de estados,  $m$  es el número de entradas,  $r$  es el número de salidas y  $p_i$  es el número de hiperplanos que definen el poliedro  $i$ .

Los sistemas PWA tienen la ventaja de permitir aproximar sistemas no lineales con un grado de precisión arbitrario. Su identificación se logra (Ferrari-Trecate *et al.*, 2003) definiendo una grilla y encontrando el mejor submodelo afín que se adapta a cada una de ellas. El principal problema de esta identificación es que su mejora tiene que ser lograda introduciendo un alto número de pequeñas regiones.

También se ha logrado su identificación por la combinación de técnicas con utilización de clúster, identificación lineal y reconocimiento de patrones (Ferrari-Trecate *et al.*, 2000).

Son variadas las áreas de aplicaciones para el marco teórico de modelamiento PWA. Como por ejemplo, en Azuma y Imura (2003), se ha aplicado para modelar la relación entre la cantidad de tareas de una CPU, su temperatura y la frecuencia del ventilador correspondiente, con el objetivo de hacer un control predictivo sobre los distintos sistemas de la partición del espacio entrada-estado y lograr eficiencia energética. En Kogiso y Hirata (2006), se presenta un modelo PWA para el problema del derrape de la ruedas de un vehículo y se plantea un controlador predictivo híbrido para la solución del control dinámico del vehículo. En el trabajo de Corona y De Schutter (2006) se realiza un control predictivo para que sea mínima la separación entre dos vehículos, cuya dinámica es expresada por un sistema PWA. La partición del espacio entrada-estado surge de la necesidad de considerar dos áreas en él, donde la velocidad está paralelamente bajo y sobre un umbral preestablecido.

Además, existen dos representaciones menos comunes para un sistema híbrido, los sistemas LCS, "*Linear Complementary Systems*" y sistemas MMPS, "*Min-Max-plus-Scaling Systems*", que se presentaran en el apéndice del capítulo.



Por último, se puede demostrar (Heemels *et al.*, 2001) que los modelos mencionados en el párrafo anterior y los presentados en la sección 2.1.1 y 2.1.2, son equivalentes. Es decir, la dinámica de un mismo sistema híbrido puede ser expresada de las distintas formas presentadas, manteniendo en cada representación características intrínsecas idénticas.

Realizando un análisis sobre el estado del arte, se observa que el concepto de sistemas híbridos es muy amplio, y se trata desde perspectivas muy distintas. Siendo los modelos MLD los que se adaptan mejor a la necesidades y objetivos de esta tesis.

## **2.2. Control predictivo híbrido**

El control predictivo (“*Model Predictive Control*”, MPC) es un conjunto de métodos de control que hacen uso explícito de un modelo del proceso para obtener la señal de control minimizando una función objetivo. Estos métodos de control llevan a controladores que tienen básicamente la misma estructura y los siguientes elementos principales:

- Uso explícito de un modelo para predecir la evolución del proceso en los instantes futuros.
- Minimización de una función objetivo.
- Utilización de un horizonte de control finito y deslizante que implica el cálculo de la secuencia de control para todo el horizonte pero con la aplicación de la primera señal de la secuencia y la repetición de todo el proceso en el siguiente instante.

Los distintos algoritmos de control predictivo difieren en el tipo de modelo utilizado para representar al proceso y a las perturbaciones, y la función objetivo considerada. Existen aplicaciones de control predictivo a variados procesos que van desde procesos tan diversos como robots (Gómez y Camacho, 1996) y la anestesia clínica (Linkers y Mahfonf, 1994). Aplicaciones en la industria de cemento, secadoras y brazos robóticos, por ejemplo se

pueden ver a Clarke y Cham (2001), mientras que desarrollos para columnas de destilación, plantas de PVC, generadores de vapor y servos se presentan en Richalet (1993).

Al introducir modelos dinámicos híbridos, a la formulación de un control predictivo se abre una gran gama de soluciones de problemas que en el pasado sólo se resolvían de forma aproximada. En los últimos años, podemos mencionar el trabajo de Uthaichana *et al.*, (2008), donde se presenta un controlador predictivo híbrido para un vehículo eléctrico, basado en un modelo con dos modos de operación. Los flujos de potencia óptimos entre los subsistemas principales del vehículo, se calculan como soluciones de la optimización de un sistema conmutado (un problema de programación no lineal) formulado a un nivel de supervisor, asumiendo una estructura jerárquica de control del vehículo. Por último, en Bernardini (2010), se realiza una formulación de la dinámica de un vehículo motorizado, por medio de un modelo PWA que considera los ángulos de deslizamiento de los neumáticos delanteros y traseros y una aproximación de las características de la fuerza de las llantas. Este modelo se utiliza para diseñar un control predictivo híbrido con el fin de optimizar su comportamiento. La formulación del modelo propuesto permite analizar visualmente la región estabilidad del sistema de lazo cerrado para evaluar la estabilidad del controlador HPC implementado.

El control predictivo como se vio en los trabajos de Uthaichana *et al.*, (2008) y Bernardini *et al.*, (2009), puede ser también aplicado a sistemas híbridos. En esta sección se describen a los algoritmos de control predictivo basados en sistema MLD, sistemas PWA y programación multiparamétrica.

### 2.2.1. Control predictivo basados en modelos MLD

El problema de control predictivo basados en modelos MLD se puede formular como:

$$u^* = \arg \min_u \left( \|x - r_x\|_{Q_x}^p + \|u - r_u\|_{Q_u}^p + \|\delta - r_\delta\|_{Q_\delta}^p + \|z - r_z\|_{Q_z}^p \right) \quad (2.4)$$

sujeto a las ecuaciones (1), donde  $\|x\|_Q^p$  denota  $x^T Q x$  cuando  $p = 2$  y  $Q\|x\|_p$  para  $p = 1$  o  $p = \infty$  y  $Q_x, Q_u, Q_\delta, y Q_z$  son matrices de peso de dimensiones apropiadas y todas las señales se predicen con la información disponible hasta el instante  $t$  en la forma usual del control predictivo. Los vectores  $x, u, \delta, z, r_x, r_u, r_\delta$  y  $r_z$  son los vectores de estados futuros predichos, movimientos de control, variables lógicas auxiliares, variables reales auxiliares, y sus referencias futuras respectivamente.

El control predictivo resulta ser un problema de optimización con un conjunto de restricciones lineales y con variables de decisión reales (continuas y discretas) y variables cuantizadas. Este tipo de problemas de optimización se conoce con el nombre de problemas de programación mixta entera. Son problemas mucho más difíciles de resolver que los problemas de programación lineal o programación cuadrática (Floudas, 1995).

### 2.2.2. Control predictivo de sistemas PWA

Asumiendo que todo el estado está disponible (en caso contrario, un estimador del estado será necesario), la formulación del control predictivo con función cuadrática en el caso PWA es:

$$u^* = \arg \min J \tag{2.5}$$

$$\text{s.a. } J = \sum_{i=1}^N q_i (y(k+i/k) - w(k+i))^2 + \sum_{i=0}^{N-1} r_i u(k+i)^2$$

$$u_{\min} \leq u(k+i) \leq u_{\max} \quad i = 0, \dots, N-1$$

Donde  $J$  representa un índice de comportamiento que penaliza el error de seguimiento de la salida predicha del sistema  $y(k+i)$  en el instante  $k+i$  conocida la del instante  $k$  con respecto al la referencia  $w(k+i)$  en el instante  $k+i$  y penaliza el esfuerzo de control relacionado con el cuadrado de la variable manipulada  $u(k+i)$  en el instante  $k+i$ . Se incluyen constantes  $q_i$  y  $r_i$  como pesos relativos. Además se incluyen las restricciones impuestas a la variable manipulada.

Al analizar el problema de predicción vemos que el subsistema que describe el proceso en el instante  $k$  es conocido, pero el siguiente subsistema donde el proceso estará en el instante de tiempo siguiente depende de la señal de control aplicada.

Por ejemplo si  $\{X_i\}_{i=1}^s$  es la partición del espacio de estado-entrada, el subsistema  $I(k)$  en el tiempo  $k$  correspondiente a subconjunto  $X_i$  de la partición queda definido como:

$$\begin{aligned} x(k) &= A^i x(k-1) + B^i u(k-1) + f^i & \text{para } \begin{bmatrix} x(k-1) \\ u(k-1) \end{bmatrix} \in X_i \\ y(k) &= C^i x(k) + g^i \end{aligned} \quad (2.6)$$

Entonces  $I(k)$  es conocido porque se conoce la señal de control aplicada  $u(k-1)$ . Supongamos ahora que la señal de control siguiente en el tiempo  $k+1$  ocupa el subsistema  $I(k+1)$  correspondiente a subconjunto  $X_j$  de la partición del espacio de estados, es decir

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^j x(k) + B^j u(k) + f^j & \text{para } \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in X_j \\ y(k+1) &= C^j x(k+1) + g^j \end{aligned} \quad (2.7)$$

En este caso la señal de control  $u(k)$  no es conocida. En general, una secuencia de subsistemas  $I = \{I(k) \ I(k+1) \ \dots \ I(k+N)\}$  se pueden "activar" a lo largo de la trayectoria. Sólo el primer valor  $I(k) = I(k)(x(k-1), u(k-1))$  de esta secuencia es conocido. Nótese que si no hay restricciones, el número posible de secuencias para un horizonte de  $N$  es  $s^{N-1}$ , número que puede ser muy elevado. El problema de optimización resultante se puede expresar como:

$$u^* = \arg \min_{u, I} J \quad (2.8)$$

donde hay que añadir restricciones para considerar las dependencias entre los subsistemas y sus ecuaciones correspondientes, i.e.:

$$R^{I(k+j)} \cdot x(k+j) \leq r^{I(k+j)}, \quad j = \{1, \dots, N\} \quad (2.9)$$

Este problema podrá ser resuelto encontrando el óptimo para cada posible secuencia de  $I$ , i.e.

$$u^* = \arg \min_I \left( \min_u \left( \begin{matrix} J \\ R^{IU} \cdot u \leq q^{IU} \end{matrix} \right) \right) \quad (2.10)$$

donde  $R^{IU} \cdot u \leq q^{IU}$  son las restricciones debidas a las dependencias entre  $I$  y  $U$ . Los problemas de programación entera mixta lineal o cuadrática resultante son mucho más difíciles de resolver en tiempo real que los problemas programación lineal o cuadrática de los controladores predictivos nominales.

### 2.2.3. Control predictivo híbrido con programación multiparamétrica

El control predictivo se puede considerar una técnica madura para sistemas lineales y no muy rápidos como los encontrados normalmente en la industria de procesos. Sistemas más complejos, tales como sistemas no lineales, híbridos, y/o sistemas muy rápidos, eran considerados como fuera del alcance de los controladores predictivos. Con técnicas derivadas de la optimización multiparamétrica se ha logrado encontrar una solución factible a estos sistemas complejos.

La solución óptima del problema de programación multiparamétrica no es un número como en el caso de la optimización convencional, sino una función óptima  $z^*(x)$  de un parámetro  $x$  perteneciente a un espacio acotado  $X$ . La solución utiliza el concepto de regiones críticas  $Cr^i \quad i=1, \dots, r$  las cuales generan una partición  $\bigcup_{i=1}^r Cr^i = X$  del espacio de

parámetros, en cada una de las cuales se logra definir una solución óptima afín  $z^*(x) = F^i x + g^i$  del problema de optimización.

Se ha demostrado (Bemporad *et al.*, 2002) que el problema del control predictivo se puede expresar como un problema de programación multiparamétrica, donde la variable de optimización es la secuencia de control  $U_N = [u'_0, \dots, u'_{N-1}]$  y el parámetro, la condición inicial  $x_0$  de la variable de estado del sistema, luego la solución resultante es un controlador afín a trozos en el espacio de estado (espacio de las condiciones iniciales). La idea fue sugerida por primera vez en Zafiriou (1990).

La solución del problema de control óptimo en tiempo finito, con programación multiparamétrica, se transforma en una búsqueda de la ley de control representada por un modelo afín para cada región de la partición del espacio de estado (espacio de las condiciones iniciales) donde la condición inicial pertenezca.

Para este tipo de solución el tiempo de control debería ser reducido ya que el control consistiría en sólo acceder a una tabla, en lugar de tener que resolver en cada instante un pesado problema de optimización.

También por medio de la optimización multiparamétrica se obtiene una solución afín a tramos para el problema de control óptimo de sistemas híbridos con restricciones. Realizando sendos controladores multiparamétricos en cada región que presenta el modelo híbrido.

## **2.4. Solución de los controladores predictivos por optimización con algoritmos evolutivos o de enjambres de partículas**

La mayoría de las aplicaciones de algoritmos evolutivos o de enjambres de partículas en controladores predictivos, están dirigidas a resolver el problema de optimización que surge en la formulación del problema. Como por ejemplo Michalewicz *et al.*, (1990) estudia la

aplicación de algoritmos genéticos (AG) para el control óptimo en tiempo discreto, obteniendo buenos resultados en comparación con los métodos clásicos de programación matemática. En Onnen *et al.*, (1997), se realiza uno de los más profundos estudios de la aplicación de un AG para el control predictivo, con énfasis en operadores evolucionarios especialmente diseñados para control en tiempo real, dos ejemplos de estos operadores son: el operador *fitness*, en el cual la función objetivo es minimizada en línea a una velocidad determinada. Luego, si su índice de comportamiento es  $J$ , el operador *fitness* será  $f = 1/J$ . El segundo es el operador horizonte de predicción heredado (entre dos sucesivos intervalos de cálculo) donde, los mejores cromosomas obtenidos en una iteración son usados para inicializar la siguiente población, entonces, como el horizonte de predicción y de control son desplazados al futuro, implica que los valores de los mejores cromosomas son desplazados hacia el pasado, lo cual debe corregirse en cada iteración.

En Onnen. *et al.*, (1997), la estrategia del AG es comparada exitosamente con el algoritmo *branch and bound*, demostrando ser más eficaz, en la medida que el horizonte de predicción aumente. Sin embargo, no se toma en cuenta la carga computacional para resolver el problema de optimización. En Fravolini *et al.*, (2008) se propone un método para reducir el error de seguimiento de trayectoria de un sistema robótico en presencia de saturaciones de las entradas y restricciones de estado. Se proponen varias estrategias de aplicación de los algoritmos evolutivos en la formulación del problema de control predictivo correspondiente, teniendo en cuenta aspectos como la carga computacional, además de operadores especializados, de inicialización y representación de las soluciones.

Otras obras, proponen la aplicación de los algoritmos evolutivos en control predictivo, pero sólo hacen estudios de comparación del rendimiento del algoritmo frente a otros los métodos convencionales. Entre ellos, Shin y Park (1998), Na y Hwang (2006) y Yuzgec *et al.*, (2006), los cuales obtienen resultados satisfactorios, al aplicar un algoritmo genético a la formulación del control predictivo al nivel de un tanque, un sistema de potencia y un proceso de secado, respectivamente. En los trabajos de Causa *et al.*, (2008) y Muñoz-Carpintero *et al.*, (2010) un AG es aplicado en la solución de un control predictivo de un *batch reactor*, con entradas discretas. El método se compara con el algoritmo *branch and*

*bound*, mostrando un buen desempeño. En Sáez *et al.*, (2008) y Cortés *et al.*, (2008), un AG se utiliza para la solución en la optimización en un problema de ruteo dinámico de vehículos, obteniendo buenos resultados en términos de costo computacional y la calidad de las soluciones.

El algoritmo de optimización por enjambres de partículas (PSO, "*Particle Swarm Optimization*" ) también se ha aplicado en la resolución del control predictivo. El algoritmo PSO se utiliza en Coelho *et al.*, (2005) y Wang y Xiao (2005) para resolver el problema de optimización en la formulación de control predictivo, y se obtienen buenos resultados cuando se compara con un AG y métodos cuasi-Newton. En Solís *et al.*, (2006) se compara la aplicación de un algoritmo PSO con un AG en el control predictivo de un proceso *benchmark*, obteniendo mejores resultados con PSO. Por último en Cortés *et al.*, (2009) se obtuvo buenos resultados cuando se comparó con un método convencional, la aplicación de un algoritmo PSO para la formulación de un control predictivo de un problema *dial-a-ride*. El problema *dial-a-ride* consiste, en determinar el recorrido que deben hacer uno o varios móviles que se mueven dentro de una red de transporte, donde deben cumplirse una serie de requerimientos como, transportar objetos desde un origen y hacia un destino determinado. El problema puede tener o no restricciones de capacidad de los móviles y tamaño de la carga. El objetivo es minimizar el costo del movimiento del móvil y/o el tiempo de entrega de los requerimientos.

## **2.5. Estabilidad del control predictivo**

La solución eficiente del problema del control predictivo es importante para cualquier aplicación a procesos reales, pero no es menos importante la estabilidad del lazo cerrado. Para formulaciones del controlador predictivo con sistemas lineales y sin restricciones, la estabilidad se puede analizar con herramientas convencionales de teoría de sistemas lineales, pero si aparecen restricciones o el sistema es no lineal, la ley de control se convierte en no lineal y deben usarse otras herramientas. Incluso, en el caso de que el algoritmo de optimización encuentre una solución, esto no garantiza la estabilidad del lazo cerrado.



Por lo cual, el análisis de la estabilidad de los controladores predictivos se suele realizar mediante el uso de penalización, restricción terminal, funciones de Lyapunov o conjuntos invariantes, teoría capaz de garantizar la estabilidad del sistema controlado (Mayne, 2001)

Entonces, el control predictivo de un sistema dinámico  $x(k+1) = f(x(k), u(k))$  requiere resolver el problema de optimización siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\{u(k), \dots, u(k+N-1)\} \in U} J_N(x(k), u(k)) \\
 \text{s.a.} \quad & u(k+j/k) \in U \quad j = 0, \dots, N-1 \\
 & x(k+j/k) \in X \quad j = 0, \dots, N-1 \\
 & x(k+N/k) \in \Omega
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde el coste a optimizar

$$J_N(x(k), u(k)) = \sum_{i=0}^{N-1} L(x(k+i/k), u(k+i/k)) + V(x(k+N/k)) \tag{2.12}$$

siendo  $V(x)$  una función que penaliza el coste estado final de la predicción (estado terminal), denominada función de coste terminal. Al conjunto  $\Omega$  al que se restringe dicho estado se denomina región terminal.

Las formulaciones del control predictivo con garantía de estabilidad han ido evolucionando hasta llegar a la necesidad de la región terminal y del coste terminal de una u otra forma.

Las condiciones suficientes sobre la función de coste terminal y la región terminal para garantizar la estabilidad son las siguientes:

- La región terminal  $\Omega$  debe ser un conjunto invariante positivo admisible del sistema. Es decir, que debe existir una ley de control local  $u = h(x)$  tal que estabiliza

el sistema en  $\Omega$  y además la evolución del sistema y las actuaciones en dicho conjunto son admisibles.

- El coste terminal  $V(x)$  es una función de Lyapunov asociada al sistema regulado por el controlador local, tal que  $V(f(x, h(x))) - V(x) \leq -L(x, h(x))$  para todo  $x \in \Omega$ . Por lo tanto, la ley de control local estabiliza asintóticamente el sistema (donde  $u(k) = h(x(k)) \in U$  son actuaciones admisibles).

Esto es, el sistema es tal que existe una vecindad del origen  $\Omega \in X$  que es un conjunto invariante de control del sistema (ecuación (2.11)) y además tiene asociada una función de Lyapunov de control  $V(x)$  tal que

$$\min_{u \in U} \{V(f(x, u)) - V(x) + L(x, u), \text{ sujeto a } f(x, u) \in \Omega\} \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (2.13)$$

### Necesidad de la región terminal invariante

Si definimos:

Conjunto invariante positivo: Un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es un conjunto invariante positivo, si para todo  $x(0) \in \Omega$  la evolución del sistema es tal que  $x(k) \in \Omega$  para todo  $k \geq 0$ .

Conjunto estabilizable en  $i$  pasos: Es el conjunto de estados  $S_i(X, \Omega)$  para los cuales existe una secuencia de actuaciones admisibles (cumplen las restricciones  $u_k \in U$ ) tal que conduce el sistema desde  $X$  hasta el conjunto  $\Omega$  en  $i$  pasos con una trayectoria admisible, tal que  $\Omega \subseteq X$  es un conjunto invariante positivo.

$$S_i(X, \Omega) = \{x(k) \in X : \text{para todo } j = 0, \dots, i-1, \exists u(k+j) \in U \text{ tal que } x(k+j) \in X \text{ y } x(k+i) \in \Omega\} \quad (2.14)$$

Luego, si la región terminal es un invariante positivo, entonces el conjunto de estados factibles es el conjunto de estados estabilizables en  $N$  pasos  $X_N = S_N(X, \Omega)$ . Considérese  $x(k) \in X_N$ . Dada la ausencia de discrepancias entre el modelo de predicción y el sistema, se tiene que el estado al que evoluciona el sistema es el predicho  $x(k+1) = x(k+1/k)$ . Este estado puede alcanzar la región  $\Omega$  en  $N-1$  pasos, luego  $x(k+1) \in X_{N-1}$ . Gracias a que  $\Omega$  es un conjunto invariante, este conjunto tiene la propiedad que  $X_{N-1} \subseteq X_N$  y por lo tanto  $X_N$  es un conjunto invariante positivo del sistema en bucle cerrado, lo que garantiza la factibilidad del controlador en todo instante.

### Necesidad del coste terminal como función de Lyapunov

Bajo la condición, del coste terminal como función de Lyapunov, se garantiza que el coste óptimo es estrictamente decreciente, y por lo tanto es una función de Lyapunov del sistema. Esto garantiza la estabilidad asintótica del sistema en bucle cerrado con restricciones. La monotonía de la función de coste óptimo se basa en la existencia de una secuencia de actuaciones factibles  $\bar{u}_F(k+1)$  basada en la solución óptima obtenida en el instante anterior  $u_F^*(k)$ . Esta secuencia no es más que los  $N-1$  términos que restan de la secuencia anterior más la actuación obtenida de la ley de control local. Así, la diferencia entre el coste de esta secuencia,  $\bar{J}_N(x(k+1))$ , y el coste óptimo anterior,  $J_N^*(x(k))$ , es

$$\begin{aligned} \bar{J}_N(x(k+1)) - J_N^*(x(k)) = & -L(x_k, u^*(k/k)) + \left\{ L(x^*(k+N/k), h(x^*(k+N/k))) \right. \\ & \left. + V(f(x^*(k+N/k), h(x^*(k+N/k)))) - V(x^*(k+N/k)) \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

La incorporación del coste terminal garantiza que el término entre llaves es negativo, y por lo tanto la secuencia factible tiene un coste menor que el óptimo anterior, por lo que la solución óptima también lo tendría. En consecuencia si la ley de control MPC es  $u(k) = K_{MPC}(x(k))$  tenemos,

$$J_N^*(x(k+1)) - J_N^*(x(k)) \leq -L(x(k), K_{MPC}(x(k))) \quad (2.16)$$

y por lo tanto el coste óptimo es una función de Lyapunov que decrece a lo largo de la evolución del sistema, lo que garantiza la estabilidad asintótica.

## 2.6. Discusión

La estrategia de control predictivo de sistemas PWA, implica expresar el sistema dinámico en variables de estado y determinar una partición del espacio de estado coherente con el proceso a controlar. Esto implica un gran esfuerzo de identificación, que no representa la forma seleccionada en esta tesis, para modelar un sistema de transporte público.

Aunque el control predictivo híbrido con programación multiparamétrica presenta grandes posibilidades con respecto a la disminución del tiempo computacional. En este trabajo se postergará esta opción hasta tener más madura la representación del sistema a modelar. Esto es, la programación multiparamétrica exige un importante cálculo *off-line*, que con sistemas dinámicos de grandes dimensiones se vuelve difícil de manejar.

Dentro de las tres estrategias de control presentadas, la más adecuada para trabajar en esta tesis es la estrategia de control predictivo basados en modelos MLD, cuya solución en general es por medio de programación cuadrática entera. En nuestro caso podemos simplificar el método de solución utilizando la estrategia de recorrer inteligentemente un árbol de decisiones (ver capítulo 7).

Ahora, debido a la dificultad de una representación del sistema dinámico en variables de estado, no se realizará un análisis formal de estabilidad, de los controladores diseñados, como lo mencionado por Mayne, (2001). En cambio, se garantizará ante perturbaciones, el buen comportamiento de las soluciones encontradas, por medio del examen de un número estadísticamente recomendable de escenarios representativos (ver capítulo 7).

De esta manera, se aplicará parte de este formalismo matemático para describir las estructuras de control desarrolladas en el capítulo 9. En particular, considerando un sistema de transporte público como la unión de un conjunto de subsistemas formados por rutas individuales, se plantea un diseño de un controlador centralizado, un controlador descentralizado y un controlador distribuido para el sistema. Finalmente, se desarrolla un controlador jerárquico que administra inteligentemente un conjunto de controladores previamente diseñados para las rutas individuales.

# Capítulo III

## Sistema de gran escala

Dentro de los objetivos generales que se plantearon para esta tesis se incluyó la generalización de los controladores desarrollados (en un sistema de transporte público de una ruta) a un sistema de transportes público de varias rutas con estaciones de trasbordo. Las estrategias de control de estos sistemas se enmarcan en el área del control de los sistemas de gran escala o control de planta completa. En este capítulo describiremos los principales enfoques de esta área de investigación, incluyendo los resultados teóricos básicos para su comprensión.

El objetivo de controlar la planta completa ("*Plantwide Control*", PWC) ha atraído la atención de la comunidad de control de procesos por más de 40 años (Scattolini, (2009)). A través de estos años, arquitecturas diferentes se han utilizado para abordar el problema de controlar el proceso completo. En este capítulo se presenta una reseña de las opciones más conocidas para hacer frente a un PWC. Una posible clasificación de las diferentes arquitecturas de PWC se presenta en la Figura 3.1. Esta clasificación, está en acuerdo en algunos puntos como los presentados por Scattolini (2009), los enfoques de PWC se presentan en tres grupos principales, que se caracterizan por la complejidad del modelo

considerado (en el sistema de control), para describir la dinámica del proceso y por el grado de comunicación entre los controladores de diferentes unidades operativas, o entre diferentes capas de la jerarquía del sistema de control. Estas tres principales arquitecturas son: descentralizada, distribuida, jerárquica. (Ochoa, 2010, Scattolini, 2009 y Brdys, 2008).

Teniendo en cuenta la complejidad del modelo, en el enfoque descentralizado se evita la necesidad de un modelo del proceso (con excepción del descentralizados MPC, que por supuesto necesita un modelo del proceso). En la arquitectura distribuida, el caso habitual es utilizar modelos lineales dinámicos. El caso de múltiples capas por lo general hace uso de un modelo de estado estacionario no lineal en la capa de optimización y un modelo lineal dinámico en la capa del controlador, esto será explicado posteriormente. Por último, ya que la operación del sistema de control en el caso de una sola capa se apoya en un controlador centralizado, es conveniente considerar un modelo dinámico no lineal con el fin de predecir el comportamiento del proceso lo más cerca posible a la realidad.

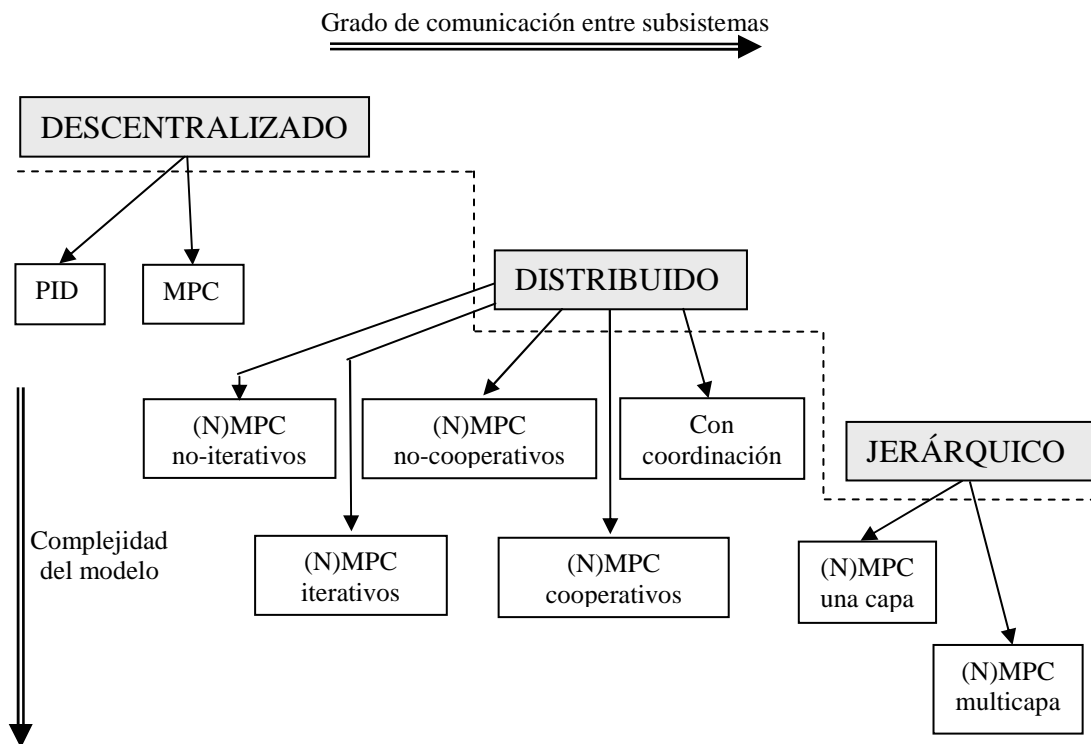


Figura 3.1: Clasificación de las arquitecturas de control de toda la planta presentadas en este capítulo (elaboración propia).

Posteriormente en este mismo capítulo se describirán las arquitecturas presentadas en la Figura 3.1 (clasificación más simple), así como las ideas principales que caracterizan la estabilidad de estos controladores.

A continuación se introduce, el principio de inclusión, una de las principales herramientas matemáticas diseñadas para atacar el problema del diseño de un controlador para una planta de gran escala.

### **3.1. Principio de inclusión**

El principio de inclusión fue introducido a inicios de los años ochenta dentro del ámbito del análisis y del control de los sistemas de gran escala (Ikeda *et al.*, 1984). Esencialmente, el principio establece las condiciones para que dos sistemas dinámicos de dimensiones distintas puedan tener comportamientos relacionados. Esto significa que es posible construir un sistema de mayor dimensión que el sistema dado a través de una expansión, de tal forma que el sistema expandido contenga toda la información a cerca del sistema dado. También es posible extraer la información del sistema de mayor dimensión a través de un proceso de contracción.

El principio de inclusión se basa en la elección de transformaciones lineales apropiadas entre los espacios de estado, salida y control. Dichas transformaciones están influenciadas por matrices conocidas como matrices complementarias. A lo largo de la historia únicamente se han utilizado dos tipos concretos de expansiones, llamadas restricciones y agregaciones, aunque el estudio de otras posibilidades ha sido considerado como un problema de gran interés.

El diseño de controladores descentralizados busca básicamente, expandir un sistema, el cual supone estar constituido por subsistemas solapados ("*overlapping*") y construir un sistema de mayores dimensiones en donde los subsistemas aparezcan ahora disjuntos (sin solapamiento) y lo más débilmente acoplados entre sí. Luego diseñar controladores descentralizados para cada subsistema aplicando técnicas de diseño estándar de control.



El mecanismo seguido para realizar un control descentralizado, implica definir un sistema lineal  $S$ , el cual representa un sistema de gran escala compuesto por  $s$  subsistemas además un sistema lineal  $\tilde{S}$  expandido de  $S$ .

Esto es, si definimos los sistemas:

$$\begin{aligned} S: \quad \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}, \quad \begin{aligned} \tilde{S}: \quad \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , son el estado, la entrada y la salida del sistema  $S$  para  $t \in \mathbb{R}^+$ . De forma análoga,  $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ ,  $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ ,  $\tilde{y}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{l}}$ , son el estado, la entrada y la salida del sistema expandido  $\tilde{S}$ , respectivamente. Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  de tamaño  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $l \times n$ ,  $\tilde{n} \times \tilde{n}$ ,  $\tilde{n} \times \tilde{m}$ ,  $\tilde{l} \times \tilde{n}$ , respectivamente, se supondrán constantes y representarán a los sistemas  $S$  y  $\tilde{S}$ . Supondremos que los vectores  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$  corresponden a  $S$ , los cuales son de dimensión menor (a lo sumo igual) que los respectivos vectores  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$  del sistema  $\tilde{S}$ , es decir  $n \leq \tilde{n}$ ,  $m \leq \tilde{m}$ ,  $l \leq \tilde{l}$ . Notaremos por  $x(t; x_0, u)$  a la solución de  $S$  para el instante  $t = 0$ , estado inicial  $x(0) = x_0$  y una entrada fija  $u(t)$ . Designaremos por  $y[x(t)]$  su correspondiente salida. Análogamente para  $\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, \tilde{u})$  y  $\tilde{y}[\tilde{x}(t)]$  del sistema  $\tilde{S}$ . Por brevedad de notación,  $x(t)$  indicará la solución para un arbitrario  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y una entrada de control  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ . Asimismo,  $x$  representa al vector  $x(t)$  para  $t \geq 0$ . Análogamente, para  $\tilde{x}(t)$  de  $\tilde{S}$ .

Entonces, el mecanismo utilizado para aplicar las técnicas de control descentralizado mediante descomposición con solapamiento, puede esquematizarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
\text{S: } \dot{x} = Ax + Bu & & \tilde{\text{S}}: \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\
y = Cx & (1) \rightarrow & y = \tilde{C}\tilde{x} \\
\uparrow (4) & & \downarrow (2) \\
\tilde{\text{S}}_D: \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\tilde{x} + \tilde{B}_D\tilde{u} & & \tilde{\text{S}}_i: \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\tilde{x} + \tilde{B}_D\tilde{u} + \tilde{A}_C\tilde{x} + \tilde{B}_C\tilde{u} \\
\tilde{y} = \sum_{i=1}^s \tilde{C}_i\tilde{x}_i & \leftarrow (3) & \tilde{y} = \sum_{i=1}^s \tilde{C}_i\tilde{x}_i
\end{array} \tag{3.2}$$

Cada uno de los pasos presentados tiene la siguiente explicación.

En el paso (1),

$$\begin{array}{ccc}
\text{S: } \dot{x} = Ax + Bu & & \tilde{\text{S}}: \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\
y = Cx & (1) \rightarrow & y = \tilde{C}\tilde{x}
\end{array} \tag{3.3}$$

se expande el sistema S a un nuevo sistema expandido  $\tilde{\text{S}}$ , de manera que dicho proceso cumpla una serie de requisitos, es decir, esté bajo las condiciones del “principio de inclusión” ( ver definición 3.1). Así pues, el paso (1) nos proporciona un sistema  $\tilde{\text{S}}$  que es de mayor dimensión y con la particularidad de que aparece descompuesto en  $s$  subsistemas que pueden compartir algunas de sus variables.

En el paso (2),

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\text{S}}: \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\
y = \tilde{C}\tilde{x} \\
\downarrow (2) \\
\tilde{\text{S}}_i: \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\tilde{x} + \tilde{B}_D\tilde{u} + \tilde{A}_C\tilde{x} + \tilde{B}_C\tilde{u} \\
\tilde{y} = \sum_{i=1}^s \tilde{C}_i\tilde{x}_i
\end{array} \tag{3.4}$$

el sistema expandido es tratado como un sistema interconectado, formado por  $s$  subsistemas disjuntos. Las matrices  $\tilde{A}_D$  y  $\tilde{B}_D$  son matrices diagonales por bloques y las matrices  $\tilde{A}_C$  y  $\tilde{B}_C$  son las denominadas "matrices de interconexión".

En el paso (3),

$$\begin{aligned} \tilde{S}_D : \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}_D \tilde{x} + \tilde{B}_D \tilde{u} & \tilde{S}_I : \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}_D \tilde{x} + \tilde{B}_D \tilde{u} + \tilde{A}_C \tilde{x} + \tilde{B}_C \tilde{u} \\ \tilde{y} &= \sum_{i=1}^s \tilde{C}_i \tilde{x}_i & \tilde{y} &= \sum_{i=1}^s \tilde{C}_i \tilde{x}_i \end{aligned} \quad \leftarrow (3) \quad (3.5)$$

Se supondrá que las matrices de interconexión  $\tilde{A}_C = 0$  y  $\tilde{B}_C = 0$ . De esta forma obtenemos un sistema expandido desacoplado  $\tilde{S}_D$ , en donde se diseñan las leyes de control. Para ello se utilizan todas las técnicas de control descentralizado disponibles.

Finalmente, en el paso (4),

$$\begin{aligned} S : \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad \uparrow (4) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} S_D : \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}_D \tilde{x} + \tilde{B}_D \tilde{u} \\ \tilde{y} &= \sum_{i=1}^s \tilde{C}_i \tilde{x}_i \end{aligned}$$

las leyes de control obtenidas para el sistema  $\tilde{S}_D$  son contraídas (siempre que sea posible) para ser implementadas en el sistema inicial  $S$ , todo ello bajo las condiciones del "principio de inclusión". El esquema hasta aquí presentado sigue los mecanismos habituales.

### 3.1.1. Caracterización dinámica del principio de inclusión

La aplicación del principio de inclusión está condicionada a relaciones explícitas entre los sistemas  $S$  y  $\tilde{S}$ , la cuales se deducen a continuación.

**Definición 3.1.:** Diremos que un sistema  $\tilde{S}$  incluye al sistema  $S$  (o bien que  $S$  está incluido en  $\tilde{S}$ ) y lo notaremos por  $\tilde{S} \supset S$ , si existe un par ordenado de matrices  $(U, V)$  tal que  $UV = I_n$  (con  $U$  perteneciendo al conjunto de matrices de  $n \times n$ , es decir  $U \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , del mismo modo  $V \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ) y para cualquier estado inicial  $x_0$  y cualquier entrada fijada  $u(t)$  de  $S$ , si

$$\tilde{x}_0 = Vx_0, \quad (3.7)$$

siendo  $x_0$  el estado inicial y  $u(t)$  la entrada para el sistema  $\tilde{S}$ , entonces

$$\begin{aligned} x(t; x_0, u) &= U\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, \tilde{u}), \\ y[x(t)] &= y[\tilde{x}(t)], \text{ para todo } t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Podemos observar como la definición garantiza que el sistema  $\tilde{S}$  contiene toda la información acerca del comportamiento de  $S$ . Más aún, es posible obtener cualquier propiedad de  $S$  a partir de  $\tilde{S}$  o bien usar  $S$  como modelo reducido de  $\tilde{S}$ . Así por ejemplo, podemos establecer la estabilidad o la controlabilidad de  $S$  a partir de  $\tilde{S}$ . Esta es la idea subyacente y principal que se esconde bajo el "principio de inclusión".

#### Existencia de las matrices $U$ y $V$

A continuación se presentan las características que deben cumplir las matrices  $U$  y  $V$  para cumplir el principio de inclusión. A partir de la definición 3.1 y asumiendo que  $Ker(V) = \{\vec{0}\}$ , tenemos

$$\tilde{x}_0 = Vx_0 \quad (3.9)$$

$$\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, u) = Vx(t; x_0, \tilde{u}) \quad \forall t \geq 0 \quad (3.10)$$

Si  $Ker(V) = \{\vec{0}\}$ , existe una transformación lineal  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{n}}$  con la propiedad  $Im(U) = \mathbb{R}^{\tilde{n}}$  tal que,  $UV = I_n$ . Luego, podemos tener que  $x = U\tilde{x}$  lo cual aplicado al sistema S implica

$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \dot{x} = AU\tilde{x} + Bu \Rightarrow V\dot{x} = VAU\tilde{x} + VBu \quad (3.11)$$

lo que produce una nueva representación del sistema S de mayor dimensión, esto es

$$\dot{\tilde{x}} = VAU\tilde{x} + VBu, \quad y = CU\tilde{x}. \quad (3.12)$$

### **Definición de restricción y agregación de un sistema**

Mientras que la ecuación  $\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, u) = Vx(t; x_0, \tilde{u}) \quad \forall t \geq 0$  es satisfecha por algún  $V$  tal que  $Ker(V) = \{\vec{0}\}$  y  $y[x(t)] = y[\tilde{x}(t)]$ , se dice que el sistema S es una "restricción" del sistema  $\tilde{S}$  para  $Im(V)$ .

Si se tiene  $x(t; U\tilde{x}_0, u) = U\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, u) \quad \forall t \geq 0$  y  $y[x(t)] = y[\tilde{x}(t)]$  para una condición inicial  $\tilde{x}_0$  y algún  $U$  epiyectiva, entonces el sistema S es una "agregación" de  $\tilde{S}$  con respecto a  $Im(U^T)$ .

Mientras que el concepto de "agregación" juega un importante rol en el esquema de reducción de modelos para sistemas dinámicos, el concepto de "restricción" es útil en la descomposición generalizada de sistemas dinámicos.

## Transformaciones complementarias

La transformación (3.12) no define unívocamente un nuevo sistema por que, si se introduce las transformaciones complementarias siguientes

$$\tilde{A} = VAU + M \quad \tilde{B} = VB + N \quad \tilde{C} = CU + L \quad (3.13)$$

el sistema

$$\begin{aligned} \tilde{S}: \dot{\tilde{x}} &= (VAU + M)\tilde{x} + (VB + N)u \\ y &= (CU + L)\tilde{x} \end{aligned} \quad (3.14)$$

satisface (3.10) para toda condición inicial definida por (3.9) para  $t = 0$ . Cuya demostración está basada en el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.**  $S$  es una restricción de  $\tilde{S}$  para  $\text{Im}(V)$  si sólo si

$$MV = 0 \quad N = 0 \quad LV = 0 \quad (3.15)$$

$S$  es una agregación de  $\tilde{S}$  con respecto a  $\text{Im}(U^T)$  si y sólo si

$$UM = 0 \quad UN = 0 \quad L = 0 \quad (3.16)$$

La demostración del teorema 3.1 se presenta en Ikeda *et al.*, (1984).

En resumen, la aplicación del principio de inclusión a un sistema, implica expandirlo para lograr conjunto de subsistemas que pueden ser controlados individualmente, en particular una estrategia de control de estas características es denominada control descentralizado (ver ejemplo ilustrativo en anexo B). A continuación se presenta las características generales de este enfoque.

## 3.2. Control descentralizado

La mayoría de los grandes sistemas industriales a gran escala siguen estando controlados por arquitecturas descentralizadas donde las variables manipuladas (entradas  $u$ ) y las

variables controladas (salidas  $y$ ) se agrupan en conjuntos disjuntos, Scattolini, (2009). Estos conjuntos están agrupados para crear pares que no están solapados con las demás variables luego, los reguladores locales se diseñan para funcionar de forma totalmente independiente. Los reguladores locales pueden ser de una sola entrada-salida o multivariables (localmente centralizado), dependiendo de la cardinalidad de los conjuntos de entradas o salidas seleccionados. Un ejemplo de una estructura de control descentralizado se indica en la Figura 3.2, donde el sistema bajo control se supone compuesto por dos subsistemas  $S_1$  y  $S_2$ , con variables de estado, control y de salida ( $x_1, u_1, y_1$ ) y ( $x_2, u_2, y_2$ ), respectivamente, y la interacción entre los subsistemas se debe a efectos mutuos de los estados  $x_1$  y  $x_2$ .

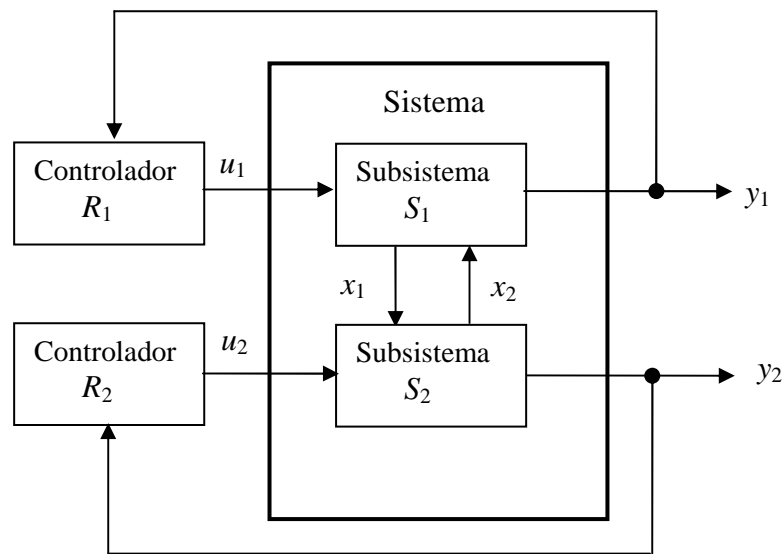


Figura 3.2. Control descentralizado para un sistema de dos entradas ( $u_1, u_2$ ) y dos salidas ( $y_1, y_2$ ) (Scattolini, 2009).

Una vez que la estructura descentralizada del controlador se ha definido, el diseño de los controladores locales ( $R_1$  y  $R_2$  en la Figura 3.2) es trivial cuando las interacciones entre las entradas y las salidas de los diferentes pares son débiles. Estas interacciones pueden ser directas (acoplamiento de entradas) o causados por los efectos mutuos entre los estados internos de los subsistemas bajo control, como en ésta Figura. Por el contrario, es bien sabido que las interacciones fuertes incluso pueden impedir lograr la estabilidad y/o el funcionamiento con control descentralizado, por ejemplo Wang y Davison, (1973), donde el papel desempeñado por los denominados modos fijos (valores propios de una sub-matriz

del sistema en lazo cerrado del controlador descentralizado, ver detalles en la sección 3.2.2.) se pone de relieve en el problema de estabilidad.

En vista de la enorme relevancia de control descentralizado, a partir de los años sesenta, muchos esfuerzos se han dedicado a desarrollar métodos de diseño que garanticen la estabilidad y el rendimiento. Entre ellos, se considera los diseños basados en funciones vectoriales de Lyapunov, por ejemplo el trabajo de Michel, (1977) presentado en la sección 3.2.1. También, el diseño secuencial de Hovd y Skogestad, (1994) donde, se intenta ir cerrando secuencialmente los distintos lazos de control (de los distintos controladores que componen el sistema) e ir sintonizándolos uno por vez, de modo de lograr la convergencia general del rendimiento del algoritmo. Un interesante aporte, es el proceso de optimización realizado por Davison y Chang, (1981) los cuales primero diseñan teóricamente un controlador robusto con una formulación en espacio de estado y luego con un método de programación cuadrática determinan los parámetros del controlador. También Ikeda y Siljak (1981) realizan un importante trabajo utilizando el teorema de inclusión descomponiendo el solapamiento de un sistema, como el ejemplo presentado en la sección 3.1.1. Un libro de texto clásico sobre temas de control descentralizado es Siljak (1991), mientras que un documento hito en el campo es el completo estudio de Sandell *et al.*, (1978) sobre control descentralizado. Más recientemente un estudio sobre control descentralizado ha sido considerado en el trabajo de Bakule (2008) el cual presenta una actualización de las nuevas técnicas surgidas y sus respectivas referencias.

A continuación con la utilización del vector de funciones de Lyapunov se plantean el enfoque básico para la estabilidad de un sistema descentralizado y utilizando el concepto de modos fijos se plantea la estabilidad de un controlador descentralizado por realimentación dinámica.

### **3.2.1. Estabilidad para un sistema descentralizado**

En el trabajo de Michel, (1977) se plantean las siguientes definiciones. Dado un sistema interconectado  $S$ , el cual se puede descomponer en  $N$  sistemas  $S_i$  independientes, donde



cada uno de éstos, se puede describir por una ecuación  $\dot{z}_i = f(z_i, t)$ . Si para cada sistema  $S_i$  se puede encontrar una constante  $\beta_i$  positiva y una función de Lyapunov  $v_i$ , definida positiva, decreciente y diferenciable tal que su derivada  $\frac{d}{dt}v_{i(S_i)}$  con respecto a  $t$  a lo largo de la solución de  $S_i$  satisfice

$$\frac{d}{dt}v_{i(S_i)}(z_i, t) \leq -\beta_i v_i(z_i, t) \quad (3.17)$$

Además, si existe una matriz de  $P = [p_{ij}]$  de  $N \times N$  con todos sus los valores propios con parte real negativa, tal que  $p_{ij} \geq 0$ ,  $i \neq j$ . Sea una vecindad de radio  $r$   $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ , sea el intervalo no acotado  $J = [t_0, \infty)$ , si tenemos una función  $m : \mathbb{R}^N \times J \rightarrow \mathbb{R}^N$  que consista de términos de segundo o mayor orden, es decir

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|m(x, t)|}{|x|} = 0, \text{ para } t \geq t_0 \quad (3.18)$$

Por último si se define  $\vec{V}(x, t) = [v_1(z_1, t), \dots, v_N(z_N, t)]^T$  como vector de funciones de Lyapunov y

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_{(S)}(x, t) \leq P\vec{V}(x, t) + m(\vec{V}(x, t), t) \quad (3.19)$$

entonces el equilibrio del sistema compuesto  $S$  es uniformemente asintóticamente estable (ver demostración en Michel, (1977)).

Notar que para los sistema lineales la ecuación (3.38) puede ser satisfecha y la correspondiente función  $v_i$  es usualmente una función cuadrática en  $z_i$ . La desigualdad en (3.44) se considera sólo entre componentes correspondientes de los vectores involucrados.

En la sección siguiente se presenta un análisis de estabilidad de un controlador descentralizado por realimentación dinámica.

### 3.2.2. Estabilidad de un controlador descentralizado con realimentación dinámica

En un importante trabajo Wang y Davison (1973), desarrollaron las bases para un apropiado análisis de estabilidad de los controladores descentralizados por realimentación dinámica, utilizando el concepto de modos fijos. Los detalles se presentan a continuación.

Sea un sistema lineal multivariable invariante en el tiempo (ver Figura 3.3) con  $N$  estaciones de control locales descritas por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^N B_i u_i(t) \quad 3.20(a)$$

$$y_i(t) = C_i(t), \quad (i = 1, \dots, N) \quad 3.20(b)$$

donde  $u(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  y  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  son la entrada y salida, respectivamente, de la  $i$ -ésima estación local de control ( $i = 1, \dots, N$ ). Las matrices  $A_i, B_i$  y  $C_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), son reales constantes y de tamaño apropiado. El problema es encontrar  $N$  leyes de realimentación de locales de la salida con compensación dinámica para estabilizar el sistema completo. El conjunto de leyes de realimentación son generadas por los siguientes controladores realimentados:

$$\dot{z}_i(t) = S_i z_i(t) + R_i y_i(t) \quad (3.21a)$$

$$u_i(t) = Q_i z_i(t) + K_i y_i(t) + w_i(t) \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.21b)$$

donde  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el estado del  $i$ -ésimo controlador por realimentación,  $v_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  el  $i$ -ésima salida externa local, y  $S_i, R_i, Q_i$  y  $K_i$  son matrices constantes de tamaño apropiado.

La ecuación (3.21) puede ser escrito más compactamente como sigue:

$$\dot{z}(t) = Sz(t) + Ry(t) \quad (3.22a)$$

$$u(t) = Qz(t) + Ky(t) + w(t) \quad (3.22b)$$

donde

$$\begin{aligned} S &\triangleq \text{matriz diagonal } [S_1, \dots, S_N] \\ R &\triangleq \text{matriz diagonal } [R_1, \dots, R_N] \\ Q &\triangleq \text{matriz diagonal } [Q_1, \dots, Q_N] \\ K &\triangleq \text{matriz diagonal } [K_1, \dots, K_N] \\ z^T(t) &\triangleq [z_1^T(t) : \dots : z_N^T(t)] \\ y^T(t) &\triangleq [y_1^T(t) : \dots : y_N^T(t)] \\ u^T(t) &\triangleq [u_1^T(t) : \dots : u_N^T(t)] \\ w^T(t) &\triangleq [w_1^T(t) : \dots : w_N^T(t)] \end{aligned} \quad (3.23)$$

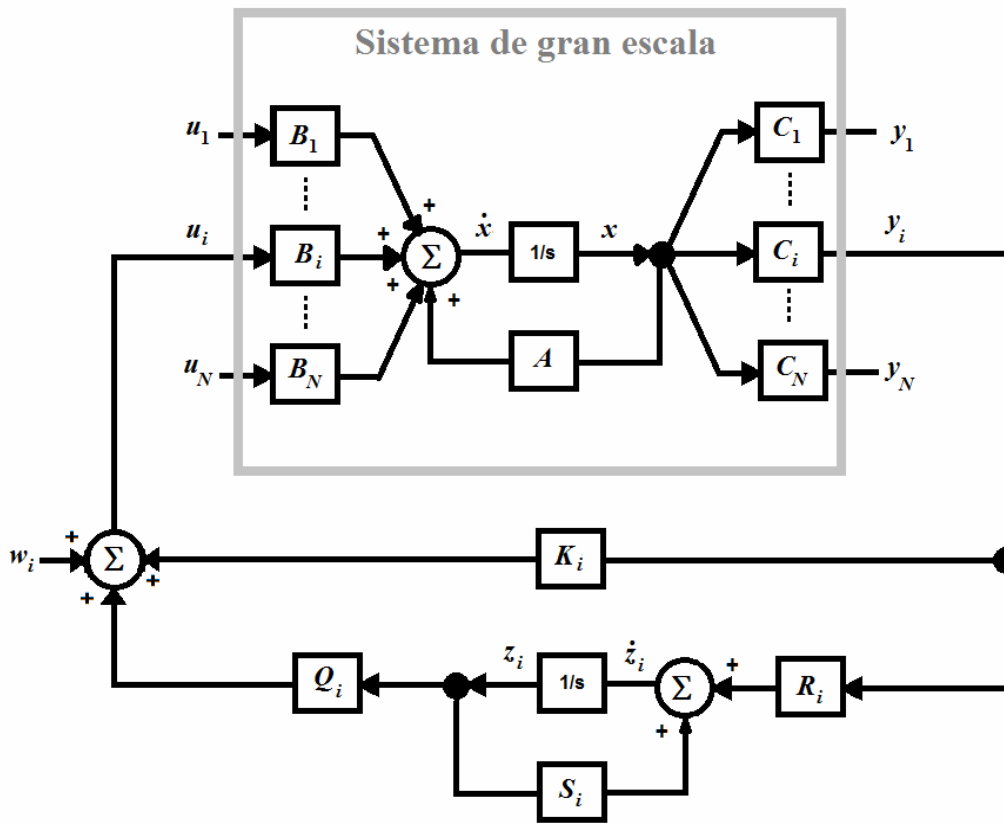


Figura 3.3. Sistema de gran escala con control realimentado dinámico (Figura de elaboración propia)

Donde la ley de control por realimentación generada por las ecuaciones (3.22) es aplicada al sistema (3.20), el sistema de lazo-cerrado es descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BKC & BQ \\ RC & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} w(t), \quad (3.24)$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_N \\ \underbrace{\quad}_{m_1} & & \underbrace{\quad}_{m_1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} p_1 \\ \\ \} p_N \end{matrix} \quad (3.25)$$

El conjunto de leyes de control realimentado locales de (3.21) son escogidas de tal manera que el sistema completo (3.20) es asintóticamente estable (es decir, los polos del sistema (3.20) están en el semi-plano izquierdo del plano complejo  $\mathbb{C}^-$ ). Luego, este es el problema de estabilización de un sistema de control descentralizado con realimentación local de la salida y con compensación dinámica.

### **Definición de los modos fijos**

Consideremos la tripleta  $(C, A, B) \in \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}$  y los dos conjuntos de enteros  $m_1, \dots, m_M$  y  $p_1, \dots, p_M$  con  $m = \sum_{i=1}^M m_i$  y  $p = \sum_{i=1}^M p_i$ , que especifica el sistema (3.20).

Sea  $\Gamma$  el conjunto de matrices diagonales como sigue:

$$\Gamma = \left\{ K \mid K = \text{matriz diagonal } [K_1, \dots, K_N], K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times p_i} \quad i = 1, \dots, N \right\} \quad (3.26)$$

entonces el conjunto de "modos fijos" de  $(C, A, B)$  con respecto a  $\Gamma$  es definido como:

$$\Lambda(C, A, B, \Gamma) = \bigcap_{K \in \Gamma} \sigma[A + BKC], \quad (3.27)$$

donde  $\sigma[A+BKC]$  denota el conjunto de valores propios de la matriz  $(A+BKC)$ . Es decir los modos fijos de la tripleta  $(C, A, B)$  es la intersección de los conjuntos e valores propios de la matrices  $(A+BKC)$  con para todo  $K \in \Gamma$ .

### **Determinación de los modos fijos**

Notar que el conjunto de modos fijos de una tripleta dada  $(C, A, B)$  con respecto a  $\Gamma$  puede ser calculado del siguiente modo.

Dado  $K = \text{block diagonal } [K_1, \dots, K_N] \in \mathbb{K}$ , y dado  $k(i, r, s)$  denota el  $(r, s)$ -ésimo elemento de  $K_i$ ,  $(i=1, \dots, N)$ ,  $(r=1, \dots, m_i)$ ,  $(s=1, \dots, p_i)$ . Notar que  $\Gamma$  contiene la matriz nula, por lo tanto  $\Lambda(C, A, B, \Gamma) \subseteq \sigma[A] = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Para cada  $\lambda_i \in \sigma[A]$ ,  $\det(\lambda_i I - A - BKC)$  es un polinomio en  $k(i, r, s)$ ,  $(i=1, \dots, N)$ ,  $(r=1, \dots, m_i)$ ,  $(s=1, \dots, p_i)$ . Si el  $\det(\lambda_i I - A - BKC) = 0$ , entonces claramente  $\lambda_i \in \Lambda(C, A, B, \Gamma)$ . Dicho de otra forma, si  $\det(\lambda_i I - A - BKC) \neq 0$ , entonces existe  $\hat{K} \in \mathbb{K}$  tal que  $\det(\lambda_i I - A - B\hat{K}C) \neq 0$ , por lo tanto  $\lambda_i \notin \Lambda(C, A, B)$ . Este procedimiento determina el conjunto de modos fijos  $\Lambda(C, A, B, \Gamma)$ .

### **Teorema 3.2: (Condición de estabilidad de un controlador descentralizado con realimentación dinámica)**

Dado el sistema de  $(C, A, B)$  de (3.20). Dado  $\Gamma$  un conjunto de matrices de bloques definidas en (3.26). Entonces la condición necesaria y suficiente para la existencia de un conjunto de leyes locales de control por realimentación (3.21) tal que el sistema de lazo cerrado (3.24) es asintóticamente estable es que

$$\Lambda(C, A, B, \Gamma) \subset \mathbb{C}^- \quad (3.28)$$

donde  $\mathbb{C}^-$  representa el semi plano complejo izquierdo.

La demostración de este teorema se presenta en Wang y Davison, (1973). Además, en el trabajo de Gong y Aldeen, (1997) se analiza la estabilidad de controladores descentralizados lineales más generales, cuyas principales ideas se presentan en el anexo B.

### 3.2.3. Control descentralizado con algoritmos MPC

En principio, las leyes locales MPC (por ejemplo, los reguladores  $R_1$  de  $S_1$  y  $S_2$  de  $R_2$  en la Figura 3.2) se pueden calcular con algoritmos MPC estándar despreciando las interacciones mutuas. Por ejemplo, Acar, (1992) hace un estudio de este tipo de estructura, considerando tanto sistemas invariantes como variantes en el tiempo asumiendo diferentes intervalos de tiempo para la actualización de la acción de control. También, la aplicación reportada en Elliott (2008) los cuales realizan un control descentralizado de un sistema multi-evaporador cuya función objetivo intenta incrementar la eficiencia energética. Sin embargo, a pesar de la gran importancia del tema, muy pocos algoritmos MPC descentralizados con propiedades garantizadas se han desarrollado hasta ahora. Esto puede ser motivado por un par de razones. En primer lugar, la naturaleza intrínseca multivariable del MPC permite a los reguladores trabajar de forma centralizada con muchas variables de entradas y muchas de salida, por lo que a menudo la descentralización no es un tema principal. Sin embargo, para sistemas de gran escala diseñados para muchas unidades de proceso que interactúan débilmente, puede ser conveniente descomponer el problema de optimización global asociado al diseño de un controlador centralizado único en un número de problemas más pequeños, es decir, recurrir a una estructura de control descentralizado. Una segunda motivación de la falta de estabilidad de los controladores descentralizados se debe a que la ley de realimentación MPC está implícita, es decir, las variables de control son la solución de un procedimiento de optimización más que el resultado de una ley de control explícita. Por esta razón, el análisis del sistema de lazo cerrado del MPC es difícil y los principales resultados de estabilidad se obtienen utilizando una función de coste óptimo como función de Lyapunov (Mayne et al., 2000). Sin embargo, no es fácil de extender esta técnica de análisis a las estructuras de control descentralizado.

Sin embargo, un algoritmo de realimentación de estado aplicado un MPC descentralizado, para un sistema no lineal de tiempo discreto sujetos a perturbaciones que decaen en el tiempo, ha sido propuesto en Magni, y Scattolini, (2006) donde se obtiene la estabilidad de lazo cerrado con la inclusión de una restricción de contracción en el problema de optimización a resolver en cada instante de tiempo. Esto es, la restricción de contracción sobre el estado del sistema en  $x_k$  en un instante  $k$ , es la siguiente:

$$\|x_{k+1}\|_{\hat{P}} \leq \alpha \|x_k\|_{\hat{P}} \quad \text{con } \alpha \in [0,1), \hat{P} > 0, \text{ matriz definida positiva}$$

Esta restricción obliga a las trayectorias de los estados de los subsistemas controlados por reguladores MPC locales a dirigirse hacia el origen, a pesar del efecto perturbador de las interacciones mutuas y de las perturbaciones. Más detalles en Magni, y Scattolini, (2006).

Recurriendo a la teoría del algoritmo MPC robusto desarrollada, por Magni, y Scattolini, (2007) y en Raimondo *et al.*, (2007) donde se ha logrado la estabilización de controladores (por realimentación de estado) descentralizados para sistemas no lineales en tiempo discreto y con incertidumbre.

Esto es, dado dos sub-sistemas acoplados S1 y S2 que forman un sistema mayor S. Con  $x_1(k)$ ,  $u_1(k)$ ,  $w_1(k)$ , variables de estado, entrada y perturbación del sistema S1 respectivamente, y con  $x_2(k)$ ,  $u_2(k)$ ,  $w_2(k)$ , variables de estado, entrada y perturbación del sistema S2, una representación del sistema S es:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1u_1 + w_1(k) \\ x_2(k+1) &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2u_2 + w_2(k) \end{aligned} \quad (3.29)$$

En este enfoque, las interacciones de la planta son tratadas como perturbaciones  $v_1$  y  $v_2$  a rechazar.

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + B_1u_1 + v_1(k) \\ x_2(k+1) &= A_{21}x_1(k) + B_2u_2 + v_2(k) \end{aligned} \quad (3.30)$$

con  $v_1(k) = A_{12}x_2(k) + w_1(k)$  y  $v_2(k) = A_{21}x_1(k) + w_2(k)$ .

Las propiedades de estabilidad del algoritmos propuesto son establecidos recurriendo a la noción de estabilidad de entrada estado y una función objetivo min-max ( $J_i$ ),  $i=1,2$ , es decir minimizar  $J_i$  en el caso de que la perturbación sea máxima.

A continuación se presenta una segunda estructura de control para un sistema de gran escala que implica interacción entre los controladores, el control distribuido.

### 3.3. Control distribuido

En las estructuras de control distribuido, como se presenta en la Figura 3.4, se supone que alguna información se transmite entre los controladores locales ( $R_1$  y  $R_2$ ), por lo que cada uno de ellos tiene algún conocimiento sobre el comportamiento de los demás (Scattolini, 2009). Cuando los controladores locales están diseñados con MPC, la información transmitida normalmente consiste en predecir las futuras variables de control o las variables de estado calculadas localmente, por lo que cualquier controlador local puede predecir los efectos de la interacción sobre el horizonte de predicción considerado. En lo que respecta al caso simple de la Figura. 3.4, los controladores MPC ( $R_1$  y  $R_2$ ) están diseñados para controlar los subsistemas  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente. Si el intercambio de información entre los controladores locales ( $R_1$  y  $R_2$ ) se refiere a la predicción de la evolución de los estados del sistema ( $x_1$  y  $x_2$ ), cualquier controlador local sólo tiene que conocer las dinámicas de los subsistemas directamente controlados ( $S_1$  y  $S_2$ ). Por el contrario, si las predicciones de las acciones futuras de control ( $u_1$  y  $u_2$ ) se transmiten, los controladores locales deben conocer los modelos de todos los subsistemas. En cualquier caso, es evidente que la transmisión y sincronización de los protocolos de comunicación tienen un gran impacto en el rendimiento alcanzable.



Dentro de la amplia gama de algoritmos MPC distribuidos propuestos en la literatura, una clasificación puede hacerse en función de la topología de la red de comunicaciones. En concreto, los siguientes casos se pueden considerar:

Algoritmos completamente conectados: La información se transmite (y se recibe) de cualquier controlador local a todos los demás.

Algoritmos parcialmente conectados: La información se transmite (y se recibe) de cualquier controlador local a un subconjunto determinado de otros controladores.

Una estructura de información parcialmente conectada puede ser conveniente en el caso de sistemas a gran escala completos por un gran número de subsistemas débilmente conectados. En estos casos, las restricciones del intercambio de información entre los subsistemas que interactúan directamente producen un insignificante deterioro del rendimiento. Una interesante discusión sobre este punto se presenta en Rawlings *et al.*, (2008), donde se hace referencia a procesos químicos compuestos por subsistemas que interactúan directamente sólo con sus vecinos, posiblemente con flujos de recirculación adicionales.

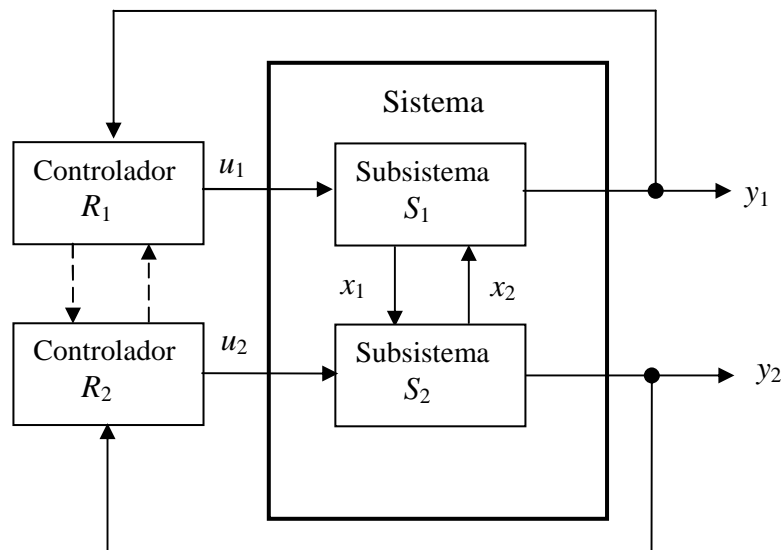


Figura 3.4. Control distribuido para un sistema de dos entradas ( $u_1, u_2$ ) y dos salidas ( $y_1, y_2$ ) (Scattolini, 2009).

El intercambio de información entre los reguladores locales puede ser realizado de acuerdo a los diferentes protocolos de comunicación (Scattolini, 2009):

Algoritmos no-iterativos: La información se transmite (y se recibe) por los reguladores locales sólo una vez en cada tiempo de muestreo.

Algoritmos iterativos: Información se puede transmitir (y ser recibida) por los reguladores locales muchas veces dentro del tiempo de muestreo.

Es evidente que la cantidad de información disponible entre los controladores locales con algoritmos iterativos es mayor, por lo que un procedimiento iterativo general puede ser afinado para llegar a un consenso global sobre las acciones que se adopten en el intervalo de muestreo. En este sentido una clasificación diferente puede ser realizada (Scattolini, 2009):

Algoritmos no-cooperativos: Algoritmos distribuidos, donde cada controlador local minimiza una índice de rendimiento local.

Algoritmos cooperativos: Algoritmos distribuidos, donde cada controlador local minimiza una función de coste global.

Como se discute en Venkat *et al.*, (2005) por medio de consideraciones de la teoría de juegos, se deduce que en algoritmos iterativos no-cooperativos, cada regulador local tiende a moverse hacia un equilibrio de Nash, mientras que métodos iterativos y cooperativos tienden alcanzar la solución Pareto óptima proporcionada por una estructura de control centralizada ideal.

En este contexto, un equilibrio de Nash implica una situación en la cual todos los controladores consideran (sabiendo lo que decidieron los demás controladores) una estrategia que maximiza su rendimiento dadas las estrategias de los otros.

Consecuentemente, ningún controlador tiene algún incentivo para modificar individualmente su estrategia.

Es importante tener presente que un equilibrio de Nash no implica que se logre el mejor resultado conjunto para los controladores participantes, sino sólo el mejor funcionamiento para cada uno de ellos considerados individualmente. Es perfectamente posible que el resultado fuera mejor para todos si, de alguna manera, los controladores coordinaran su acción. Más aún, los equilibrios de Nash, incluso pueden ser inestables y lejos de la solución Pareto óptima, de manera que restricciones específicas tienen que ser incluidos en la formulación del problema MPC para garantizar la estabilidad a lazo cerrado.

En cuanto a los algoritmos MPC publicados en la literatura, el método de realimentación de estado descrito en Camponogara *et al.*, (2002), para sistemas lineales de tiempo discreto, pertenece al conjunto de algoritmos no-cooperativos y no-iterativos. Una restricción de estabilidad es incluida en la formulación del problema, aunque la estabilidad sólo puede ser comprobada a-posteriori con un análisis de la dinámica del lazo cerrado resultante. Las soluciones del equilibrio de Nash es buscada en los métodos independientes, interactivos y totalmente conectados desarrollados en Du *et al.*, (2001) para sistemas lineales de tiempo discreto sin restricciones representados por los modelos de entrada y salida. Sistemas lineales en tiempo discreto también se consideran en el Venkat *et al.*, (2005) donde, un método iterativo y cooperativo con muchas propiedades interesantes es presentado. En particular, el enfoque propuesto garantiza el logro de óptimo (Pareto) cuando el procedimiento iterativo converge, pero aún se asegura la estabilidad a lazo cerrado y factibilidad si el procedimiento es detenido en alguna iteración intermedia.

Un algoritmo MPC parcialmente conectado, no-iterativo e independiente para sistemas no lineales de tiempo discreto se ha presentado en Jia y Krogh , (2002). El enfoque consiste en describir el efecto de las interconexiones entre los subsistemas, como perturbaciones que actúan sobre los modelos locales. Los valores de estas perturbaciones pueden obtenerse a partir de las trayectorias de estado predichas y transmitidas por los reguladores locales. Luego, es desarrollado para determinar las parametrizadas leyes de control distribuido, un

enfoque min-max (minimizando la función objetivo del problema de control predictivo maximizando las perturbaciones del modelo) para reducir al mínimo las funciones de costos locales, bajo el peor caso de perturbaciones permitidas. Una propiedad de factibilidad se ha demostrado junto con la convergencia del algoritmo. Se cree que el método podría desarrollarse de acuerdo con muchos resultados recientes en lazo cerrado del MPC robusto, véase por ejemplo, Lunze (1992).

Un algoritmo MPC no-cooperativo, no-iterativo y parcialmente conectado con garantías de estabilidad para sistemas no lineales de tiempo continuo se ha presentado en Dunbar (2007), donde la información se transmite sólo entre los subsistemas de vecinos. La propiedad de la estabilidad del método propuesto en Dunbar (2007), en gran medida se basa en el supuesto de que la dinámica de interacciones mutuas entre los subsistemas son limitadas y en una restricción de coherencia incluida en la formulación del problema MPC, forzando la entrada actual y las secuencias del estado para que no difieran demasiado de los valores previstos. Las pruebas de factibilidad y la estabilidad se basan en técnicas descritas en Michalska y Mayne (1993) y comparten muchas ideas con el algoritmo de lazo abierto MPC robusto desarrollado en Limon *et al.*, (2002).

En Mutambara y Durrant-Whyte, (2000) se presenta un control para un robot móvil (con ruedas) basado en los métodos de estimación de estado distribuido y algoritmos de control de estado. En Vadigepalli y Doyle, (2003), son descritos algoritmos distribuidos en donde la metodología se utiliza en un proceso *benchmark* (reacción-separación) de gran escala industrial en un entorno de simulación de computación distribuida, mientras que una extensión de estas técnicas basadas en MPC se han descrito en Mercangöz y Doyle (2007).

Por último, un algoritmo MPC parcialmente conectado, no-iterativo y no-cooperativo para sistemas lineales en tiempo discreto se ha descrito en Alessio y Bemporad (2007), donde las condiciones para el análisis de la estabilidad a-posteriori son dadas también para el caso de fallas en la comunicación entre las unidades locales de control. Notar que en este trabajo, el desacoplo se supone que existe sólo dentro del controlador predictivo.

A continuación se presentan los principios básicos utilizados para enfrentar el problema de estabilidad de un controlador distribuido en un sistema de gran escala.

### 3.3.1 Estabilidad de los sistemas distribuidos.

En Venkat *et al.*, (2005) se plantea la estabilidad de los sistemas distribuidos. Consideremos una planta compuesta por  $M$  subsistemas, se definen los modelos descentralizados, los modelos de interacción y los modelos compuestos:

Modelo descentralizado. Dado un modelo descentralizado (local), cada sistema puede ser representado como un modelo lineal discreto invariante en el tiempo, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}x_{ii}(k+1) &= A_{ii}x_{ii}(k) + B_{ii}u_i(k) \\ y_i(k) &= C_{ii}x_{ii}(k)\end{aligned}\tag{3.31}$$

en el cual  $k$  representa tiempo discreto, y se asume que  $(A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, B_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}, C_{ii} \in \mathbb{R}^{z_i \times n_i})$  es una realización para cada par  $(u_i, y_i)$  entrada-salida tal que  $(A_{ii}, B_{ii})$  es estabilizable  $(A_{ii}, C_{ii})$  es detectable.

Modelos de interacción. Considerando un subsistema  $i$ . Se representa el efecto de un sistema que interacciona con el subsistema  $j \neq i$  sobre un sistema  $i$  a través de un modelo lineal discreto invariante en el tiempo, de la forma

$$x_{ij}(k+1) = A_{ij}x_{ij}(k) + B_{ij}u_i(k)\tag{3.32}$$

la ecuación de salida para cada subsistema está escrita como

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^M C_{ij}x_{ij}(k)\tag{3.33}$$

( $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$ ,  $B_{ii} \in \mathbb{R}^{n_j \times m_j}$ ,  $C_{ij} \in \mathbb{R}^{z_i \times n_j}$ ) es una realización para cada par  $(u_j, y_i)$  entrada-salida.

Modelos compuestos. La combinación del modelo descentralizado y los modelos de interacción para cada subsistema para obtener un modelo compuesto. El vector de estado descentralizado  $x_{ii}$  se complementa con los estados que pudieran derivarse de los efectos de todos los otros subsistemas.

Dado  $x_i^T = [x_{ii}^T, \dots, x_{ii}^T, \dots, x_{iM}^T]$  denota el modelo compuesto de estados para el subsistema  $i$ . Por simplicidad de la notación, representamos el modelo compuesto para el subsistema  $i$  como

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + \sum_{j \neq i} W_{ij} u_j(k) \quad (3.34a)$$

$$y_i(k) = C_i x_i(k) \quad (3.34b)$$

en el cual  $C_i = [C_{i1}, \dots, C_{ii}, \dots, C_{iM}]$  y

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{iM} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ B_{ii} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad W_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ B_{ij} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

El modelo compuesto para la planta entera puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iM} \\ \vdots \\ x_{M1} \\ \vdots \\ x_{M1} \end{bmatrix} (k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_{1M} & \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & & A_{M1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_{MM} \end{bmatrix}}_{A_{MC}} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iM} \\ \vdots \\ x_{M1} \\ \vdots \\ x_{M1} \end{bmatrix} (k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & B_{1M} & \\ \hline & & & \vdots \\ \hline & & & & B_{1M} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & B_{MM} \end{bmatrix}}_{B_{MC}} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} (k) \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} (k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1M} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & C_{M1} & \cdots & C_{MM} \end{bmatrix}}_{A_{MC}} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iM} \\ \vdots \\ x_{M1} \\ \vdots \\ x_{M1} \end{bmatrix} (k) \tag{3.35}
\end{aligned}$$

en el cual  $A_{CM} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{CM} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_{CM} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$  y  $n = \sum_{i=1}^M n_i$ ,  $m = \sum_{i=1}^M m_i$ , y  $n_y = \sum_{i=1}^M n_{y_i}$ . Se asume que  $(A_{CM}, B_{CM})$  es estabilizable y  $(A_{CM}, C_{CM})$  es detectable.

Después de la identificación de las interacciones significativas desde los datos de operación de lazo cerrado, se espera que muchos de los términos de interacción sean cero. Para más detalles sobre el procedimiento de identificación de lazo-cerrado para sistemas distribuidos MPC consultar en Ravindra *et al.*, (2006).

Para los controladores MPC basados en algoritmos independientes (los cuales minimizan un índice de comportamiento local) o para los controladores MPC basados en algoritmos de cooperación (donde cada controlador se minimiza una función de coste global), una iteración y el intercambio de variables entre los subsistemas se realiza durante un tiempo de muestreo. Denotamos este número de la iteración como  $p$ . La función de costos para el controlador MPC basado en algoritmos no-cooperativos se define como

$$\phi_i(\bar{x}_i^p(k), \bar{u}_i^p(k); x_i(k)) = \sum_{t=k}^{Np} L_i(x_i(t/k), u_i(t/k)) \quad (3.36)$$

con  $L_i(x, u) = \frac{1}{2} [x^T Q_i x + u^T R_i u]$  con  $Q_i \geq 0$ ,  $R_i \geq 0$ , son matrices de peso simétricas,  $Np$  número de pasos en la predicción. Para cada subsistema  $i$  e iteración  $p$ , la trayectoria de estado-entrada óptima  $(\bar{x}_i^p(k), \bar{u}_i^p(k))$  es obtenida como la solución del problema de optimización, definido como

$\mathcal{P}_1(i)$ : MPC basado en algoritmos no-cooperativos

$$\min_{\bar{x}_i^p(k), \bar{u}_i^p(k)} \phi_i(\bar{x}_i^p(k), \bar{u}_i^p(k); x_i(k)) \quad (3.37)$$

sujeto a

$$x_i^p(k+1) = A_i x_i^p(k) + B_i u_i^p(k) + \sum_{j \neq i} W_{ij} u_j^{p-1}(k) \quad (3.38)$$

$$u_i^p(k) \in \Omega_i$$

$$x_i(k) = \hat{x}_i(k)$$

en donde

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^p(k)^T &= [x_i^p(k+1)^T, x_i^p(k+2)^T, \dots, x_i^p(k+Np)^T] \\ \bar{u}_i^p(k)^T &= [u_i^p(k+1)^T, u_i^p(k+2)^T, \dots, u_i^p(k+Np)^T] \end{aligned} \quad (3.39)$$

además  $\hat{x}_i(k)$  representa la estimación actual del modelo de estado compuesto. Notar, que la secuencia de estados para el sistema  $i$ ,  $\bar{u}_i^p(k)$ , es optimizada para producir sus valores en la iteración  $p$ , pero las otras entradas de los subsistemas no son actualizadas durante la optimización; ellas permanecen en la iteración  $p-1$ . La función objetivo para el sistema  $i$  es única.

Cada MPC basado en algoritmos no-cooperativos, transmite la información actual de la trayectoria de entrada-estado a todos los subsistemas MPC interconectados.



Los controladores que compiten no tienen conocimiento de las otras funciones de costos y de utilidad. Desde una perspectiva de teoría de juegos, el equilibrio de esta estrategia, si existe, se llama un equilibrio sin cooperación o equilibrio de Nash. Los objetivos de control de cada subsistema MPC están frecuentemente en conflicto con los objetivos de los controladores de los otros subsistemas que interactúan. Se demostró que el equilibrio Nash es por lo general subóptimo en el sentido de Pareto (Cohen, 1998).

El mejor rendimiento alcanzable por los controladores se caracteriza por un camino óptimo Pareto, que representa el conjunto de *trade-off* óptimo entre sus objetivos y los objetivos de la competencia, por lo que entran en conflicto.

### **Geometría del MPC basado en algoritmos no-cooperativos**

A continuación se ilustra un posible escenario que podría surgir bajo el controlador MPC basado en algoritmos no-cooperativos (Venkat *et al.*, 2005). En este caso  $\Phi_i(\cdot)$  denota la función de costos del subsistema obtenida por la eliminación de los estados desde la función de costos  $\phi_i(\bar{x}_i^p, \bar{u}_i^p; x_i)$  usando las ecuaciones (3.34) del modelo compuesto (ver detalles en ecuación (3.41)). El equilibrio de Nash y la solución Pareto óptima se representan por  $n$  y  $p$  respectivamente. Por simplicidad se considera un horizonte de un paso. El equilibrio de Nash representado por  $n$  es el punto de intersección de las curvas de reacción de las dos funciones de costo. El camino óptimo Pareto es el lugar de las entradas  $(u_1, u_2)$  obtenido por la minimización de la suma ponderada  $\omega_1\Phi_1 + \omega_2\Phi_2$  para cada  $0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq 1$ ,  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ . Si  $(\omega_1, \omega_2) = (1, 0)$ , la solución Pareto óptima es el punto  $a$ , y si  $(\omega_1, \omega_2) = (0, 1)$ , la solución Pareto óptima es el punto  $b$ .

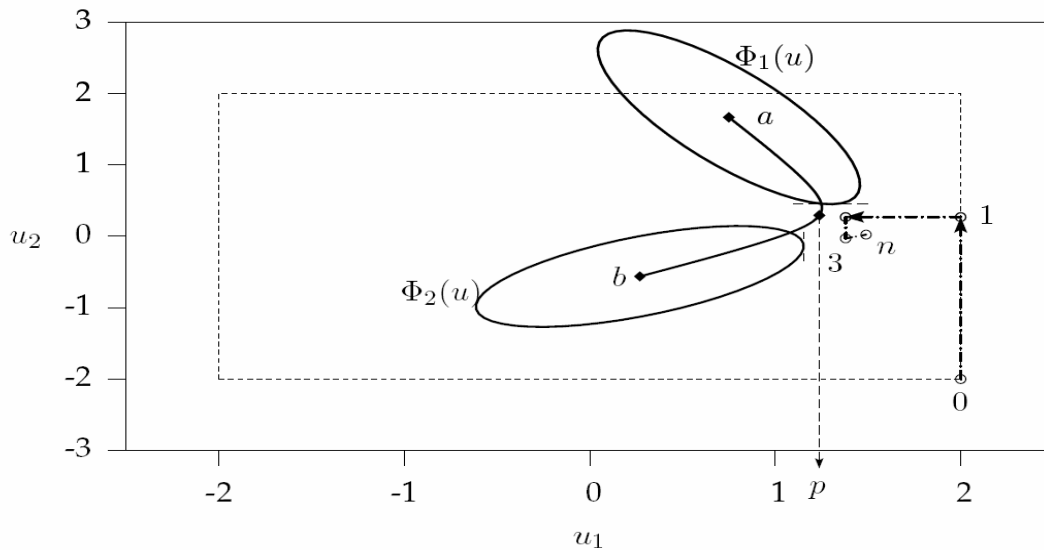


Figura 3.5: Existe un equilibrio de Nash estable y esta cerca de la solución Pareto óptima. Las iteraciones basadas en algoritmos no-cooperativos convergen al equilibrio de Nash. (Venkat *et al.*, (2005)).

La Figura 3.5 ilustra el mejor de los casos para las estrategias basadas en algoritmos independientes puros. El equilibrio de Nash  $n$  se encuentra cerca de la solución óptima de Pareto  $p$ . El rectángulo interno en la Figura 3.5 representa las restricciones en  $u_1$  y  $u_2$ . En el inicio  $u_1$  y  $u_2$  encuentra en el punto 0, en la primera iteración de la estrategia basada en algoritmos independientes, los valores de  $u_1$  y  $u_2$  se mueven al punto 1. Así sucesivamente la secuencia de iteraciones basadas en la comunicación converge al punto  $n$ . En este caso, el equilibrio de Nash es estable, es decir, si el sistema se desplaza del punto  $n$ , la secuencia de iteraciones basadas en la estrategia basada en algoritmos no-cooperativos conduce el sistema de nuevo al punto  $n$ . El sistema de lazo cerrado es probable que se comporten bien en este caso.

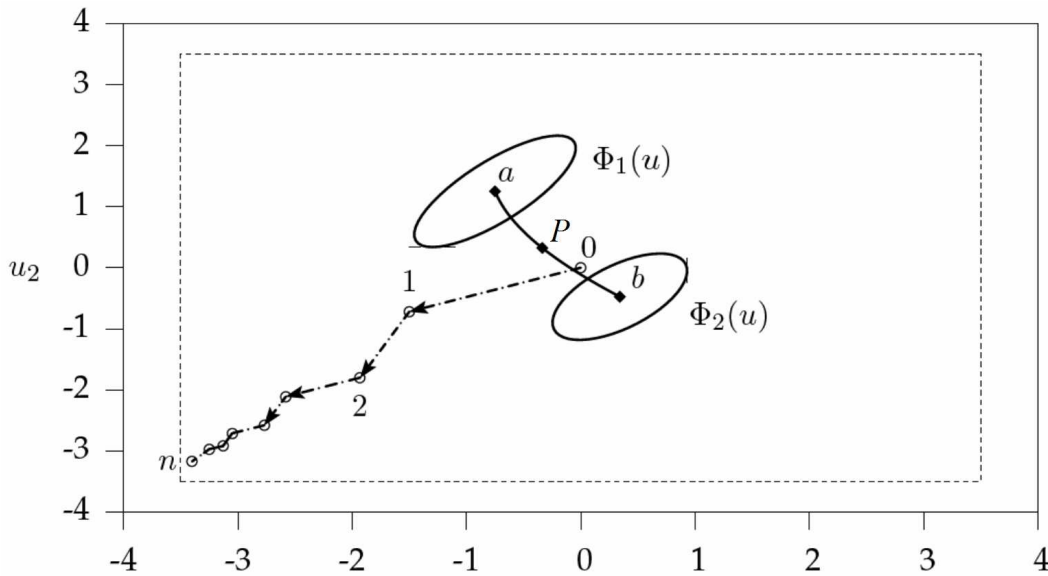


Figura 3.6: Existe un equilibrio de Nash estable pero no está cerca de la solución Pareto óptima. Las iteraciones basadas en algoritmos no-cooperativos se alejan del óptimo (Venkat *et al.*, (2005)).

En la Figura 3.6, los valores iniciales de las entradas se encuentran cerca de la solución Pareto óptima (punto  $P$ ). Sin embargo, en el punto  $n$  de equilibrio de Nash para este sistema no está cerca del punto  $P$  y por lo tanto, la estrategia basada en algoritmos no-cooperativos conduce al sistema lejos de la solución Pareto óptima. A pesar de que el equilibrio de Nash es estable, la solución obtenida en la convergencia hacia  $n$  utilizando la estrategia basada en algoritmos no-cooperativos, está lejos de ser óptima. En consecuencia, un equilibrio de Nash estable no implica necesariamente la estabilidad a lazo cerrado.

Para los sistemas fuertemente acoplados, el equilibrio de Nash no puede estar cerca de la solución óptima de Pareto. En algunas situaciones, las estrategias basadas en algoritmos no-cooperativos, no convergen hacia el equilibrio de Nash. De hecho, es posible construir ejemplos sencillos donde un controlador MPC basado en algoritmos no-cooperativos, conduce a la inestabilidad de lazo cerrado. La estrategia de control MPC basada en algoritmos no-cooperativos es por lo tanto, una estrategia no fiable para el control de todo el sistema (Venkat *et al.*, 2005). La falta de fiabilidad de la formulación MPC basada en algoritmos no-cooperativos, como una estrategia de control de todo el sistema, motiva la necesidad de un enfoque alternativo.

## Estrategia MPC basado en algoritmos cooperativos

Es necesario modificar las funciones objetivo de los controladores de los subsistemas con el fin de proporcionar un medio para la cooperación entre los controladores (Venkat *et al.*, 2005). Reemplazando el objetivo  $\phi_i$  por uno que mide el impacto en todo el sistema de las acciones locales de control. En este caso, muchos objetivos adecuados son posibles. Se selecciona el caso más simple como el objetivo general de la planta, que es una combinación convexa de los objetivos de los subsistemas individuales.

$$\phi = \sum_i \omega_i \phi_i \quad \omega_i > 0, \quad \sum_{i=1}^M \omega_i = 1 \quad (3.40)$$

En situaciones prácticas, el intervalo de muestreo del proceso puede ser insuficiente para el tiempo de cómputo requerido en la convergencia de un algoritmo iterativo basado en la cooperación. En tales situaciones, el algoritmo MPC distribuido basado en algoritmos cooperativos tiene que ser terminado antes de la convergencia de las trayectorias de estado-entrada (es decir, cuando se acabe el tiempo). La última trayectoria calculada de la entrada se utiliza para llegar a una ley de control adecuado. Para permitir la detención en un punto intermedio, todas las iteraciones generadas por el algoritmo MPC distribuido en toda la planta deben ser factibles, y el controlador resultante debe ser de lazo cerrado estable. Por factibilidad del control de la planta completa, queremos decir que la secuencia de estado-entrada  $\{\bar{x}_i, \bar{u}_i\}$  satisface las restricciones del modelo impuestas por cada subsistema. Para garantizar la factibilidad del control de la planta completa, en las iteraciones intermedias, se elimina los estados  $\bar{x}_i$  desde cada uno de los problemas de optimización utilizando el conjunto de ecuaciones del modelo compuesto (ecuación (3.34)). Posteriormente, la función de costos  $\phi_i(\bar{x}_i, \bar{u}_i; x_i(k))$  puede ser rescrita como una función de las trayectorias de entrada de todos los subsistemas interactuantes, más el estado del subsistema inicial  $x_i(k)$  como un parámetro, es decir,

$$\phi_i(\bar{x}_i, \bar{u}_i; x_i(k)) \equiv \Phi_i([\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_M]; x_i(k)) \quad (3.41)$$

para cada subsistema  $i$ , la trayectoria de entrada óptima  $u_i^{*(p)}$  es obtenida como solución factible del problema de optimización generado por la estrategia de control MPC distribuido basado en algoritmos cooperativos, definido como,

$\mathfrak{P}_2(i)$ : *Factible MPC basado en algoritmos cooperativos*

$$u_i^{*(p)}(k) \in \arg(\mathfrak{F} i)$$

$$\mathfrak{F} i \triangleq \min_{\bar{u}_i} \sum_{r=1}^M \omega_r \Phi_r \left( \left[ \bar{u}_1^{p-1}, \dots, \bar{u}_{i-1}^{p-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}^{p-1}, \dots, \bar{u}_M^{p-1} \right]; x_r(k) \right) \quad (3.42)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} u_i(k) &\in \Omega_i \\ x_r(k) &= \hat{x}_r(k) \end{aligned} \quad (3.43)$$

en donde

$$\bar{u}_i^p(k)^T = \left[ u_i^p(k+1)^T, u_i^p(k+2)^T, \dots, u_i^p(k+Np)^T \right] \quad (3.44)$$

La función  $\mathfrak{F} i$  se puede obtener a partir de una ardua manipulación del modelo compuesto (ecuación (3.41)) presentado anteriormente. Recordar que, la secuencia de estados para el sistema  $i$ , es  $\bar{u}_i^p(k)$ , es optimizada para producir sus valores en la iteración  $p$ .

Se puede demostrar que las iteraciones mediadoras generadas por este MPC basado en algoritmos de cooperación son factibles y la ley de control de realimentación de estado del algoritmo MPC basado en estas iteraciones mediadoras es estable. Para ver los detalles de las demostraciones ver Venkat *et al.*, (2005).

En el siguiente apartado se introducen los controladores jerárquicos, un nivel superior de complejidad en relación a los controladores analizados.

## 3.4. Control jerárquico

### 3.4.1. Control jerárquico de una capa

Una alternativa a los sistemas de control distribuido descritas en la sección anterior consiste en considerar un segundo nivel jerárquico en la estructura de control, como se presenta en la Figura 3.7, para el ejemplo sencillo ya considerado en las secciones anteriores. En estos dos niveles de estructura, un algoritmo en un nivel superior coordina las acciones de los controladores locales situados en un nivel inferior y diseñados posiblemente con MPC.

El diseño del coordinador ha sido ampliamente estudiado en los últimos cuarenta años (Scattolini, 2009). La idea básica es describir el sistema general bajo control, compuesto por una serie de subsistemas vinculados a través de algunas variables de interconexión, es decir, las entradas de un subsistema dado son las salidas o los estados de otro. La solución debe seguir los siguientes pasos:

1. Para cualquier subsistema un problema de optimización se resuelve con un MPC, minimizando una adecuada función de costo local bajo restricciones locales de estado, de entrada y de salida. Si las soluciones locales calculadas satisfacen las restricciones impuestas por las variables de interconexión, es decir, si existe una coherencia entre los valores de las variables de interconexión calculadas por los controladores locales, el procedimiento ha concluido.
2. Ahora si no hay coherencia, se debe resolver un problema de optimización global del sistema, el cual incluye como restricciones la imposición de coherencia (las soluciones locales deben satisfacer las restricciones impuestas por las variables de interconexión). La solución se logra por medio del método de los multiplicadores de Lagrange, asumiendo como dadas las variables de estado, de entrada y salida definidas por los reguladores locales.

- Las variables de interconexión óptimas y coherentes obtenidas, son enviadas a los optimizadores locales de bajo nivel, y vuelven a calcular las trayectorias óptimas de las variables estado, de entrada y salida a lo largo del horizonte de predicción considerado. Las iteraciones se detienen cuando las variables de la interconexión satisfacen las condiciones necesarias de coherencia. Este procedimiento conceptual iterativo debe ser especializado para garantizar su convergencia, así como algunas propiedades de la solución final resultante.

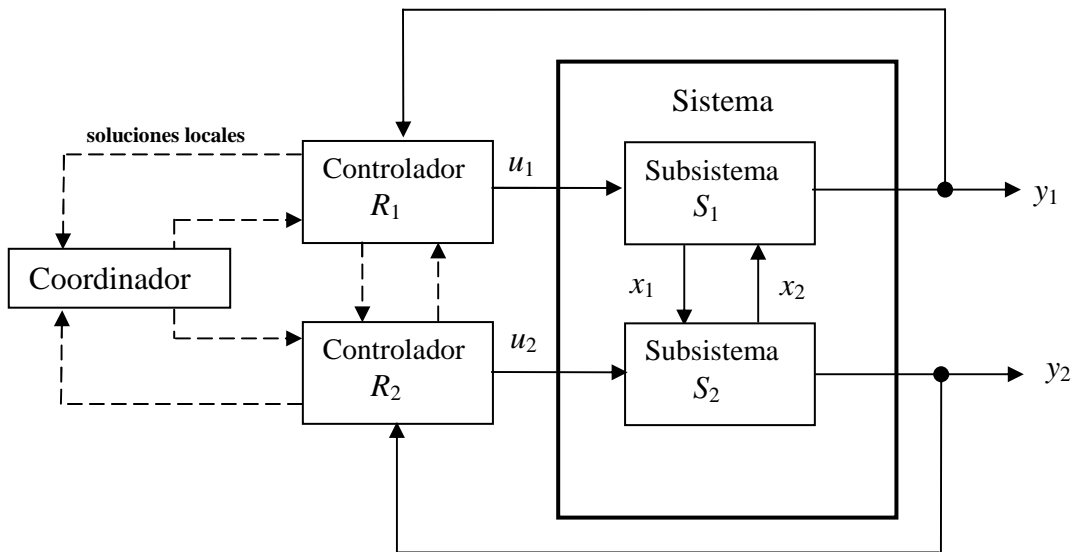


Figura 3.7: Control jerárquico para coordinar un sistema de dos entradas ( $u_1, u_2$ ) y dos salidas ( $y_1, y_2$ ) (Scattolini, 2009).

En el contexto del MPC, los esquemas de coordinación para sistemas de tiempo discreto se han descrito en Negenborn *et al.*, (2007), donde se consideran también diferentes protocolos de comunicación entre los reguladores locales. Los algoritmos propuestos se han utilizado para el control de redes de transporte, como en Negenborn *et al.*, (2002), y para sistemas de potencia en Negenborn *et al.*, (2008). Otras dos estructuras de capas desarrolladas con argumentos similares se han presentado en Katebi y Johnson, (1997), que también describe una estructura de dos niveles análoga, para la estimación de estado.

Por último, cabe señalar que estructuras similares (jerárquicas) de dos niveles es ampliamente utilizado en corrientes intensísimas de investigación en ciencias de la computación o inteligencia artificial relacionados con los llamados "agentes autónomos". Donde los agentes son entidades inteligentes, equivalentes en términos computacionales a un proceso del sistema operativo, que existen dentro de cierto contexto o ambiente, y que se pueden comunicar a través de un mecanismo de comunicación inter-proceso, usualmente un sistema de red, utilizando protocolos de comunicación (Panait *et al.*, 2005). Ahora su uso en control básicamente, consisten en un número de agentes (programas computacionales) que deben decidir sus acciones a través de un "negociador", hasta lograr a un consenso sobre sus acciones. Las ideas detrás de este enfoque se han especializado al problema de diseño de control como en Tatara *et al.*, (2007).

### **3.4.2. Control jerárquico de los sistemas de múltiples capas**

En sistemas de múltiples capas jerárquicas, la acción de control se realiza por una serie de controladores que trabajan a escalas de tiempo diferentes. Esto puede ser útil por lo menos en dos casos: cuando el proceso global bajo control se caracteriza por comportamientos dinámicos diferentes, es decir, por una dinámica lenta y una rápida, o en el caso de la optimización completa de la planta, cuando los algoritmos de optimización y control trabajan a diferentes velocidades de cálculo, tanto en los objetivos a optimizar como en la aplicación de las acciones de control realmente factibles.

### **3.4.3. Control jerárquico de sistemas de escalas de tiempo múltiples**

Muchos sistemas se caracterizan por dinámicas claramente separables, lentas y rápidas, véase por ejemplo, dos ejemplos industriales importante sobre una depuradora de aguas residuales. Brdys *et al.*, (2008) y un problema de control de un invernadero en Van Henten y Bontsema, (2009). En estos casos, el esquema de control se puede llevar a cabo en dos escalas de tiempo diferentes. Un controlador que actúa en frecuencias bajas calcula ambas acciones de control de las variables manipuladas las que tienen un efecto de largo plazo



sobre la planta, es decir, variables de control "lento" ( $u_{lento}$ ) y los valores de referencia de variables de control "rápidas" (de alta frecuencia), estados y salidas ( $u_{rápido}^{ref}, x_{rápido}^{ref}, y_{rápido}^{ref}$ ).

Un segundo regulador toma estos valores de referencia como entradas y calcula las variables de control "rápidas"  $u_{rápida}$  resolviendo un problema de seguimiento en alta velocidad. Un esquema conceptual de esta arquitectura para dos niveles se presenta en la Figura 3.8.

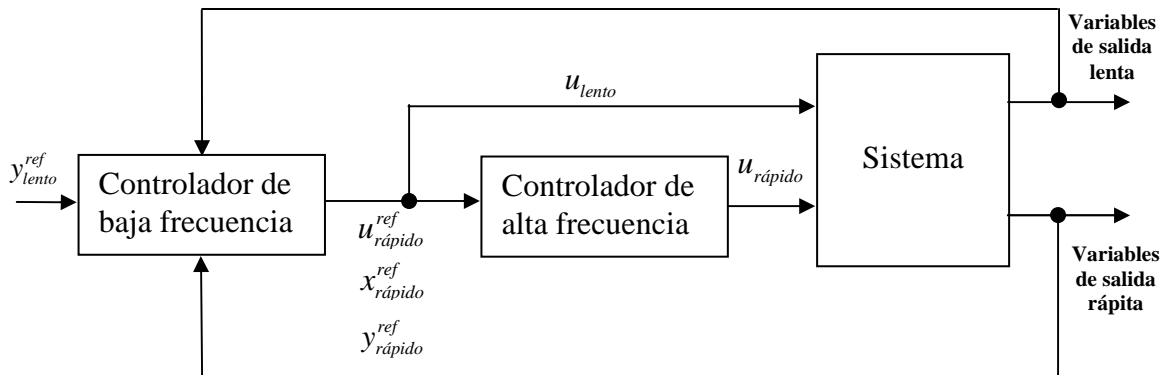


Figura 3.8: Control de sistema con dinámica lenta y rápida (Scattolini, 2009).

Sistemas de dos distintas escalas de tiempo son a menudo denominados como sistemas singularmente perturbados, y han sido ampliamente estudiados en el pasado. Sin embargo, en el contexto de la MPC, aún faltan métodos sistemáticos de diseño con propiedades garantizadas y sólo hay soluciones ad-hoc sobre algunos problemas industriales específicos. En el desarrollo de nuevos algoritmos para estos sistemas, se puede aprovechar los métodos MPC de multi-velocidades de procesamiento desarrollado en Scattolini y Schiavoni, (1995). Sin embargo, en estos documentos, la naturaleza multi-velocidad del problema generalmente se debe al muestreo de salida o los mecanismos utilizados en la actualización de la entrada.

### 3.4.4. Control de sistemas con estructura jerarquizada

Muchos de los sistemas industriales, económicos o sociológicos se pueden describir por

una estructura jerarquizada. La capa más alta de la jerarquía corresponde a un sistema con una dinámica lenta (Magdi, 1977). Este sistema puede ser controlado observando su comportamiento en una escala amplia de tiempo, y sus entradas de control calculadas deben ser efectivamente provistas por subsistemas ubicados en capas de menor jerarquía, que se caracterizan por dinámicas más veloces. A su vez, estos subsistemas deben ser controlados a una velocidad más alta y se pueden colocar en una capa intermedia de la jerarquía. Un ejemplo de una estructura de tres capas se indica en la Figura 3.9.

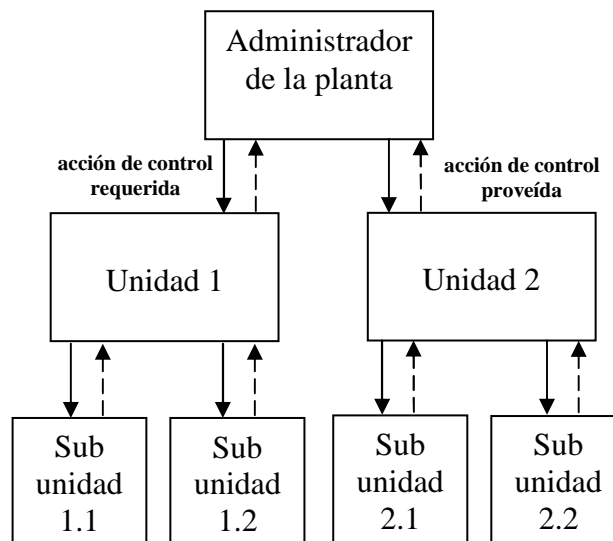


Figura 3.9: Estructura jerárquica de un sistema de tres capas (Scattolini, 2009).

De hecho, en estas estructuras el controlador en una capa mayor calcula sus entradas de control, las cuales son las señales de referencia para la capa inmediatamente inferior. Como ejemplo, considere un vehículo híbrido con dos generadores de torque, un motor de combustión interna y un motor eléctrico (Zhang y Liu, 2010). En el nivel superior, un controlador debe calcular el torque que debe exigirse a los motores con el fin de satisfacer los esfuerzos necesarios y optimizar la gestión de la energía (producción y almacenamiento) del sistema. A nivel de motores, el par requerido debe ser siempre entregado en el tiempo prescrito y bajo las restricciones operacionales correspondientes.

En estas estructuras jerárquicas, a menudo es necesario transmitir alguna información adicional de abajo hacia arriba, a fin de garantizar que las referencias calculadas en la capa

superior sean factibles con respecto a las dinámicas y restricciones de la capa inferior, así como considerar la presencia de perturbaciones que actúan en la capa inferior. Por otra parte, los controladores de los subsistemas de la capa inferior deben garantizar la solución de los problemas de seguimiento correspondiente con un nivel adecuado de precisión, de modo que el desfase entre lo que es requerido por un nivel más alto y lo que es proporcionada por el nivel inferior no destruya algunas propiedades fundamentales, tales como la estabilidad y rendimiento.

Desde el punto de vista de la ingeniería de control, la estructura de múltiples capas jerárquicas corresponde a un clásico controlador realimentado en cascada, como en el ejemplo, de la Figura 3.10, donde de nuevo se considera una estructura de tres capas y los lazos internos corresponden a las dinámicas más rápidas, mientras que los lazos externos corresponden con controladores del sistema en la capa más alta (Kolmanovsky, 1996). En los sistemas de control industrial, la dinámica más rápida suele ser asociada a los actuadores, mientras que las dinámicas más lentas describen el proceso bajo control. Un diseño de sistemas de control en cascada es hecho típicamente de acuerdo con un principio de desacople de frecuencia: las dinámicas de los lazos de realimentación son tan diferentes que en el proyecto de un controlador para un bucle dado, se puede hacer la suposición de que todos los demás bucles permanecen en estado estacionario. Por otra parte, no hay información transmitida desde el interior a los bucles exteriores (líneas de puntos en la Figura 3.9), por lo que toda la capa no es consciente de la posibilidad de que las capas inferiores puedan cumplir sus exigencias. En la fase de diseño, los lazos internos son a menudo cerrados con los controladores estándar PI- PID, mientras que un controlador MPC se utiliza para diseñar el algoritmo de control para el sistema más lento.

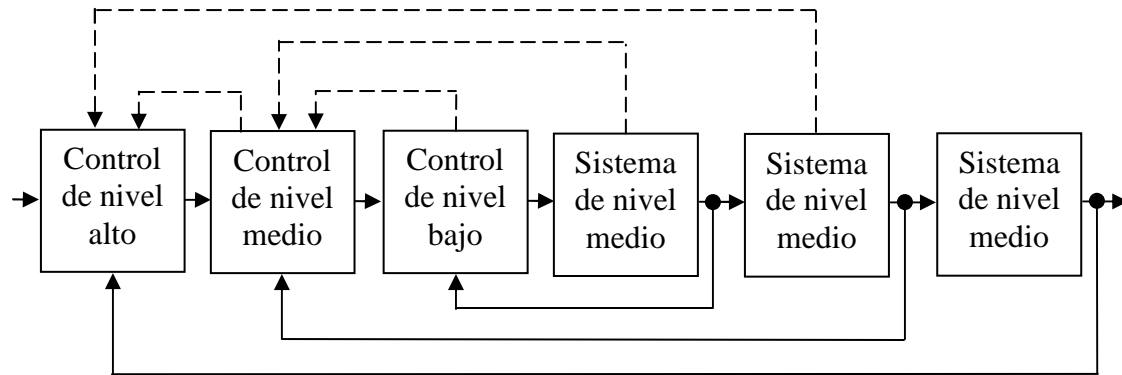


Figura 3.10: Estructura de control de tres capas en cascada (Scattolini, 2009).

Cuando no se puede suponer el principio de desacople de frecuencia, o también cuando el control de los subsistemas en las capas inferiores de la jerarquía requiere un diseño más cuidadoso, un controlador MPC puede ser utilizado en cualquier capa, con la clara ventaja de poder considerar las correspondientes restricciones de entrada, estado y salida. Aunque esta posibilidad tiene muchas ventajas potenciales, existen pocos trabajos que lo han explotado a fondo. En particular, en Scattolini y Colaneri, (2007) se utilizan modelos lineales para describir los sistemas de cada capa y la información se transmite de abajo hacia arriba para relajar los requerimientos de la capa superior cuando se produce infactibilidad de la capa inferior. Sistemas lineales se analizan en Scattolini *et al.*, (2008), mientras que se ocupa del problema de seguimiento en la capa más alta para plantas descritas por modelos de Wiener. En todos estos trabajos, los controladores en cualquier capa están diseñados de forma independiente recurriendo a algoritmos MPC robusto, de modo que la fase de diseño resulta ser completamente disociadas aun cuando el principio de desacople de frecuencia no se mantenga.

### 3.4.5. Aplicación del control jerárquico en la optimización de la planta completa

Una importante aplicación del control jerárquico es para controlar toda la planta. En la industria de procesos es común diseñar el control general del sistema de acuerdo a la estructura jerárquica como la que se muestra en la Figura. 3.11, (Qin y Badgwell, 2003). En la capa superior, la optimización en tiempo real (OTR), se realiza para calcular las

condiciones de funcionamiento óptimo con respecto a un índice de comportamiento que supone un criterio económico. En esta etapa, se utiliza un modelo físico estático no lineal del sistema. En la capa inferior se utiliza un modelo lineal dinámico simple del mismo sistema, a menudo derivados por medio de algoritmos de identificación, para diseñar un controlador MPC, garantizando que los valores objetivos transmitidos desde la capa superior se alcancen. También en este caso, el nivel más bajo puede transmitir de abajo hacia arriba información sobre las restricciones y el rendimiento.

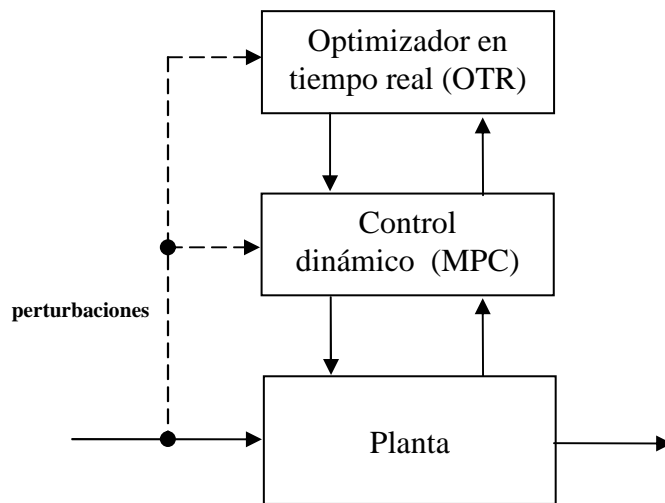


Figura 3.11: Estructura jerárquica para el control y optimización de una planta completa (Scattolini, 2009).

Tomar en cuenta que, aunque el enfoque anterior es muy popular en control de procesos, en otros contextos, como en gestión de sistemas de tráfico aéreo se considera, de algún modo un punto de vista dual (Pappas *et al.*, 2000). En estos casos, en el nivel superior un modelo más simple y más abstracto se considera para predecir el comportamiento a largo plazo del sistema y optimizar una función de costos dada en un horizonte de tiempo. En el nivel inferior, un modelo más preciso se utiliza para calcular las acciones de control actual mirando un horizonte de tiempo más corto. En el control de procesos basados en la estructura de múltiples capas de la Figura 3.10, el diseño del módulo de OTR juega un papel fundamental. De hecho, incluso cuando se basa en un modelo estático del proceso, algunos importantes problemas deben ser considerados. En primer lugar, el modelo adoptado tiene que ser periódicamente actualizado (adaptado) por medio de algún tipo de procedimiento de reconciliación para abordar las cambiantes condiciones de

funcionamiento debido a perturbaciones lentas. En segundo lugar, debe garantizarse la coherencia entre el modelo utilizado en la fase de diseño en la capa superior y el modelo utilizado en la capa más baja para la aplicación MPC, (Yip y Liu, 2004). En tercer lugar, el objetivo de optimización de estado estacionario debe ser exacto, para garantizar que las referencias de entrada y salida en estado estacionario calculadas por el OTR sean factibles y lo más cerca posible del deseado *set-point*, para resolver este problema de factibilidad (Rawlings y Stewart (2008)). Muchos documentos han sido publicados en la literatura MPC trabajando con la estructura jerárquica de la Figura 3.11, entre ellos, uno reciente e interesante estudio sobre el tema se presenta en Tatjewski (2008), donde se estudia el lugar, el rol y la interacción mutua de los algoritmos de control avanzado y la optimización en línea de los *set-point* de las estructuras de control. También en Engell, (2007), se hace un estudio a través de una discusión sobre los meritos, limitaciones y aspecto de implementación del OTR. Un procedimiento OTR basado en un modelo dinámico del proceso se describe en Kadam *et al.*, (2003). Un intento de mezclar las dos capas jerárquicas de la Figura 3.11, es decir, para integrar la optimización de estado estacionario (no lineal) y de control MPC (lineal) se describe en Zanin *et al.*, (2002). El calculo del objetivo de estado estacionario para el conjunto de controladores MPC locales ha sido considerado en Cheng *et al.*, (2008) mediante la adopción de un enfoque basado en la coordinación y similar a uno tratado en Sección 3.4, mientras que un coordinador de alto nivel maximiza el rendimiento de la planta basado sobre la información proporcionada por los controladores MPC locales de bajo nivel descritos en Aske *et al.*, (2008).

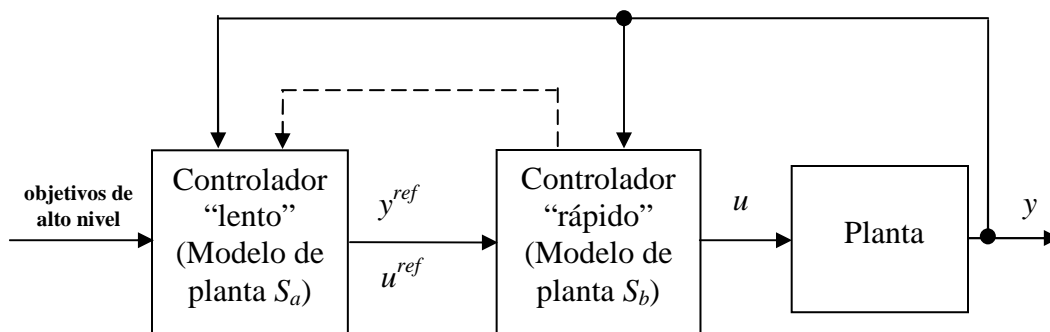


Figura 3.12: Estructura de control jerárquico para el control y la optimización de la planta completa (Scattolini, 2009).

A pesar de la gran cantidad de resultados del OTR, se cree que existe todavía mucho trabajo por hacer para extender muchos resultados teóricos (estabilidad, rendimiento, robustez) disponibles hoy en día para la implementación MPC estándar considerado en la estructura jerárquica ( Mayne *et al.*, 2000).

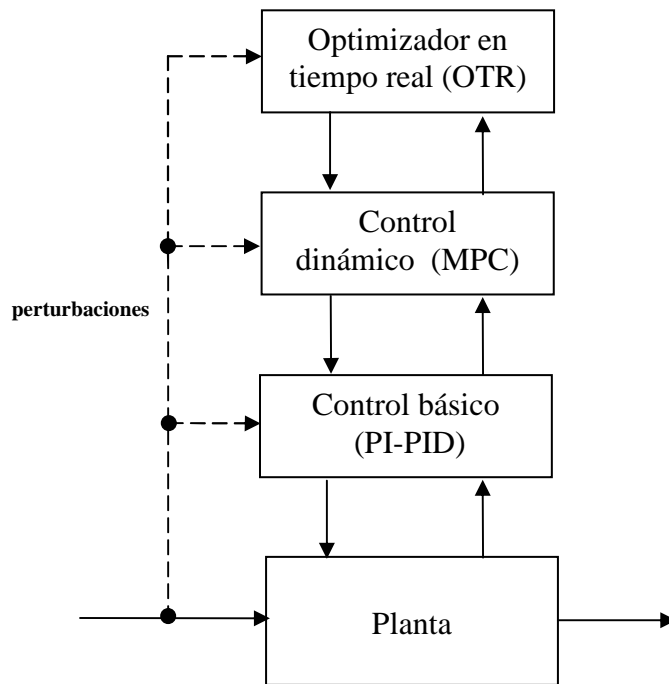


Figura 3.13: Una representación popular del control completo de una planta (Scattolini, 2009).

Cabe señalar que el esquema conceptual de la Figura 3.11 se puede presentar de forma equivalente y más “orientada al control” como se presenta en la Figura 3.12, donde una estructura de dos capas es considerada y cada capa utiliza un modelo diferente de planta ( $S_a$  y  $S_b$ ) en el diseño del correspondiente regulador. En segundo lugar, cabe señalar que la clasificación conceptual adoptada aquí, que distingue entre los esquemas de las Figuras 3.8 y 3.10 no siempre está claro en la literatura técnica. De hecho, un esquema popular es la que aparece en la Figura 3.13, donde los controladores (PI-PID) están en la capa de control más baja de los actuadores, de manera que hacen referencia a los modelos de los actuadores (como en la sección 3.5.1), mientras que conceptualmente, los dos niveles más altos hacen referencia al problema de optimización de toda la planta que se describe en esta subsección.

### 3.5. Control coordinado de sistemas independientes

Hasta ahora, se han considerado sistemas de gran escala formados por subsistemas que interactúan. Otro escenario importante está relacionada con el problema de la coordinación de una serie de sistemas desconectados (agentes) que deben cooperar para lograr un objetivo determinado, es decir, para minimizar globalmente una función de costos sujeta a las restricciones de las interconexiones. También en estos casos, en lugar de resolver un problema único de control centralizado, en principio, es posible resolver una serie de problemas de optimización locales y coordinar las acciones locales de los agentes mediante un intercambio adecuado de información. Es evidente que el diseño local, pero coordinado del algoritmo de control comparte muchas características con el problema considerado en la sección 3.3 (controladores distribuidos), de modo que las clasificaciones detalladas en la sección 3.3 no se repetirán.

En el contexto del control MPC, la coordinación de los sistemas independientes no lineales de tiempo discreto con retraso en la intercomunicación son considerados en Franco *et al.*, (2008), que también proporciona resultados de la estabilidad obtenidos mediante el recurso de la estabilidad entrada-estado. En Katebi y Johnson (1997), cualquier agente (un nodo de un grafo) se describe como un sistema no lineal de tiempo discreto el cual conoce el estado de sus vecinos sin retardo. Los pesos de los índices de desempeño locales del estado y las entradas de los vecinos y los valores futuros del control local se calculan sobre el horizonte considerado para predecir el transiente del estado local. La estabilidad se logra con una restricción terminal, como es habitual en los MPC, ver Mayne et al., (2000). La satisfacción de las restricciones está garantizada por una restricción contraída, procedimiento similar al ya utilizado en Limon *et al.*, (2002); la factibilidad y la convergencia están garantizadas. El control de vehículos cada uno con dinámica no-lineal de segundo orden de tiempo continuo independiente y funciones de costo para el acoplamiento, han sido resuelto con el enfoque de horizonte deslizante en Dunbar y Murray (2006), mientras que en Gu, (2008) un problema similar (funciones de costos independientes) se resuelve para un integrador doble buscando una solución del equilibrio de Nash.



Mientras que en todos los enfoques mencionados anteriormente el objetivo final es especificado en un inicio, y por lo general el punto de equilibrio que se logra se conoce con anterioridad, en otra clase de problemas de control coordinado, los subsistemas deben negociar en línea su resultado final partiendo de un conocimiento parcial del sistema general, por ejemplo, el estado de sus vecinos. Estos se llaman "problemas consenso" y tienen aplicaciones potenciales, tales como problemas de alineación o la coordinación de redes de sensores. Entre el cada vez mayor número de publicaciones sobre este tema, es posible recordar que el problema se ha formulado y resuelto en Jadbabaie *et al.*, (2003) para los sistemas descritos por un integrador único, mientras que las contribuciones fundamentales se han dado en Moreau, (2005). En el contexto del MPC, resultados preliminares han sido reportados en Johansson, (2006), mientras que el problema del consenso para la dinámica de integradores individuales y dobles, se ha resuelto con la estabilización de los enfoques MPC presentados en Ferrari-Trecate, (2007).

### **3.6. Discusión**

Se ha revisado una serie de arquitecturas para el control de sistemas de gran escala. Con respecto a una amplia gama de aplicaciones industriales y las soluciones propuestas como las distribuidas y las jerárquicas, muchos de los problemas fundamentales aún no se han resuelto. Entre ellos, los siguientes se consideran de suma importancia (Scattolini, 2009).

- *Nuevos algoritmos con propiedades garantizadas.*

Muchas contribuciones teóricas son necesarias para desarrollar algoritmos eficientes con propiedades garantizadas, tales como la estabilidad y el rendimiento. En particular, esto es cierto para los MPC descentralizados, donde muy pocos resultados están disponibles, y para el diseño de reguladores jerárquicos MPC para los sistemas de múltiples capas. Se cree que en todos los casos considerados, podrían aprovechar los resultados recientes sobre MPC robusto y propiedades de pequeña ganancia. Sin embargo, estos controladores conducen naturalmente a resultados muy conservadores, con un rendimiento no es aceptable en el mundo de las aplicaciones reales.

- *La selección de la estructura de control.*

Deben desarrollarse criterios para la selección adecuada de la estructura de control sobre la base de las mejoras relativas alcanzables mediante el aumento de la complejidad. Por ejemplo, es evidente que un controlador distribuido puede estabilizar sistemas que no pueden ser estabilizados con un controlador descentralizado debido a la presencia de modos fijos. Sin embargo, si la estabilidad puede ser proporcionada por ambos sistemas, debe evaluarse además en términos de rendimiento si vale la pena considerar una estructura más compleja, que requiere más información que debe ser transmitida entre las unidades de control local. Una segunda cuestión se refiere a la comparación de los resultados proporcionados por los controladores distribuidos (Ver sección 2) con respecto a la coordinación que se obtienen con el enfoque jerárquico la cual se describe en la Sección 4.

- *Estructuras de control reconfigurables y sistemas híbridos.*

En lo que respecta a las estructuras jerárquicas que se describen en la Sección 5.2, se debe explorar la posibilidad de reconfigurar el sistema, por ejemplo, añadiendo o quitando los actuadores y sensores (controles “*plug and play*”, ver Knudsen *et al.*, (2008)). Podría ser útil tener en cuenta requisitos de desempeño con tiempos diferentes y sistemas de control descritos por un modelo híbrido. Por ejemplo, considere el problema de la gestión óptima de la puesta en marcha de una planta termoeléctrica de ciclo combinado. Durante esta fase, el control de configuración y control de los objetivos suelen ser muy diferentes de las que se considera en condiciones normales de funcionamiento. Un trabajo preliminar en control jerárquico para sistemas híbridos se ha descrito en Lygeros (1996), donde los enfoques predictivos sin embargo no se han adoptado. Por último, una mejor configuración de control flexible puede hacer frente con la exigencia de una alta tolerancia a fallos.

- *Algoritmos de optimización.*

Muchos algoritmos de optimización se han desarrollado para solucionar eficazmente los problemas de minimización relacionados con el MPC centralizado lineal y no lineal,

véase, por ejemplo Biegler (2000). Por el contrario, aún faltan métodos de optimización para el MPC distribuido y jerárquico. Este es un importante punto crítico donde se espera mejoras significativas.

- *Estimación de estado distribuido.*

Los algoritmos de control distribuidos exigen estimadores de estado distribuido que garanticen la convergencia asintótica de los estados locales estimados. Resultados preliminares se han divulgado por ejemplo en Olfati-Saber y Shamma (2005), donde han sido consideradas las redes de sensores. Sin embargo, desarrollos más amplios son requeridos para incluir el problema de la estimación de estado, el conocimiento del ruido de las restricciones, las propiedades de convergencia o propiedades globales de observabilidad. Un enfoque predictivo se puede tomar también para este problema recurriendo a las ideas subyacentes bajo los estimadores de horizonte móvil que se describen en Michalska y Mayne, (1993).

- *Partición del sistema.*

En el diseño de un sistema de control descentralizado y distribuido (sección 3.2 y 3.3), el proceso bajo control debe ser particionado a priori en subsistemas adecuadamente definidos para reducir el acoplamiento dinámico y facilitar el diseño del control. En algunos casos, teniendo en cuenta el diseño del proceso, la partición es natural véase por ejemplo Rawlings *et al.*, (2008) donde se consideran las plantas químicas. En otros casos, la partición se puede hacer por medio de una análisis de entrada-salida basado en la matriz de ganancia relativa e índices relacionados, Niederlinsky, (1971), o en un análisis de espacio de estado, véase por ejemplo, Wittenmark *et al.*, (2002). La descomposición temporal y reducción de modelos, utilizados para el diseño de sistemas de control jerárquico se describen en la Sección 3.5. A pesar de los muchos métodos disponibles, se cree que los nuevos métodos adaptados al diseño de sistemas de control distribuido y jerárquico con MPC aún no se han desarrollado. En este sentido, algunos resultados preliminares han sido reportados en Motee y Sayyar-Rodsari, (2003).

- *Sincronización y protocolos de comunicación.*

Cada vez que la estructura adoptada por el controlador requiere un intercambio de información entre los reguladores locales, en la misma o en diferentes capas de un estructura jerárquica, los resultados logrados dependen fuertemente de la implementación adoptada y protocolos de comunicación (Negenborn, 2007). Por otra parte, algunos problemas fundamentales relacionados con estos aspectos deben ser considerados, tales como la baja frecuencia de transmisión o pérdida de información. Para esto se puede consultar Baillieul (2007) para un debate profundo sobre estos aspectos.

La historia de MPC centralizada ha demostrado que algoritmos eficientes y confiables se han desarrollado mucho antes que una teoría sólida se haya establecido, ver el trabajo fundamental Mayne *et al.*, (2000). Una evolución similar se puede predecir del MPC distribuido y jerárquico. De hecho, muchos algoritmos eficientes están hoy en día disponibles, pero no hay resultados teóricos sólidos y se carece parcialmente de una visión unificadora. Luego, mucho trabajo se tiene que hacer para desarrollar nuevas herramientas y métodos.

En los siguientes capítulos, se espera aplicar en lo que corresponda, esta amplia teoría al diseño de controladores de sistemas de gran escala a un controlador de un sistema de transporte público con varias rutas.

En los capítulos siguientes se aplicará parte de este formalismo matemático para describir las estructuras de control desarrolladas en el capítulo 9. En particular, considerando un sistema de transporte público como la unión de un conjunto de subsistemas formados por rutas individuales, se plantea un diseño de un controlador centralizado, un controlador descentralizado y uno controlador distribuido para el sistema. Finalmente, se desarrolla un controlador jerárquico que administra inteligentemente un conjunto de controladores previamente diseñados para las rutas individuales.

# Capítulo IV

## Sistemas de transporte público

### 4.1. Diseño de un sistema de transporte público

El transporte de personas entre puntos distantes de una ciudad requiere en la mayoría de los casos de un medio de transporte motorizado. Los sistemas de transporte son componentes básicos en la estructura social, económica y física de un área urbana (Krishna *et al.*, 2000). En ciudades medianas y grandes, los sistemas de transporte público juegan un rol fundamental en la movilidad de las personas, tanto en zonas urbanas como suburbanas. Uno de los mayores desafíos de la planificación del transporte público, consiste en asegurar un

sistema operacional y económicamente eficiente, adecuadamente integrado al entorno (Krishna *et al.*, 2000).

La planificación de sistemas de transporte público es sujeto de interés en una amplia gama de contextos:

- En realidades donde una porción importante de la demanda de transporte urbano es satisfecha por el transporte público. Por ejemplo, en las ciudades latinoamericanas, aproximadamente un 50% de los viajes demandados son realizados utilizando este modo de transporte ( InterConsult, 1997).
- En realidades donde parte de la demanda cubierta por el transporte público se ha visto obligada a utilizar medios monetariamente menos costosos (bicicleta o caminata, en casos donde es posible).
- En realidades donde el transporte público ha perdido progresivamente participación en el sistema de transporte urbano, en beneficio de modos privados (automóvil). Se reconoce que en el largo plazo, los modos privados no entregan una solución al problema de transporte (Norambuena, 2003), dada la capacidad limitada de la infraestructura con que es posible contar.

El término transporte público se refiere al transporte de tipo comercial de personas. Es un servicio de transporte urbano y suburbano de pasajeros al que se accede mediante el pago de una tarifa fijada y que se lleva a cabo con servicios regulares establecidos en recorridos, horarios y puntos de acceso determinados (Gruttner *et al.*, 2002).

En los sistemas de transporte público intervienen dos actores (Gruttner *et al.*, 2002):

Usuarios: Son todas aquellas personas que tienen necesidades de transporte y que deben utilizar tiempo y dinero para satisfacerlas. También se les denomina pasajeros.

Operadores: Son aquellos que brindan a los usuarios el servicio de transporte, proveyendo para ello recursos económicos como son los vehículos, el combustible, la mano de obra y el mantenimiento. Se les denomina empresas de transporte.

Adicionalmente se distinguen las autoridades como entidad reguladora, responsable de asegurar el servicio social del transporte a los habitantes de una ciudad. Esta regulación se ejerce a través de organismos gubernamentales, que pueden ser intendencias municipales, subsecretarías, ministerios, etc. El acto de regulación implica establecer algunos componentes del sistema, principalmente los trazados de los recorridos, valores de las frecuencias y tarifas. Existen casos particulares de estructura administrativa de los transportes públicos, en especial:

- Casos donde existe una liberalización del mercado de transporte público. Los operadores fijan los trazados de los recorridos, las frecuencias y las tarifas. En este caso las autoridades no juegan un rol relevante en la planificación de estos aspectos.
- Casos donde las autoridades poseen los recursos para operar los servicios. En este caso no existen los operadores en la forma de empresas privadas.
- Por último, existe un caso mixto, contextos regulados por las autoridades que fijan los trazados de los recorridos, las frecuencias y las tarifas y los licitan entre los operadores.

#### **4.1.1. La planificación de un sistema de transporte público**

La planificación de un sistema de transporte público se compone de tres grandes tareas (Wirasinghe, 2003):

- Selección de tecnologías. Cada tecnología realiza el acto de transportar pasajeros de un punto a otro de una ciudad de formas diferentes. Tecnologías típicamente utilizadas son: bus, bus articulado, metro. La selección de la más adecuada (o de

una combinación de varias) debe tener en cuenta su velocidad de operación, capacidad, así como la compatibilidad con tecnologías en uso, impacto ambiental, y restricciones geográficas y económicas.

- Estimación de la demanda. Implica conocer las necesidades de transporte de pasajeros entre distintos puntos de la ciudad.
- Selección del mejor sistema. Implica la planificación funcional del sistema, e incluye tareas como la definición de los trazados de los recorridos, su modo de operación, determinación de la política de despacho de los servicios, y ubicación de estaciones de transbordo y de garajes.

#### **4.1.2. Selección del mejor sistema**

En Ceder y Wilson (1986) se considera el proceso de decisiones involucrado en la selección del mejor sistema, dividido en cinco etapas (donde se hace referencia a buses en forma genérica, pudiendo ser en la realidad otra tecnología):

1. Determinación de los trazados de los recorridos. Implica definir la estructura topológica de cada recorrido, como una secuencia de calles.
2. Determinación de las frecuencias. Implica definir el intervalo de tiempo entre salidas de un bus efectuando un recorrido particular.
3. Determinación de las tablas de horarios. Implica establecer detalladamente los horarios de salida y llegada de los buses efectuado un determinado recorrido.
4. Asignación de buses a recorridos. Implica asignar la flota de buses disponibles a la realización de los diferentes servicios.



5. Asignación de choferes. Implica la asignación del personal a la operación de los diferentes servicios.

En Desaulniers y Hickman, (2003) se clasifican estas etapas según el alcance de la planificación, como:

- Planificación estratégica. Involucra decisiones a largo plazo, etapa 1.
- Planificación táctica. Implica la toma de decisiones en periodos de tiempo de duración media, etapas 2 y 3.
- Planificación operacional. Involucra decisiones que se toman una vez por mes o por día, etapas 4 y 5.

En contextos regulados, las etapas 1 y 2 son típicamente ejecutadas por las autoridades, eventualmente con participación de los operadores. Las etapas 3, 4 y 5 son ejecutadas típicamente por los operadores. La gestión de los recursos (buses, personal) que determinan los costos operacionales de los servicios de transporte público, es por lo tanto tarea de las empresas de transporte. Sin embargo las decisiones tomadas a este nivel (etapas 3, 4 y 5) están condicionadas por las tomadas en el primero (etapas 1 y 2).

Con el objetivo de automatizar las tareas de asignación de flota y personal, han surgido un número importante de métodos implementados en herramientas de software, con exitosa aplicación (Wren, 2003). La mayoría de estos métodos consisten en la resolución de modelos de optimización combinatoria. La dificultad de la resolución de estos modelos radica en los tamaños de las instancias de los problemas; Desaulniers y Hickman, (2003) reportan el caso de Nueva York, que emplea 12000 choferes para operar 4500 buses en 240 recorridos.

Los modelos de optimización utilizados en el contexto de las etapas 4 y 5 tienen en cuenta los intereses de los operadores únicamente. La planificación de las etapas 1 y 2 es

responsabilidad de las autoridades, quienes tienen una misión social de asegurar un buen servicio a los usuarios, entendido como aquel que es confiable, accesible en tiempo y espacio, seguro, rápido, confortable, y a un precio razonable (Wirasinghe, 2003). Dado que el costo monetario para los usuarios del transporte público está determinado fuertemente por los costos operacionales, las autoridades deben tener en cuenta tanto los objetivos de los usuarios como de los operadores, que frecuentemente son contrapuestos.

En contextos regulados por las autoridades, la planificación estratégica del diseño topológico de los recorridos y la determinación de las frecuencias es tarea de los planificadores de la agencia sobre la cual recae esta responsabilidad (intendencia, municipalidad, subsecretaría, ministerio). La toma de decisiones a este nivel debe evaluar los costos económicos, pero también los costos políticos y sociales. El planificador requeriría de la evaluación cuantitativa de las alternativas posibles, que son muchas y dependen a su vez de un conjunto importante de variables. En la búsqueda de buenas soluciones para las etapas 1 y 2, generalmente se usa el sentido común y la experiencia del planificador o conocedor del problema, eventualmente con el apoyo de guías y recomendaciones (Transportation Research Board, 2003). No existen herramientas matemáticas y computacionales estándares adecuadas de apoyo a la toma de decisiones para llevar a cabo esas tareas (Barra, 1999). Esto se debe principalmente a los siguientes factores:

- Dificultad del modelado de las características de los sistemas.
- Complejidad de la información que deben manipular y disponer.
- Dificultad de adaptación a las condiciones particulares de cada caso.

La investigación respecto a técnicas de optimización para la determinación de los trazados de los recorridos y las frecuencias es escasa, en comparación a la existente para la optimización de la gestión de buses y personal. En cuanto a la aplicación de estas técnicas, existen pocas referencias que brindan datos precisos. En Barra, (1999) se cita la aplicación

de técnicas de optimización de recorridos y frecuencias en Estocolmo, Londres y Singapur, con porcentajes de mejora entre el 10 y 20% en los costos operacionales, y variaciones del 1 y 2% en los niveles de servicio.

La limitada atención que ha recibido el problema de optimización de recorridos y frecuencias se debe a dos factores principales:

- Dificultad de predecir una mejora frente al esfuerzo de construcción y resolución de un modelo, y la recolección y procesamiento de la información necesaria. Es necesario también tener en cuenta el impacto que causa en los usuarios la realización de cambios en las estructuras de los recorridos.
- Un sistema de transporte público falla si no se cumplen en cierto grado los objetivos para los cuales fue diseñado. Sin embargo, a diferencia de otros sistemas, hay tipos de fallas de un sistema de transporte público que no son catastróficas (insatisfacción de la demanda, alto costo, irregularidad, transporte en condiciones de hacinamiento), dado que el sistema continúa funcionando, cumpliendo con los objetivos en algún grado (Wirasinghe, 2003).

Se observa que existen muchos casos de sistemas de transporte público con estructuras de recorridos históricas, que han sido modificadas manualmente para cumplir nuevos requerimientos de demanda. Los cambios en el uso de suelo por parte de los habitantes de una ciudad hacen pensar en la necesidad de una completa reestructuración de los trazados de los recorridos en algún momento. Dicha reestructuración requiere de herramientas que permitan proponer y evaluar diferentes soluciones.

Bajo el contexto anterior, para operar un sistema de transporte público se debe establecer como meta una relación adecuada entre los modos y procesos de transporte, a través de un uso óptimo de la tecnología existente. Con el objeto de alcanzar esta meta, en este trabajo se plantea modelar un sistema de transporte público, que presente un comportamiento razonablemente cercano a la realidad y que permita diseñar e implementar estrategias de

control avanzado, con el objetivo de llevar los indicadores de servicio del sistema al punto más cercano del óptimo posible.

En la operación diaria de buses, el movimiento de los vehículos es afectado por diferentes condiciones inciertas al progresar el día, tales como congestión de tráfico, retardos inesperados, incertezas en la demanda de pasajeros, tiempos irregulares de despacho de vehículos, accidentes, etc. Como se mencionó, a nivel de planificación, las variables principales de diseño (esto es diseño de ruta, tamaño de flota, capacidad de los buses y frecuencia) se basan en valores medios de distribuciones espaciales y temporales de demanda de pasajeros y congestión de tráfico sobre un cierto periodo de operación. A pesar de seguir una planificación previa, surgen esquemas operacionales ineficientes debido a la inherente incertezas de las condiciones del sistema. En tiempo real la variabilidad del tiempo de espera impacta considerablemente en el nivel de servicio en lo que se refiere al tiempo de espera en los paraderos por los usuarios. Se aprecia que una determinada frecuencia media (calculada por un periodo de dos a tres horas a un nivel agregado) entrega grandes diferencias de tiempos de espera a nivel detallado. El típico fenómeno de agrupamiento de buses (*bus bunching*) es un ejemplo de cómo las condiciones dinámicas pueden producir una alta variabilidad en tiempos de espera entre buses, lo cual representa un comportamiento indeseado del sistema, produciendo grandes tiempo de espera de los pasajeros.

Como un esfuerzo de reducir los efectos negativos de las perturbaciones del servicio, se ha hecho un significativo esfuerzo en desarrollar estrategias de control flexibles, dependiendo de las específicas características del problema. Particularmente interesante son las llamadas estrategias de control en tiempo real que dependen de la disponibilidad de información en tiempo real de algún equipo electrónico instalado en el vehículo tales como un contador automático de personas (*Automatic Passenger Counters, APC*) y un dispositivo localizador automático de vehículos (*Automatic Vehicle Location, AVL*). Estas estrategias son diseñadas para permitir al operador reaccionar dinámicamente ante las perturbaciones del sistema.

En la literatura de control de transporte público en tiempo real, varios autores diseñan sus estrategias de control, basadas en una función objetivo típica que implica la regularización del tiempo de espera entre buses (*headway*). Esto es, minimizar el tiempo de espera total de los usuarios, ya que éste es directamente proporcional al *headway*. Como lo plantean Osuna y Newell, (1972),

Para una secuencia de tiempos de partida con  $t_{j-1} \leq t_j$  el tiempo de *headway* es:

$$H_i = t_i - t_{i-1}.$$

Para una realización de valores aleatorios  $H_1, \dots, H_n$ , entre los tiempos  $t_0$  y  $t_n$ , suponiendo que un pasajero arriba en algún tiempo aleatorio, uniformemente distribuido entre  $t_0$  y  $t_n$ .

La probabilidad de llegar justo en el  $k$ -ésimo *headway*  $H_k$  es  $H_k / \sum_{i=1}^n H_i$ . El tiempo esperado, para un pasajero que arriba en  $H_k$  es  $H_k / 2$ . Luego el tiempo esperado dado el conjunto  $\{H_i\}$  es:

$$E\{w / H_1, \dots, H_n\} = \frac{\sum_{k=1}^n H_k^2}{2 \sum_{i=1}^n H_i} \quad (3.1)$$

si  $H_i$  satisface la ley de los grandes números, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n H_k^2 = E\{H_k^2\} = E\{H^2\} \quad (3.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i = E\{H_i\} = E\{H\} \quad (3.3)$$

luego, con probabilidad 1, la esperanza del tiempo de espera de los pasajeros es:

$$E\{w/H_1, \dots, H_n\} \rightarrow \frac{E\{H^2\}}{2E\{H\}} = E\{w\} \quad (3.4)$$

luego, como  $\text{var}\{H\} = E\{H\}^2 - E\{H^2\}$  tenemos que:

$$E\{w\} = \frac{E\{H^2\}}{2E\{H\}} = \frac{E\{H\}^2 - \text{var}\{H\}}{2E\{H\}} = \frac{1}{2}E\{H\} \left( 1 - \frac{\text{var}\{H\}}{E\{H\}^2} \right) \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.1) se deduce que, la esperanza del tiempo de espera es siempre mayor a la mitad del intervalo de *headway* cuando hay variabilidad en el intervalo de los buses.

$$E\{w\} \geq \frac{1}{2}E\{H\} \quad (3.6)$$

La esperanza del tiempo de espera es igual a la mitad del intervalo de *headway* sólo si  $\text{var}\{H\} = 0$ , es decir, si los intervalos son uniformes. Luego, para minimizar el tiempo de espera se necesita proveer un servicio que opere con intervalos lo más uniformes posibles.

En trabajos como los de Barnett (1974), Turnquist (1980), Eberlein (1995), Eberlein (2001), Hickman, (2001) y Sun y Hickman, (2004) la estrategia más estudiada es el *holding*, en la cual los vehículos son retenidos en estaciones específicas por cierto tiempo. En la mayoría de los casos orientada a mantener el tiempo de espera entre sucesivos buses cerca de un predefinido valor. Más aun, para el control vehicular con el efecto opuesto (acelerar los buses en vez de retardarlos como en *holding*), se encuentran estrategias tales como el *expressing* o *stop-skipping*, donde los buses pueden saltar algunos de los paraderos predefinidos de acuerdo a la decisión del operador en tiempo real.

Tomando en cuenta los requerimientos tecnológicos para la implementación de la estrategia de control, Dessouky *et al.*, (2003) cuantifica los beneficios potenciales de varias acciones de *holding* que dependen de la tecnología de comunicación, rastreo y conteo de pasajeros,

dependiendo sólo de información local. Estos autores demuestran que la tecnología es relevante cuando el margen de tiempo es reducido, cuando el tiempo de espera es grande, y cuando hay pocos buses conectados al sistema.

En Eberlein (1995) se muestra que las estrategias de *holding* deberían reducir la varianza del tiempo de espera de los pasajeros tanto como el valor medio del tiempo de espera y tiempo de viaje. Con respecto al *stop-skipping*, Khoat y Bernard (2006) concluyen que esta estrategia efectivamente debería reducir el tiempo de viaje por pasajero en un vehículo; sin embargo el operador debería ser muy cuidadoso en no incrementar el tiempo de espera de los pasajeros saltados.

La estrategia de *holding* ha sido estudiada por Barnett (1974), Turnquist y Blume (1980), Eberlein (1995), Eberlein *et al.*, (2001), Hickman (2001) y Sun y Hickman (2004). Una interesante contribución de Hickman (2001), el cual presenta un modelo estocástico del *holding* para una estación dada. El autor formula un problema de programación cuadrática convexo para una variable correspondiente al lapso de tiempo durante el cual los buses son retenidos. Existen esfuerzos recientes para explorar modelos de *holding* que cuente con la locación del vehículo en tiempo real. (Eberlein, 1995; Eberlein *et al.*, 2001; Hickman, 2001; Sun y Hickman, 2004; Zolfaghari *et al.*, 2004). Eberlein (1995) y Eberlein *et al.*, (1999, 2001) propusieron un problema de programación cuadrática bajo un esquema de horizonte deslizante, considerando que la decisión de *holding* para un vehículo específico afecta la operación de un específico conjunto de los vehículos precedentes. Los autores concluyen que nos es necesario tener más de dos o más estaciones con *holding* sobre un recorrido. Estas conclusiones son contradictorias con los resultados logrados por Sun y Hickman (2004), quienes encontraron que muchas estaciones donde poder realizar una decisión de *holding* es una mejor práctica que tener que elegir solamente algunas. La mayoría de estos modelos son finalmente resueltos heurísticamente debido a la complejidad matemática de las formulaciones. Además, Zolfaghari (2004) desarrolló un modelo de control matemático con *holding* para una ruta específica, usando la información de la ubicación de los buses en tiempo real. Los tiempos de espera se calculan de las diferencias de los tiempos de partida de los buses, considerando cinco pasos adelante para la flota entera de buses. Una

estructura heurística es desarrollada para superar la complejidad de la solución del problema descrito. El problema de optimización es resuelto por medio de *Simulated Annealing*. Finalmente mencionaremos una estrategia de *holding* dinámico presentada por Yu y Yang (2007), donde el tiempo de *holding* en la parada siguiente es optimizado. En este trabajo es desarrollado un modelo basado en máquinas de soporte vectorial (SVM), las cuales a partir variables de entrada (como la demanda de pasajeros, posición de los buses, etc.) se logra predecir los tiempos de partida del bus de la próxima parada. Más aun, con el objetivo de determinar el tiempo de *holding* óptimo, es desarrollada una función objetivo para minimizar el costo de tiempo de usuario. Un algoritmo genético es propuesto para encontrar la solución del problema de optimización y encontrar el tiempo de *holding* óptimo.

La estrategia de *stop-skipping* como una estrategia en tiempo real ha sido estudiada por Lin *et al.* (1995), Eberlein (1995), Eberlein *et al.*, (1999), Fu y Liu (2003), Sun y Hickman (2005). La idea es acelerar los buses para saltar estaciones (una o más) para recuperar sus horarios pre-planificados después de la ocurrencia de un accidente o inesperado retardo. Esto permite reducir el tiempo de espera total de los pasajeros en las estaciones incluso cuando se agregan los negativos efectos de los tiempos de espera de los pasajeros que fueron saltados. En general la decisión de *stop-skipping* está determinada antes que los buses partan del terminal. A diferencia de Sun y Hickman (2005) quienes realizan la decisión de la acción de control una vez que el vehículo está en ruta.

Eberlein (1995) formula un modelo integrado el cual comprende acciones de control como *holding*, *deadheading* y *expressing*. Cortés *et al.*, (2010) y Sáez *et al.*, (2012) diseñaron y evaluaron una estrategia de control predictivo que también integra dos estrategias (*holding* y *stop-skipping*) para resolver un problema de transporte público con demanda de pasajeros incierta, obteniendo en línea la información del comportamiento del sistema. Similarmente en Sun y Hickman, (2005), la decisión de *stop-skipping* en su modelo es hecha en tiempo real, lo cual hace su estructura de trabajo más adaptable y sensible a los retardos en tiempo real.



## 4.2. Sistema de transporte público con transbordos

Con el fin de cumplir los objetivos propuestos en esta tesis, se plantea avanzar en la generalización del sistema de transporte analizado. Esto se logra considerando el estudio de dos rutas de buses conectadas por una estación de transbordo.

A continuación, se presenta las consideraciones técnicas más comunes encontradas en la literatura para resolver el problema de optimizar los indicadores de servicio en el estudio de un sistema de transporte público con estación de transbordo.

En algunas áreas metropolitanas el transporte público convencional no puede proveer un servicio directo debido a diferentes razones, como, no ser económicamente conveniente o tener densidades de demanda bajas. Luego es necesario que en algunos sistemas de transporte público se realicen transferencias de pasajeros. De ahí que el desarrollo de algún sistema coordinado puede reducir considerablemente el tiempo de viaje de los pasajeros, que se traduce, para el caso donde existan transferencias, en minimizar también la espera en las estaciones de transbordo.

Diferentes investigaciones postulan diversas maneras de optimizar las transferencias de pasajeros para determinados sistemas de transporte público.

Según Ting y Schonfeld, (2005), el problema de tener horarios coordinados en una red de transporte público con transbordo es la posibilidad que los vehículos no lleguen a la hora estipulada debido a la demanda estocástica y las condiciones de tráfico, por lo que establecer horarios de transferencia se torna muy complicado. Luego es necesario incluir factores de seguridad llamados “tiempos *slacks*”, que corresponden a lapsos extras que permanecen los buses en el paradero de transbordo y que reducen la probabilidad de perder conexiones. La adición de este tiempo *slack* trae consigo costos de operación mayores, además de retrasos innecesarios para algunos pasajeros (Lee y Schonfeld, 1991). Asimismo, los estudios de Désilets y Rousseau (1992) y publicaciones de Bookbinder y Désilets (1992) establecen que estos horarios de transferencia con tiempos *slacks* son

inapropiados para redes de transporte grandes y con transferencias descentralizadas, por lo que se puede concluir que es muy importante realizar transbordos en sistemas que cumplan con determinadas características. También Ting y Schonfeld, (2005) establecen los tiempos de transferencia para minimizar el costo total de la operación, optimizando tanto los recorridos como los tiempos *slacks*.

En el trabajo de Bookbinder y Désilets, (1992), se asume dada la red de transporte público con transbordo y además se asume el horario de recorrido es fijo para cada línea. En este tipo de esquemas hay básicamente dos maneras de reducir el tiempo de espera para transferencias. La primera es aumentando el número de buses y choferes requeridos para operar estas rutas. La segunda alternativa es la transferencia coordinada, que incluye dos posibilidades:

- Realizar una estrategia basada en viajes planeados para encontrarse en ciertos puntos de transferencia, determinando periodos de contacto. También se incorpora puntos focales para asegurar que los contactos ocurran incluso si alguno de los buses está atrasado. Este método resulta inapropiado para transbordos descentralizados.
- Una estrategia que no considera encuentros en puntos de transferencia sino, que las salidas del terminal sean organizadas bajo la idea de minimizar alguna función que evalúe la inconveniencia del transbordo. La gran ventaja de este método es que no es necesario asegurar el contacto de los buses; lo cual hace que el número requerido de buses no sea necesariamente afectado. Por lo tanto, los puntos importantes a considerar para la problemática del transbordo son: 1) Definir función objetivo que refleje la inconveniencia del transbordo dado un horario. 2) Encontrar un algoritmo que minimice esta función objetivo.

También Lee y Schonfeld, (1991), desarrollan un modelo sobre la base de establecer tiempos óptimos de espera para los pasajeros. Así, los costos totales del sistema pueden ser reducidos si se da un cierto tiempo "*slack*" en los horarios de vehículos, para disminuir la

probabilidad de perder conexiones. Estos tiempos *slacks* son tiempos extras de espera de los buses en los paraderos, si es que llegan antes del horario estipulado y los horarios de transferencia son establecidos previamente. Se formulan y se utilizan las funciones de costo de transferencia para determinar el tiempo *slack* óptimo para estos sistemas simples, donde las transferencias son entre una ruta de autobús y una línea del tren.

En el trabajo de Lee y Schonfeld, (1991), un tren o un recorrido con una frecuencia muy baja en comparación con otro recorrido de frecuencia mayor, posee una varianza de la llegada casi nula, lo que implica que el pasajero del tren espera mucho menos debido a la alta frecuencia con que pasa su correspondiente bus de transbordo, luego es conveniente realizar *slacks* sólo en los tiempos de llegada de los buses. El primer modelo formulado asume que los trenes llegan exactamente en el horario estipulado, mientras que los buses llegan de acuerdo a posibles funciones de distribución (discreta, normal, etc.). El segundo modelo relaja la llegada de los trenes con una distribución de probabilidad cuya varianza es mucho menor que la varianza de las llegadas de los buses.

Para un enfoque estático, la función de costo típica asociada con las transferencias incluye tres componentes:

- Costo de horarios retrasados (*holding*)
- Conexiones perdidas de bus a tren.
- Conexiones perdidas de tren a bus.

Como se dijo anteriormente, dentro de los objetivos de la modelación, no se pretende optimizar funciones de costos que incluyan gastos de explotación u otros tipos de costos. Respecto al tipo de modelo propuesto, una modelación estática es conveniente si las distribuciones de llegada de los buses reflejan fielmente el comportamiento del sistema real, pero si ocurre alguna perturbación no considerada, los horarios establecidos no logran que el sistema se comporte de manera apropiada.

Otra forma de abordar este problema es determinando el tiempo óptimo de “*holding*” en estaciones de transferencia, es decir, estableciendo cuál es el tiempo que debe esperar un bus cuando existe transferencia, anticipándose a la llegada de pasajeros desde las otras líneas de conexión, como es el caso del trabajo desarrollado por Hall y Dessouky, (2001).

Los tiempos de *holding* pueden ser optimizados basándose en la probabilidad de distribución de las demoras en el horario. El planteamiento de Hall y Dessousky, (2001) difiere del trabajo realizado por Lee y Schonfield, (1991) ya que estos últimos optimizan simultáneamente rutas y márgenes de seguridad en tiempos en los que se producen las conexiones, mientras que en Hall y Dessousky, (2001) sólo se optimizan *holding* tiempos en vez de rutas. Sin embargo, también constituye una modelación estática que para sistemas muy variantes o con muchas perturbaciones no resulta adecuada. Dado que un enfoque estático no es la mejor solución a este problema, una manera más adecuada de abordar el problema es mediante una modelación dinámica.

Un interesante trabajo es el realizado por Bookbinder y Désilets, (1992) quienes establecen una función de “desutilidad” que considera el tiempo que los pasajeros deben esperar en las estaciones de transferencia hasta que llega su conexión. Es decir evalúa la inconveniencia de tiempos de viaje aleatorios, de una conexión de un viaje de un punto F moviéndose desde una línea alimentadora  $L_F$  a una recibidora  $L_R$ .

El promedio de desutilidad mide la inconveniencia de una transferencia. Sea  $T$  el conjunto de horarios  $T = (t_1, \dots, t_N)$  de los tiempos de salida de cada ruta que pretende hacer transferencia de pasajeros. Se definen las posibles conexiones que pueden ocurrir en  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Para cada conexión  $k$ ,  $D_k(T)$  es el promedio de desutilidad. Sea  $n_k$  el flujo de transferencia, es decir, el número de pasajeros haciendo la conexión. Por lo tanto, la función a minimizar es:

$$C(T) = \sum_{k=1}^N n_k D_k(T) \quad (3.7)$$

donde hay que elegir el horario  $T$  que minimice esta función.

Por un algoritmo recursivo de búsqueda decreciente en  $C(T)$  se puede encontrar un  $T^*$  óptimo.

### 4.3 Control dinámico de un sistema de transporte

En general los trabajos presentados implican la creación de tablas de frecuencias o tiempos de *headway* para el sistema de transporte público. Luego, se intenta es hacer cumplir con la característica de los itinerarios por instrucciones directas a los conductores. En el trabajo desarrollado por Yinghui y Xilin, (2010) se plantea un enfoque diferente al que generalmente se utiliza en la solución de un control del sistema de transporte. Este trabajo hace uso del formalismo de la teoría de control de sistemas. Esto implica suponer que el sistema de transporte se puede dividir en  $M$  subsistemas interrelacionados, donde para su  $i$ -ésimo subsistema posee un vector de estado  $X_i(k)$  de dimensión  $n_i$  y un administrador de servicios dado por el vector de control  $U_i(k)$  de dimensión  $m_i$ , esto es que el  $k$ -ésimo instante el vector de estado puede ser descrito por:

$$X_i^T(k) = \{x_{i1}(k), x_{i1}(k), \dots, x_{i1}(k)\} \quad (3.8)$$

$$U_i^T(k) = \{u_{i1}(k), u_{i1}(k), \dots, u_{i1}(k)\} \quad (3.9)$$

donde la estructura de la ecuación de estado del  $i$ -ésimo subsistema de buses (puede ser una ruta en particular) es:

$$X_i(k+1) = A_i(k)X(k) + B_i(k)U_i(k) + C_i(k)R_i(k) + W_i(k) \quad (3.10)$$

con  $W_i(k)$  vector de ruido aleatorio,  $R_i(k)$  es el vector de coordinación entre los sistemas dado por

$$R_i(k) = \sum_{j=1}^M \{D_{ij}U_j(k) + G_{ij}X_j(k)\} \quad (3.11)$$

donde  $D_{ij}$  y  $G_{ij}$  son matrices constantes, mientras que  $A_i(k)$ ,  $B_i(k)$  y  $C_i(k)$  son matrices de coeficientes variables del subsistema  $i$ . Por lo tanto la estructura completa del sistema de transporte es la siguiente

$$X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)U(k) + C(k)R(k) + W(k) \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} X^T(t) &= \{X_1^T(t), X_2^T(t), \dots, X_M^T(t)\} \\ U^T(t) &= \{U_1^T(t), U_2^T(t), \dots, U_M^T(t)\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

son respectivamente la representación del vector de estado  $n$ -adimensional del sistema de transporte público, y el vector de control  $m$ -adimensional, con

$$n = \sum_{j=1}^M n_j, \quad m = \sum_{j=1}^M m_j \quad (3.14)$$

podemos escribir

$$X_i(k+1) = A_i(k)X(k) + B_i(k)U_i(k) + C_i(k) \sum_{j=1}^M D_{ij}U_j(k) + C_i(k) \sum_{j=1}^M G_{ij}X_j(k) + W_i(k) \quad (3.15)$$

dados

$$\Phi^T(k) = \{X_1^T(k), \dots, X_M^T(k), U_1^T(k), \dots, U_M^T(k)\} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \Theta_i(k) &= \{C_i(k)G_{i1}, C_i(k)G_{i2}, \dots, C_i(k)G_{ii} + A(k), \dots, C_i(k)G_{iM}, \\ &C_i(k)D_{i1}, C_i(k)D_{i2}, \dots, C_i(k)D_{ii} + B_i(k) + B(k), \dots, C_i(k)D_{iM}\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

podemos expresar el sistema como

$$X_i(t+1) = \Theta_i(k)\Phi(k) + W_i(k) \quad (3.18)$$

donde  $\Theta_i(k)$  puede ser ajustado y escrito como el vector:

$$\Theta_i(k) = \{\Theta_{i1}^T(k), \Theta_{i2}^T(k), \dots, \Theta_{in_i}^T(k)\} \quad (3.19)$$

se tiene cada componente del estado como  $x_{ij}(k)$  para el sistema de transporte  $i$ -ésimo tenemos que

$$x_{ij}(t+1) = \theta_{ij}(k)\varphi(k) + w_{ij}(k) \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n_i \quad (3.20)$$

donde  $w_{ij}(k)$  es la correspondiente componente del ruido aleatorio.

Esta estructura permite realizar la identificación de todos los parámetros del sistema y así implementar un controlador del mismo con alguna técnica eficaz, por ejemplo, un controlador descentralizado por realimentación estado o directamente utilizar el modelo obtenido para un controlador predictivo descentralizado o distribuido. En particular, en esta tesis no es posible utilizar los modelos desarrollados del sistema de transporte directamente con el formalismo de la sección 4.3, ya que son fuertemente no lineales (modelos basados en sistemas híbridos, ver sección 2.2). Sin embargo, la simplicidad de la estructura presentada (ecuaciones 3.8 a 3.20) permiten anticipar un control más completo del sistema de transporte público donde poder analizar características básicas como estabilidad y robustez, tarea que se dejará como trabajo futuro.

#### **4.4. Simulador de un sistema de transporte público de una ruta**

La metodología desarrollada en esta tesis es primero aplicada a un red simple, correspondiendo a un corredor lineal de transporte público que típicamente cruza una gran región urbana. El sistema puede ser representado por una ruta circular de un solo sentido (ver Figura 1 abajo), con  $N$  estaciones de buses equidistantes  $N_b$  buses corren a lo largo del bucle, cada uno con una capacidad de transporte de pasajeros  $C$ . El corredor se supone que es aislado del resto del tráfico, y por lo tanto se puede suponer una velocidad fija media  $v$  de los buses en cada tramo entre las paradas consecutivas. Además, del número de buses  $N_b$ , la distancia total del corredor y la velocidad de circulación, podemos estimar el

tiempo total del ciclo de los buses (para completar el ciclo), que definen la frecuencia de diseño que ofrecen a los usuarios. Se supone que el operador tiene la tecnología para el control de los buses en tiempo real. El paradero 1 es la estación terminal de buses de la ruta, donde todos los pasajeros deben bajarse.

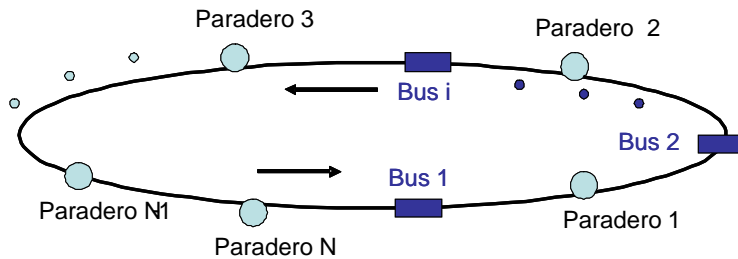


Figura 4.1: Representación del sistema de transporte público.

El operador determina las variables de diseño (frecuencia  $\bar{f}$  y tamaño  $Nb$  de la flota) con base en la información histórica de la demanda, a través de una matriz representativa de demanda para cada período modelado. Un método más complejo que incluye la predicción de la demanda futura (Cortés *et al.*, 2010; Sáez *et al.*, 2012) debe considerar esta información (junto con los datos de demanda de línea) para modelar el futuro la demanda de pasajeros y añadir la función de predicción en el régimen de control. Como se menciona en la sección anterior, una de las principales ventajas de los métodos que aquí se propone es la simplicidad, en el sentido de definir reglas sólo a partir de la información de la posición de los buses, lo que significa que la demanda no está directamente incorporada en el modelo, pero sí indirectamente a través de la trayectoria de los buses y cómo cambia con la evolución del sistema en el tiempo.

Para llevar a cabo las investigación propuesta, en ambiente de programación Matlab se implementó inicialmente un simulador del sistema de transporte público con una ruta cerrada 4000[m] con 10 paraderos y 6 buses. En el simulador, el tiempo evoluciona en términos de eventos, los cuales son definidos como los instantes en que los buses arriban a los paraderos. Para cada bus se confecciona una tabla de datos que acumula la información, para todos los eventos ocurridos en el sistema. Los datos recolectados son: los tiempos de



ocurrencia de los eventos, posición de bus en la ruta, carga, velocidad, acción de control aplicada al bus si corresponde y los destinos de cada pasajero que subió al bus. También para cada paradero se confeccionó una tabla que registra los eventos que en él acontecieron. Se detalla en dicha tabla: el tiempo de llegada del bus que ocasionó el evento en la parada, el número del bus, la carga inicial y final de pasajeros en la parada, el número de pasajeros que suben y los que bajan, las acciones de control aplicada y el tiempo de salida del bus del paradero. Por último, a partir de consideraciones de comportamiento estadístico estándar en un sistema de transporte público, se confeccionaron tablas de demandas para cada paradero, las que incluyen los tiempos de llegada de cada pasajero y su correspondiente destino.

#### **4.4.1. Intervalo de diseño**

Para realizar un control eficiente sobre un sistema de transporte, es necesario que la topología del sistema sea consistente, es decir, que la cantidad de paraderos y de buses sea la adecuada para satisfacer la demanda. Para determinar la flota óptima se debe encontrar un equilibrio entre la frecuencia de buses que es capaz de ofrecer el sistema y la demandada por los usuarios. La demanda de servicio se obtiene calculando la frecuencia de buses mínima que satisface la demanda máxima de pasajeros, para esto se necesita obtener el flujo entre paraderos.

Para un día cualquiera de servicio es posible construir una matriz Origen-Destino (Tabla 4.1).

Tabla 4.1: Ejemplo matriz de origen-destino (OD) para 10 paraderos.

		DESTINO									
		Par 1	Par 2	Par 3	Par 4	Par 5	Par 6	Par 7	Par 8	Par 9	Par 10
ORIGEN	Par 1	0	0	11	8	14	10	0	0	0	0
	Par 2	0	0	3	19	21	17	26	0	0	0
	Par 3	0	0	0	4	17	26	32	0	0	0
	Par 4	0	0	0	0	10	57	61	54	64	0
	Par 5	0	0	0	0	0	14	115	98	103	86
	Par 6	133	0	0	0	0	0	35	139	143	116
	Par 7	99	0	0	0	0	0	0	24	103	124
	Par 8	112	0	0	0	0	0	0	0	23	92
	Par 9	128	0	0	0	0	0	0	0	0	36
	Par 10	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Esta matriz resume la cantidad de pasajeros que abordan en cada paradero de origen, y llegan a un paradero de destino determinado, durante un intervalo de tiempo de dos horas. Por ejemplo, durante estas horas de simulación, hay 8 pasajeros que abordaron en el paradero 1 y descendieron en el paradero 4.

La simulación se realiza para un intervalo de dos horas por lo que se tendrá la acumulación de datos para estas dos horas.

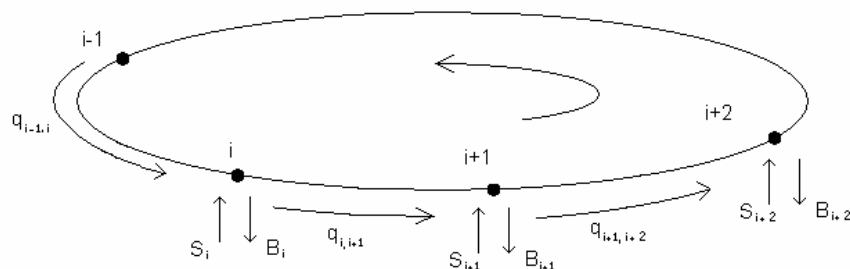


Figura 4.2: Flujos entre paraderos.

La Figura 4.2 muestra los flujos de pasajeros entre los paraderos. En el paradero  $i$  suben  $S_i$  pasajeros a los buses y bajan  $B_i$  pasajeros de los buses en una unidad de tiempo [u.t.]. Entre el paradero  $i$  y el paradero  $i+1$  existe un flujo  $q_{i,i+1}$  medido en  $[\frac{pas}{u.t.}]$ , que es la

cantidad total de pasajeros que recorren la distancia entre el paradero  $i$  y el  $i+1$  durante el tiempo que se registraron los datos y se obtiene de la siguiente manera.

$$q_{i,i+1} = q_{i-1,i} + S_i - B_i \quad (3.21)$$

Los valores de  $S_i$  son fáciles de obtener y corresponden a la suma horizontal de los valores de las filas de origen en la matriz OD (suma sobre las filas). Es decir,  $S_i$  corresponde al total de pasajeros que suben en algún bus en el paradero  $i$  durante el tiempo registrado [u.t.]. Por otro lado,  $B_i$  corresponde al total de pasajeros que bajan de algún bus en el paradero  $i$  durante el tiempo registrado [u.t.].

Con esta información es posible construir un histograma del flujo acumulado de pasajeros durante la simulación de dos horas de tiempo real (Figura 3.10), del cual se desprende que el tramo mas cargado es el comprendido entre los paraderos 7 y 8.

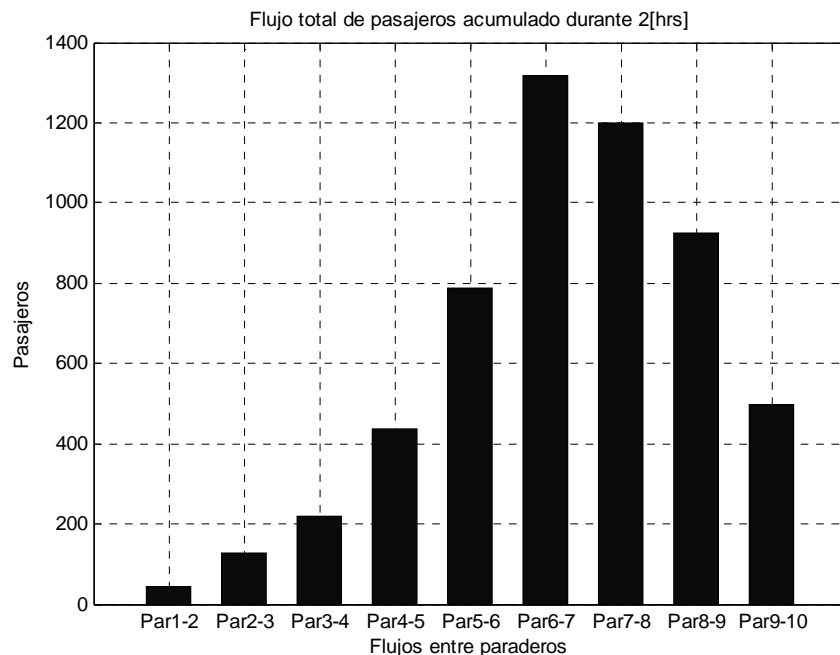


Figura.4.3: Demanda acumulada de pasajeros durante 2 horas de simulación

La frecuencia que satisface la demanda depende de la carga máxima de los buses  $L_{\max}$   $\left[ \frac{pas}{bus} \right]$  y del flujo máximo entre paraderos. Esta frecuencia debe satisfacer el tramo más cargado y se calcula a través de la siguiente ecuación.

$$f_d = \frac{q_{i,i+1} \max}{L_{\max}} \left[ \frac{bus}{u.t.} \right] \quad (3.22)$$

Con lo anterior se tiene el intervalo de diseño.

$$H_d = \frac{1}{f_d} \left[ \frac{u.t.}{bus} \right] \quad (3.23)$$

Este intervalo quiere decir que cada  $H_d$  unidades de tiempo  $\left[ \frac{u.t.}{bus} \right]$  debe salir un bus desde un paradero determinado.

Utilizando la ecuación (3.22) de frecuencia demandada se tiene que la frecuencia mínima que requiere el sistema para satisfacer la demanda es de

$$f_d = \frac{1318}{72} \left[ \frac{bus}{u.t.} \right]$$

$$f_d = 18,3 \approx 19 \left[ \frac{bus}{u.t.} \right]$$

Ahora bien como el registro de datos se realizó para dos horas de tiempo real la frecuencia demandada por hora es

$$f_d = \frac{19}{2} \rightarrow 10 \left[ \frac{bus}{hora} \right]$$

Con esto se obtiene un intervalo demandado por los usuarios de

$$H_d = 6 \left[ \frac{\text{min}}{\text{bus}} \right]$$

Finalmente la oferta de servicio corresponde a la frecuencia ofrecida por el operador y depende directamente del tamaño de la flota que opera en el sistema. Se tiene una cantidad de  $b$  buses,  $N$  paraderos y  $S$  semáforos.

Al ubicarse en un paradero fijo, la frecuencia ofrecida por el sistema será determinada mediante la ecuación (3.24).

$$f_{of} = \frac{b}{t_c} \left[ \frac{\text{bus}}{\text{u.t.}} \right] \quad (3.24)$$

Donde  $t_c$  corresponde al tiempo de ciclo, que es el tiempo total que demora un bus en dar una vuelta completa por el sistema. Este tiempo es, por lo tanto, la sumatoria del tiempo total de viaje de un bus más los tiempos de detención en paraderos y semáforos.

$$t_c = t_{viaje} + t_{paraderos} + t_{semáforos} \quad (3.25)$$

El circuito tiene un largo  $D$  [m] y los buses viajan a una velocidad constante e igual para todos los buses  $v$  [ $\frac{m}{u.t.}$ ], por lo que un bus demorará en recorrer el circuito completo:

$$t_{viaje} = \frac{D}{v} \text{ [u.t.]} \quad (3.26)$$

Los tiempos de detención de los buses en los paraderos se obtienen mediante:

$$t_{paraderos} = \sum_{j=1}^N t_{det j} \quad (3.27)$$

Donde  $t_{\det j}$  es el tiempo de detención del bus en el paradero  $j$  medido en  $[u.t.]$ . De manera análoga se tiene para los semáforos

$$t_{\text{semáforos}} = \sum_{s=1}^S t_{\det s} \quad (3.28)$$

Análogamente,  $t_{\det s}$  es el tiempo de detención del bus en el semáforo  $s$  medido en  $[u.t.]$ .

Finalmente el intervalo ofertado de servicio  $H_o$  viene dado por

$$H_{of} = \frac{1}{f_{of}} \left[ \frac{u.t.}{bus} \right] \quad (3.29)$$

Reemplazando,

$$H_{of} = \frac{t_c}{b} = \frac{t_{\text{viaje}} + t_{\text{paraderos}} + t_{\text{semáforos}}}{b} \left[ \frac{u.t.}{bus} \right] \quad (3.30)$$

El tiempo de ciclo  $t_c$  depende de la demanda en los paraderos y del tamaño de flota, por lo que la determinación de este valor esta sujeta a la demanda acumulada en paraderos.

Así, es necesario escoger *a priori* el tamaño de flota  $b$  para así poder determinar efectivamente los tiempos de detención en paraderos.

Por ejemplo, para una demanda alta en paraderos, los tiempos de detención en paradero  $t_{\det j}$  serán más grandes debido a la mayor cantidad de pasajeros transfiriendo. Por el contrario, si la demanda acumulada es pequeña, los tiempos de detención serán menores.

Por lo tanto es necesario generar una recursión para obtener este equilibrio entre la demanda ofrecida y la demandada.

La flota que debe operar en sistema debe ser tal que satisfaga la demanda máxima, que fue determinada en el punto anterior. Por lo tanto debe ofrecer un intervalo de servicio  $H_o$  mayor o igual al máximo demandado por los usuarios.

$$H_o \geq H_d \left[ \frac{u.t.}{bus} \right] \quad (3.31)$$

Dado que se tiene una demanda de pasajeros determinada por las tasas de llegada de éstos a los paraderos  $\lambda_i$ , la variable a optimizar para satisfacer la condición de la ecuación (3.31) corresponde al tamaño de flota  $b$ . Para lograr esta condición es necesario realizar una recursión que itere desde una condición inicial de tamaño de flota  $b_0$ .

Así, se simula el sistema sin control, con lo que se obtiene un tiempo de ciclo  $t_{c_0}$  inicial. Con esto tiempo se obtiene un intervalo ofrecido inicial  $H_{of_0} \left[ \frac{u.t.}{bus} \right]$ . A continuación se compara este valor con el intervalo demandado  $H_d \left[ \frac{u.t.}{bus} \right]$ . De no cumplirse (3.34) se actualiza la flota según:

$$b_{i+1} = b_i + 1 [bus] \quad (3.32)$$

Se itera nuevamente hasta cumplir la condición (3.34), se detiene la iteración y se selecciona el tamaño de flota  $b_{i+1}$ , éste será el número de buses óptimo para operar el sistema. El diagrama de bloques de la Figura 3.11 resume el algoritmo.

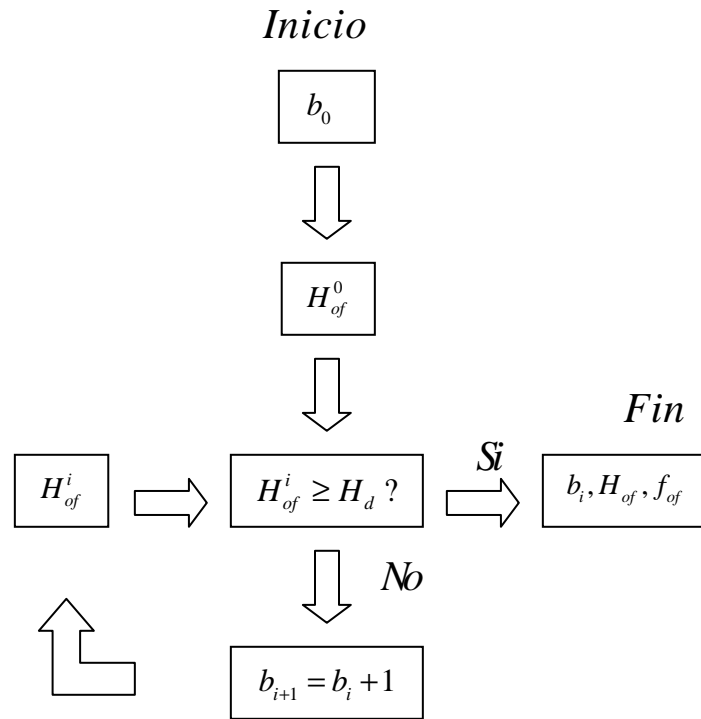


Figura 4.4: Esquema iteración determinación flota de operación

El esquema resume el funcionamiento del algoritmo implementado, se inicializa el sistema con una flota base adecuada  $b_0$ , el cual genera un intervalo  $H_{of0}$  ofrecido de acuerdo al desarrollo de la simulación sin control, por lo tanto, dependerá de la demanda y de la topología del sistema (ver ecuación (3.27)). Este intervalo ofrecido es comparado con el intervalo  $H_d$ , que se obtiene a través de la demanda de servicio, o sea, determinando el flujo máximo (ver ecuación (3.21)). Ambos intervalos son comparados, si coinciden o el intervalo ofrecido es mayor al demandado, el algoritmo se detiene obteniéndose la flota  $b$  y el intervalo  $\bar{H}$  de diseño, si no, se le suma 1 a la flota y se vuelve a recalcular el intervalo ofrecido hasta cumplir la condición 3.34.



## 4.5. Simulador de un sistema de transporte público con transbordos

El sistema se compone de dos líneas de buses, cada una similar a la descrita en la sección 4.2. Además, se incluye una estación de transbordo que permite una interacción del flujo de pasajeros entre estos dos sistemas. La red se presenta en la Figura 4.5, con dos trayectorias de viaje, la achurada representa la trayectoria de los usuarios que se mantienen en la ruta inicial y la ruta continua representa la trayectoria de los pasajeros que pretenden realizar un transbordo, todo lo indicado desde el punto de la ruta R. Las dos rutas cerradas R y R' son de 4000[m] con 10 paraderos y 6 buses cada una, conectadas por una estación de transbordo. Para cada bus de cada ruta se confecciona una tabla de datos que acumula la información generada en cada evento, posición del bus en la ruta, carga, velocidad, acción de control aplicada al bus si corresponde y los destinos de cada pasajero que subió al bus. Además para cada paradero se confeccionó una tabla que registra los eventos que en él acontecieron. Se detalla en dicha tabla: el tiempo de llegada del bus que ocasionó el evento en la parada, el número del bus, la carga inicial y final de pasajeros en la parada, el número de pasajeros que suben y los que bajan, las acciones de control aplicada y el tiempo de salida del bus del paradero. Por último, a partir de consideraciones de comportamiento estadístico estándar en un sistema de transporte público, se confeccionaron tablas de demandas para cada paradero, las que incluyen los tiempos de llegada de cada pasajero, si transborda o no y su destino. Esta estructura es generalizada en el capítulo 9 para más rutas.

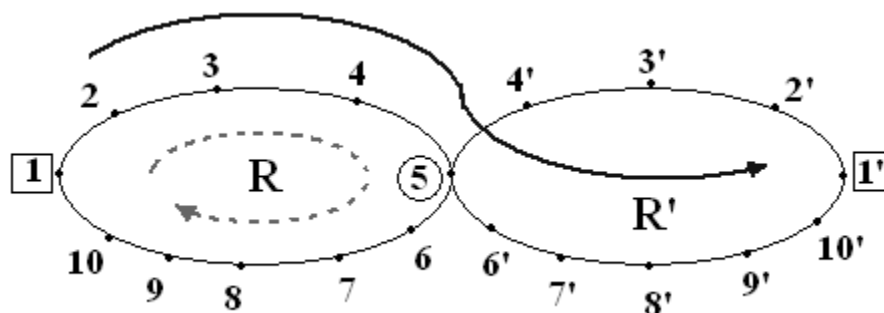


Figura 4.5: Sistema con estación de transbordo

## 4.6. Discusión

De todos los esquemas de modelamiento y control de los sistemas de transporte público presentados, los trabajos de Bookbinder y Désilets (1992) y el de Yinghui Xilin, (2010) presentan las características adecuadas para aplicarlos en el desarrollo de este trabajo. En particular el trabajo de Bookbinder y Désilets (1992) fundamenta parte del sistema de control de transbordo diseñado en el capítulo 9, ya que en este trabajo, se establece una función de “desutilidad” que considera el tiempo que los pasajeros deben esperar en las estaciones de transferencia hasta que llega su conexión. Es decir evalúa la inconveniencia al tener tiempos de viaje aleatorios, en la conexión de un viaje desde un punto determinado moviéndose entre una línea alimentadora a una línea recibidora (ver sección 9.1.1).

Así mismo, el trabajo de Yinghui, (2010) entrega una idea básica del formalismo adecuado para describir el sistema de control generalizado para un sistema de transportes con varias rutas y estaciones de transbordo. En particular, en esta tesis no es posible utilizar los modelos desarrollados del sistema de transporte directamente con el formalismo de la sección 4.3, ya que son fuertemente no lineales (modelos basados en sistemas híbridos, ver sección 2.2). Sin embargo, la simplicidad de la estructura presentada (ecuaciones 3.8 a 3.20) permiten anticipar un control más completo del sistema de transporte público donde poder analizar características básicas como estabilidad y robustez, tarea que se dejará como trabajo futuro.

En el capítulo siguiente se plantea el primero de los controladores diseñados aplicados a un sistema de transporte público, basados en la teoría de los conjuntos difusos.

# Capítulo V

## Estrategia de control difuso para un sistema de transporte público de una ruta por ubicaciones relativas de los buses

### 5.1. Estrategia de control basadas en sistemas difusos

El control de un sistema de transporte de público como muchos sistemas de gran complejidad, se basa en general en el conocimiento experto acumulado por el operador. Luego, la lógica difusa se presenta como la herramienta de trabajo ideal para generar reglas de decisión en el diseño e implementación de un controlador eficiente.

En este capítulo se propone una estrategia de control cuyo objetivo es mantener cada grupo de tres buses consecutivos ( $bus_{i-1}$ ,  $bus_i$ ,  $bus_{i+1}$ ) equidistante en un corredor, con el fin de regularizar el *headway* (tiempo que transcurre entre la pasada de dos buses consecutivos por un mismo paradero) y así minimizar el tiempo de espera total de los pasajeros en la

utilización el sistema. Esto se logra por medio de acciones de *holding* y acciones de *stop-skipping*. En términos simples, la estrategia de control experto consiste en adelantar el  $i$ -ésimo bus (aplicar *stop-skipping* al  $bus_i$ ) si está atrasado con respecto a la posición central de la trayectoria que une el bus precedente en la ruta  $bus_{i-1}$  y el próximo bus en la ruta  $bus_{i+1}$ ; en el otro caso el  $bus_i$  es atrasado con una acción de *holding*. Posteriormente este conocimiento para diseñar el sistema de control es descrito por medio de reglas concretas y difusas (ver anexo C).

En relación a las aplicaciones de lógica difusa en problemas de transporte, se destaca que esta técnica ha sido aplicada en su mayoría al control de tráfico. Por ejemplo, ver los trabajos de Lopez *et al.*, (2007); Xu *et al.*, (2008) y Paz y Peeta, (2008), donde en general se plantea fusificar las reglas de control de los ciclos de colores de los semáforos para mejorar la eficacia de su comportamiento (debemos notar que el tema de control de semáforos queda fuera del alcance de esta tesis). El modelo es basado en un algoritmo heurístico con aritmética y lógica difusa. En Chang y Thia, (1996), se presenta una estrategia difusa para la reprogramación en línea de trenes de transporte rápido después de un aumento repentino del flujo de pasajeros. Se considera dos sistemas expertos difusos. Los sistemas fusifican variables como la periodicidad (desviación con respecto a los horarios), el riesgo (separación entre trenes consecutivos) y la congestión (número de pasajeros en el andén de la estación). Debido a su simplicidad, la metodología propuesta es lo suficientemente rápida para la aplicación en línea. En Teodorovic y Luciz, (2005) se desarrolló un modelo para la sincronización de un sistema de transporte público con estaciones de transferencias, donde el número de pasajeros en la estación de transferencia es aproximadamente conocido. El modelo se basa en un sistema *fuzzy ant*, sistema que representa una combinación de un sistema de colonia de hormigas y la lógica difusa. También, Houngh *et al.*, (2006) desarrollaron, utilizando conceptos de lógica difusa, un sistema de apoyo a la toma de decisiones de las señales de tránsito. Esto es, determinar para cada vehículo de emergencia la prioridad de tránsito ante un semáforo. Recientemente Onifade *et al.*, (2010) emplearon técnicas de control basadas en lógica difusa para predecir las condiciones de tráfico y proponen un enfoque flexible para la mejor localización de los buses en la ruta. La técnica consiste en la fusificación de las variables de entrada sobre la

base de las condiciones de tráfico más importantes, tales como el día de la semana, hora del día, días festivos, condiciones meteorológicas y localización.

Con respecto a la sintonización de los parámetros de los controladores difusos, muchos enfoques han sido propuestos para la generación automática de reglas difusas y su ajuste a partir de datos numéricos. La mayoría de ellos utiliza los algoritmos evolutivos (Espinosa *et al.* 2004). En este trabajo, los algoritmos evolutivos se utilizaron para determinar el número de funciones de pertenencia de cada variable de entrada, y para ajustar la forma de cada función de pertenencia. Por lo tanto, estos métodos también pueden determinar el número de reglas difusas, el tipo de reglas difusas, y la estructura jerárquica de estas reglas. En el libro de Cordón *et al.*, (2001) se incluye los métodos más representativos para implementar algoritmos genéticos en el diseño de sistemas difusos. Orientado principalmente a la generación del número y la forma de las funciones de pertenencia. Esto es, a partir de números binarios se codifican los parámetros de la función de pertenencia. Asimismo, Teodorovic y Vukadinovic, (1998) presentan un enfoque de programación matemática difusa en el diseño de una red de transporte de una línea aérea mediante la programación lineal difusa. Además, en Teodorovic y Kikuchi, (1991) se realiza una aplicación de la lógica difusa al problema de ruteo de vehículos, cuando la demanda en los nodos es incierta.

Como se mencionó antes, el objetivo principal de este trabajo es el desarrollo de un sistema de control integrado en tiempo real, aplicado en un corredor de autobús que opere en bucle con una estación terminal en un extremo. Las estrategias utilizadas han sido *holding* y *stop-skipping*, y se aplican en el contexto de un sistema experto de control y un esquema de control basado en lógica difusa, ambas orientadas a la minimización del tiempo de espera de los pasajeros a través de la regularización de los intervalos entre buses consecutivos. Se establecen reglas heurísticas para *holding* y *stop-skipping*, también las reglas difusas para *holding*, *stop-skipping* y la integración de ambas. La principal incertidumbre que estamos considerando en el funcionamiento del sistema de transporte público es la demanda (que incluye los tiempos medios de llegada y los destinos por paradero). Aunque la demanda es una perturbación ambiental, en los modelos propuestos, estamos sólo considerando

información de la posición de los buses como entrada del sistema experto, para decidir una acción de control. Lo anterior simplifica en gran medida el requerimiento de información desde el sistema y la complejidad del algoritmo utilizado en línea. La demanda es indirectamente considerada en la determinación de la posición de los vehículos la cual cambia dependiendo de la intensidad de pasajeros que arriban a cada estación durante el periodo simulado. Mas aún, no hay una función objetivo implícita en este esquema; sin embargo la meta propuesta por el operador esta implícita en la lógica de las reglas de control, es decir hacia una regularización del *headways*, lo cual afecta positivamente a los pasajeros a través de una minimización del tiempo de espera.

Aunque se estudió una línea simple (sin conexión de buses), se identifica como la mayor contribución de este trabajo la simplicidad de los métodos propuestos en términos de aplicabilidad y complejidad computacional. Razón de peso para justificar la aplicación de dichos controladores en los sistemas reales, lo que es factible incluso si sólo los elementos básicos de la tecnología están disponibles (tecnología GPS y la comunicación en línea con el controlador). Se debe señalar, además, que la complejidad de los algoritmos propuestos no explota con el tamaño del problema, y por lo tanto se puede aplicar a corredores de buses de gran escala.

## 5.2. Estrategia de control propuesta

El principal objetivo de este trabajo es evaluar el desempeño de estrategias de control experto y difuso para regularizar el tiempo de *headway* entre las llegadas consecutivas de los buses a los paraderos. Para lograr este objetivo, las estrategias apuntan a mantener equidistantes a cada grupo de tres buses consecutivos. Entonces, se define un evento discreto  $k$  como la llegada del bus en cualquier parada. En la Figura 5.1, se representan la posición relativa de tres buses consecutivos  $i-1$  (bus precedente),  $i$  (bus actual),  $i+1$  (próximo bus). Se define  $x_{i-1}(k)$  como la posición del bus precedente  $bus_{i-1}$ ,  $x_i(k)$  la posición del bus actual  $bus_i$  y  $x_{i+1}(k)$  la posición del bus próximo  $bus_{i+1}$ , medida en el evento  $k$ . Se define una referencia como el punto medio (en la ruta) entre la posición del bus precedente

$bus_{i-1}$  y las posición del bus próximo  $bus_{i+1}$ . Para luego definir a  $d_i(k)$  como la distancia desde la posición del bus actual  $bus_i$  a esta referencia. Esto es:

$$d_i(k) = x_i(k) - \left( \frac{x_{i-1}(k) + x_{i+1}(k)}{2} \right) \quad (5.1)$$

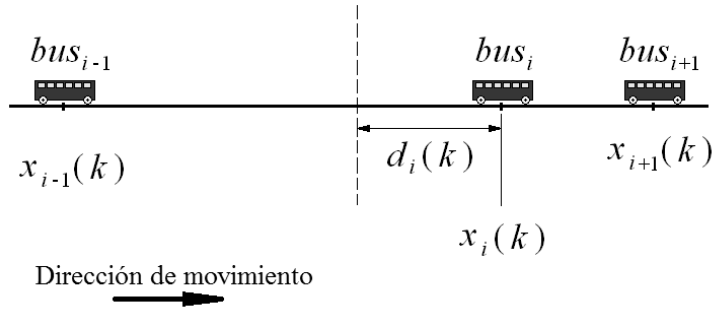


Figura 5.1: Posición relativa de tres buses consecutivos.

La Figura 5.2 muestra un diagrama genérico de lazo cerrado de una estrategia de control, en el que las acciones de control se activan cuando un autobús  $i$  llega a una parada (evento  $k$ ). Las variables manipuladas asociados con eventos  $k-1$  son *holding*  $h_i(k-1)$  y *stop-skipping*  $Su_i(k-1)$ . En esta aplicación, se optó por valores discretos para las acciones de control *holding*, es decir  $h_i(k)$  es una acción de *holding* en el bus  $i$  en el instante  $k$  donde  $h_i(k) = n_i \tau$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau > 0$ . Estas expresiones significan que los períodos de *holding* serán múltiplos de un paso fijo  $\tau$ . Este supuesto se aplica para simplificar la formulación y la aplicación del algoritmo de solución. En el ejemplo numérico,  $\tau = 30[s]$  y  $n_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

La razón para elegir lapsos de *holding* discretos (desde un punto de vista operativo), fue para facilitar a los choferes de los buses seguir las instrucciones del despachador central. Por otra parte, una diferencia, de menos de 30 segundos entre los distintos valores no es práctica, principalmente debido a las restricciones dadas por las condiciones reales de conducción (tráfico inesperado, flexibilidad para que el conductor comience al iniciar la marcha, la comunicación con la central, etc.)

Por otro lado, la acción de control *stop-skipping* es definida como  $Su_i(k-1) = 1$  cuando el bus salta una parada y  $Su_i(k-1) = 0$  en otro caso. Ambas variables manipuladas son excluyentes en cada parada de autobús; entonces, cuando una acción de control *stop-skipping* es decidida, la acción de *holding* no puede ser aplicada, y viceversa.

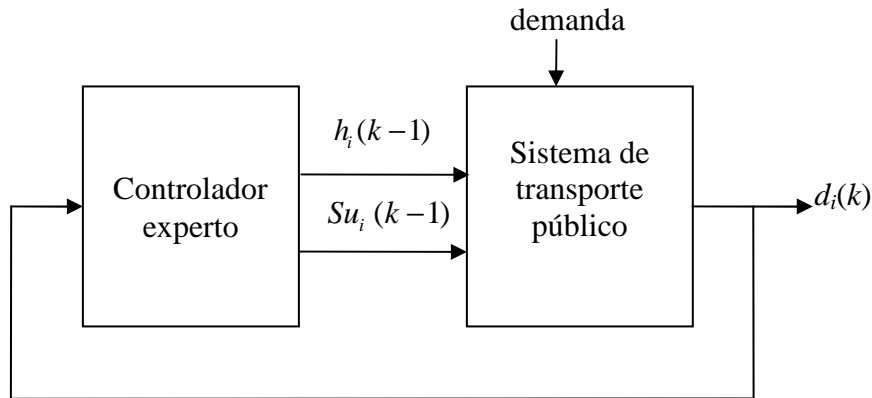


Figura 5.2: Lazo cerrado de control.

A continuación se presenta la descripción de las estrategias propuestas.

## 5.3. Descripción de las estrategias de control propuestas

### 5.3.1. Control experto

En términos simples, la estrategia de control experto consiste en hacer avanzar el  $bus_i$ , si esta atrasado con respecto a la posición central de la trayectoria entre el  $bus_{i-1}$  precedente el  $bus_{i+1}$  siguiente, de lo contrario, el  $bus_i$  es retrasado.

Luego se define el controlador experto como un conjunto de reglas heurísticas. Se asume que los buses se mueven a una velocidad media de  $v = 25$  [Km/h], esto es,  $6.94$  [m/s]. Por lo tanto el producto de la velocidad  $v$  y el lapso de *holding*  $\beta$ , es la distancia  $v\beta$  que un bus deja de recorrer para una acción de *holding* equivalente a  $\beta$ , esto es,  $208.2$  [m]. También si el bus esta retenido un lapso de  $2\beta$ , el bus deja de recorrer una distancia de



$2v\beta$ . Similarmente, si el bus es retenido un lapso de  $3\beta$ , el bus deja de recorrer una distancia de  $3v\beta$ .

Por lo tanto, si la acción de *holding* toma un valor  $\beta$ , podemos definir una vecindad de radio  $v\beta/2$  alrededor de  $d_i(k) = v\beta$  (es decir  $v\beta/2 < d_i(k) < 3v\beta/2$ ), donde la acción de control es aplicada.

Siguiendo el mismo razonamiento, dentro de un rango  $3v\beta/2 < d_i(k) < 5v\beta/2$ , la acción de control de *holding* toma un valor de  $2\beta$  ( $h_i(k) = 2\beta$ ) y para  $5v\beta/2 < d_i(k) < 7v\beta/2$  la acción de control de *holding* toma un valor de  $3\beta$  ( $h_i(k) = 3\beta$ ). Además, si  $-v\beta/2 < d_i(k) < v\beta/2$ , la acción de *holding* y *stop-skipping* no son necesarias ( $Su_i(k) = 0, h_i(k) = 0$ ). Finalmente, si  $d_i(k) < -v\beta/2$ , la acción de control recomendada será solamente *stop-skipping* ( $h_i = 0, Su_i(k) = 1$ ).

Así añadiendo los casos límites (igualdades), podemos formular el controlador experto (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas) como las siguientes cinco reglas heurísticas:

$$\text{Si } d_i(k) \leq -v\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 1 \quad (5.2a)$$

$$\text{Si } -v\beta/2 < d_i(k) \leq v\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 0 \quad (5.2b)$$

$$\text{Si } v\beta/2 < d_i(k) \leq 3v\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = \beta, Su_i(k) = 0 \quad (5.2c)$$

$$\text{Si } 3v\beta/2 < d_i(k) \leq 5v\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 2\beta, Su_i(k) = 0 \quad (5.2d)$$

$$\text{Si } 5v\beta/2 < d_i(k) \text{ entonces } h_i(k) = 3\beta, Su_i(k) = 0 \quad (5.2e)$$

A continuación, se describen estrategias de control basado en el conjunto de las normas anteriores.

### Esquema de control con *holding* basado en reglas

En este caso, la estrategia de control sólo realiza acciones de *holding*, por lo que la regla (5.2a) es descartada y la regla (5.2b) es modificada. Por lo tanto, se obtiene el siguiente conjunto de reglas:

$$\text{Si } d_i(k) \leq v\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 0 \quad (5.3a)$$

$$\text{Si } v\beta/2 < d_i(k) \leq 3v\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = \beta, Su_i(k) = 0 \quad (5.3b)$$

$$\text{Si } 3v\beta/2 < d_i(k) \leq 5v\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 2\beta, Su_i(k) = 0 \quad (5.3c)$$

$$\text{Si } 5v\beta/2 < d_i(k) \text{ entonces } h_i(k) = 3\beta, Su_i(k) = 0 \quad (5.3d)$$

### Esquema de control con *stop-skipping* basado en reglas.

En este caso, la estrategia de control sólo entrega acciones de *stop-skipping*. Esto es, tomamos sólo las dos primeras reglas heurísticas presentadas en el controlador experto (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas). Luego, el conjunto de reglas es:

$$\text{Si } d_i(k) \leq -v\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 1 \quad (5.4a)$$

$$\text{Si } -v\beta/2 < d_i(k) \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 0 \quad (5.4b)$$

### 5.3.2. Control difuso

En las mencionadas estrategias de control, las variables manipuladas llegan a ser una función discontinua de la posición  $d_i(k)$ , lo cual genera una abrupta variación en la decisión de *holding* cuando la posición  $d_i(k)$  esta cerca de su limite inferior o superior (es decir,  $v\beta/2, 3v\beta/2$  o  $5v\beta/2$ ). Para evitar el comportamiento discontinuo asociado con el controlador experto, se propone adaptar las reglas básicas usando técnicas de lógica difusa (Babuska, 1998).

## Esquema de control con *holding* basado en reglas difusas

En este caso, las reglas asociadas con la base de conocimiento difusa son las mismas que las descritas en la sección 5.3.2, pero con las variables  $d_i(k)$  y  $h_i(k)$  representadas por conjuntos difusos. Analíticamente,

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_0 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_0 \quad (5.6a)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_1 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_1 \quad (5.6b)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_2 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_2 \quad (5.6c)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_3 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_3 \quad (5.6d)$$

Las Figuras 5.3 y 5.4 muestran las funciones de pertenencia de  $d_i(k)$  y  $h_i(k)$  respectivamente, por los conjuntos difusos triangulares  $D_0, D_1, D_2, D_2$  y  $H_0, H_1, H_2, H_3$  (con  $\mu$  representando el grado de pertenencia de la correspondiente variable). El límite inferior de  $D_0$  y el límite superior de  $D_3$  son fijados para incluir todos los valores de la variable de salida. Las funciones de pertenencia son parametrizadas en términos del ancho medio correspondiente a la base del triángulo. Esto es:  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$  representan los parámetros asociados con las bases de los triángulos para la variable  $h_i(k)$ , como se presenta en las Figuras 5.3 y 5.4 Estas Figuras muestran la forma inicial de las funciones de pertenencia en línea continua y en línea segmentada la forma final ajustada, obtenida a partir de la sintonización de parámetros descrito posteriormente en la sección 5.3.3.

A diferencia de la estrategia de control basada en reglas descritas en la sección 5.3.2, la acción de *holding* toma valores continuos entre  $h_i(k) = 0$  y  $h_i(k) = 3\beta$ . Recordar que las acciones de control *stop-skipping* no son consideradas en este controlador ( $Su_i(k) = 0$ ).

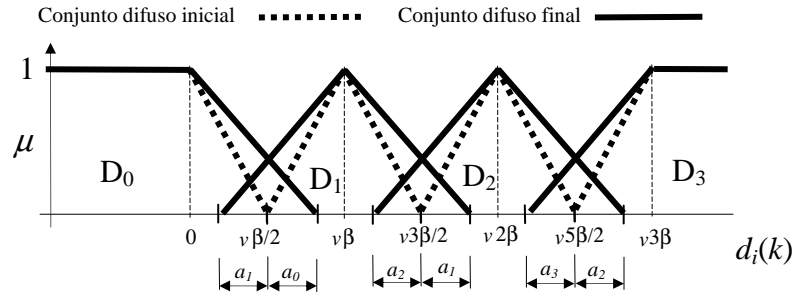


Figura 5.3: Función de pertenencia para la posición  $d_i(k)$ .

*Holding basado en reglas difusas.*

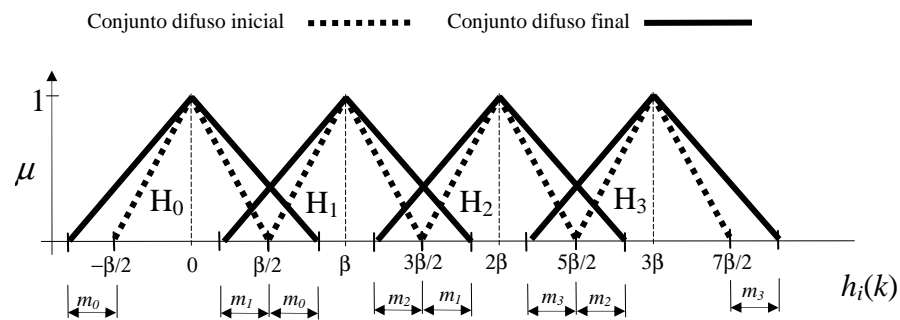


Figure 5.4: Función de pertenencia para el *holding*  $h_i(k)$ .

*Holding basado en reglas difusas.*

### Esquema de control con *stop-skipping* basado en reglas difusas.

Esta estrategia de control es derivada del esquema descrito en la sección 5.3.1 ecuación (5.4), pero formulada como un sistema experto difuso. Esto es,

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_5 \text{ entonces } Su_i(k) \text{ es } S_1 \quad (5.7a)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_6 \text{ entonces } Su_i(k) \text{ es } H_0 \quad (5.7b)$$

Las funciones de pertenencia para las variables  $d_i(k)$  y  $Su_i(k)$  para los conjuntos difusos  $D_5$ ,  $D_6$ ,  $S_1$ , y  $H_0$  se muestran en las Figuras 5.5 y 5.6.

Donde  $a_0$  y  $a_1$  representan los parámetros asociados con las bases de los triángulos para la variable  $d_i(k)$ , además  $m_0$  y  $m_1$  representa los parámetros asociados con las base de los triángulos para la variable  $Su_i(k)$ , como se muestra en las Figuras 5.5 y 5.6. También, el parámetro  $T_{Su}$  representa el tiempo ganado por aplicar *stop-skipping*. Además, esta Figura muestra la forma inicial de la función de pertenencia en línea continua y la forma ajustada en línea punteada, obtenidas de la sintonización de parámetros descrito posteriormente en la sección 5.3.3.

Tomar en cuenta que para este controlador, la acción de *holding* no es considerada ( $h_i(k) = 0$ ).

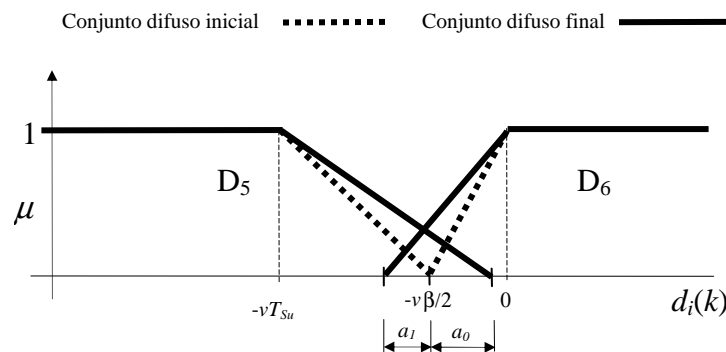


Figura 5.5: Función de pertenencia para la distancia  $d_i(k)$ .  
*Stop-skipping* basado en reglas difusas.

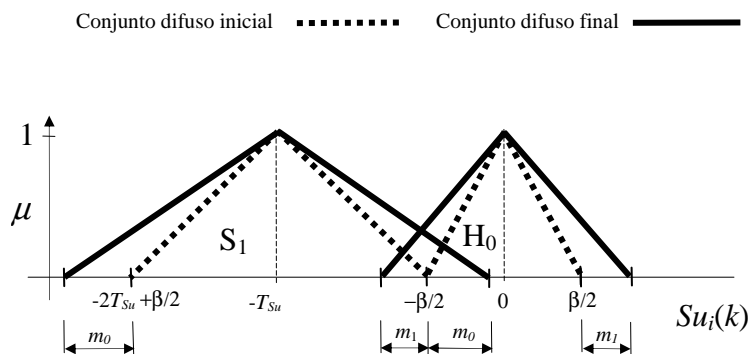


Figura 5.6: Función de pertenencia para *stop-skipping*  $Su_i(k)$ .  
*Stop-skipping* basado en reglas difusas.

## Esquema de control con *holding* y *stop-skipping* basado en reglas difusas.

En el caso integrado, las acciones de control *holding*  $h_i(k)$  y *stop-skipping*  $Su_i(k)$  son determinadas a partir de las siguientes reglas:

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_1 \text{ entonces } Su_i(k) \text{ es } S_1 \quad (5.8a)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_2 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_0 \quad (5.8b)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_3 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_1 \quad (5.8c)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_4 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_2 \quad (5.9d)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_5 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_3 \quad (5.9e)$$

Las funciones de pertenencia de las variables asociadas con los conjuntos difusos  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  y  $D_5$ , son presentadas en la Figura 5.7, respectivamente. Más aún, las funciones de pertenencia para los conjuntos difusos  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  y  $S_1$ , se presentan en la Figura 10. Donde  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  representan los parámetros asociados con las bases de los conjuntos difusos triangulares para la variable  $h_i(k)$ , como se muestra en la Figuras 5.7 y 5.8.

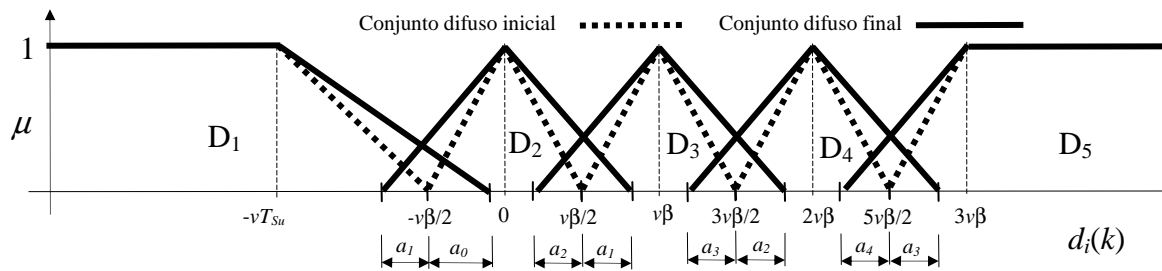


Figure 5.7: Funciones de pertenencia para la posición  $d_i(k)$ .

*Holding y stop-skipping basado en reglas difusas.*

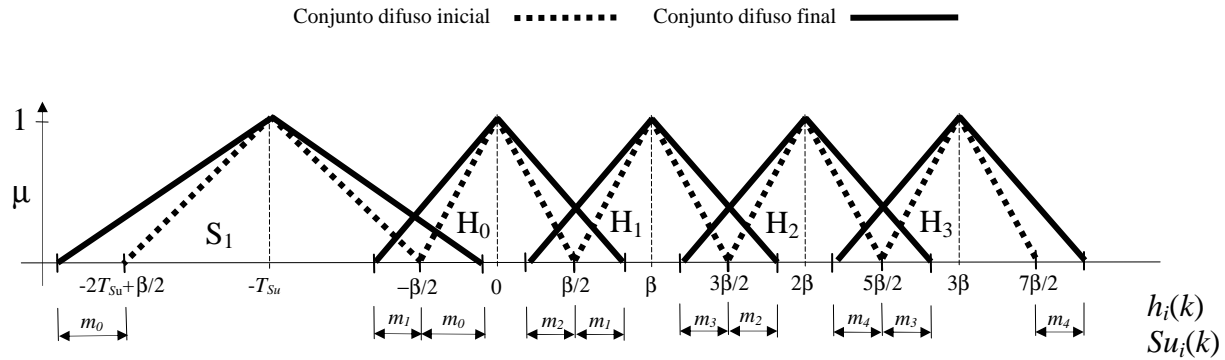


Figure 5.8: Funciones de pertenencia para la salida.  
 *Holding y stop-skipping basado en reglas difusas.*

En la siguiente sección se realizó una sintonización de los parámetros:  $T_{Su}$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  y  $m_4$ , que intervienen en la definición de los controladores difusos diseñados (ver Figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8), y un estudio sobre el número más práctico de paraderos donde aplicar la acción de *holding*. Con los parámetros sintonizados realizamos experimentos de simulación para cuantificar los beneficios, respecto al control de lazo abierto, de los controladores propuestos.

### 5.3.3. Sintonización de parámetros de los controladores difusos

Los parámetros de los controladores difusos propuestos se sintonizaron por medio de un algoritmo de optimización de enjambres de partículas. Se diseñó una serie de experimentos para determinar, en este escenario de simulaciones en particular, los valores óptimos de los parámetros mencionados, en términos de minimización del tiempo de espera promedio, estrechamente relacionado con la regularización de los intervalos. De hecho, ambos objetivos son equivalentes (Eberlein, 1995; Eberlein y Wilson 1999; Eberlein *et al.*, 2001).

Como describimos en la sección anterior 3.2.1, 3.2.2, y 3.2.3, *holding* basado en reglas difusas, *stop-skipping* basado en reglas difusas y la integración de *holding* y *stop-skipping* basado en reglas difusas, son parametrizados como se presenta en las Figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8.

Los parámetros para la estrategia de control con  *Holding*  basado en reglas difusas son:  $a_0, a_1, a_2, a_3$  variación simétrica de las bases de los conjuntos difusos de entrada respectivos,  $m_0, m_1, m_2, m_3$  variación simétrica de las bases de los conjuntos difusos de salida respectivos .

Los parámetros para la estrategia de control  *Stop-skipping*  basado en reglas difusas son:  $\beta$  tamaño inicial de base difusa en torno al origen de referencia,  $T_{sk}$  representa la mejor suposición hecha sobre el tiempo adelantado por una acción de  *skipping* ,  $a_0, a_1$  variación simétrica de las bases de los conjuntos difusos de entrada respectivos,  $m_0, m_1$  variación simétrica de las bases de los conjuntos difusos de salida respectivos.

Los parámetros para la estrategia de control con  *Holding y stop-skipping*  basado en reglas difusas son:  $T_{sk}$  representa la mejor suposición hecha sobre el tiempo adelantado por una acción de  *skipping* ,  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  variación simétrica de las bases de los conjuntos difusos de entrada respectivos,  $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4$  variación simétrica de las bases de los conjuntos difusos de salida respectivos.

### **Optimización por enjambre de partículas**

El enjambre de partículas ( *Particle Swarm Optimiser* , PSO) es un método de optimización basado en poblaciones inicialmente propuesto por Kennedy y Eberhart (1995). Una de las características más atractivas del PSO es que en su implementación no requiere la información del gradiente de la función a optimizar. Este puede ser usado para resolver una gran gama de problemas de optimización; algunas aplicaciones incluyen entrenamiento de redes neuronales y minimización de funciones (Eberhart and Hu, 1999).

El algoritmo PSO original (Kennedy y Eberhart, 1995) considera que cada partícula individual  $i$  tiene las siguientes propiedades: La posición actual en el espacio de búsqueda  $\vec{x}_i$ , la velocidad actual  $\vec{v}_i$ , y la mejor posición personal alguna vez obtenida  $\vec{y}_i$  esto es, donde la partícula  $i$  tuvo el mejor valor determinado por una función objetivo  $f$  en el



espacio de búsqueda. También, dentro de todas las mejores posiciones personales de las partículas  $\bar{y}_i$  se selecciona la  $\bar{y}^*$  llamada la mejor posición global.

Las ecuaciones (10) y (11) definen como la mejor posición personal y global. Son actualizados respectivamente:

Esto es, para  $s$  partículas  $i \in [1, \dots, s]$ .

$$\bar{y}_i(t+1) = \begin{cases} \bar{y}_i(t) & \text{si } f(\bar{x}_i(t+1)) \geq f(\bar{y}_i(t)) \\ \bar{x}_i(t+1) & \text{si } f(\bar{x}_i(t+1)) < f(\bar{y}_i(t)) \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\bar{y}^*(t) \in \{\bar{y}_0(t), \bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_s(t)\} \text{ tal que} \quad (5.11)$$

$$f(\bar{y}^*(t)) = \min\{f(\bar{y}_0(t)), f(\bar{y}_1(t)), \dots, f(\bar{y}_s(t))\}$$

Para todas las dimensiones  $j \in 1, \dots, n$ , las variables  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$  y  $v_{i,j}$  son la posición actual, la mejor posición personal actual y la velocidad de la  $j^{\text{ésima}}$  dimensión de la  $i^{\text{ésima}}$  partícula respectivamente. Además dos secuencias aleatorias son usadas para representar la naturaleza estocástica del algoritmo  $r_1 \rightarrow U(0,1)$  y  $r_2 \rightarrow U(0,1)$ . Luego la velocidad actualizada es:

$$v_{i,j}(t+1) = wv_{i,j}(t) + c_1r_{1,j}(t)[y_{i,j}(t) - x_{i,j}(t)] + c_2r_{2,j}(t)[y_j^*(t) - x_{i,j}(t)] \quad (5.12)$$

Donde  $w$  es el peso de inercia, utilizada para el control de convergencia,  $c_1$  y  $c_2$  coeficientes de aceleración, utilizadas para controlar cuan lejos la partícula se mueve en una sola iteración.

La nueva velocidad es agregada a la posición actual de la partícula, para obtener la posición próxima.

$$\bar{x}_i(t+1) = \bar{x}_i(t) + \bar{v}_i(t+1) \quad (5.13)$$

Toda componente del vector velocidad  $v_i$  debe estar acotada, luego debe pertenecer al intervalo  $[-v_{\max}, v_{\max}]$ , esto es, para reducir la probabilidad que la partícula deje el espacio de búsqueda. El valor de  $v_{\max}$  se escoge usualmente como  $k \cdot x_{\max}$  con  $0.1 \leq k \leq 1.0$ , donde  $x_{\max}$  representa el dominio de búsqueda.

El algoritmo PSO original no tiene asegurado propiedades de convergencia, como se muestra en van den Bergh y Engelbrecht (2002).

En este trabajo se utilizó un nuevo algoritmo PSO, llamado optimizador con enjambres de partículas con convergencia garantizada (*Guaranteed Convergence Particle Swarm Optimiser*, GCPSO, Kennedy y Eberhart, (1995) el cual asegura convergencia local evitando la convergencia prematura típica del algoritmo original (ver detalles anexo C).

Se aplicó el algoritmo de enjambres de partículas sintonizando los parámetros ya descritos para los tres controladores difusos diseñados. Para las simulaciones se consideró 30 días con distintas demandas.

La función objetivo para éste algoritmo fue:  $\sum_{d=1}^{Nd} \bar{T}_w(d)$  donde  $\bar{T}_w(d)$  es el tiempo de espera medio de todos los paraderos de la ruta para una simulación de 2 horas en el día  $d$ .

El algoritmo de enjambres de partículas consideró los siguientes parámetros:

Parámetros experimentales:

- Número de épocas: 20
- Tamaño de la población: 20

Parámetros comunes en la literatura

- Saturación de velocidad de la partícula (saturación): 50
- Constante de aceleración 1 (mejor influencia local) =2
- Constante de aceleración 2 (mejor influencia global) =2
- Peso de inercia inicial: 0.9
- Peso de inercia final: 0.4

Los resultados para los distintos controladores se presentan en la tabla 5.1. Los guiones indican que el parámetro no es válido en la correspondiente estrategia de control.

Tabla 5.1: Parámetros finales de los controladores difusos

Estrategias de control	$T_{Su}$ [s]	$a_0$ [m]	$a_1$ [m]	$a_2$ [m]	$a_3$ [m]	$a_4$ [m]	$m_0$ [s]	$m_1$ [s]	$m_2$ [s]	$m_3$ [s]	$m_4$ [s]
<i> Holding</i> basado en reglas	-	311	288	303	256	-	69	56	67	70	-
<i> Stop- skipping</i> basado en reglas difusas	77	301	298	-	-	-	65	76	-	-	-
<i> Holding y stop-skipping</i> basado en reglas difusas	61	268	73	234	249	281	56	48	51	58	53

Los parámetros presentados en la tabla 5.1, de acuerdo al controlador difuso correspondiente, fueron utilizados en distintos escenarios. Cuyos análisis se presenta a continuación.

## 5.4. Pruebas por simulación

Las estrategias de control descritas en 5.3.2 se aplican a un corredor de buses de 4000 [m] con 10 estaciones repartidas uniformemente por la ruta, con una flota de seis buses que circulan con una capacidad de 72 pasajeros. La simulación supone demanda dinámica incierta al llegar a las estaciones, que sigue un proceso de Poisson con tasas de demanda diferentes, diferenciados por la estación y período. El período de simulación total fue de 2 horas, con un tiempo de entrada en régimen (descartado para las estadísticas), de 15 minutos al principio de la simulación.

La parada de destino es elegido al azar entre las estaciones aguas abajo desde la estación donde el pasajero subió. La entrada y salida de cada pasajero al paradero son fijas y por lo tanto el tiempo total de entrada y salida será proporcional al número de pasajeros. La hora de embarque total corresponde con el máximo entre el tiempo de subida y los tiempos necesarios para bajar del vehículo (Sáez *et al.*, 2012).

#### **5.4.1. Selección de paraderos donde aplicar *holding* o *stop-skipping* usando un controlador experto**

Se realizó pruebas para definir el mejor número de paradas en las que amerite la aplicación de las acciones de control *holding* o *stop-skipping* (ambos basados en el controlador experto). Se realizaron 30 repeticiones para cada combinación de paraderos seleccionadas donde se retienen los buses o simplemente donde los buses no se detienen (paradero saltado). Por ejemplo si consideramos para el análisis 5 paradas de autobús, se realizaron 30 repeticiones, esto es, el número de formas posibles de elegir 5 paradas entre un total de 10 del corredor.

En la Figura 5.9 se muestra la media y el intervalo de confianza (con un 95% nivel de confianza) del tiempo de espera para los pasajeros, estrechamente relacionado con la variación de la distancia entre los buses consecutivos. La Figura 5.9 muestra el estudio necesario para definir que paradero saltar en el contexto de la estrategia *stop-skipping* basado en reglas (sección 5.3.1). Como era de esperar, en términos de tiempo de espera, las pruebas mostraron que se debe optar por esta estrategia en todos los paraderos con el fin de minimizar este indicador. Luego se decidió aplicar la acción de *stop-skipping* en todos los paraderos, lo cual es razonable ya que las condiciones de aplicación de saltos son muy restrictivas (nadie debe bajar en el paradero que se salta), luego no tiene sentido añadir una restricción adicional en el controlador.

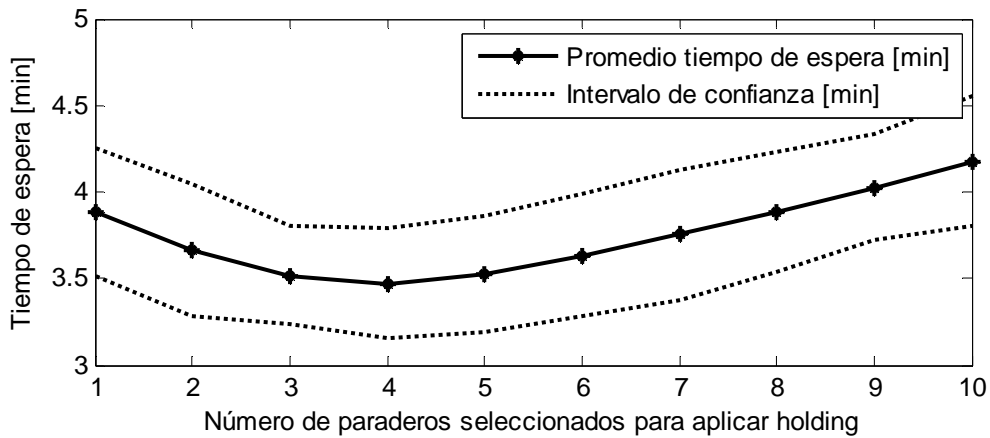


Figura 5.9: Estudio del conjunto de estaciones seleccionadas con *stop-skipping* basado en reglas

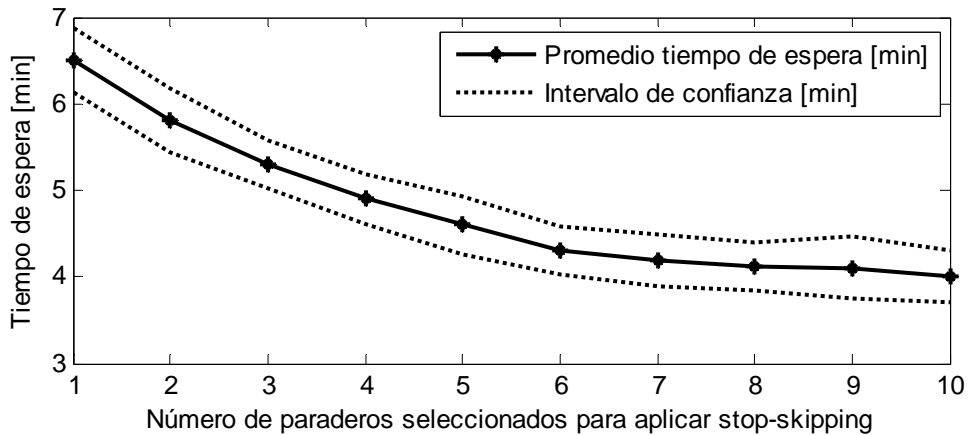


Figura 5.10: Estudio del conjunto de estaciones seleccionadas con *holding* y *stop-skipping* basado en reglas

En la Figura 5.10, se analiza el número de paradas donde realizar acciones de *holding*, en el contexto de la estrategia integrada de *holding* y *stop-skipping* basada en reglas (sección 3.1). Como muestra la Figura 5.10, la mejor opción es aplicar retenciones en 4 paraderos (la mejor combinación es efectiva para, 2, 3, 8 y 9). La reducción de lugares para retener los vehículos también tiene un objetivo práctico: la aplicación de retenciones a veces requiere dispositivos con infraestructura especialmente diseñada para dar cabida a los vehículos, que no tiene sentido que esté disponible en todas las paradas, y también evitar molestias a los pasajeros a bordo, que se retiene en cada parada.

## 5.4.2. Resultados de las estrategias propuestas

A partir de los parámetros correspondientes a los análisis descritos en las secciones 5.3.3 y 5.4.1, se realizó 30 repeticiones para cada estrategia diseñada en este trabajo, variando 30 veces el patrón de demanda. La tabla 5.2 muestra los resultados obtenidos en la simulación de las seis estrategias de control propuestas, así como la opción de lazo abierto con un tiempo de simulación de dos horas. Estos son los promedios del tiempo de espera y tiempo de viaje por pasajero. Además en la tabla 5.2, se añade un índice  $B$ , que cuantifica el beneficio asociado con el desempeño del controlador propuesto con respecto al sistema de lazo abierto, que viene dado por la siguiente expresión:

$$B[\%] = \frac{[\text{Tiempo de espera de lazo abierto}] - [\text{Tiempo de espera de la estrategia de control}]}{[\text{Tiempo de espera de lazo abierto}]} \cdot 100$$

De la tabla 5.2, se observa que los tiempos de viajes son similares para todos los controladores. El tiempo de espera, usando sólo la acción de control *holding*, fue reducido en un 38.89% con respecto a la estrategia de lazo abierto. Un adecuado funcionamiento representa el 45% de reducción en tiempo de espera, obtenido usando sólo la opción de control *stop-skipping* tanto en el caso de reglas determinísticas como difusas. Finalmente, el comportamiento mejor del 46.11% en tiempo de espera se logra al aplicar las estrategias conjuntas de *holding* y *stop-skipping*. Un máximo de 53.04% se obtiene cuando agregamos reglas difusas lo cual es predecible ya que las reglas difusas son más flexibles ante estructuras no lineales que un control experto puro, luego en aplicaciones (en este caso a través de la simulación) se debe lograr un mejor rendimiento que el conjunto de reglas deterministas. La razón de la mejora en términos de tiempo de viaje es básicamente debido a que las reglas están orientadas a regularizar las frecuencias, que tiene un impacto directo en el tiempo de espera, pero no en los tiempos de viaje. Además, el tiempo de viaje en tramos entre estaciones consecutivas es bastante estable, ya que consideramos un sistema en ejecución en corredores exclusivos. En el caso, de un tráfico mixto, las normas deben ser modificadas con el fin de agregar el efecto de tiempo de viaje y, en tal caso, así obtener alguna reducción para esta componente.

Tabla 5.2. Promedio y desviación estándar del tiempo de espera y tiempo de viaje por pasajero y el cómputo del tiempo.

Estrategias de control	Tiempo de espera [min]			Tiempo de viaje [min]		Tiempo de cómputo promedio de 30 días [s]
	Media	Desv.	B [%]	Media	Desv. [min]	
Lazo abierto	7.07	1.01	-	4.25	0.16	35.6
<i> Holding </i> basado en reglas	5.41	0.51	23.47	4.29	0.18	44.3
<i> Holding </i> basado en reglas difusas	4.32	0.44	38.89	4.83	0.13	49.0
<i> Stop-skipping </i> basado en reglas	3.90	0.36	44.83	4.39	0.10	43.1
<i> Stop-skipping </i> basado en reglas difusas	3.82	0.29	45.96	4.40	0.11	48.5
<i> Holding and stop-skipping </i> basado en reglas	3.81	0.27	46.11	4.79	0.15	44.3
<i> Holding and stop-skipping </i> basado en reglas difusas	3.32	0.25	53.04	4.20	0.16	49.5

Los considerables beneficios de las estrategias en todos los casos se deben también a una calibración adecuada en la sintonización de los parámetros, como se muestra en la sección 5.4.1. Este procedimiento tiene que ser adaptado a las condiciones particulares del sistema a controlar.

El objetivo de cada conjunto de reglas implementadas es regularizar los intervalos de los buses. En la Figura 5.11, podemos apreciar gráficamente este efecto, lo que es causado por todos los beneficios en los tiempos de espera explicados anteriormente. La Figura 5.11 muestra la trayectoria de los buses (para una simulación representativa), teniendo en cuenta la opción de lazo cerrado (a), el control de expertos (b), y el control difuso (c), considerando la integración de *holding* y *stop-skipping* (en b y c). En la Figura 5.11 solamente se representó la mitad del tiempo final de simulación.

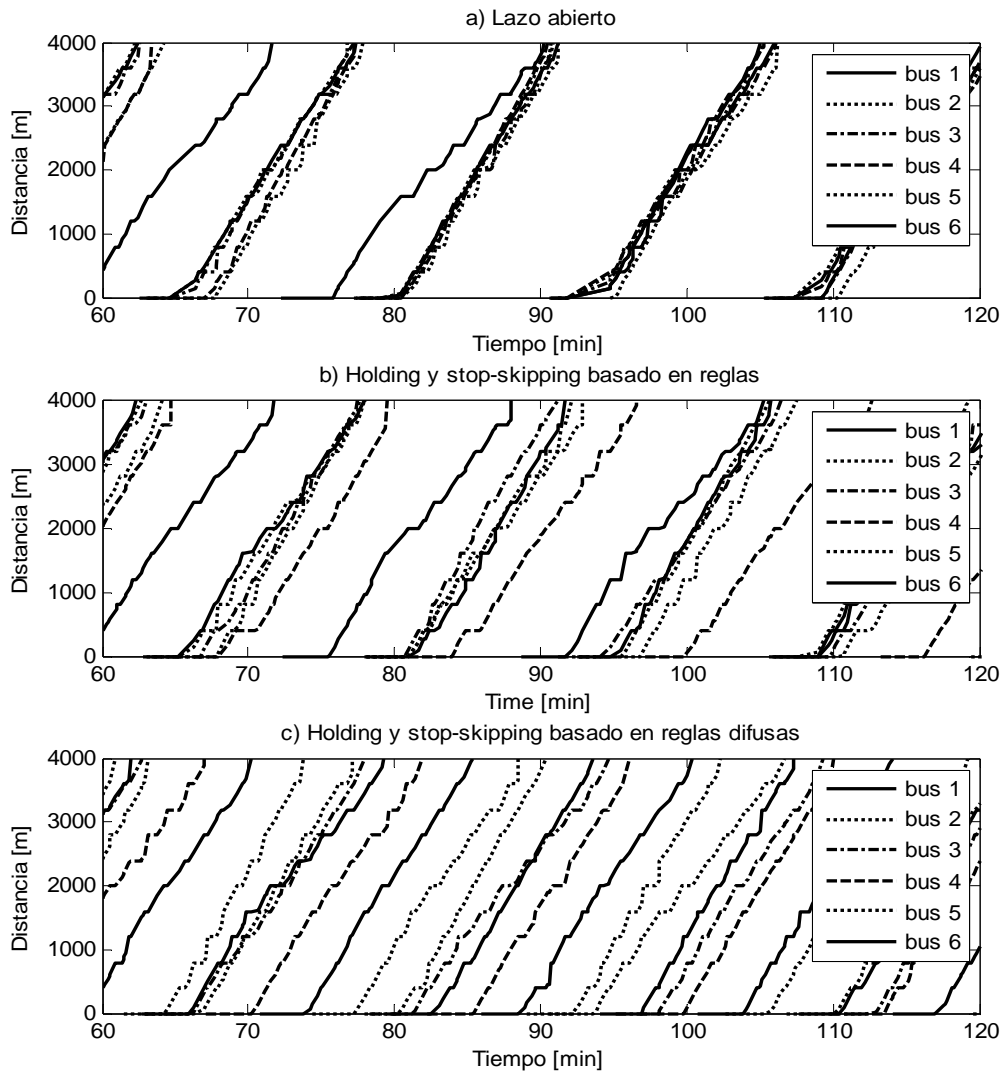


Figura 5.11: Trayectorias de los buses para las distintas estrategias de control.

De la Figura 5.11, se puede apreciar cómo la trayectoria de los buses es mucho más dispersa cuando se aplican las acciones de control, comenzando con una situación muy condensada, presentada en la Figura 5.11a (efecto que se denomina *bus bunching*), y llegando una buena regularidad de servicio, principalmente en la Figura 5.11c.



### 5.4.3. Sensibilidad del controlador difuso con respecto a la velocidad

La suposición de considerar la velocidad media de 25[km/h] con varianza pequeña o cero es bastante rígida. Luego estamos obligados a hacer un estudio para relajar esta suposición, e incluir un análisis del efecto de la varianza de la velocidad en los resultados del controlador, en particular en los tiempos de espera del sistema. Esto es, analizar la dependencia de este valor con respecto a la estructura del sistema controlado, en especial porque esta variación está relacionada con la existencia de tiempos muertos, aceleraciones y desaceleraciones a la llegada y salida de los paraderos, además de semáforos y cierta congestión a pesar de considerar que el bus transita por una vía exclusiva. Para considerar la varianza en la velocidad, en este apartado se realizó un estudio de la influencia en la imprecisión de la velocidad de los buses en el controlador diseñado. Por lo cual se realizaron simulaciones donde la imprecisión del valor de la velocidad iba en aumento. Esto es, la velocidad considerada en cada simulación, fue una variable aleatoria de media constante y varianza variable. En la Figura 5.12, para el controlador con mejor comportamiento (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas difusas), se graficó la variación del beneficio obtenido en tiempo de espera con respecto a la imprecisión de la medida de la velocidad. Se realizaron 30 simulaciones para cada aumento en un 5% de variancia de velocidad.

De la Figura 5.12 se deduce que para imprecisiones en la variancia de la velocidad  $\sigma_v$  menores al 20% el controlador mantiene el rendimiento superior al 50%. Para  $\sigma_v$  superior al 20% se detecta un deterioro acelerado del rendimiento.

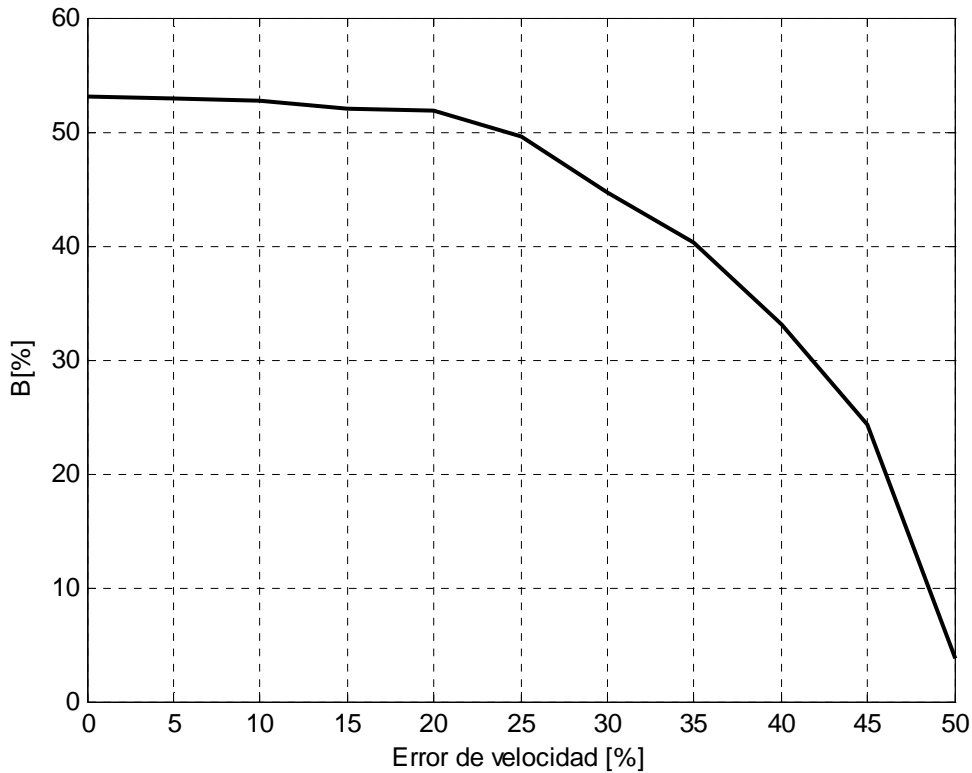


Figura 5.12: Beneficios con respecto al lazo abierto  
*holding* y *stop-skipping* basado en reglas.

Por lo tanto estos resultados permiten reconocer cierta robustez del controlador diseñado con respecto a las imprecisiones (desviaciones) moderadas de la medida de la velocidad (no superiores al 20%). Esto es consistente con la suposición, de que se trabaja en un corredor exclusivo, donde podemos considerar velocidades más regulares.

Una solución al problema de la velocidad variable se presenta en el siguiente apartado.

#### 5.4.4. Solución de la variabilidad de la velocidad del controlador difuso

Como se planteó, en el diseño del controlador de la sección 5.3 fue necesario conocer las distancias recorridas por un bus en los tiempos  $\beta$ ,  $2\beta$  y  $3\beta$ , estos valores coinciden con los centros de los cluster de los conjuntos difusos de entrada. Esto es, se consideró que la velocidad era constante en toda la ruta luego, los centros de los cluster del conjunto difuso

de entrada fueron determinados como  $c_{n\beta} = n\beta v_o$ , para  $n = 1, 2, 3$  para todos los link que conectan los paraderos.

Ahora, si la velocidad se considera variable en cada link de la ruta, como en la Figura 5.12, donde se presenta el perfil promedio de velocidad en el link  $l$  entre los paraderos  $p^l$  y  $p^{l+1}$ .

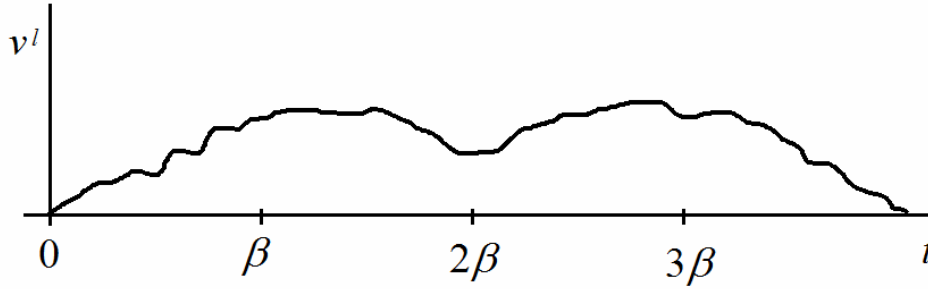


Figure 5.12: Perfil promedio de velocidad en el link  $l$

Los centros de los cluster se deben determinar para cada *link* de la ruta. Estos, representarán las distancias recorridas por un bus en el *link*  $l$  que va desde el paradero  $p^l$  al  $p^{l+1}$  en un tiempo  $t \in \{\beta, 2\beta, 3\beta\}$  a una velocidad  $v^l(t)$ , esto es:

$$c_{n\beta}^l = \int_0^{n\beta} v(\tau) d\tau \text{ con } n = \{1, 2, 3\} \quad (5.14)$$

Notar, que el valor de  $n$  también puede ser fraccionario y la integral se puede calcular aproximadamente con algún método numérico.

### Controlador experto con velocidad variable

Luego, podemos generalizar el controlador experto presentado en la sección 5.3.2 para velocidades variable en los links de la ruta. Esto es, para un determinado *link*  $l$ , se deben aplicar acciones de control *holding* y *stop-skipping*, a partir de las siguientes cinco reglas heurísticas:

$$\text{Si } d_i(k) \leq -c_{\beta/2}^l \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 1 \quad (5.15a)$$

$$\text{Si } -c_{\beta/2}^l < d_i(k) \leq c_{\beta/2}^l \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 0 \quad (5.15b)$$

$$\text{Si } c_{\beta/2}^l < d_i(k) \leq c_{3\beta/2}^l \text{ entonces } h_i(k) = \beta, Su_i(k) = 0 \quad (5.15c)$$

$$\text{Si } c_{3\beta/2}^l < d_i(k) \leq c_{5\beta/2}^l \text{ entonces } h_i(k) = 2\beta, Su_i(k) = 0 \quad (5.15d)$$

$$\text{Si } c_{5\beta/2}^l < d_i(k) \text{ entonces } h_i(k) = 3\beta, Su_i(k) = 0 \quad (5.15e)$$

En particular  $-c_{\beta/2}^l = -\int_0^{\beta/2} v(\tau) d\tau$ .

Ahora, podemos generalizar el controlador difuso presentado en la sección 5.3.2.

### Control difuso con velocidad variable

Para el *link*  $l$  ubicado entre los paraderos  $p^l$  y  $p^{l+1}$  las acciones de control *holding*  $h_i(k)$  y *stop-skipping*  $Su_i(k)$  aplicadas al un bus  $i$ , son determinadas a partir de las siguientes cinco reglas difusas:

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_1^l \text{ entonces } Su_i(k) \text{ es } S_1 \quad (5.16a)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_2^l \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_0 \quad (5.16b)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_3^l \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_1 \quad (5.16c)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_4^l \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_2 \quad (5.16d)$$

$$\text{Si } d_i(k) \text{ es } D_5^l \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_3 \quad (5.16e)$$

Donde, funciones de pertenencia de las variables asociadas con los conjuntos difusos de la entrada  $D_1^l, D_2^l, D_3^l, D_4^l$  y  $D_5^l$ , son presentadas en la Figura 5.13, respectivamente. Notar que, las funciones de pertenencia para los conjuntos difusos de salidas seguirán siendo los conjuntos  $H_0, H_1, H_2, H_3$  y  $S_1$ , ya presentados en la Figura 5.8. Donde  $a_0^l, a_1^l, a_2^l, a_3^l$  y  $a_4^l$  representan los parámetros asociados con las bases de los conjuntos difusos triangulares para la variable  $h_i(k)$  en el *link*  $l$ , como se muestra en la Figuras 5.7 y 5.8.

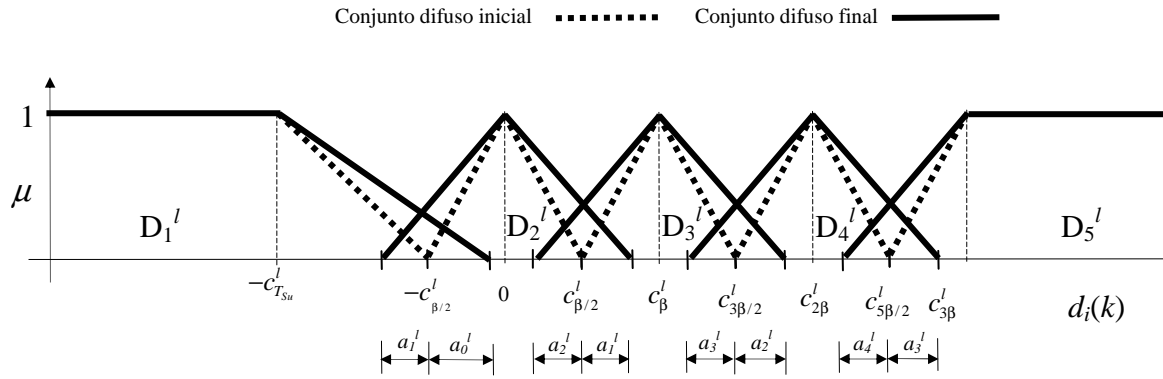


Figure 5.13: Funciones de pertenencia para la posición  $d_i(k)$ .

En particular  $-c_{T_{Su}}^l = -\int_0^{T_{Su}} v(\tau) d\tau$ .

La nueva sintonización conjunta de los parámetros:  $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4$  de la Figura 5.13 y los parámetros,  $T_{Su}^l, a_0^l, a_1^l, a_2^l, a_3^l, a_4^l$  con  $l=1, \dots, Np$  que intervienen en la definición del controlador difusos diseñado, se sintonizarán por medio de un algoritmo de enjambres de partículas semejante al presentado en la sección 5.33. Notar que, a diferencia de la sección 5.33 donde se optimizaron 11 parámetros, ahora es necesario optimizar  $5+6Np$  parámetros para los  $Np$  links.

La implementación de este controlador se deja como investigación para un trabajo futuro. Finalmente, en el próximo capítulo se plantea un análisis del efecto de la variación de demanda en el controlador diseñado.

### 5.5. Discusión

En este trabajo se propone un régimen para el funcionamiento de un sistema de buses a lo largo de un corredor lineal, que se basa en reglas heurísticas y lógica difusa. El sistema de control se basa en medidas de la posición de cada bus, que son fáciles de obtener y aplicar por medio de la tecnología GPS. Las estrategias utilizadas han sido *holding, stop-skipping* y la integración de ambas con el objetivo final de mantener

intervalos regulares de distancia entre las posiciones de los buses con el fin de minimizar el tiempo total de espera de los pasajeros que utilizan el sistema. El conjunto de reglas, en ambos casos, se formulan en detalle, y luego se aplican a un corredor lineal a través de simulaciones.

Los mejores resultados con controladores diseñados se obtienen de una estrategia integral que incluye las acciones de control de *holding* y *stop-skipping*, teniendo en cuenta reglas difusas, que para esta aplicación logran ahorro en el tiempo de espera promedio de 53,04% con respecto al control de lazo abierto. Los tiempos de viaje en los segmentos se consideran constantes en la simulación, lo que significa que el sistema sólo presenta beneficios en términos de tiempos de espera. Los estudios realizados muestran que es mejor aplicar *holding* en pocos paraderos, que no es una cuestión menor, debido a problemas de aplicación práctica (infraestructura adecuada para mantener los buses, por ejemplo).

Se destaca la sencillez y el potencial de ahorro en los recursos computacionales y tecnología, teniendo en cuenta que las metodologías propuestas se basan en un conjunto de normas de control fáciles de implementar en tiempo real.

Además los resultados permiten reconocer cierta robustez del controlador diseñado con respecto a las imprecisiones moderadas en las mediciones de la velocidad, es decir no superiores del 50%.

Se plantea a futuro ampliar la base de las reglas teniendo en cuenta otros factores como la variación de velocidad, así como generalizar el controlador, considerando un número mayor de buses donde aplicar la estrategia de posiciones equidistantes.

# Capítulo VI

## **Estrategia de control difuso para un sistema de transporte público por asignación de *headway* por paradero en función de su demanda**

En este capítulo, se plantea un controlador difuso que considera explícitamente el efecto de diferentes demandas de pasajeros que arriban a los distintos paraderos de la ruta, para el diseño sus respectivas reglas, las cuales están orientadas a la disminución del tiempo de espera promedio de los pasajeros de la ruta. La motivación para este nuevo diseño surge del controlador difuso diseñado en el capítulo anterior (capítulo 5), el cual considera sólo la posición de los buses para generar reglas que cumplan con el objetivo. Esto es, mantener los buses de la ruta, en posiciones equidistantes, para igualar los tiempos de espera de los buses en todos los paraderos, lo que redundaría directamente en disminuir los tiempos de

espera de los pasajeros. Sin embargo, este diseño no considera que ante diferentes demandas de pasajeros en los paraderos, podría ser necesario exigir que los tiempos de espera de los buses en estos paraderos fuera también diferente. Luego, a continuación se plantea el diseño de un controlador difuso que considera la variación de demanda en los paraderos.

## 6.1. Estrategia de control experto

Para el diseño del controlador experto se deben definir un conjunto de conceptos.

Dado el *headway* de diseño  $H_d$  (capítulo 4, sección 4.3), se considera un conjunto de  $Np$  tiempos de *headway* de diseño  $H_d^p(k)$  individuales para cada paradero de la ruta en un instante  $k$ . Luego, para mantener a los requerimientos de diseño se tiene que el promedio de los *headways* individuales debe ser igual al *headway* de diseño, esto es:

$$\frac{1}{Np} \sum_{p=1}^{Np} H_d^p(k) = H_d \quad (6.1)$$

El objetivo de este controlador es lograr que el *headway* de cada paradero  $p$  esté inversamente relacionado con la demanda respectiva  $\Gamma^p(k)$ . Esto es, para un paradero  $p$  cualquiera

$$H_d^p(k) \propto \frac{1}{\Gamma^p(k)} \quad (6.2)$$

Es decir, existen constantes  $\alpha$  y  $\eta$  tal que

$$H_d^p(k) = \alpha \frac{1}{(\Gamma^p(k))^\eta} \quad (6.3)$$



Luego, determinado el parámetro  $\eta$  (ver sección 2.3.4), la constante  $\alpha$  se puede calcular de la siguiente forma:

$$\frac{1}{Np} \sum_{p=1}^{Np} \alpha \frac{1}{(\Gamma^p(k))^\eta} = H_d \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{H_d Np}{\sum_{p=1}^{Np} \frac{1}{(\Gamma^p(k))^\eta}} \quad (6.5)$$

En general una configuración típica de la distribución de carga por paraderos y flujo de pasajeros de una ruta simple, implica que los mayores flujos de pasajeros se producen cerca de las estaciones de mayor demanda ubicadas en general en el centro de la ruta. Ahora considerando que  $H_d$  está calculado de modo que el intervalo entre paraderos que tiene mayor flujo de pasajeros tenga la frecuencia de buses necesaria para dar un adecuado servicio.

Sea  $H_d^{p^*}(k)$  el menor *headway* diseñado por la ecuación (6.3), dentro del conjunto de los  $Np$  paraderos en un evento  $k$ , luego a partir de (6.1) tenemos la siguiente desigualdad:

$$\sum_{p=1}^{Np} H_d^p(k) \geq Np \cdot H_d^{p^*}(k) \quad (6.6)$$

dividiendo ambos lados de la desigualdad por valor  $Np$  y con ecuación (6.1) tenemos la siguiente desigualdad

$$H_d(k) \geq H_d^{p^*}(k) \quad (6.7)$$

en otros términos, si  $f_d(k)$  es la frecuencia de diseño y  $f^{p*}(k)$  la frecuencia exigida en el paradero  $p$ . La ecuación 6.7 representa:

$$f_d(k) \leq f^{p*}(k) \quad (6.8)$$

lo que implica que la acción del controlador, en el intervalo de mayor flujo de personas, es precisamente asegurar que la frecuencia de buses, en aquel intervalo, sea mayor o al menos igual a la frecuencia mínima diseñada para el sistema completo  $f_d(k)$ .

### 6.1.2. Diseño de un controlador experto

En la Figura 6.1, se presenta las variables consideradas para el diseño de este controlador. En la figura se muestra parte de una ruta simple de buses. Donde  $p$  representa el paradero que se espera afectar por la acción de control realizada en el paradero anterior  $p-1$ . El  $bus_i$  (color blanco) es el bus donde se aplicará la acción de control (es el que generó el último evento). El  $bus_{i+1}$  (color gris), es el bus más cercano al  $bus_i$  y aguas abajo. El  $bus_{i+1}$  puede estar ubicado en dos posiciones posibles, antes del paradero  $p$  (Figura 6.1) o después del paradero  $p$  (Figura 6.2), esto hace la diferencia en como medir el *headway* en este paradero. En la Figura 6.1, el valor  $I_p$  representa la distancia entre los paraderos  $p-1$  y  $p$ , además,  $dp$  es la distancia del  $bus_{i+1}$  al paradero  $p$ , este es el caso que el  $bus_{i+1}$  aún no llega al paradero  $p$ . En la Figura 6.2  $Ta_i^p$  es el tiempo de arribo del  $bus_{i+1}$  en el caso que este bus haya sobrepasado el paradero  $p$ .

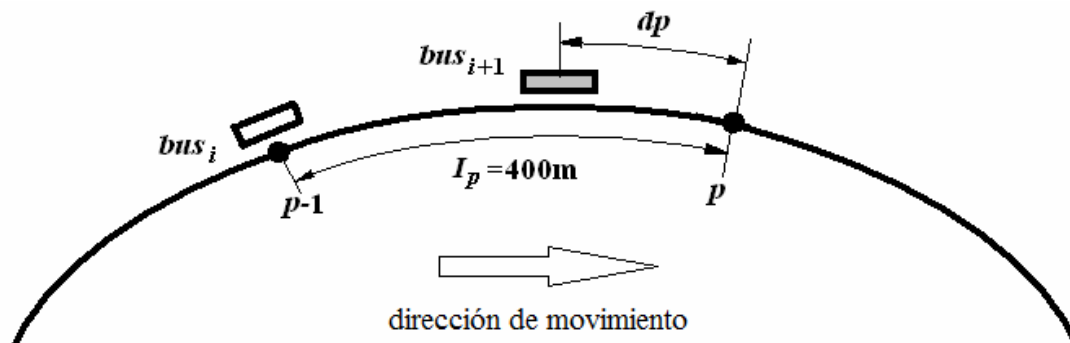


Figura 6.1: Esquema de ubicación relativa de buses

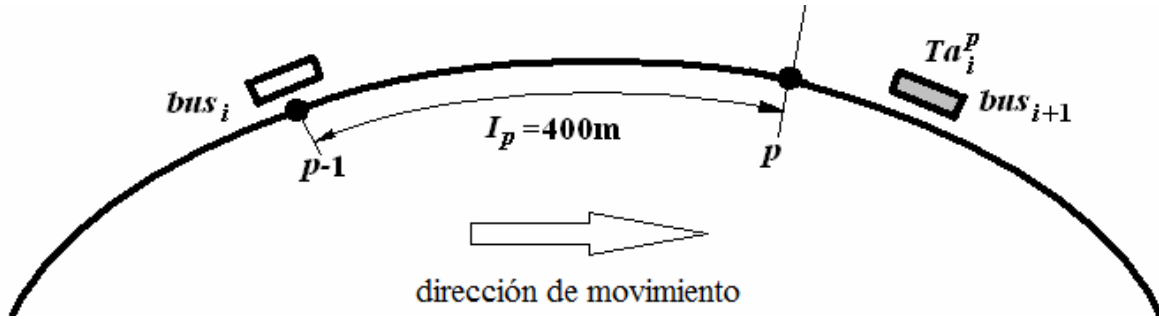


Figura 6.2: Esquema de ubicación relativa de buses

Considerando que el evento  $k$  se produce en el tiempo  $t_k$  y sea  $\hat{T}r_i(k)$  el tiempo estimado de transferencia del  $bus_i$  en el paradero  $p-1$  y que  $v$  es la velocidad media de los buses, con varianza pequeña. El tiempo estimado de transferencia es definido en Sáez *et al.* (2011), y es analíticamente determinado como  $\hat{T}r_i(k) = \text{Max}\{t_a \cdot \hat{A}_i(k), t_b \cdot \hat{B}_i(k)\}$  donde  $t_a$  y  $t_b$  son el tiempo medio de subida y bajada respectivamente en segundos por pasajeros,  $\hat{B}_i(k)$  corresponde al número esperado de pasajeros que abordarán el bus  $i$ , restringido a la capacidad disponible del bus, y  $\hat{A}_i(k)$  representa el número estimado de pasajeros que bajan del bus  $i$  en el evento  $k$ .

Considerando las Figuras 6.1 y 6.2, el *headway*  $H_i^p(k)$  en un evento  $k$ , el cual sucede en un tiempo  $t_k$  en el paradero  $p$ , entre pasadas consecutivas de los buses  $bus_i$  y  $bus_{i+1}$ . Luego, se debe evaluar la conveniencia de realizar una acción de control de *holding* o de *skipping* de la siguiente manera:

Para realizar una acción de *holding* se deben analizar las siguientes opciones mutuamente excluyentes:

- Si el  $bus_{i+1}$  sobrepasa al paradero  $p$  tenemos que:

$$H_i^p(k) = t_k + Tr_i(k) + \frac{I_p}{v_o} - Ta_i^p(k) \quad (6.9)$$

donde la expresión  $t_k + Tr_i(k) + \frac{I_p}{v_o}$  es el tiempo de arribo del  $bus_i$  y  $Ta_i^p$  es el tiempo de arribo del  $bus_{i+1}$ .

- Si el  $bus_{i+1}$  no sobrepasa el paradero  $p$  tenemos que:

$$H_i^p(k) = t_k + Tr_i(k) + \frac{I_p}{v_o} - \frac{dp_i(k)}{v_o} \quad (6.10)$$

donde la expresión  $\frac{dp_i(k)}{v_o}$  es el tiempo de arribo del  $bus_{i+1}$ .

Ahora, para realizar una acción de *skipping* no se debe considerar el tiempo de transferencia  $Tr_i(k)$  en el paradero, luego se deben analizar las siguientes opciones mutuamente excluyentes:

- Si el  $bus_{i+1}$  sobrepasa al paradero  $p$  tenemos que:

$$H_i^p(k) = t_k + \frac{I_p}{v_o} - Ta_i^p(k) \quad (6.11)$$

donde la expresión  $t_k + \frac{I_p}{v_o}$  es el tiempo de arribo del  $bus_i$ .

- Si el  $bus_{i+1}$  no sobrepasa el paradero  $p$  tenemos que:

$$H_i^p(k) = t_k + \frac{I_p}{v_o} - \frac{dp_i(k)}{v_o} \quad (6.12)$$

Notar, que en esta formulación los valores de demanda por paradero  $\Gamma^p(k)$  son porcentuales y se calculan como el promedio de los valores de carga acumulada por cada cinco eventos. Esto permite cierta regularidad y además permite detectar variaciones imprevistas de carga en los paraderos. Estas variaciones pueden ser debidas a hechos fortuitos como aglomeraciones cerca de un recinto deportivo o espectáculo artístico.

Ahora, sea  $\Delta H_i^p(k)$  la variación del *headway* en el paradero  $p$  entre pasadas consecutivas de los buses  $bus_i$  y  $bus_{i+1}$  en un evento  $k$  está definida como

$$\Delta H_i^p(k) = H_d^p - H_i^p(k) \quad (6.13)$$

Luego es necesario que la acción aplicada logre que  $\Delta H_i^p(k)$  tienda a cero, con lo que se tendría que  $H_d^p = H_i^p(k)$ , es decir el *headway*  $H_i^p(k)$  para el paso consecutivo de los buses  $bus_i$  y  $bus_{i+1}$  en un evento  $k$  es igual al *headway*  $H_d^p$  diseñado para el paradero  $p$  por medio de la ecuación (6.3).

La Figura 6.3 muestra un diagrama genérico de lazo cerrado de una estrategia de control, en el que las acciones de control se activan cuando un autobús  $i$  llega a una parada (evento  $k$ ). La variable de salida es  $\Delta H_i^p(k)$  la variación del *headway* en el paradero  $p$  para el bus  $i$ . y las variables manipuladas están asociados con eventos  $k-1$  son *holding*  $h_i(k-1)$  y *stop-skipping*  $Su_i(k-1)$ . En esta aplicación, también se optó por valores discretos para las acciones de control *holding*, es decir  $h_i(k)$  es una acción de *holding* en el bus  $i$  en el instante  $k$  donde  $h_i(k) = n_i \tau$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau > 0$ . Estas expresiones significan que los períodos de *holding* serán múltiplos de un paso fijo  $\tau$ . Este supuesto se aplica para simplificar la formulación y la aplicación del algoritmo de solución. En el ejemplo numérico,  $\tau = 30[s]$  and  $n_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

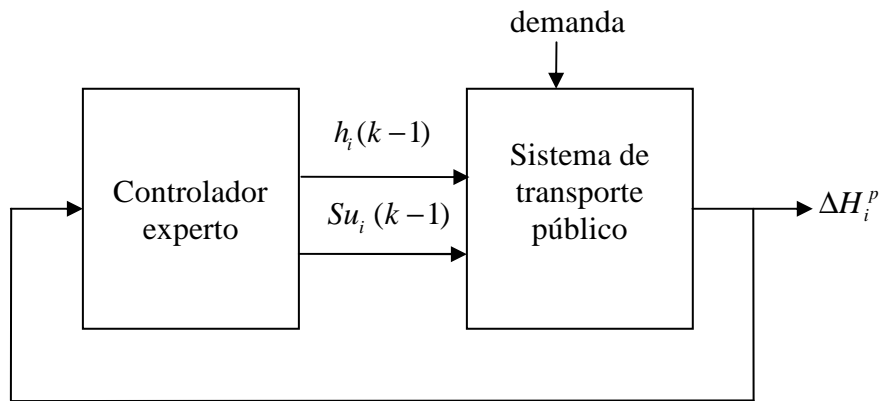


Figura 6.3: Lazo cerrado de control.

Para lograr esto, se plantea un controlador experto compuesto de un conjunto de reglas heurísticas que logren que  $\Delta H_i^p(k)$  tienda a cero. Esto es, una acción de *holding* de valor  $\beta$ , sería necesaria para una vecindad de centro en  $\Delta H_i^p(k) = \beta$  de radio  $\beta/2$ , (es decir  $\beta/2 < \Delta H_i^p(k) < 3\beta/2$ ).

Siguiendo el mismo razonamiento, dentro de un rango  $3\beta/2 < \Delta H_i^p(k) < 5\beta/2$ , la acción de control de *holding* toma un valor de  $2\beta$  ( $h_i(k) = 2\beta$ ) y para  $5\beta/2 < \Delta H_i^p(k) < 7\beta/2$  la acción de control de *holding* toma un valor de  $3\beta$  ( $h_i(k) = 3\beta$ ). Además, si  $-\beta/2 < \Delta H_i^p(k) < \beta/2$ , la acción de *holding* y *stop-skipping* no son necesarias ( $Su_i(k) = 0, h_i(k) = 0$ ). Finalmente, si  $\Delta H_i^p(k) < -\beta/2$ , la acción de control recomendada será solamente *stop-skipping* ( $h_i = 0, Su_i(k) = 1$ ).

Al igual que el capítulo 5, añadiendo los casos límites (igualdades) a las ecuaciones (5.2), podemos formular el controlador experto (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas) con las siguientes cinco reglas heurísticas.

$$\text{Si } \Delta H_i^p(k) \leq -\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 1 \quad (6.14a)$$

$$\text{Si } -\beta/2 < \Delta H_i^p(k) \leq \beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 0 \quad (6.14b)$$

$$\text{Si } \beta/2 < \Delta H_i^p(k) \leq 3\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = \beta, Su_i(k) = 0 \quad (6.14c)$$

$$\text{Si } 3\beta/2 < \Delta H_i^p(k) \leq 5\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 2\beta, Su_i(k) = 0 \quad (6.14d)$$

$$\text{Si } 5\beta/2 < \Delta H_i^p(k) \text{ entonces } h_i(k) = 3\beta, Su_i(k) = 0 \quad (6.14e)$$

## 6.2. Estrategia de control difuso

En la estrategia de control diseñada, las variables manipuladas llegan a ser una función discontinua de la variación del *headway*  $\Delta H_i^p(k)$  para el paradero  $p$ , lo cual genera una abrupta variación en la decisión de *holding* cuando  $\Delta H_i^p(k)$  esta cerca de su limite

inferior o superior (es decir,  $\beta/2, 3\beta/2$  o  $5\beta/2$ ). Para evitar el comportamiento discontinuo asociado con el controlador experto, se propone adaptar las reglas básicas usando técnicas de lógica difusa (Babuska, 1998).

Luego, las acciones de control *holding*  $h_i(k)$  y *stop-skipping*  $Su_i(k)$  son determinadas a partir de las siguientes reglas:

$$\text{Si } \Delta H_i^p(k) \text{ es } D_4 \text{ entonces } Su_i(k) \text{ es } S_1 \quad (6.15a)$$

$$\text{Si } \Delta H_i^p(k) \text{ es } D_0 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_0 \quad (6.15b)$$

$$\text{Si } \Delta H_i^p(k) \text{ es } D_1 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_1 \quad (6.15c)$$

$$\text{Si } \Delta H_i^p(k) \text{ es } D_2 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_2 \quad (6.15d)$$

$$\text{Si } \Delta H_i^p(k) \text{ es } D_3 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_3 \quad (6.15e)$$

Las funciones de pertenencia de las variables  $\Delta H_i^p(k)$  asociadas con los conjuntos difusos  $D_1, D_2, D_3, D_4$  y  $D_5$ , son presentadas en la Figura 6.4. Más aún, las funciones de pertenencia de las variables manipuladas para los conjuntos difusos  $H_0, H_1, H_2, H_3$  y  $S_1$ , se presentan en la Figura 6.5, donde  $a_0, a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  representan los parámetros asociados con las bases de los conjuntos difusos triangulares para la variable  $h_i(k)$ .

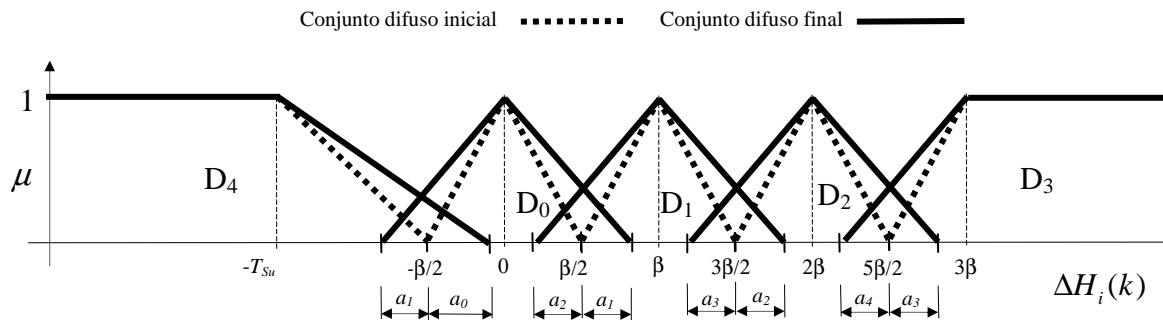


Figura 6.4: Funciones de pertenencia para la entrada  $\Delta H_i^p(k)$

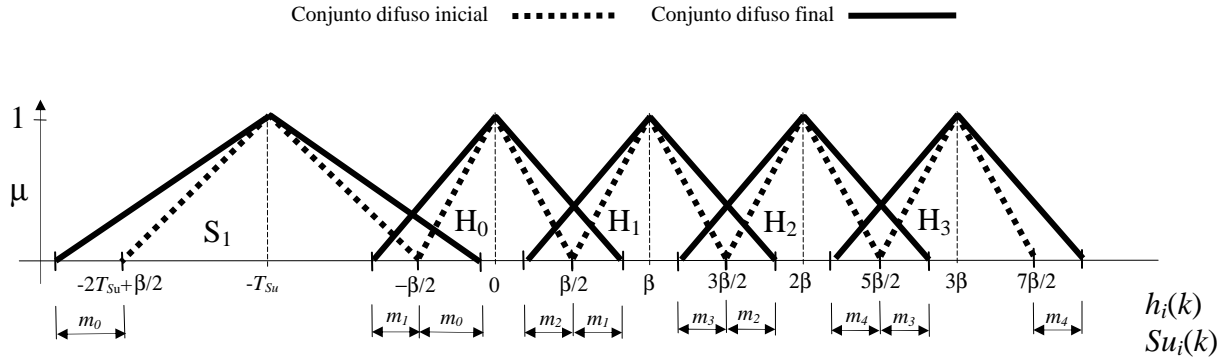


Figura 6.5: Funciones de pertenencia para la salida.

En la sección 6.2.2. se realiza una sintonización de los parámetros:  $T_{Su}$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  y  $m_4$  que intervienen en la definición de los controladores difusos diseñados (ver parámetros en Figuras 6.4 y 6.5). Con los parámetros sintonizados realizamos experimentos de simulación para cuantificar los beneficios, respecto al control de lazo abierto, de los controladores propuestos.

### 6.2.1. Descripción del experimento

La estrategia propuesta se aplica sobre un corredor de autobús de 4000 [m] con una flota de buses  $b = 6$ , con una capacidad para 72 pasajeros. El sistema consta de  $P = 10$  estaciones distribuidas uniformemente sobre la ruta del autobús (distancia entre las estaciones es de 400 [m]). Las acciones de control *holding* y *stop-skipping* se aplican en todas las paradas. La simulación supone incertidumbre en la demanda en línea para la llegada de pasajeros a las estaciones, y sigue un proceso de Poisson con tasas de demanda diferenciada por estación y período (ver Figura 6.5). Las tasas de subida y bajada promedio son  $t_a = 2$  [s/pas] y  $t_b = 1.5$  [s/pas], respectivamente, en segundos por pasajero. El deseado *headway* (referencia) es  $H_d = 6$ [min]. Por otra parte, se supone que los buses se mueven a una velocidad constante  $v_0 = 25$ [km/h] (6.94[m/s]) cuando no están en una parada. El período de simulación total fue de dos horas.



En la Figura 6.6 se presentan el tiempo medio de arribo por pasajeros a las paradas de ruta R, medida en [min/pas] (minutos por pasajero). Esto concuerda con la teoría de colas que considera tiempos de llegada a un paradero con una distribución de Poisson ( $\lambda$ ) de media  $\lambda$ . Se consideran tres casos, el caso a) considera la media  $\lambda$  idéntica para todos los paraderos, el caso b) es el caso más natural en una ruta donde se aprecia como la media  $\lambda$  disminuye a medida que nos acercamos a la zona central de la ruta, donde se asume que la ruta tiene la mayor demanda de pasajeros. Por último, en el caso c) se presenta un caso extremo donde existen grandes variaciones de la media  $\lambda$  a medida que se recorre la ruta.

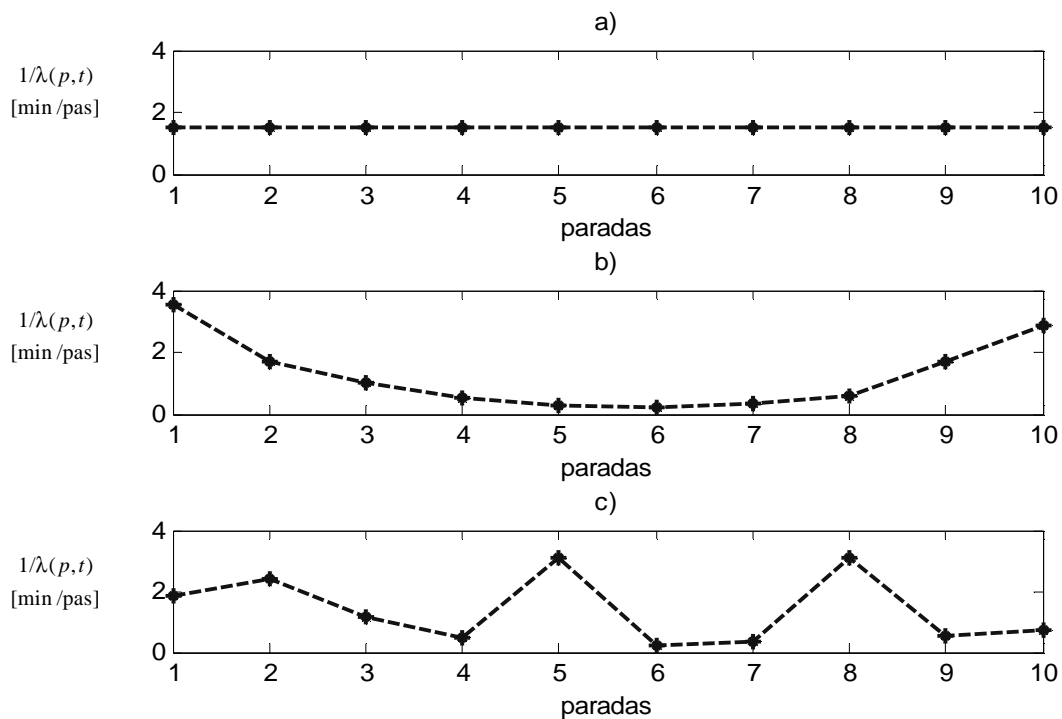


Figura 6.6. Tiempos medios de llegada

Se considera además, modelar estadísticamente los destinos de los pasajeros con funciones  $f(p)$  de densidad de probabilidad gaussianas, centradas en la estación ubicada en el punto medio entre la estación donde abordan los pasajeros y la estación final de la ruta. Para la ruta R (Figura 6.7) se presentan un ejemplo de las funciones de densidad de probabilidad.

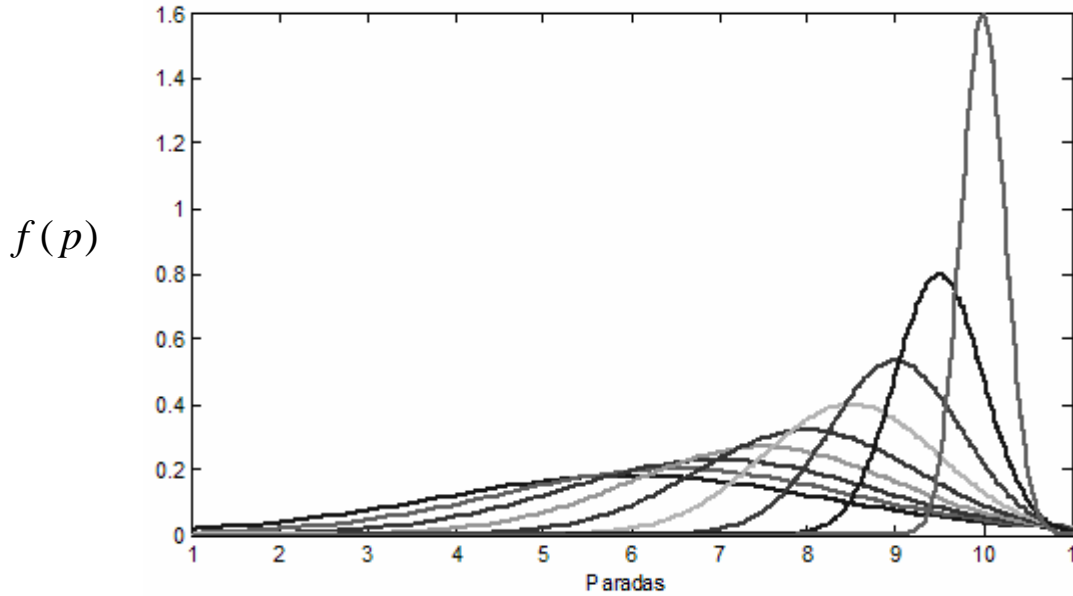


Figura 6.7. Densidades de probabilidad para los destinos.

A continuación, se propone un análisis de los parámetros de los conjuntos difusos del controlador y el parámetro  $\eta$  de la ecuación (6.3).

### 6.2.2. Sintonización de parámetros de los controladores difusos

Los parámetros de los controladores difusos propuestos, se sintonizaron por medio de un algoritmo de enjambres PSO. Se diseñó una serie de experimentos para determinar, en este escenario de simulaciones, en particular, los valores óptimos de los parámetros mencionados en términos de minimización del tiempo de espera de los pasajeros promedio.

La estrategia basada en reglas difusas, es parametrizada como se presenta en las Figuras 6.3 y 6.4. Los parámetros son:  $T_{sk}$  representa la mejor suposición hecha sobre el tiempo adelantado por una acción de *skipping*,  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  variación simétrica de las bases de los conjuntos difusos de entrada respectivos,  $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4$  variación simétrica de las bases de los conjuntos difusos de salida respectivos. Se incluye además el parámetro  $\eta$  de la ecuación (6.3), que da cuenta de la relación entre el *headway* de diseño de un paradero y su demanda correspondiente.

Se aplicó el algoritmo de enjambres de partículas sintonizando los parámetros ya descritos para el controlador difuso diseñado. Para las simulaciones se consideró 30 días con distintas demandas.

La función objetivo para éste algoritmo fue:  $\sum_{d=1}^{Nd} \bar{T}_w(d)$  donde  $\bar{T}_w(d)$  es el tiempo de espera medio de los pasajeros para todos los paraderos de la ruta para una simulación de 2 horas en el día  $d$ .

El algoritmo de enjambres de partículas consideró los siguientes parámetros:

- Saturación de velocidad de la partícula (saturación): 50
- Número de épocas: 20
- Tamaño de la población: 20
- Constante de aceleración 1 (mejor influencia local) =2
- Constante de aceleración 2 (mejor influencia global) =2
- Peso de inercia inicial: 0.9
- Peso de inercia final: 0.4

Los resultados de sintonización para los controladores se presentan en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: Parámetros finales del controladores difusos  *Holding*  y  *stop-skipping*  basado en reglas difusas con espera distribuida

$T_{Su}$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$\eta$
[s]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	
241.7	432.7	488	17.4	9.4	75.9	88	30.2	32.5	29.4	63.2	1.4

### 6.2.3. Resultados de la estrategia propuesta

La Tabla 6.2 muestra los resultados promedios obtenidos en 30 días, en las simulaciones de las estrategias de control (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas) con control de la posición relativa de los buses y estrategia de control (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas) con *headway* distribuido en función de la demanda del paradero correspondiente, así como la opción de lazo abierto con un tiempo de simulación de dos horas, con posibilidad de aplicación de las acciones de control *holding* y *stop-skipping* en todos los paraderos. Estos resultados, son los promedios del tiempo de espera y tiempo de viaje por pasajero. Además en la Tabla 6.2, se añade un índice  $B$ , que cuantifica el beneficio asociado con el desempeño del controlador propuesto con respecto al sistema de lazo abierto, definido en la sección 5.4.2.

Tabla 6.2. Control basado en reglas. Promedio y desviación estándar del tiempo de espera y tiempo de viaje por pasajero y el cómputo del tiempo para los tres escenarios.

Escenario de demanda	Estrategias de control heurísticas	Tiempo de espera [min]			Tiempo de viaje [min]	Desv.	Tiempo de cómputo promedio de 30 días [s]
		Media	Desv.	B [%]	Media	[min]	
a)	Lazo abierto	6.43	1.11	-	4.14	0.15	33.2
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas por ubicación relativa de los buses	3.28	0.31	48.93	4.16	0.20	37.02
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas con asignación de <i> headway </i>	3.15	0.32	46.95	4.18	0.19	45.08
b)	Lazo abierto	7.07	1.01	-	4.25	0.16	35.6
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas por ubicación relativa de los buses	3.82	0.34	45.86	4.76	0.19	38.74
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas con asignación de <i> headway </i>	3.60	0.35	49.08	4.34	0.18	48.98
c)	Lazo abierto	6.89	1.05	-	4.21	0.16	33.6
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas por ubicación relativa de los buses	3.71	0.37	46.14	4.20	0.18	38.45
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas con asignación de <i> headway </i>	3.16	0.38	50.15	4.15	0.17	47.78

La Tabla 6.3 muestra los resultados promedios obtenidos en 30 días, en la simulaciones de las estrategia de control difuso (*holding y stop-skipping* basado en reglas difusas) con control de la posición relativa de los buses y estrategia de control difuso (*holding y stop-skipping* basado en reglas difusas) con *headway* distribuido en función de la demanda del paradero correspondiente, así como la opción de lazo abierto con un tiempo de simulación de dos horas, con posibilidad de aplicación de las acciones de control *holding y stop-skipping* en todos los paraderos. Estos resultados, son los promedios del tiempo de espera y

tiempo de viaje por pasajero. Además en la Tabla 6.2, se añade un índice  $B$ , que cuantifica el beneficio asociado con el desempeño del controlador propuesto con respecto al sistema de lazo abierto.

Tabla 6.3. Control basado en reglas. Promedio y desviación estándar del tiempo de espera y tiempo de viaje por pasajero y el cómputo del tiempo para los tres escenarios.

Escenario de demanda	Estrategias de control	Tiempo de espera [min]			Tiempo de viaje [min]	Desv. [min]	Tiempo de cómputo promedio de 30 días [s]
		Media	Desv.	B [%]	Media		
a)	Lazo abierto	6.43	1.11	-	4.14	0.15	33.2
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas difusas por ubicación relativa de los buses	2.93	0.22	54.43	4.15	0.15	43.7
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas difusas con asignación de <i> headway </i>	2.90	0.21	54.90	4.17	0.15	50.1
b)	<i> Lazo abierto </i>	7.07	1.01	-	4.25	0.16	35.6
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas difusas por ubicación relativa de los buses	3.32	0.25	53.04	4.20	0.16	49.5
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas difusas con asignación de <i> headway </i>	3.07	0.24	56.57	4.24	0.16	57.0
c)	<i> Lazo abierto </i>	6.89	1.05	-	4.21	0.16	33.6
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas difusas por ubicación relativa de los buses	3.22	0.26	53.27	4.18	0.15	45.1
	<i> Holding y stop-skipping </i> basado en reglas difusas con asignación de <i> headway </i>	2.91	0.23	57.76	4.19	0.15	53.0

Se aprecia de la Tabla 6.2 como la estrategia de control difuso (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas) con *headway* distribuido en función de la demanda del paradero, en el escenario a) tiene beneficios semejantes a la estrategia que intenta mantener los buses con posiciones equidistantes, diseñada en el capítulo 5. En el escenario b) supera en un 3.22% a la otra estrategia y en el escenario c) se logra la mayor diferencia del 4.01% con respecto a la estrategia del capítulo 5.

Se aprecia de la Tabla 6.3 como la estrategia de control difuso (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas difusas) con *headway* distribuido en función de la demanda del paradero, en el escenario a) tiene beneficios semejantes a la estrategia que intenta mantener los buses con posiciones equidistantes, diseñada en el capítulo 5. En el escenario b) supera en un 3.53% a la otra estrategia y en el escenario c) se logra la mayor diferencia del 4.49% con respecto a la estrategia del capítulo 5.

Estos resultados se comprenden a partir de la distribución de la demanda de pasajeros en la ruta, los controladores de este capítulo fueron diseñado para considerar explícitamente la demanda diferente en los paraderos, al contrario de los controladores de comparación y esto es precisamente lo que reportan los datos.

En la Figura 6.8, podemos apreciar gráficamente este efecto, causado por todos los beneficios en los tiempos de espera explicados anteriormente. La Figura 6.7 muestra la trayectoria de los buses (para una simulación representativa), teniendo en cuenta la opción de lazo cerrado (a), el control de experto (b), y el control difuso (c). En la Figura 6.7 solamente se representó la mitad del tiempo final de simulación. También, se puede apreciar cómo la trayectoria de los buses es mucho más dispersa cuando se aplican las acciones de control, comenzando con una situación muy condensada, presentada en la Figura 6.7a (efecto que se denomina *bus bunching*), y llegando a una buena regularidad de servicio, principalmente en la Figura 6.7c.

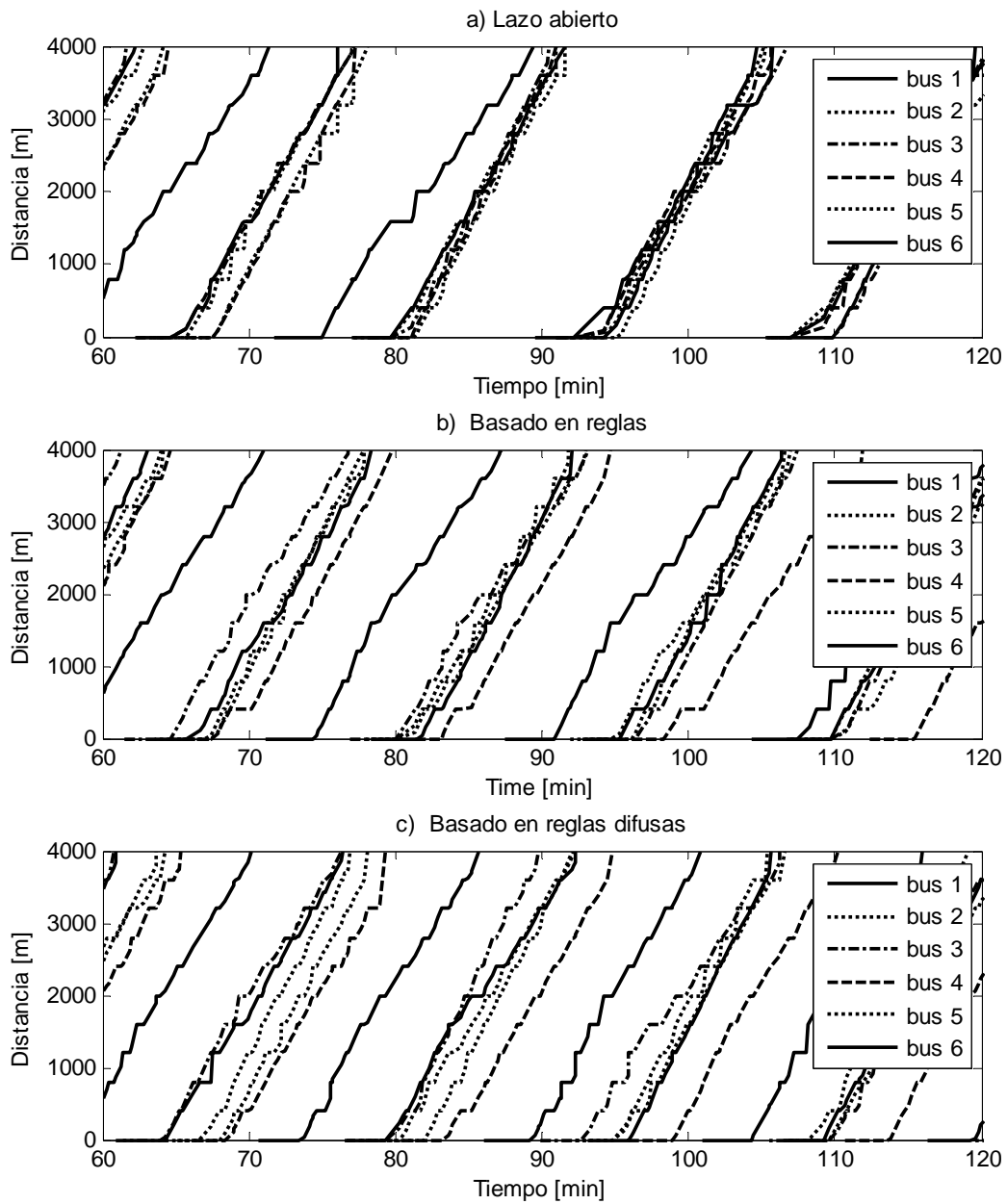


Figura 6.8: Trayectorias de los buses para las distintas estrategias de control.



#### 6.2.4. Sensibilidad del controlador difuso con respecto a la velocidad

Se plantea un análisis en el escenario b) del efecto de la varianza de la velocidad en los resultados del controlador diseñado, en particular en los tiempos de espera del sistema. Para considerar la varianza en la velocidad, en este apartado se realizó un estudio de la influencia de la imprecisión del valor la velocidad de los buses en el controlador diseñado. Por lo cual se realizaron simulaciones donde la imprecisión del valor de la velocidad iba en aumento. Esto es, la velocidad considerada en cada simulación, fue una variable aleatoria de media constante y varianza variable. En la Figura 6.9, para controlador difuso (*Holding* y *stop-skipping* basado en reglas difusas) con control de la posición relativa de los buses y la estrategia de control difuso (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas difusas) con *headway* distribuido en función de la demanda del paradero correspondiente, se graficó la variación del beneficio obtenido en tiempo de espera de los pasajeros con respecto, a la imprecisión de la medida de la velocidad. Se realizaron 30 simulaciones para cada aumento en un 5% en la varianza de la velocidad.

De la Figura 6.9 se aprecia como el deterioro del rendimiento del controlador basado en la asignación de *headway*, es menor que al controlador basado en la ubicación relativa de los buses (capítulo V), a medida que aumenta la incerteza de la medida de la velocidad. Esto se explica, debido a que el controlador basado en la ubicación relativa de los buses, está diseñado con un conjunto de reglas heurísticas directamente relacionadas con la velocidad (ver ecuaciones 5.2a, 5.2b, 5.2c, 5.2d, 5.2e), en contraste con las reglas diseñadas para el controlador por asignación de *headway*.

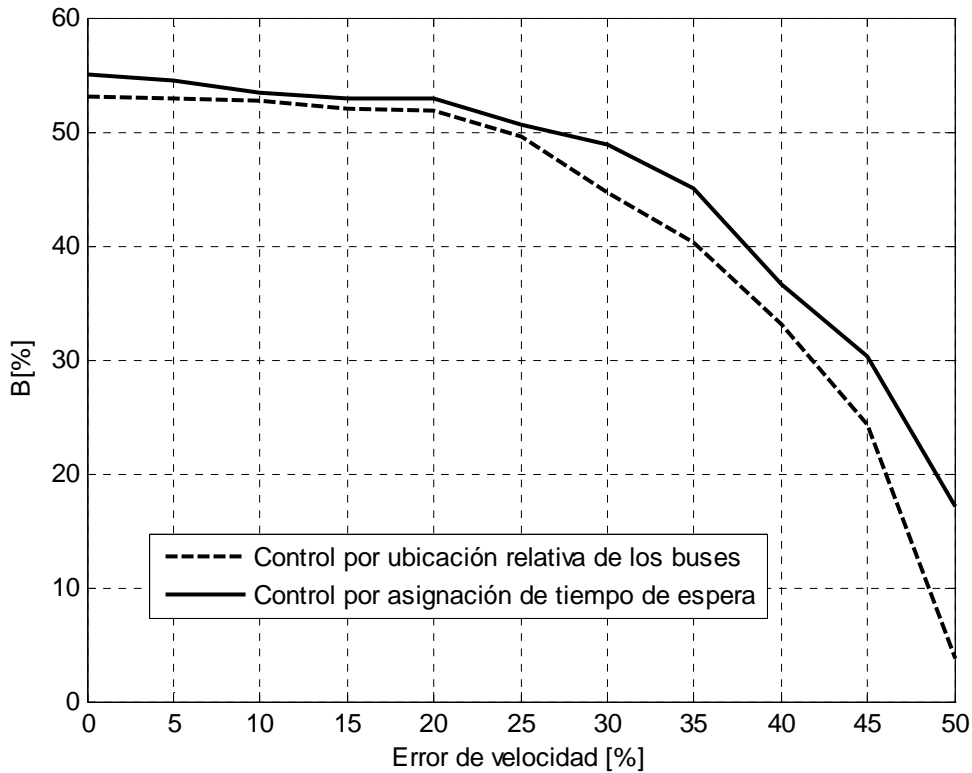


Figura 6.9: Beneficios con respecto al lazo abierto del controlador diseñado en el capítulo 5 y 6

Los beneficios obtenidos por el controlador por asignación de *headway*, aparte de la información de ubicación de los buses, necesita de la medida de la carga en los paraderos. En comparación con el controlador por ubicación relativa de buses, sólo necesita la información de la ubicación de los buses. Luego, el controlador por asignación de *headway*, conviene utilizarlo cuando las demandas en los paraderos son significativamente distintas.

### 6.2.5. Solución de la variabilidad de la velocidad del controlador difuso

Existen dos formas básicas para solucionar el problema del deterioro del comportamiento del controlador. La primera forma implica el control directo de la velocidad. Es decir, forzar el sistema para que los buses tengan las velocidades de diseño en los tramos de la ruta.

La segunda forma de solución, es trabajar con perfiles promedio de velocidad experimentalmente determinados, definidos para cada *link* entre paraderos tal como se muestra en la Figura 5.12 del capítulo 5. Luego se deben modificar las reglas de control de acuerdo al valor actualizado de la velocidad, esto es, en las ecuaciones (6.9), (6.10), (6.11) y (6.12) deben ser reemplazadas por las nuevas ecuaciones:

$$H_i^p(k) = t_k + Tr_i(k) + \frac{I_p}{v^l} - Ta_i^p(k) \quad (6.16)$$

$$H_i^p(k) = t_k + Tr_i(k) + \frac{I_p - dp_i(k)}{v^l} \quad (6.17)$$

$$H_i^p(k) = t_k + \frac{I_p}{v^l} - Ta_i^p(k) \quad (6.18)$$

$$H_i^p(k) = t_k + \frac{I_p - dp_i(k)}{v^l} \quad (6.19)$$

donde  $v^l$  es la velocidad promedio sobre el *link*  $l$  que une los paraderos  $P^l$  y  $P^{l+1}$  (ver sección 5.4.4). El análisis completo de esta posible formulación se dejará como trabajo futuro.

### 6.3. Discusión

En este trabajo se propone un régimen para el funcionamiento de un sistema de buses a lo largo de un corredor lineal, que se basa en lógica difusa. Las estrategias utilizadas han sido *holding* y *stop-skipping*, con el objetivo que el *headway* de cada paradero esté inversamente relacionado con la demanda respectiva, para minimizar el tiempo total de espera de los pasajeros que utilizan el sistema. El conjunto de reglas se formulan en detalle, y luego se aplican a un corredor lineal a través de simulaciones.

Los parámetros de los controladores difusos propuestos, se sintonizaron por medio de un algoritmo de enjambres de partículas. Se diseñó una serie de experimentos para determinar,

en este escenario de simulaciones, en particular, los valores óptimos de los parámetros mencionados en términos de minimización del tiempo de espera promedio.

Las reglas difusas diseñadas, para esta aplicación logran ahorro en el tiempo de espera promedio de 55.02% con respecto al control de lazo abierto. Los tiempos de viaje en los segmentos se consideran constantes en la simulación, lo que significa que el sistema sólo presenta beneficios en términos de tiempos de espera.

La estrategia de control difuso ( *Holding y stop-skipping* basado en reglas difusas) con  *headway* distribuido en función de la demanda del paradero es la estrategia que mejor se comporta ante variaciones de la demanda.

Los resultados permiten reconocer una robustez mayor ante la variación de velocidad del controlador basado en la asignación de  *headway* que el controlador basado en la ubicación relativa de los buses (capítulo 5), a medida que aumenta la incerteza en la medición de la velocidad.

Para la implementación en tiempo real, el diseño de esta estrategia considera la actual tecnología de transporte disponible, tal como los contadores automáticos de pasajeros (APC) y la localización automática de vehículos (AVL). Luego, el controlador por asignación de  *headway*, conviene utilizarlo cuando las demandas en los paraderos son significativamente distintas. En caso contrario utilizar el controlador basado en la posición relativa de los buses (capítulo 5).

Se plantea a futuro ampliar la base de reglas teniendo en cuenta otros factores como la variación de velocidad, y la modificación del conjunto de tiempos de  *holding* permitidos.

# Capítulo VII.

## **Control predictivo híbrido para la optimización en tiempo real de la operación de un sistema de transporte público de una ruta con sintonización PSO**

Dentro de las técnicas de control avanzado que nos interesa aplicar en este trabajo, el control predictivo es un enfoque potente que permite formular controladores para sistemas complejos y con restricciones, como lo son evidentemente los sistemas de transportes

públicos con buses presentados en capítulo 2. Esta capacidad de trabajo con procesos complejos, tiene el precio asociado, del coste computacional y la sintonización del controlador. Recientemente, existen avances en el campo del MPC que proveen un conocimiento más profundo de estos controladores, obteniéndose resultados que permiten relajar estos requerimientos. Así por ejemplo, se han establecido condiciones generales para garantizar la estabilidad (Mayne y Rawlings, 2000), condiciones bajo las cuales se puede relajar el carácter de optimalidad del controlador garantizando su estabilidad (Scokaert y Mayne, 1998).

En este capítulo, se formula una estrategia de control predictivo híbrido (HPC) para la optimización en tiempo real de la operación de un sistema de transporte público con una ruta. La estrategia HPC incluye una función objetivo con parámetros sintonizados por medio de un algoritmo de enjambres de partículas (PSO, *Particle Swarm Optimization*) y un modelo predictivo del sistema de buses, realizado en tiempo discreto, donde los acontecimientos se desencadenan cuando un bus llega a un paradero. Por lo cual, el controlador de HPC toma decisiones basándose en dos conocidas acciones de control en tiempo real, *holding* y *stop-skipping*. Además, la incerteza de la demanda de pasajeros está incluida en el modelo como una perturbación y está basada en la información en línea del comportamiento de los pasajeros.

En este problema, el controlador predictivo corresponde al operador del sistema, que determina de forma dinámica las acciones de control para el sistema de buses a partir de la optimización de índices de comportamiento integrados en una función objetivo que además toma en cuenta la evolución futura del sistema de transporte público. En este caso particular, la función objetivo se orienta principalmente a reducir al mínimo el tiempo de viaje total de los usuarios (incluyendo el tiempo de espera, así como el tiempo de viaje en los buses).

Para este enfoque, la demanda de pasajeros en tiempo real es desconocida e incierta y se modela como una perturbación, ya que diferentes patrones de llegada de pasajeros podrían afectar significativamente el tiempo estimado de viaje en los buses o un aumento de las

operaciones de transferencia de pasajeros en las paradas. Al incluir una predicción de la demanda nos permitirá alcanzar un conocimiento del comportamiento futuro de todo el sistema. La metodología para la predicción de la demanda, basada en datos en línea, necesita de una correcta estimación de la matriz origen-destino en tiempo real para predecir el futuro número de pasajeros en las paradas, la carga de pasajeros en los buses y lapsos temporales de transferencia.

En la literatura de control de transporte público en tiempo real, varios autores diseñan sus estrategias de control, basadas en una función objetivo típica que implica la regularización del *headway* entre buses. Esto es, minimizar el tiempo de espera total de los usuarios, ya que éste es directamente proporcional al *headway* (ver ecuación 3.3 del capítulo 4)

Como se mencionó anteriormente, para el diseño del controlador predictivo, se define una función objetivo que toma en cuenta durante su viaje el tiempo total de espera y de viaje utilizado para todos los usuarios afectados por la aplicación de las estrategias de control. Por lo tanto, el componente del tiempo de espera se incluye explícitamente en nuestra formulación, junto con un componente orientado a mantener el *headway* lo más cerca posible al *headway* de diseño (véase la sección 7.1.4 para más detalles).

En la estrategia de HPC, el problema de optimización resultante en cada evento es computacionalmente costoso y necesita de un algoritmo eficiente para su solución en términos de tiempo de cálculo y precisión. Se selecciona un algoritmo de poda probabilística sobre el árbol de posibilidades de acciones de control, algoritmo que permite la adecuada gestión del *trade-off* entre estos dos aspectos. Para la implementación en tiempo real, el diseño de esta estrategia HPC considera la actual tecnología de transporte disponible, tal como los contadores automáticos de pasajeros (APC) y la localización automática de vehículos (AVL). Se llevan a cabo simulaciones ilustrativas con predicciones de dos y cinco pasos.

En la siguiente sección, se describe el diseño del controlador predictivo híbrido. Como se explica en la sección 7.2, se propone el uso de algoritmo de poda probabilística para

resolver eficientemente el problema de optimización correspondiente al control predictivo. A continuación, en la sección 7.3 se describen las simulaciones ilustrativas con predicciones de, dos y cinco. Por último, en la sección 7.3 se presentan las principales conclusiones del trabajo.

## 7.1. Diseño de un controlador predictivo híbrido para un sistema de transporte público de una ruta.

### 7.1.1. Formulación del problema

La optimización de la operación en tiempo real asociada con un sistema de transporte de buses es formulada bajo el enfoque de un controlador predictivo híbrido (HPC). Ambos, la función objetivo y el modelo predictivo son esenciales para el diseño HPC. Por simplificación, en este trabajo el controlador HPC es diseñado para un sistema con una ruta simple de buses, aunque deberá ser extendida para un sistema más complejo de acuerdo a un marco conceptual similar (capítulo 9). El sistema es representado en la Figura 7.1. La red es una ruta de una vía, con  $P$  paradas equidistantes y  $b$  buses corriendo alrededor de la ruta, bajo el control del despachador.

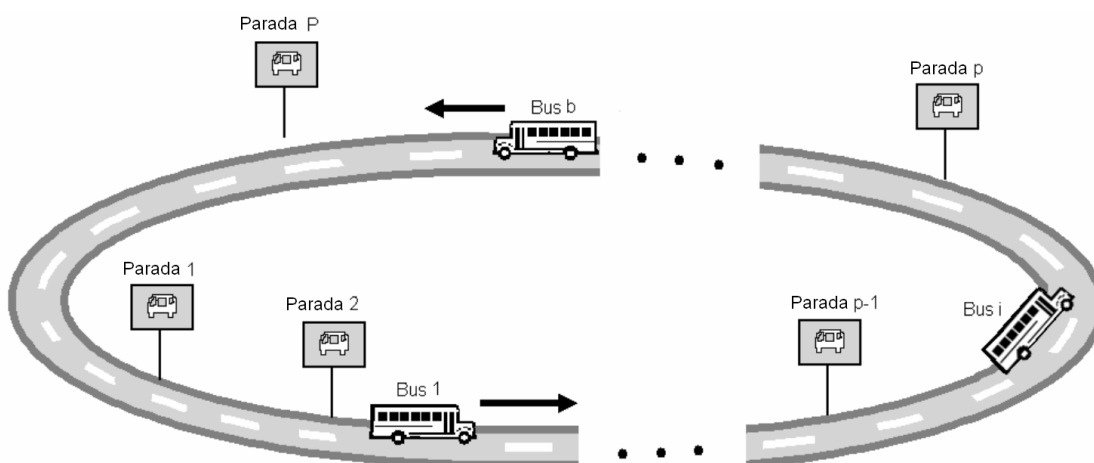


Figura 7.1: Sistema de transporte público.



Los pasajeros arriban a cada paradero a una cierta razón siguiendo una distribución exponencial negativa, con destinos elegidos aleatoriamente entre los paraderos aguas abajo desde la parada donde el pasajero sube. Entonces todos los pasajeros están caracterizados por un paradero de subida y uno de bajada y por el tiempo que el pasajero arriba a esta parada, sin incluir el tiempo gastado por los pasajeros en llegar a dicha parada. Para cada periodo modelado se estima una matriz de demanda representativa parada a parada; esto es una parte crucial en la caracterización del modelo predictivo del sistema. Los datos de la demanda en línea pueden ser usados como complemento de la matriz de demanda fuera de línea para mejorar los aspectos de modelación.

En este enfoque, se considera típicas variables discretas (número de pasajeros sobre los buses) y variables continuas (posición y velocidad de los buses) que suelen existir en un problema de control predictivo, pero además es necesario incluir variables lógicas o cuantizadas (esto es, pertenecen a conjuntos con un número reducido de elementos) para seleccionar una cantidad limitada de acciones de control (ver capítulo 2). Por esta razón, se decide usar un enfoque que considera un control predictivo híbrido, en el cual la optimización de las acciones de control considera ambos conjuntos de variables (Bemporad y Morari, 1999). El problema es formulado como un sistema híbrido, donde los eventos son generados por acciones específicas del sistema. Aunque la formulación tradicional del HPC esta diseñada para un paso fijo, nuestra formulación requiere un paso variable, esto es, la descripción del sistema está basada en eventos relevantes (correspondiendo a los instantes en los cuales las acciones de control deben ser tomadas). Los eventos son generados cuando los buses arriban a los paraderos, lo cual determina variables de tiempo asociadas a los paraderos. De ahora en adelante, denotaremos  $t$  como el tiempo continuo,  $k$  como el evento, y  $t_k$  como el tiempo continuo en el cual el evento  $k$  ocurre. Notar que un evento  $k$  está siempre asociado con el arribo de un específico bus  $i$  a una específica parada  $p$ .

La Figura 7.2 muestra el lazo cerrado del sistema de buses y las principales variables correspondientes (Sáez *et al.*, 2012), las cuales son función de tiempo continuo y discreto. Cuando un evento  $k$  ocurre, el controlador predictivo híbrido, genera la acción de control.

Las variables definidas en tiempo continuo, tales como la posición y la velocidad, son requeridas para distinguir algunas características del sistema cuando los eventos son generados (por ejemplo, la posición de todos los vehículos cuando un específico bus arriba al paradero).

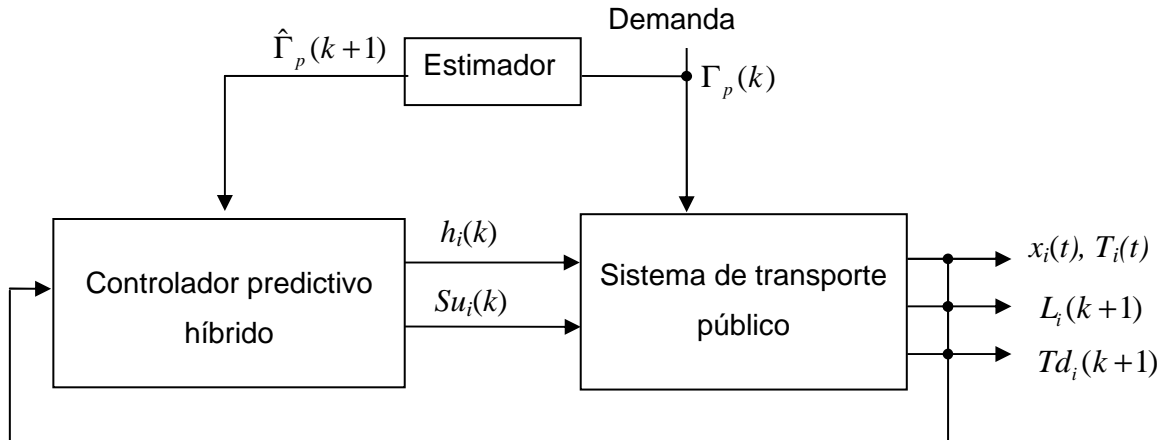


Figura 7.2: Controlador predictivo híbrido para el sistema de transporte público.

Esto es, para todo bus  $i$  perteneciente a la flota, su posición es  $x_i(t)$  en algún instante continuo  $t$ , y el tiempo remanente para que el bus  $i$  alcance al próximo paradero,  $T_i(t)$ , son definidos para chequear las condiciones de los buses y consecuentemente el momento cuando los eventos se generan. Un nuevo evento  $k$  es generado por un bus  $i$  en algún paradero  $p$  cuando  $x_i(t)$  es igual a la posición de esta parada en  $t = t_k$ . Por lo tanto, el tiempo remanente para el bus  $i$  para alcanzar el paradero es igual a cero ( $T_i(t_k) = 0$ ).

Las variables manipuladas son las acciones de *holding*  $h_i(k)$  y las acciones de *stop-skipping*  $Su_i(k)$  asociadas con el bus  $i$  y el evento  $k$ . Por esto,  $h_i(k)$  es el lapso durante el cual el bus  $i$  es retenido en la parada asociada con el evento  $k$ , mientras  $Su_i(k)$  es una variable binaria que es igual a uno si a los pasajeros les es permitido abordar el bus  $i$  en la parada asociada con el evento  $k$ , y cero en el otro caso.

Las variables de salida de tiempo discreto corresponden a la carga de pasajeros  $L_i(k+1)$  y el tiempo de partida  $Td_i(k+1)$  una vez que el bus sale del actual paradero, asociado con el bus  $i$  el evento  $k$ .

En la Figura 7.2, la variable  $\Gamma_p(k)$  es el número de pasajeros esperando en el paradero  $p$  y corresponde a una perturbación del sistema. Por medio de un estimador de demanda, las variables  $\hat{A}_i(k)$ ,  $\hat{B}_i(k)$  y  $\hat{\Gamma}_p(k+1)$  son estimadas e incorporadas al modelo dinámico.  $\hat{\Gamma}_p(k+1)$  es la predicción del número de pasajero cuando el bus  $i$  parte desde la parada  $p$ ,  $\hat{B}_i(k)$  es el esperado número de pasajeros que abordarán el bus  $i$  durante un cierto intervalo de tiempo y  $\hat{A}_i(k)$  representa el número estimado de pasajeros que descienden desde el bus  $i$  en el evento  $k$ .

En el caso de las entradas al modelo dinámico, corresponden a las acciones de control, y son analíticamente definidas como:

- $Su_i(k)$ : Acción de *stop-skipping* del bus  $i$ , en el instante  $k$ , si el bus se detiene a recoger pasajeros en el paradero  $Su_i(k) = 1$  y si salta el paradero  $Su_i(k) = 0$ .
- $h_i(k)$ : Acción de *holding* del bus  $i$  en el instante  $k$  donde  $h_i(k) = n_i\beta$ ,  $n_i \in Z^+$ ,  $\beta > 0$ .

Estas expresiones significan que los periodos de *holding* son múltiplos de un paso fijo  $\beta$ . Esta suposición es aplicada para simplificar ambas formulaciones y la aplicación del algoritmo de solución (sección 3). En el ejemplo numérico (sección 7.3),  $\beta = 30$ [s] y  $n_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . La razón de elegir lapsos discretos de *holding* fue, desde un punto de vista operacional, para facilitar a los conductores de los buses seguir instrucciones dadas por el despachador central. Más aún, no es práctico tener valores de *holding* con diferencias de menos de 30[s], principalmente debido a las restricciones dadas por las condiciones de

manejo (tráfico inesperado, flexibilidad del conductor para comenzar la operación, comunicación con la central, etc.).

A continuación, se define analíticamente el modelo predictivo, incluyendo variables del espacio de estado y modelos de salida. El modelo predictivo inicialmente considerado en este capítulo, es el descrito en Sáez *et al.*, (2012) presentado en la sección 7.1.2 denominado "Modelo predictivo 1". En la sección 7.1.3 se presentará una mejora de este modelo denominado "Modelo predictivo 2" y en el capítulo 9, se planteará una generalización, de este modelo aplicado a un sistema de transporte de buses más complejo con varias rutas y que incluye estaciones de trasbordo, ambos análisis son de autoría propia.

### 7.1.2. Modelo predictivo 1

El modelo de Sáez *et al.* (2012) describe el comportamiento dinámico de las variables principales del sistema de transporte de buses, como función de las acciones de control.

Primero, la posición esperada del bus en el instante  $t$ ,  $\hat{x}_i(t)$ , es descrito como una función de la velocidad instantánea del bus  $v_i(t)$  que depende del tiempo continuo y las acciones de control aplicadas.

El cálculo de la posición del bus  $i$  en el tiempo continuo  $t$  es lo siguiente:

$$\hat{x}_i(t) = x_i(t_k) + \int_{t_k}^t \hat{v}_i(\vartheta) d\vartheta, \quad (7.1)$$

donde  $t_k$  es el instante continuo donde el evento  $k$  es generado y  $x_i(t_k)$  la posición del bus  $i$  en el instante  $t_k$ . La velocidad instantánea  $\hat{v}_i(t)$  es modelada asumiendo velocidad constante ( $v_0$ ) cuando el vehículo está en movimiento, y la velocidad es cero en otro caso, lo cual implica que los procesos de aceleración y desaceleración de los buses es ignorado. La Figura 7.3 presenta la función velocidad del bus  $i$  mientras está viajando desde la estación y

alcanza el instante  $k$  hasta que el bus arriba a la próxima parada a lo largo de la ruta (lo cual esta asociado con el instante futuro  $k+d$ ). Notar que  $d$  corresponde a los lapsos de tiempo generados por otros buses de la flota arribando a diferentes paradas de buses, produciéndose mientras el bus  $i$  esta viajando entre su actual paradero y el próximo (incluyendo el tiempo que el bus está en el actual paradero). En la Figura,  $\hat{T}r_i(k)$  es el tiempo estimado asociado con la transferencia de pasajeros (máximo entre los tiempos de subida y bajada) y  $\hat{T}v_i(k)$  es el tiempo estimado de viaje entre dos estaciones consecutivas, llamadas estación  $p$  y la estación próxima. Como definimos anteriormente el controlador decide el tiempo de *holding* en la estación  $i$ , denotado por  $h_i(k)$ . Obviamente, cuando el bus está en una parada, su velocidad es cero mientras está transfiriendo pasajeros y también durante el periodo de *holding* (si el bus está retenido allí), luego que la velocidad instantánea depende de esas variables.

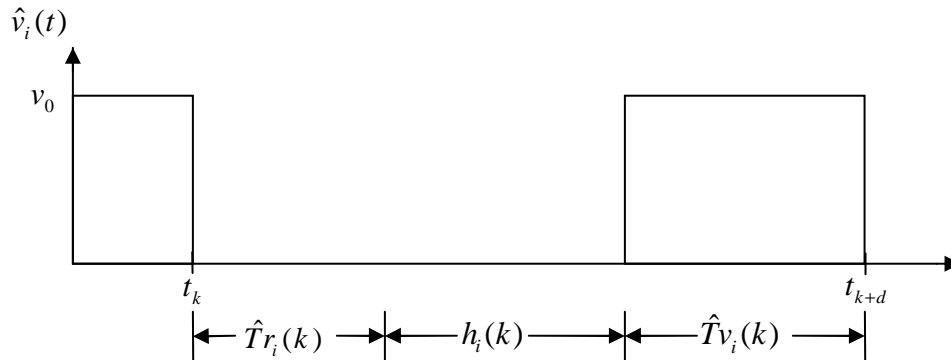


Figura 7.3: Ejemplo de la velocidad de un bus entre paraderos consecutivos (Sáez *et al.* 2011).

En este contexto y basados en la Figura 7.3, una estimación de la velocidad instantánea puede ser calculada como:

$$\hat{v}_i(t) = \begin{cases} 0 & t_k \leq t \leq t_k + \hat{T}r_i(k) + h_i(k) \\ v_0 & t_k + \hat{T}r_i(k) + h_i(k) \leq t \leq t_{k+d} \end{cases} \quad (7.2)$$

Para generar el próximo evento a partir del modelo dinámico, es necesario calcular el tiempo remanente esperado (medido desde el instante  $t$ ) para que el bus  $i$  alcance la próxima parada; este puede ser calculado como:

$$\hat{T}_i(t) = t_k + Su_i(k) \cdot (h_i(k) + \hat{T}r_i(k)) + \hat{T}v_i(k) - t, \quad t_k \leq t \leq t_{k+d}. \quad (7.3)$$

Las estimaciones de las variables de estado continuas de este esquema propuesto están dadas por las ecuaciones (7.1) y (7.3). Luego, las predicciones de las variables de salida discretas del modelo dinámico, requeridas para la estrategia de control HPC ( $\hat{L}_i(k+1)$  y  $\hat{T}d_i(k+1)$ ), están definidas y analíticamente calculadas.

Primero, se define la carga de pasajeros predicha  $\hat{L}_i(k+1)$ , como el número estimado de pasajeros sobre el bus  $i$  una vez que éste parta de la estación. Analíticamente,

$$\hat{L}_i(k+1) = \begin{cases} \min\{L_{Max}, L_i(k) + Su_i(k) (\hat{B}_i(k) - \hat{A}_i(k))\} & \text{si el bus } i \text{ genera el evento } k \\ L_i(k) & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (7.4)$$

donde  $L_{Max}$  es la capacidad del bus,  $L_i(k)$  es la carga del bus  $i$  en el instante  $k$ ,  $\hat{B}_i(k)$  corresponde al número esperado de pasajeros que abordarán el bus  $i$ , restringido a la capacidad disponible del bus, y  $\hat{A}_i(k)$  representa el número estimado de pasajeros que bajan del bus  $i$  en el evento  $k$ .

Notar que  $\hat{A}_i(k)$  y  $\hat{B}_i(k)$  son obtenidas a través de un análisis estadístico de datos de los sensores que deberían estar localizados en las paradas de los buses. En este enfoque, estas estimaciones son obtenidas a partir de datos de días previos similares (información histórica fuera de línea) e información dinámica ocurrida en el mismo día (información en línea).

Basados en información fuera de línea, nosotros podemos estimar  $\hat{A}_i(k)$  usando los más frecuentes patrones de destino de los días previos sobre el mismo periodo; entonces, estas estimaciones son corregidas con data *en línea* de destinos preferidos por los pasajeros desde el sistema. La variable  $\hat{B}_i(k)$  es calculada a partir de la estimación de la carga  $\Gamma_p(k)$  en el paradero en el instante  $k$  y la capacidad del bus, es estimada usando un modelo autorregresivo de media móvil (ARX) para el tiempo de arribo en las paradas. Más aun, el tiempo estimado de transferencia definido anteriormente puede ser analíticamente determinado como  $\hat{T}r_i(k) = \text{Max}\{t_a \cdot \hat{A}_i(k), t_b \cdot \hat{B}_i(k)\}$  donde  $t_a$  y  $t_b$  son el tiempo medio de subida y bajada respectivamente en segundos por pasajeros.

Además, el tiempo de salida estimado  $\hat{T}d_i(k+1)$  una vez que el bus  $i$  sale del paradero actual puede ser calculado como:

$$\hat{T}d_i(k+1) = \begin{cases} t_k + Su_i(k) \cdot (h_i(k) + \hat{T}r_i(k)) & \text{si el bus } i \text{ gatilla el evento } k \\ Td_i(k) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.5)$$

La carga predicha por paradero  $\hat{\Gamma}_p(k+1)$  (cuando el bus  $i$  parte del paradero  $p$ ), es definida como el número de pasajeros esperando en la parada  $p$  asociada con el bus  $i$  que generó el evento  $k$ ; y se determina como:

$$\hat{\Gamma}_p(k+1) = \begin{cases} \Gamma_p(k) + \hat{\delta}_p(k) - \hat{B}_i(k) & \text{si el bus } i \text{ gatilla el evento } k \\ \Gamma_p(k) + \hat{\delta}_p(k) & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (7.6)$$

donde  $\Gamma_p(k)$  es la carga en la parada  $p$  en el instante  $k$ . Así también  $\hat{\delta}_p(k)$  entrega el número de pasajeros que arriban al paradero entre el instante  $k$  y el instante cuando el bus parte desde esta parada. El valor  $\hat{\delta}_p(k)$  es generado basado en un análisis estadístico de dos conjuntos de datos, los datos de un día previo similar y los del mismo día.

Con la predicción del tiempo de salida  $\hat{T}d_i$  (ecuación 7.5), es posible predecir, el *headway*  $\hat{H}_i(k+1)$  que transcurre entre dos pasadas de buses consecutivas, por un mismo paradero, del bus  $i$  que gatilló el evento  $k$ , con respecto a su bus precedente bus  $i-1$  que alcanzó la misma parada en el evento  $k+1-z_{i-1}$ . Analíticamente:

$$\hat{H}_i(k+1) = \hat{T}d_i(k+1) - \hat{T}d_{i-1}(k+1-z_{i-1}) \quad (7.7)$$

donde  $\hat{T}d_i(k+1)$  está asociado con el bus  $i$  en el evento  $k$ , y  $\hat{T}d_{i-1}(k+1-z_{i-1})$  representa el tiempo de partida predicho del bus precedente bus  $i-1$  que gatilló el evento  $k-z_{i-1}$ , en la misma parada. La variable  $z_{i-1}$  representa el número de eventos entre el arribo del bus precedente bus  $i-1$  y el bus  $i$ , ambos alcanzando igual paradero.

### 7.1.3. Modelo predictivo 2

En este modelo, se plantean mejoras al modelo presentado por Sáez *et al.*, (2012), las cuales se resumen en tres puntos. En primer lugar, se precisa la definición de la posición de los buses y se conecta esta variable explícitamente al modelo del sistema. En segundo lugar, se redefine el valor del tiempo remanente de los buses, para lograr la conexión de las variables con una formulación predictiva. Por último, se generaliza la representación de las demandas de paraderos y buses, para integrar en la formulación los valores de los destinos de los pasajeros (representación fundamental para la formulación del problema del transbordo (ver capítulo 9)).

Para esta formulación, mantenemos la estructura básica de Sáez *et al.*, (2012), donde se supone la evolución del sistema en términos de eventos discretos que concuerdan con los instantes en que los buses arriban a algún paradero. Esto es, considerando que se produce un evento cada vez que algún bus llega a un paradero, entonces, dado un evento  $k$  para un bus  $i$ , se define  $t_k$  el tiempo actual en el que se produce el evento  $k$ , y a  $x_i(k)$  la posición



sobre la ruta para el bus  $i$  en el evento  $k$ , distancia tomada desde el terminal en la dirección de avance de los buses.

### Actualización de la posición de los buses

La posición de los buses en la ecuación 7.1 no recoge la compleja dinámica del modelo de transporte público desarrollado. Notar, que ninguna de las ecuaciones posteriores del modelo incluye la posición de los buses como variable, por lo tanto en el modelo de Sáez. (2011), se podría prescindir de ésta.

Luego, considerando la velocidad definida en la ecuación 7.2, se puede entregar una expresión más exacta de la posición de un bus en la ruta, con la debida conexión con las otras variables del modelo predictivo. Esto es, utilizando la definición del tiempo de salida  $Td_i(k)$  del bus  $i$ , planteada por Sáez *et al.*, (2012), ecuación (7.5) y suponiendo una velocidad constante por ruta  $v_o$ , la posición  $x_i(k)$  del bus  $i$  en un evento actual  $k$  se puede determinar fácilmente.

Para fijar ideas, se considera lo siguiente, si un bus  $i$  no genera evento en  $t_{k+1}$  entonces debe conservar el tiempo de salida obtenido en  $t_k$ , esto es,  $\hat{T}d_i(k+1)=Td_i(k)$ . Luego, naturalmente la posición futura del bus  $x_i(k+1)$  dependerá de la posición actual  $x_i(k)$  y de una variación de tiempo por la velocidad  $\Delta t v_o$ . Esto es  $x_i(k+1)=x_i(k)+\Delta t v_o$  donde  $\Delta t = t_{final} - t_{inicial}$ . El tiempo final  $t_{final}$  será obviamente, el tiempo del evento próximo  $t_{final} = t_{k+1}$ , pero el tiempo inicial  $t_{inicial}$  tendrá dos opciones a y b para su determinación. Esto es:

a) si  $t_k \leq Td_i(k)$  entonces  $t_{inicial} = Td_i(k)$  (es decir, en  $t_k$  estaba en el paradero)

b) si  $t_k > Td_i(k)$  entonces  $t_{inicial} = t_k$  (es decir, en  $t_k$  estaba en ruta).

c) Por último, si en el tiempo del evento próximo es tal que  $t_{k+1} \leq Td_i(k)$ , implica que el bus aún estará en el paradero, luego su posición será la misma que tiene en  $t_k$ .

Un resumen de lo analizado se presenta a continuación:

$$x_i(k+1) = \begin{cases} x_i(k) + (t_{k+1} - Td_i(k))v_o & \text{si } t_k \leq Td_i(k) \\ x_i(k) + (t_{k+1} - t_k)v_o & \text{si } t_k > Td_i(k) \\ x_i(k) & \text{si } t_{k+1} \leq Td_i(k) \end{cases} \quad (7.8)$$

En la Figura 7.4, se presenta un diagrama de tiempo de las tres situaciones posibles a considerar, para determinar la posición de un bus  $i$  cualquiera. Situaciones expresadas en términos del tiempo de salida  $Td_i$ , además de tiempos  $t_k$  y  $t_{k+1}$  de eventos consecutivos  $k$  y  $k+1$  que el bus  $i$ .

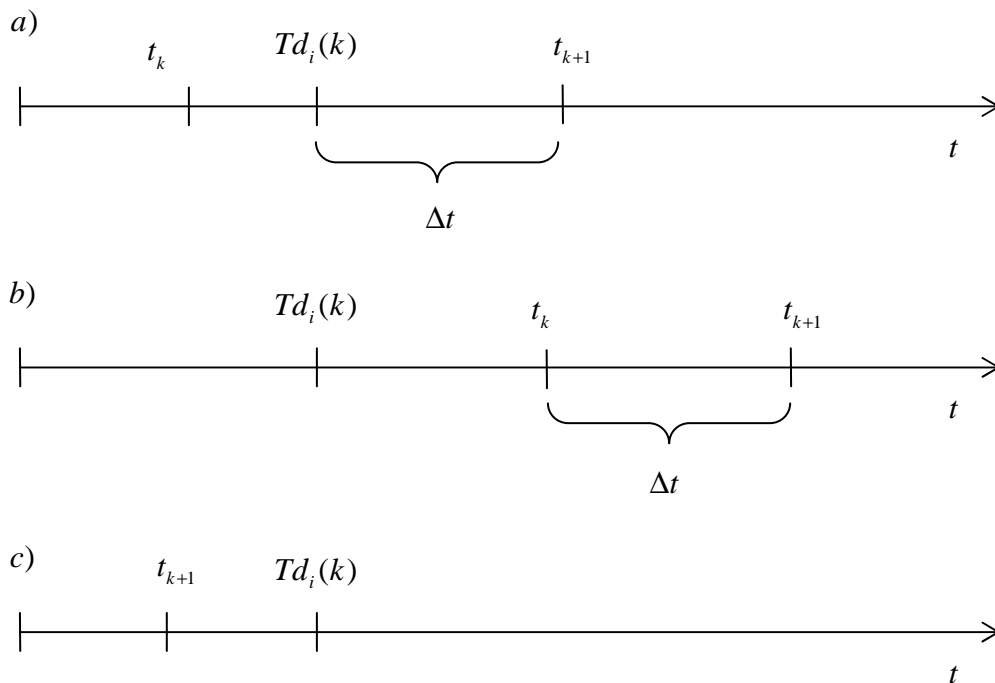


Figura 7.4. Tres opciones posibles para determinar la posición de los buses.

## Evolución temporal del sistema

El modelo 1, corresponde a un modelo predictivo discreto, el cual evoluciona cada vez que es generado un evento  $k$ , el cual sucede en un tiempo  $t_k$ . Luego, referir la variable que determina la evolución de los eventos  $\hat{T}_i(t)$  (ecuación (7.3)), con respecto a un nuevo tiempo indeterminado continuo  $t$ , con la única información de que pertenece al intervalo  $t_k \leq t \leq t_{k+d}$ , no es consistente con el objetivo de construir un modelo predictivo preciso. Luego, por consistencia con el modelo predictivo desarrollado, la variable  $\hat{T}_i$  debe estar planteada en términos de el tiempo  $t_k$ , para poder a continuación buscar el mínimo en el conjunto  $\{T_1(t_k), T_2(t_k), \dots, T_{Nb}(t_k)\}$  y lograr determinar el próximo evento.

Para aclarar este punto, en la Figura 7.5 se presenta un ejemplo de los parámetros considerados en el caso de medir el valor de  $T_i(t_k)$  para cinco buses en un mismo tiempo  $t_k$ . En esta Figura, se presentan los correspondientes diagramas de tiempo de los buses, los intervalos de las acciones de control ( $Su_i$  o  $h_i$ ) aplicadas, los tiempos de viaje  $Tv_i$  y los respectivos tiempos remanentes  $\hat{T}_i$ .

Luego, para mejorar la estructura de la ecuación (7.3), ésta se debería modificar por la siguiente ecuación (7.9):

$$\hat{T}_i(t_k) = t_{k-q_i} + Su_i(k - q_i) \cdot (h_i(k - q_i) + \hat{T}_i(k - q_i)) + \hat{T}v_i(k - q_i) - t_k \quad (7.9)$$

Donde  $q_i$  representa los retardos necesarios para ubicar el momento donde el bus  $i$  produjo su último evento (retardos que varían en cada evento y deben ser registrados en memoria). En particular, en la Figura 7.5 se tiene que  $q_1 = 4$ ,  $q_2 = 3$ ,  $q_3 = 1$ ,  $q_4 = 2$  y  $q_5 = 0$ .

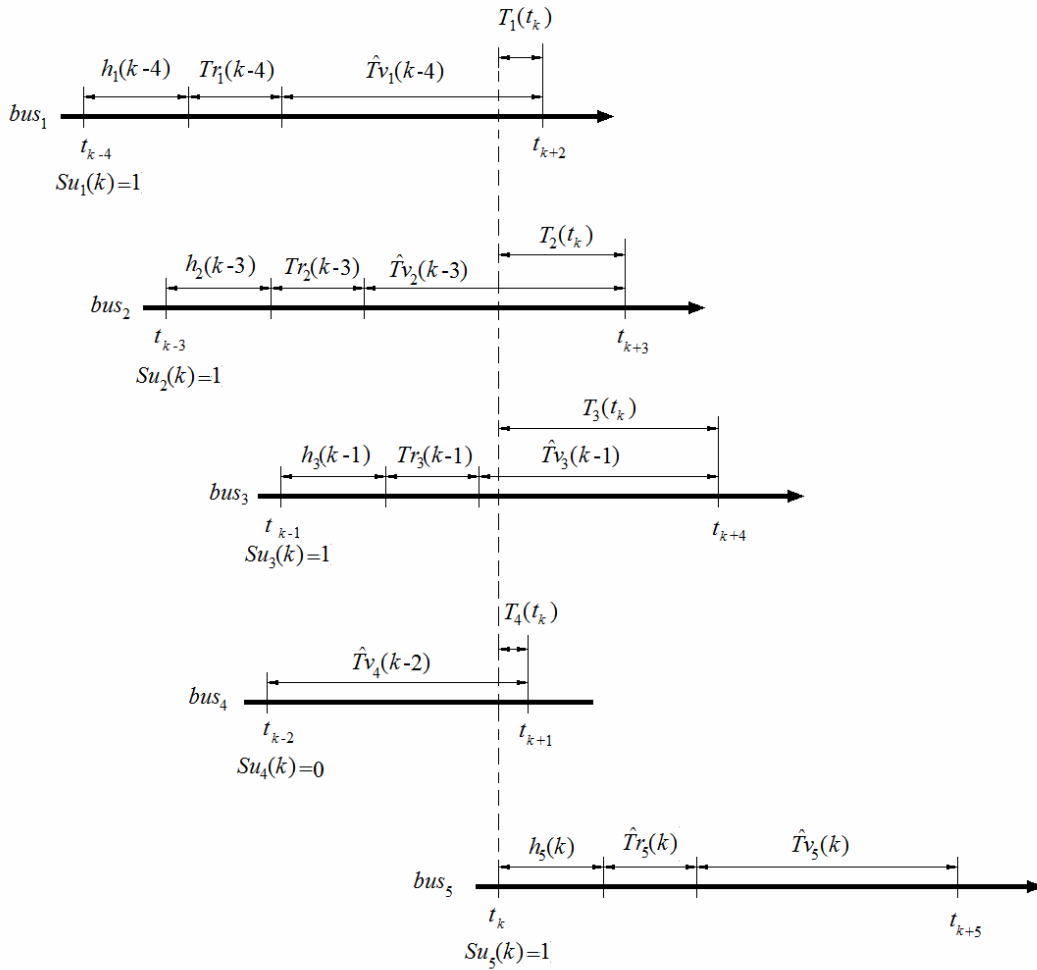


Figura 7.5: Ejemplo de evolución temporal del sistema para un conjunto de cinco buses

Una complicación adicional de la ecuación (7.3) es que, para relacionar las acciones de control con sus respectivos buses, se debe mantener registros para memorizar la última acción de control ( $Su_i$  o  $h_i$ ) y tiempo de transbordo ( $Tr_i$ ), para cada uno de los buses.

En definitiva, en esta tesis, no se utilizara ni la ecuación (7.3) ni (7.9), ya que se optará por una nueva estructura predictiva para determinar la evolución de los eventos en el sistema. Esta nueva estructura es más natural ya que incluye las posiciones de los buses y sólo se necesita retener los tiempos de salida  $Td_i(k)$ , para la última vez que cada uno de los buses produjo un evento.

### Determinación del próximo evento

Se define la posición  $x^p$  del paradero  $p=1, \dots, Np$ , con  $Np$  número de paraderos. En nuestro caso tenemos una distribución equidistante de paraderos, esto es  $x^p = (p-1) \frac{l_R}{Np}$  con  $l_R$  largo de la ruta R.

Si definimos a  $n_i$  como el paradero más próximo a un bus  $i$  aguas abajo en la ruta, la distancia (sobre la ruta)  $dn_i(k)$  de un bus  $i$  a su próximo paradero  $n_i$  para una ruta cerrada es:

$$dn_i(k) = \begin{cases} \min\{x^p - x_i(k) / x^p - x_i(k) > 0 \quad \forall p\} & \text{si } x_i(k) \leq x^{Np} \\ l_R - x_i & \text{si } x_i(k) > x^{Np} \end{cases} \quad (7.10)$$

Esto es, buscamos el mínimo entre todas las distancias entre los paraderos y la posición del bus analizado  $x_i(k)$ , siempre que esta distancia sea positiva en otras palabras sólo los paraderos aguas abajo. Además, existe un caso especial cuando el bus esta entre el último paradero y la estación terminal, la distancia del bus a esta estación es la diferencia entre el largo de ruta  $l_R$  y  $x_i(k)$ . Es claro, que hay que definir condiciones iniciales para  $x_i(k)$  y poder determinar  $dn_i(k)$  en el caso de  $k=0$ .

Ahora, existe un bus  $i^*$  en toda la ruta, que posee la mínima distancia a su paradero próximo, luego la distancia del bus que está más próximo a producir un evento es:

$$dn_{i^*}(k) = \min\{dn_i(k)\} \quad i = 1, \dots, Nb \quad (7.11)$$

El bus  $i^*$  será el que produzca el evento siguiente. Luego el paradero donde se producirá el evento será  $p^* = n_{i^*}$ .

## Evolución del tiempo discreto en el sistema

Ahora para el tiempo de salida  $Td_i(k)$  del bus  $i$ , se toma la definición ya planteada por Sáez *et al*, (2012), ecuación (7.5). De igual forma el tiempo de transbordo  $\hat{T}r_i(k)$  del bus  $i^*$  (que generó el evento) se obtiene como  $\hat{T}r_i(k) = \max\{t_{sub}\hat{B}_i(k), t_{baj}\hat{A}_i(k)\}$  donde  $t_{sub}, t_{baj}, \hat{B}_i(k)$  y  $\hat{A}_i(k)$  son el tiempo de subida, tiempo de bajada, pasajeros que suben al bus  $i$  y pasajeros que bajan del bus  $i$  respectivamente (Sáez *et al.*, (2012)). Los tiempos de  $t_{sub}$  y  $t_{baj}$  se obtuvieron de datos experimentales tomados del sistema de transporte metropolitano (Transantiago). La forma de determinar  $\hat{B}_i(k)$  y  $\hat{A}_i(k)$  se presenta más adelante en las ecuaciones (7.19) y (7.21) respectivamente.

Se define  $Tn_i(k)$  como el tiempo que demora un bus  $i$  para llegar a su próximo paradero  $n_i$  en el evento  $k$  como:

$$Tn_i(k) = \begin{cases} \frac{dn_i(k)}{v} & \text{si } t_k > \hat{T}d_i(k) \\ \hat{T}d_i(k) - t_k + \frac{dn_i(k)}{v} & \text{si } t_k \leq \hat{T}d_i(k) \end{cases} \quad (7.12)$$

Esto es, para un  $i$  bus cualquiera, que  $t_k > \hat{T}d_i(k)$  implica que en el instante  $k$  actual el bus ya salió del paradero (donde produjo por última vez un evento), luego es claro que el tiempo que falta para llegar a su próximo paradero es  $Tn_i(k) = \frac{dn_i(k)}{v}$ . Ahora si el bus aún no sale del paradero esto es,  $t_k \leq \hat{T}d_i(k)$  aparte del tiempo de viaje a su próximo paradero  $\frac{dn_i(k)}{v}$  debemos agregar el tiempo que le falta esperar en el presente paradero  $Td_i - t_k$ .

Por lo tanto, la evolución del tiempo discreto en este sistema es

$$t_{k+1} = t_k + \min \{Tn_i(k) / i = 1, \dots, Nb\} \quad (7.13)$$

### **Representación de la demanda por paradero y carga de los buses para una ruta única.**

En las ecuaciones (7.6) y (7.4) la carga de pasajeros predicha  $\hat{L}_i(k+1)$  sobre el bus  $i$ , como carga predicha por paradero  $\hat{\Gamma}_p(k+1)$  están descritas por una variable escalar lo que obliga a guardar la información de la carga de los pasajeros agregadamente. Una descripción desagregada de estas variables (un vector), permitiría incluir la información de los destinos, lo cual es clave en una formulación más general para un sistema de transporte que considere varios recorridos y estaciones de transbordo. En la siguiente sección se presenta una formulación que enfrenta el problema planteado, incluyendo la forma de predecir los destinos de los pasajeros. Cabe destacar, que una descripción desagregada permite definir con precisión las cargas de bajada y subida a los buses  $A_i$  y  $B_i$  respectivamente.

#### Demanda por paradero en ruta única

Considerando un número  $\hat{\lambda}_p$  de pasajeros estimado arribando por unidad de tiempo en la parada  $p$ , se tiene un aumento total de  $\hat{\lambda}_p(t_k - t_{k-1})$  pasajeros en un intervalo de tiempo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Entonces, el aumento de pasajeros en un paradero en un evento  $k$  se puede representar desagregadamente por el vector  $\Delta\hat{\Gamma}^p(k)$  de dimensión igual al número de destinos  $Nd$ , donde en sus componentes, el primer súper-índice representa el número de paradero y el segundo súper-índice representa el número de destino.

$$\Delta\hat{\Gamma}^p(k) = \left[ \Delta\hat{\Gamma}^{p,1}(k) \quad \Delta\hat{\Gamma}^{p,2}(k) \dots \quad \Delta\hat{\Gamma}^{p,Nd}(k) \right] \quad (7.14)$$

para los paraderos  $p = 1, \dots, Np$ . Donde un total de  $\hat{\lambda}_p(t_k - t_{k-1})$  pasajeros están distribuidos sobre los destinos  $d = p+1, \dots, Np$  de forma normal

$N(\mu, \sigma^2)$  con  $\mu = \frac{Np+p}{2}$  y  $2\sigma = \frac{Np-p}{2}$ . Claramente, otra opción es distribuir la carga proporcional a alguna matriz de origen destino de la ruta en cuestión, que varíe en el tiempo, donde la matriz  $M_{OD}$  origen destino es:

$$M_{OD}(k) = \begin{bmatrix} \Delta\hat{\Gamma}^{1,1}(k) & \Delta\hat{\Gamma}^{1,2}(k) & \dots & \Delta\hat{\Gamma}^{1,Nd}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta\hat{\Gamma}^{p,1}(k) & \Delta\hat{\Gamma}^{p,2}(k) & \vdots & \Delta\hat{\Gamma}^{p,Nd}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta\hat{\Gamma}^{Np,1}(k) & \Delta\hat{\Gamma}^{Np,2}(k) & \dots & \Delta\hat{\Gamma}^{Np,Nd}(k) \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

En la Figura 7.6 se presenta un ejemplo de cómo se asignaría la variación de carga en el paradero  $p=3$  en un intervalo de tiempo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Esto es, se asignará el número de  $\hat{\lambda}_3(t_k - t_{k-1})$  pasajeros distribuidos de forma normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , con  $\mu = (11+3)/2 = 7$  y  $2\sigma = \frac{(11-3)}{2} = 4$ . Esto es, distribuyendo carga desde los destinos 4 al 10 incluyendo el destino 1 donde se cierra el ciclo.

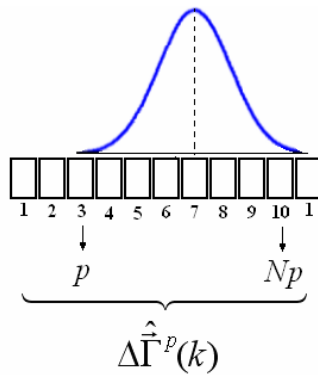


Figura 7.6. Distribución de la variación de carga.

Ahora, sea  $\hat{L}_i^d(k)$  la cantidad de pasajeros en el bus  $i$  que dirigen al destino  $d$  y  $L_{Max}$  capacidad máxima de los buses. La capacidad libre estimada del bus  $i^*$  que produce el evento en el instante  $k$  es



$$C_{i^*}(k) = L_{Max} - \sum_{d>p^*}^{Nd} L_{i^*}^d(k) \quad (7.16)$$

a continuación se define la carga desagregada en un paradero  $p$  luego de sucedido el evento  $k$  como el vector  $\bar{\Gamma}^p(k)$ , donde en sus componentes, el primer súper-índice representa el número de paradero y el segundo súper-índice representa el número de destino.

$$\bar{\Gamma}^p(k) = [\Gamma^{p,1}(k) \quad \Gamma^{p,2}(k) \dots \Gamma^{p,Nd}(k)] \quad (7.17)$$

para la actualización de esta variable se debe considerar tres situaciones:

a) Si el paradero  $p$  no es donde se produjo el evento ( $p \neq p^*$ ), en este caso la actualización de  $\bar{\Gamma}^p(k+1)$  para el evento  $k+1$  es la suma de  $\Delta\bar{\Gamma}^p(k)$  la variación de demanda más el vector  $\bar{\Gamma}^p(k)$  con el valor que tiene en  $k$ .

b) Ahora, si el paradero  $p$  es donde se produjo el evento ( $p = p^*$ ), hay que considerar una cierta cantidad de pasajeros que debe subir al bus, cantidad limitada por la capacidad libre del bus que produjo el evento  $C_{i^*}(k)$ . Luego, si el total de pasajeros considerados en el vector  $\bar{\Gamma}^p(k)$  pueden subir al bus ( $\sum_{d>p^*}^{Nd} \Gamma^{p,d}(k) \leq C_{i^*}(k)$ ), tenemos que  $\bar{\Gamma}^p(k)$  se debe descontar de los pasajeros finales en el paradero, esto sólo si, no se produjo una acción de *stop-skipping* en dicho paradero, ( $Su(k)=1$ ).

c) Finalmente, si el paradero  $p$  es donde se produjo el evento ( $p = p^*$ ), y la capacidad libre  $C_{i^*}(k)$  limita la subida del total de pasajeros en el paradero ( $\sum_{d>p^*}^{Nd} \Gamma^{p,d}(k) > C_{i^*}(k)$ ), se define

el vector  $\bar{M}_p(k)$  cuyas componentes contienen una fracción de la carga de las componente

del vector  $\bar{\Gamma}_p(k)$  en el instante  $k$  tal que  $\sum_{d>p^*}^{Nd} M^{p^*,d}(k) = C_{i^*}(k)$ . Luego  $\bar{M}_p(k)$  se debe

descontar de los pasajeros finales en el paradero, esto sólo si, no se produjo una acción de *stop-skipping* en dicho paradero, ( $Su(k)=1$ ).

La carga predicha  $\hat{\Gamma}^p(k+1)$  en el evento  $k+1$  se resumen de los tres casos analizados se presenta en la ecuación (7.18).

$$\hat{\Gamma}^p(k+1) = \begin{cases} \Delta\hat{\Gamma}^p(k+1) + \bar{\Gamma}^p(k) & \text{si } p \neq p^* \\ \Delta\hat{\Gamma}^p(k+1) + \bar{\Gamma}^p(k)(1 - Su(k)) & \text{si } p = p^* \text{ y si } \sum_{d>p^*}^{Nd} \Gamma^{p,d}(k) \leq C_{i^*}(k) \\ \Delta\hat{\Gamma}^p(k+1) + \bar{\Gamma}^p(k) - \bar{M}^p(k)Su(k) & \text{si } p = p^* \text{ y si } \sum_{d>p^*}^{Nd} \Gamma^{p,d}(k) > C_{i^*}(k) \end{cases} \quad (7.18)$$

Es importante notar que, para mayor precisión, podemos identificar a los pasajeros  $\hat{B}_{i^*}(k)$  que suben al bus  $i^*$  en el paradero  $p^*$  en evento  $k$  como:

$$\hat{B}_{i^*}(k) = \begin{cases} \sum_{d>p^*}^{Nd} \Gamma^{p^*,d}(k) & \text{si } \sum_{d>p^*}^{Nd} \Gamma^{p^*,d}(k) \leq C_{i^*}(k) \\ C_{i^*} & \text{si } \sum_{d>p^*}^{Nd} \Gamma^{p^*,d}(k) > C_{i^*}(k) \end{cases} \quad (7.19)$$

### Carga de los buses en ruta única

Ahora la variación de carga estimada desagregada de un bus  $i$  en el evento  $k$  se define como  $\Delta\hat{L}_i(k) = [\Delta\hat{L}_i^1(k) \quad \Delta\hat{L}_i^2(k) \dots \Delta\hat{L}_i^{Np}(k)]$ , donde en sus componentes, el súper-índice representa el destino del pasajero y el sub-índice representa el número de bus:

$$\Delta \vec{L}_i(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq i^* \\ \vec{\Gamma}^{p^*}(k) Su(k) & \text{si } i = i^* \text{ y } \sum_{d > p^*}^{Nd} \Gamma^{p^*,d}(k) \leq C_{i^*}(k) \\ \vec{M}^{p^*}(k) Su(k) & \text{si } i = i^* \text{ y } \sum_{d > p^*}^{Nd} \Gamma^{p^*,d}(k) > C_{i^*}(k) \end{cases} \quad (7.20)$$

luego la carga desagregada del bus es  $\hat{L}_i(k) = [\hat{L}_i^1(k) \hat{L}_i^2(k) \dots \hat{L}_i^{Np}(k)]$  con  $L_i^{p^*}(k) = 0$  (bajan todos los pasajeros que tenían como destino el paradero  $p^*$  donde se produjo el evento), la carga desagregada estimada es  $\hat{L}_i(k+1) = \Delta \hat{L}_i(k+1) + \vec{L}_i(k)$ .

Notar que los pasajeros que bajan del bus que produjo el evento se determinan como:

$$A_{i^*}(k) = L_{i^*}^{p^*}(k) \quad (7.21)$$

Notar también que una acción de control de *stop-skipping* en el sistema en un evento  $k$  en el bus  $i$  en una parada  $p$  se puede expresar como:

$$Su_i(k) = \begin{cases} 0 & \text{si hay salto de estacion } p \text{ y si } \hat{L}_i^p(k) = 0 \\ 1 & \text{si no} \end{cases} \quad (7.22)$$

#### 7.1.4. Restricciones operacionales

El modelo predictivo propuesto para un sistema de transporte público debe satisfacer algunas restricciones físicas y operacionales (Sáez *et al*, 2012).

La primera, corresponde a una restricción de capacidad (ecuación 7.4). La cual es una restricción física en el sentido que el bus no puede transportar más pasajeros que su máxima capacidad. Por lo cual, es posible aplicar una política de servicio mediante una capacidad

diferente para evitar por ejemplo el hacinamiento. La segunda restricción es de consistencia operacional, que exige a todos los pasajeros un origen y destino específico.

Con respecto a la demanda, se asume que no hay nodos de transferencia, y por lo tanto, una vez que los pasajeros están a bordo del bus sólo abandonará el mismo bus en su paradero de destino. También, un pasajero se bajará una vez que arribe a su destino (los pasajeros desean minimizar su tiempo de viaje, así que suponemos que los pasajeros no se quedan en los buses en los bucles, es decir no recorren caminos innecesarios).

En cuanto a la operación de bus, el modelo obliga a parar en una estación si algún pasajero solicita bajar, a pesar de que el modelo recomienda la realización de una acción de *stop-skipping*, similar a lo que se sugiere por parte de Sun y Hickman (2005). Por lo tanto, la acción de salto no se puede aplicar si la próxima parada es el destino de algún pasajero, y el bus debe parar. Esta estrategia parece funcionar mejor así, ya que el incluirla directamente como una penalización en la función objetivo implicaría que algunos de los pasajeros podrían terminar de bajar en una estación diferente de su destino previsto. Por otro lado, si el modelo determina una acción de *holding* en una parada determinada, que no es físicamente apropiado para este tipo de operación, a continuación, el bus sólo se detiene durante un lapso requerido para una operación de transferencia de pasajeros normal.

Como una limitación física, y también por razones prácticas, la realización de acciones de control se puede aplicar sólo en las paradas específicas, debidamente equipados para llevar a cabo tal acción. Por otro lado, la acción de *stop-skipping* se podría aplicar en todas las paradas de la línea, excepto al llegar al terminal.

Cada bus está identificado por una etiqueta interna única y el modelo permite a los buses pasar a otros buses a lo largo de su ruta.

### 7.1.5. Función objetivo

Se define adecuadamente una función objetivo con el fin de realizar decisiones en tiempo real y optimizar el sistema dinámico (Sáez *et al*, 2012). En este caso, se minimiza la expresión (7.23), que consta de cuatro componentes, orientados al costo experimentado por los usuarios a través de tiempos de espera en los paraderos y tiempos de viaje a bordo de los buses. Analíticamente,

$$\min_{\{u(k), u(k+1), \dots, u(k+Np-1)\}} \sum_{\ell=1}^N \left[ \theta_1 \cdot \hat{H}_i(k+\ell) \hat{\Gamma}_p(k+\ell) + \theta_2 \cdot (\hat{H}_i(k+\ell) - H_d)^2 + \theta_3 \cdot \hat{L}_i(k+\ell) h_i(k+\ell-1) + \theta_4 \cdot \hat{\Gamma}_p(k+\ell) \hat{H}_{i+1}(k+\ell+z_{i+1}) (1 - Su_i(k+\ell-1)) \right]_{\substack{i=i(k+\ell-1) \\ p=p(k+\ell-1)}} \quad (7.23)$$

donde  $\{u(k), \dots, u(k+N-1)\}$  es la secuencia de acciones de control con  $u(k+\ell-1)$  una acción de control que puede ser un salto de estación o una retención (de 30,60 o 90 segundos) cuando el bus  $i$  genera el evento  $k+\ell-1$ . Con  $Np$  el horizonte de predicción y  $b$  el número de buses de la flota.

Notar que  $i = i(k+\ell-1) \in \{1, \dots, Nb\}$ ,  $p = p(k+\ell-1) \in \{1, \dots, Np\}$ , si se considera que el evento futuro  $k+\ell-1$  está generado por un bus  $i(k+\ell-1)$  arribando a una estación específica aguas abajo  $p(k+\ell-1)$ . En la expresión (7.23),  $\theta_j$ ,  $j=1, \dots, 4$ , son parámetros de ponderación, y deben ser sintonizados dependiendo del problema específico analizado y también de la interpretación física de los diferentes componentes.

La variable  $H_d$  corresponde al intervalo de diseño o *headway* deseado (definido en el capítulo 4) diseñado para servir la demanda del sistema durante un cierto periodo de tiempo.

Normalmente, el diseño del *headway* deseado se relaciona con la frecuencia de diseño que depende directamente de las cargas del segmento, y puede ser determinado como la frecuencia mínima necesaria para mover a los pasajeros en el segmento más cargado a lo largo de la ruta (ver sección 4.3). En los sistemas más sofisticados, la frecuencia de diseño se calcula mediante la minimización de una función objetivo estática considerando los costos del operador, así como los costos para el usuario, en cuyo caso la frecuencia óptima debe ser mayor que la frecuencia mínima capaz de llevar a todos los pasajeros en su conjunto.

El primer término de la ecuación (7.23) cuantifica el tiempo total de espera de los pasajeros en las paradas y depende del *headway* de diseño, junto con la carga en la parada de autobús. El segundo término captura la regularización del *headway* entre buses, para mantener éste lo más cerca posible al correspondiente *headway* de diseño. El tercer componente mide el retraso asociado con pasajeros a bordo de un vehículo cuando se lleva a cabo una retención en una estación de control debido a la aplicación de una acción de *holding*. Por último, el cuarto componente es el tiempo adicional de espera de los pasajeros (cuya estación es saltada por un vehículo) asociado con la estrategia de *stop-skipping*.

Notar que la función objetivo propuesta se orienta a la satisfacción de los usuarios a través de tiempos de espera y de viaje, debido a que se propone un esquema a nivel operativo. Por lo tanto, asumiendo un tamaño fijo de flota obtenido a partir de la frecuencia de diseño, que es el inverso del *headway* de diseño definido en la ecuación (7.23), el beneficio pertinente de la aplicación de las estrategias de control propuestas en tiempo real, está a nivel de servicio de los pasajeros. Asumiendo estas consideraciones, las componentes de costos operativos no fueron incluidos en la especificación de la función objetivo, aunque bajo otras condiciones podrían ser importantes en las decisiones en tiempo real.

## 7.2. Solución del problema de optimización correspondiente al controlador predictivo híbrido

Existen varios métodos para generar las restricciones especiales que fuercen la solución óptima del problema de programación entera lineal, hacia la solución óptima entera deseada, como son el método de ramificar - acotar y el método de planos de corte.

Debido a la decisión de sólo aceptar soluciones enteras para las acciones de control, el problema a resolver en este trabajo es de programación no lineal entera pura, cuya solución más simple es a través del recorrido exhaustivo del árbol de decisiones correspondiente. Una mejora a este método, en términos de tiempo de cómputo, se plantea a continuación.

### 7.2.1. Solución del problema de optimización basada en algoritmo de poda probabilística

La solución del problema de optimización resultante del controlador predictivo, implica determinar una secuencia factible de control óptima de  $N$  pasos. Donde, finalmente se selecciona en cada instante de la implementación el primer elemento de la secuencia. En el caso de que el número de acciones factibles en cada paso sea pequeño, la búsqueda de una solución, se puede construir en base a un árbol de decisiones. Esto es, dada la acción de control seleccionada en un nodo en un instante  $k$ , se generan un número de ramas (en un instante  $k+1$ ) que está en directa relación con el número de acciones de control factibles.

En el caso del sistema de transporte público analizado, la acción de control aplicada, en cada instante, puede tomar una de las cinco siguientes opciones:

$$\begin{aligned} u_1: & \textit{ Holding } 0 \text{ [s]} \\ u_2: & \textit{ Salto de paradero (skipping).} \\ u_3: & \textit{ Holding } 30 \text{ [s]} \end{aligned} \tag{7.24}$$

$u_4$ :  *Holding 60 [s]*

$u_5$ :  *Holding 90 [s]*

Considerando la dinámica del sistema controlado, podemos afirmar que el área de factibilidad es muy reducida, debido a las restricciones operativas impuestas. Esto es, hay sólo dos estaciones donde se puede realizar la acción de control de *holding*, no se puede hacer *stop-skipping* en el primer paradero, y no se permite realizar una acción de *stop-skipping* si hay alguna persona que desea bajar. Luego, bajo estas condiciones, solucionar el problema de optimización considerando la enumeración explícita de todas las ramas del árbol, en cada paso, es aún práctica.

Sin embargo, para disminuir el tiempo de cómputo que implica la enumeración explícita de todas las posibles acciones de control, se desarrolló una estrategia de solución que considera la selección probabilística de las secuencias de control factibles. En concreto esto implica una poda del árbol de acciones de control posibles, es decir, asignar a cada nueva rama una cierta probabilidad. Experimentalmente se observó que las acciones de control posibles, en (7.24), pueden ser ordenadas por su probabilidad de ocurrencia de la siguiente forma:

$$P(u_1) > P(u_2) > P(u_3) > P(u_4) > P(u_5) \quad (7.25)$$

Esto es, después de la detención normal en un paradero, la acción que le sigue en probabilidad de ocurrencia es saltarse un paradero (*stop-skipping*), luego les siguen las acciones de *holding* en orden presentado en (7.25). Este orden de asignación de probabilidades es consecuencia de las restricciones operativas.

Luego, la cantidad de las  $n$  primeras acciones de control (según el orden en la definición 7.24) seleccionadas en cierta rama se determina por la función cajón  $n = [n_u * r]$  donde,  $n_u$  es el número de acciones de control factibles en esa rama y  $r$  es un número aleatorio entre 0 y 1. Esta forma de seleccionar la cantidad de  $n$  primeras acciones de control, reproduce el



orden experimental de probabilidad de ocurrencia. Por ejemplo, es más probable que se produzca una acción de *stop-skipping* que una de *holding*.

En la Figura 7.7 se presenta un ejemplo de árbol generado por el algoritmo recursivo de cuatro pasos, donde las acciones de control son evaluadas exhaustivamente. En el nivel cero, se considera que existen sólo las acciones factibles  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  en las cuales la función objetivo tiene los siguientes valores  $J_0^1$ ,  $J_0^2$  y  $J_0^3$  respectivamente. A partir de la acción de control  $u_1$  en el nivel cero es factible aplicar sólo dos acciones de control en el paso siguiente en el nivel uno,  $u_2$  y  $u_4$  con sus respectivos valores  $J_1^1$  y  $J_1^2$ . Así sucesivamente, construyendo otras ramas se forma el árbol de todas las posibles acciones de control factibles y los correspondientes valores de la función objetivo. Los niveles descritos corresponden a los pasos futuros predichos por el algoritmo predictivo.

Ahora, se considera una trayectoria factible a una secuencia de cuatro valores de acciones de control, donde cada valor es obtenido en niveles distintos y consecutivos del árbol de decisiones. Por ejemplo en la Figura 7.7 en la secuencia  $\{u_1, u_2, u_2, u_2\}$  los elementos en orden de precedencia pertenecen respectivamente a los niveles 0, 1, 2 y 3 cuyo valor final de función objetivo es  $J_0^1 + J_1^1 + J_2^1 + J_3^1$  donde el número inferior representa el nivel correspondiente y el superior el número de secuencia factible. En la tabla 7.1 se presentan todas las secuencias correspondientes al árbol de la Figura 7.7, con sus correspondientes valores finales de función objetivo (ecuación 7.23).

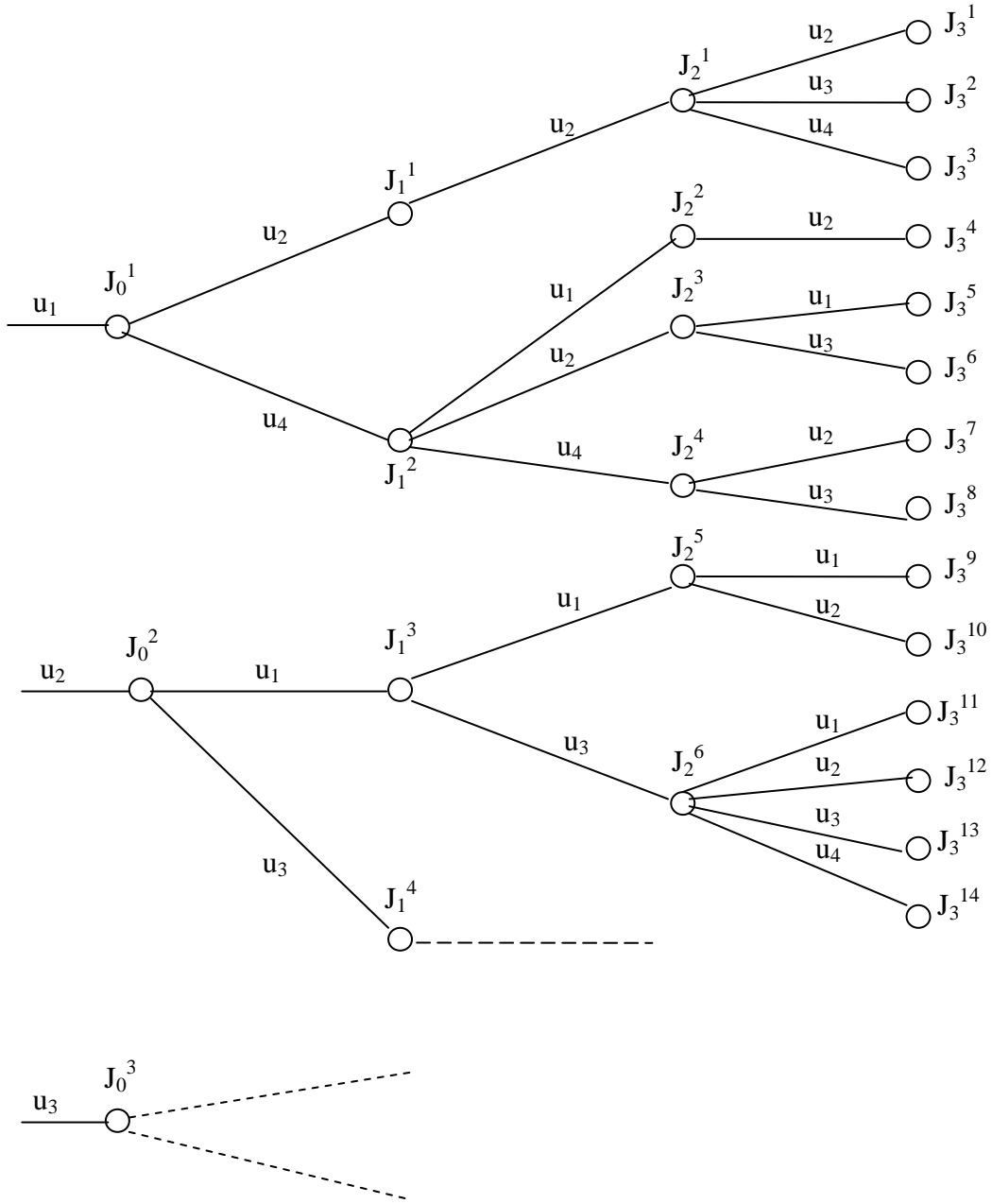


Figura 7.7: Árbol de acciones de control factible completo

Tabla 7.1

Secuencia	Suma de evaluación de la F.O.
$\{u_1, u_2, u_2, u_2\}$	$J_0^1 + J_1^1 + J_2^1 + J_3^1$
$\{u_1, u_2, u_2, u_3\}$	$J_0^1 + J_1^1 + J_2^1 + J_3^2$
$\{u_1, u_2, u_2, u_4\}$	$J_0^1 + J_1^1 + J_2^1 + J_3^3$
$\{u_1, u_4, u_1, u_2\}$	$J_0^1 + J_1^2 + J_2^2 + J_3^4$
$\{u_1, u_4, u_2, u_1\}$	$J_0^1 + J_1^2 + J_2^3 + J_3^5$
$\{u_1, u_4, u_2, u_3\}$	$J_0^1 + J_1^2 + J_2^3 + J_3^6$
$\{u_1, u_4, u_4, u_2\}$	$J_0^1 + J_1^2 + J_2^4 + J_3^7$
$\{u_1, u_4, u_4, u_3\}$	$J_0^1 + J_1^2 + J_2^4 + J_3^8$
$\{u_2, u_1, u_1, u_1\}$	$J_0^2 + J_1^3 + J_2^5 + J_3^9$
$\{u_2, u_1, u_1, u_2\}$	$J_0^2 + J_1^3 + J_2^5 + J_3^{10}$
$\{u_2, u_1, u_3, u_1\}$	$J_0^2 + J_1^3 + J_2^6 + J_3^{11}$
$\{u_2, u_1, u_3, u_2\}$	$J_0^2 + J_1^3 + J_2^6 + J_3^{12}$
$\{u_2, u_1, u_3, u_3\}$	$J_0^2 + J_1^3 + J_2^6 + J_3^{13}$
$\{u_2, u_1, u_3, u_4\}$	$J_0^2 + J_1^3 + J_2^6 + J_3^{14}$
$\{u_2, u_3, \dots\}$	$J_0^2 + J_1^4 + \dots$
$\{u_3, \dots\}$	$J_0^3 + \dots$

En la Figura 7.8 se presenta el resultado al aplicar el algoritmo de poda probabilística al árbol de decisiones descrito en la Figura 7.7. En la tabla 7.2 se presentan las secuencias resultantes con sus respectivas evaluaciones de la función objetivo.

Este algoritmo, no asegura la optimalidad de la solución, pero experimentalmente a mostrado interesantes resultados muy cercanos al óptimo, pero con un tiempo de procesamiento de al menos la mitad del tiempo utilizado por una enumeración explícita del árbol de decisiones (ver tabla 7.5).

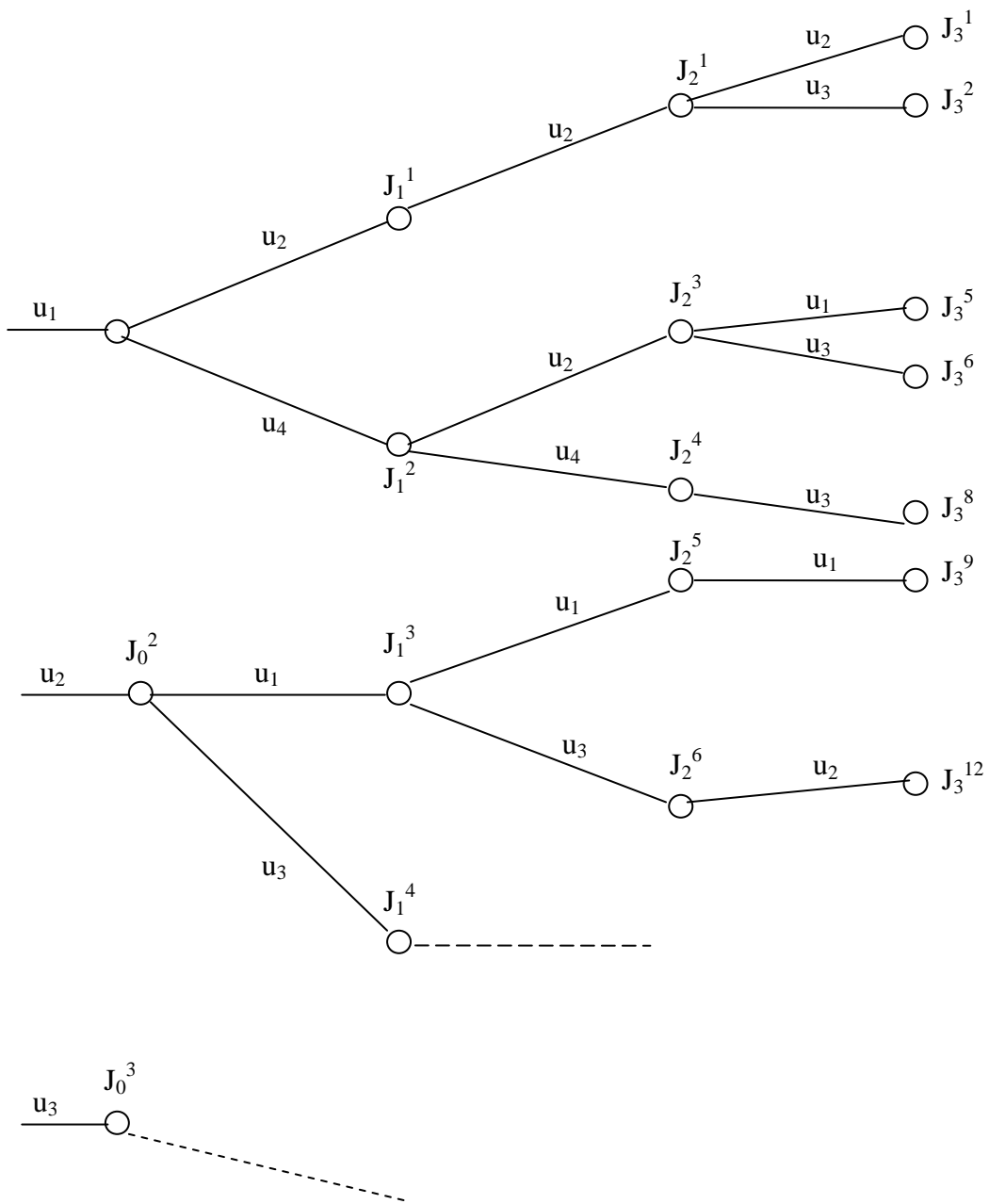


Figura 7.8: Árbol de acciones de control factible podado

Tabla 7.2

Secuencia	Suma de evaluación de la F.O.
$\{u_1, u_2, u_2, u_2\}$	$J_0^1 + J_1^1 + J_2^1 + J_3^1$
$\{u_1, u_2, u_2, u_3\}$	$J_0^1 + J_1^1 + J_2^1 + J_3^2$
$\{u_1, u_4, u_2, u_1\}$	$J_0^1 + J_1^2 + J_2^3 + J_3^5$
$\{u_1, u_4, u_2, u_3\}$	$J_0^1 + J_1^2 + J_2^3 + J_3^6$
$\{u_1, u_4, u_4, u_3\}$	$J_0^1 + J_1^2 + J_2^4 + J_3^8$
$\{u_2, u_1, u_1, u_1\}$	$J_0^2 + J_1^3 + J_2^5 + J_3^9$
$\{u_2, u_1, u_3, u_2\}$	$J_0^2 + J_1^3 + J_2^6 + J_3^{12}$
$\{u_2, u_3, \dots\}$	$J_0^2 + J_1^4 + \dots$
$\{u_3, \dots\}$	$J_0^3 + \dots$

Este algoritmo resultará poco eficiente en la medida que se aumente el número de pasos, debido a que el tiempo computacional crecerá exponencialmente con respecto a este valor. En el caso que las acciones de control aumentasen a un número considerable, una solución con un algoritmo evolutivo o de enjambres sería competitiva. Ahora, en la situación analizada, aplicar un algoritmo genético o de enjambres no sería práctico, ya que implicaría utilizar un área de factibilidad proporcionalmente muy pequeña. Luego, la solución con enumeración explícita o poda probabilística en, este caso, aún son competitivas y más exactas.

Se aprecia de la tabla 7.2 que el número de secuencias factibles a analizar es mucho menor que la tabla elaborada para una enumeración explícita. Además existe una alta probabilidad que el resultado sea cercano a óptimo.

Notar que las probabilidades asignadas para las opciones (7.9) pueden ser actualizadas en el tiempo de acuerdo a la información recolectada en instantes anteriores.

## 7.3. Resultados de la estrategia propuesta

### 7.3.1. Descripción del experimento

La estrategia propuesta se aplica sobre un corredor de autobús de 4000 [m] con una flota de buses  $b = 6$ , con una capacidad para 72 pasajeros. El sistema consta de  $P = 10$  estaciones distribuidas uniformemente sobre la ruta del autobús (distancia entre las estaciones es de 400 [m]). La acción de control de *holding* se aplica en las paradas de autobús 3 y 8, mientras que las acciones de *stop-skipping* se pueden aplicar en todas las estaciones. La simulación supone incertidumbre en la demanda en línea para la llegada de pasajeros a las estaciones, y sigue un proceso de Poisson con tasas de demanda diferenciada por estación y período (ver Figura 7.9). Las tasas de subida y bajada promedio son  $t_a = 2$  [s/pas] y  $t_b = 1.5$  [s/pas], en segundos por pasajero respectivamente. El deseado *headway* (referencia) es  $H_d = 6$ [min]. Por otra parte, se supone que los buses se mueven a una velocidad constante  $v_0 = 25$ [km/h] (6.94[m/s]) cuando no están en una parada. El periodo de simulación total fue de dos horas, incluido un período transitorio (descartado por las estadísticas), de 15 minutos al principio de la simulación.

En la Figura 7.9 se presentan el tiempo medio de arribo por pasajero a las paradas de ruta R, medida en [s/pas]. Esto es concordante con la teoría de colas que considera tiempos de llegada a un paradero con una distribución de Poisson ( $\lambda$ ) de media  $\lambda$ . Se aprecia además como la media  $\lambda$  disminuye a medida que nos acercamos a la zona central de la ruta, donde se asume que la ruta tiene la mayor demanda de pasajeros.

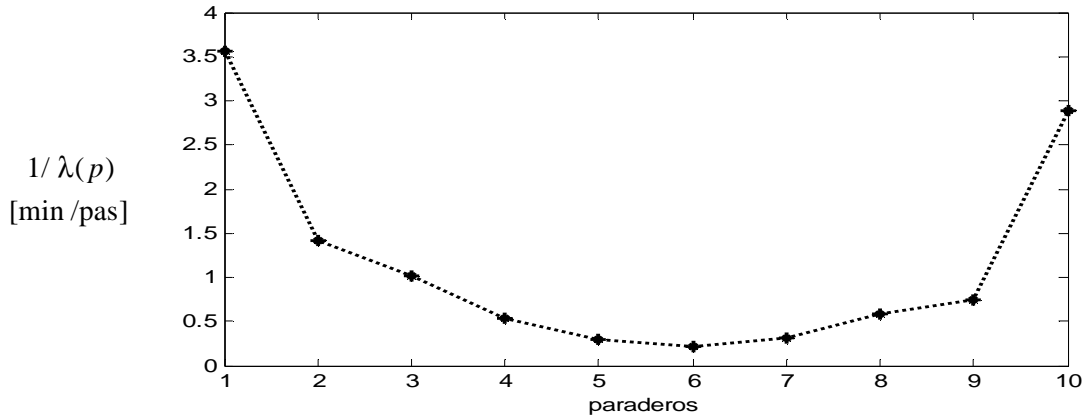


Figura 9.4: Tiempos medios de llegada

Se considera también, modelar estadísticamente los destinos de los pasajeros con funciones  $f(p)$  de densidad de probabilidad gaussianas, centradas en la estación ubicada en el punto medio entre la estación donde abordan los pasajeros y la estación final de la ruta. Para la ruta R (Figura 7.10) se presentan un ejemplo de las funciones de densidad de probabilidad.

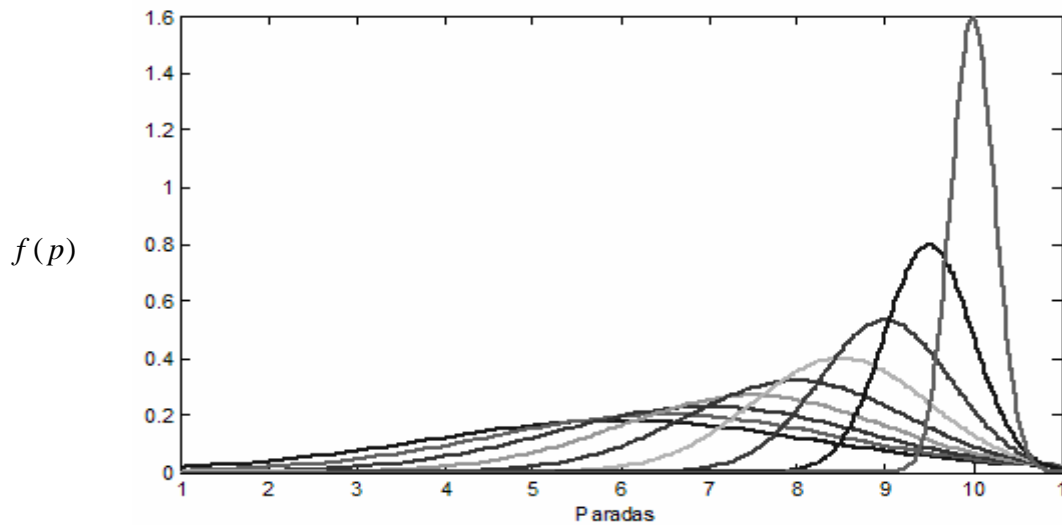


Figura 7.10. Densidades de probabilidad para los destinos.

A continuación, se propone un análisis de los parámetros de ponderación de la función objetivo de la expresión (7.23) para ser utilizadas en los experimentos descritos en la sección 4.4.

### 7.3.2. Sintonización de parámetros de la función objetivo

Los parámetros de la función objetivo propuestos se sintonizaron por medio de un algoritmo de enjambres de partículas. Se diseñó una serie de experimentos para determinar, en este escenario de simulaciones en particular, los valores óptimos de los parámetros mencionados, en términos de minimización del tiempo de espera promedio, que en definitiva es el índice utilizado para comparar los distintos controladores diseñados en este trabajo.

Los parámetros para la función objetivo (7.8) son  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$ . En este trabajo se utilizó el algoritmo PSO, llamado optimizador con enjambres de partículas con convergencia garantizada (*Guaranteed Convergence Particle Swarm Optimiser*, GCPSO, Kennedy y Eberhart, (1995) el cual asegura convergencia local evitando la convergencia prematura típica del algoritmo original (ver detalles en la sección 5.3.3 y anexo C).

Se aplicó el algoritmo de enjambres de partículas sintonizando los parámetros ya descritos, para el controlador predictivo híbrido diseñado. Para las simulaciones se consideró  $Nd=30$  días con distintas demandas.

La función objetivo para el algoritmo de enjambres GCPSO fue  $\sum_{d=1}^{Nd} \bar{T}_w(d)$  donde  $\bar{T}_w(d)$  es el tiempo de espera medio de todos los pasajeros en el sistema de transporte público, para una simulación de dos horas en el día  $d$ .

El algoritmo de enjambres de partículas consideró los siguientes parámetros:

- Saturación de velocidad de la partícula (saturación): 50
- Número de épocas: 20
- Tamaño de la población: 20
- Constante de aceleración 1 (mejor influencia local) =2
- Constante de aceleración 2 (mejor influencia global) =2
- Peso de inercia inicial: 0.9



- Peso de inercia final: 0.4

Los valores para los parámetros obtenidos con GCPSO, se presentan en la tabla 7.3

Tabla 7.3

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	Función objetivo del algoritmo de enjambres
8997	98	9027	277	30.13 [min]

Los valores de los parámetros de la función objetivo obtenidos son razonables, ya que  $\theta_1$  y  $\theta_3$  son los parámetros que ponderan, los índices de comportamiento más relacionados con el tiempo de espera de los pasajeros. Los parámetros  $\theta_2$  y  $\theta_4$  están relacionados con el tiempo de espera, de una manera más indirecta.

Analizando la teoría correspondiente sólo podemos asegurar que los valores de la tabla 7.3 son cercanos a un óptimo local. Es altamente probable que con un número mayor de generaciones y partículas se encuentre una solución mejor. Notar que los resultados obtenidos para estos parámetros se obtuvieron en un tiempo no menor a cinco días de procesamiento computacional.

A continuación se presenta los resultados promedio, de la operación del sistema de transporte público durante 30 días, para ilustrar el comportamiento del controlador HPC para un horizontes de tiempo  $N = 2, 5$  y  $10$  en comparación con dos esquemas de operación: 1) el sistema de lazo abierto, que no tiene en cuenta ningún tipo de control en tiempo real, y 2) el controlador difuso tal como se describió en el capítulo 6, sin tener en cuenta las características de la predicción de demanda en las decisiones de control. En la tabla 7.4, se presenta el tiempo de espera promedio de los pasajeros en las paradas, el tiempo de viaje promedio sobre vehículo y el tiempo total del viaje por pasajero (obtenidos con un PC Intel CORE i7). Asimismo, se muestra el porcentaje de eventos afectados por la estrategia de

*holding* (% h30, %h60, %h90), así como por la estrategia de *skipping* (% Su) y finalmente se muestran los eventos donde no se aplicó ninguna de las estrategias mencionadas.

Tabla 7.4. Rendimiento promedio de HPC para  $N = 2, 5$  y  $10$ .

Horizonte de predicción	Tiempo de espera [min]	Tiempo sobre el vehículo [min]	Tiempo total [min]	Acciones de control sobre los eventos				
				Sin acción [%]	Su [%]	h 30 [%]	h 60 [%]	h 90 [%]
				$N=2$	3.01	4.39	7.41	73
$N=5$	3.26	4.24	7.51	75	18	6	1	0
$N=10$	3.30	4.26	7.57	76	15	5	3	1

Observamos diferencias en el rendimiento sobre la base de cambiar el horizonte de predicción, y por lo tanto,  $N = 2$ , parece ser un buen horizonte de predicción para esta configuración del sistema con sus características en términos de la oferta y demanda. En general, para valores superiores que  $N = 2$  en el horizonte de tiempo ( $N = 5$  y  $N = 10$ ) los tiempos de espera son mayores. Este fenómeno puede explicarse por el deterioro de las capacidades de predicción cuando el horizonte de tiempo se alarga, debido a la alta incertidumbre asociada a la demanda futura.

Desde la tabla 7.4 se constata la relación de ocurrencia de las acciones de control, en el momento que se produce un evento. Se aprecia como dentro de las pocas veces donde existe una acción de control (sólo aproximadamente el 25% de los eventos) el orden de ocurrencia es el supuesto en la relación (7.10). Esto es, en orden descendente las acciones de *skipping*, luego las de *holding* de 30, 60 y 90 [min] consecutivamente.

La tabla 7.5 muestra los resultados promedios obtenidos en 30 días, en la simulaciones de las estrategias de control HPC-EE con enumeración explícita de todas las ramas del árbol de soluciones, la estrategia HPC-PP con poda probabilística, la estrategia de control difuso

( *Holding y stop-skipping* basado en reglas difusas con asignación de  *headway*), así como la opción de lazo abierto con un tiempo de simulación de dos horas. Estos resultados, son los promedios del tiempo de espera y tiempo de viaje por pasajero. Además en la tabla 7.5, se añade un índice  *B*, que cuantifica el beneficio asociado con el desempeño del controlador propuesto con respecto al sistema de lazo abierto, definido en la sección 5.4.2.

Tabla 7.5. Promedio y desviación estándar del tiempo de espera y tiempo de viaje por pasajero y el cómputo del tiempo para 30 días con demandas diferentes.

Estrategias de control	Tiempo de espera [min]			Tiempo de viaje [min]		Tiempo de cómputo promedio de 30 días [s]
	Media	Desv.	B [%]	Media	Desv. [min]	
Lazo abierto	7.07	1.01	-	4.25	0.16	35.6
<i> Holding y stop-skipping</i> basado en reglas difusas con asignación de <i> headway</i>	3.18	0.27	55.02	4.21	0.16	56.0
Control HPC-PP	3.01	0.29	57.38	4.39	0.18	160.5
Control HPC-EE	3.01	0.29	57.41	4.39	0.18	355.8

El tiempo ocupado por el algoritmo HPC-PP es 55% menor que el tiempo necesario para aplicar el algoritmo HPC-EE. Sin embargo la diferencia en el beneficio entre estos dos resultados es sólo del 0.03%, lo que confirma el buen comportamiento logrado con la estrategia de optimización con poda probabilística. Por último, la estrategia de control HPC-PP es 2.36% mejor que el controlador difuso con espera distribuida en función de la demanda por paradero.

### 7.3.3. Sensibilidad del controlador HPC-PP con respecto a la velocidad

Se plantea un análisis del efecto de la varianza de la velocidad en los resultados del controlador diseñado, en particular en los tiempos de espera del sistema. Para considerar la varianza en la velocidad, en este apartado se realizó un estudio de la influencia en la imprecisión del valor de velocidad de los buses en el controlador diseñado. Por lo cual se realizaron simulaciones donde la imprecisión del valor de la velocidad iba en aumento. Esto es, la velocidad considerada en cada simulación, fue una variable aleatoria de media constante y varianza variable. En la Figura 7.11, para el controlador difuso con control de la posición relativa de los buses, el control difuso con *headway* distribuido en función de la demanda del paradero correspondiente y el controlador HPC-PP, se graficó la variación del beneficio obtenido en tiempo de espera con respecto a la imprecisión de la medida de la velocidad. Se realizaron 30 simulaciones para cada aumento en un 5% de varianza de velocidad.

De la Figura 7.11 se aprecia como el deterioro del rendimiento, hasta un 25% de error en la medición de velocidad, del controlador HPC-PP es menos pronunciado que los controladores difusos diseñados en los capítulos 5 y 6. Sin embargo para valores de error mayores de 25% el comportamiento es peor que el controlador difuso con tiempo de espera distribuido. La razón de este comportamiento se debe a que la efectividad de un controlador predictivo está directamente relacionada con lo representativo que sea el modelo predictivo utilizado. Luego en este caso antes del punto de error de 25% las características de optimalidad dinámica del control HPC se imponen. Pasado el punto de error de 25 % la representatividad del modelo empieza a fallar, lo que implica que las predicciones a futuro son menos exactas e implica un deterioro progresivo acelerado. Notar que la exigencia de errores menores del 25% para un corredor segregado es suficientemente razonable.

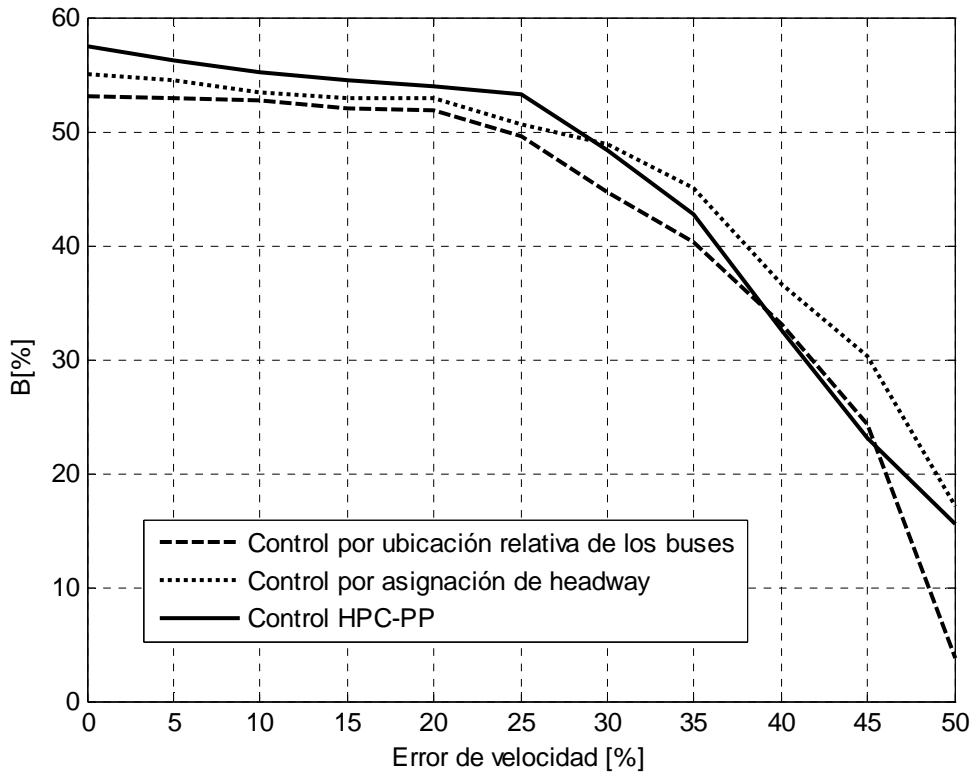


Figura 7.11: Beneficios con respecto al lazo abierto para los controlador diseñado en capítulos 5, 6 y 7

Finalmente, el control predictivo robusto puede ser una solución al problema del deterioro producido al aumentar la incerteza de la medida de la velocidad. Esto implica modificar la función objetivo original. Esto es, ahora se exige minimizar la función objetivo original (7.23), con la exigencia agregada que sea máxima la incerteza de la velocidad. Un análisis como el indicado quedará como investigación futura.

### 7.3.4. Solución de la variabilidad de la velocidad del controlador HPC-PP

Existen dos formas básicas para solucionar el problema del deterioro del comportamiento del controlador. La primera forma implica el control directo de la velocidad. Es decir, forzar al sistema para que los buses tengan las velocidades deseadas en los puntos de la ruta requeridos.

La segunda forma de solución, es trabajar con perfiles promedio de velocidad experimentalmente determinados, definidos para cada *link* entre paraderos tal como se muestra en la Figura 5.12 del capítulo 5. Luego se deben modificar las reglas de control de acuerdo al valor actualizado de la velocidad. En particular la ecuación (7.8) de la sección 7.1.3 se debe modificar por la ecuación (7.26).

$$x_i(k+1) = \begin{cases} x_i(k) + (t_{k+1} - Td_i(k))v^l & \text{si } t_k \leq Td_i(k) \\ x_i(k) + (t_{k+1} - t_k)v^l & \text{si } t_k > Td_i(k) \\ x_i(k) & \text{si } t_{k+1} \leq Td_i(k) \end{cases} \quad (7.26)$$

donde  $v^l$  es la velocidad promedio sobre el link  $l$  que une los paraderos  $p^l$  y  $p^{l+1}$ . Este análisis se dejará pendiente para una investigación futura.

## 7.4. Discusión

En este trabajo se ha desarrollado una estrategia de control predictivo híbrido basado en un modelo (HPC) para optimizar en tiempo real el rendimiento de un sistema de transporte público a lo largo de un corredor lineal con incertidumbre de la demanda en las paradas de autobús. Para la implementación en tiempo real, el diseño de esta estrategia considera la actual tecnología de transporte disponible, tal como los contadores automáticos de pasajeros (APC) y la localización automática de vehículos (AVL). La optimización se lleva a cabo mediante la aplicación de *holding* y *stop-skipping*. La estrategia HPC propuesta se formuló en un entorno de simulación de eventos discretos y resueltos por la herramienta de poda probabilística (PP), para realizar eficientemente las decisiones óptimas en tiempo real basado en el marco propuesto, en especial realizando un transacción entre precisión y tiempo de cálculo. La estrategia propuesta se compara con un algoritmo de referencia (sistema difuso capítulo 6), que no tiene en cuenta la predicción en el proceso de toma de decisiones.

El tiempo ocupado por el algoritmo HPC-PP es 55% menor que el tiempo necesario para aplicar el algoritmo HPC-EE. Sin embargo la diferencia en el beneficio entre estos dos

resultados es sólo del 0.03%, lo que confirma el buen comportamiento logrado con la estrategia de optimización con poda probabilística.

A partir de los tiempos de computo de la tabla 7.5 se deduce que el tiempo computacional para una simulación de dos horas, para el controlador difuso presentado es de 1.9 [s]. Considerando que se producen por lo menos 450 eventos en dos horas de simulación, se deduce que una acción de control demora en ser calculada por lo menos 0.0026 [s]. Un análisis semejante implica que una acción de control para el controlador HPC-PP demora 0.012[s]. Estos tiempos resultantes son suficientemente pequeños, considerando las aplicaciones prácticas para los dos controladores.

En la estrategia de control HPC-PP el beneficio medio obtenido es sólo 2.36% mejor que el controlador difuso con espera distribuida en función de la demanda por paradero (capítulo 6).

De acuerdo a los resultados, a pesar que el deterioro de su rendimiento con respecto al error de medición de la velocidad es suave, se recomienda utilizar los controladores difusos diseñados en los capítulos 5 y 6 cuando los errores en la medida de la velocidad no superen el 50%.

Los parámetros de la función objetivo del problema de optimización resultante de la formulación HPC se sintonizaron por medio de una variante del algoritmo PSO, llamado optimizador con enjambres de partículas con convergencia garantizada (GCPSO).

En los próximos capítulos, se trabajará en afinar los parámetros de la función objetivo, bajo un esquema de optimización dinámica multi-objetivo lo cual validará nuevas características de este controlador.

Posteriormente, en el capítulo 9, se trabajará con configuraciones más complejas del sistema de transporte con varias rutas conectadas por puntos de transferencia.

## **Capítulo VIII.**

# **Control predictivo híbrido para la optimización en tiempo real de las operaciones de un sistema de transporte público basado en la optimización multiobjetivo**

El diseño de un recorrido de un sistema de transporte público requiere la optimización del número de líneas de buses y sus rutas asociadas, la composición de la flota de cada línea, y la frecuencia óptima, para la esperada demanda de pasajeros durante el horario de punta. Aunque las variables de operación, tales como la frecuencia, son optimizadas para diferentes periodos y líneas, es dificultoso regularizar el movimiento de los buses ya que son afectados por diferentes perturbaciones en el progreso del día. En la literatura, como un intento de reducir los efectos negativos de las perturbaciones del servicio, los



investigadores han dedicado significativos esfuerzos en desarrollar estrategias de control flexibles, ya sea en tiempo real o fuera de línea, dependiendo de las características específicas del problema.

En este trabajo, se extiende la estrategia de control predictivo híbrido monobjetivo del capítulo 7 a una formulación basada en optimización multiobjetivo para optimizar en tiempo real la operación de control de un sistema de buses considerando los diferentes aspectos de la multidimensionalidad del problema implícito. El modelo híbrido está basado en eventos discretos considerando algunas variables del espacio de estado relevantes, tal como la posición del bus, carga esperada y tiempo de arribo esperado. Las acciones de control posibles para ser aplicadas por el operador en tiempo real son retenciones de los vehículos en paraderos determinados (*holding*) y saltos de algunos paraderos (*skipping*) para coordinar la operación conjunta.

La demanda en tiempo real, es modelada como una variable aleatoria desconocida y es considerada como una perturbación para el controlador predictivo. La estrategia de control permite incorporar en el modelo, el comportamiento futuro del sistema, asociado con la operación de los buses por un predictor en línea de la demanda. Aunque la formulación no dependen de una metodología específica de predicción de la demanda. En tal contexto, una estimación de la variable del espacio de estado en eventos futuros puede ser obtenida (Sáez *et al.*, 2008, 2012).

El controlador predictivo, en la operación de los buses, usa tal información para minimizar una función objetivo dinámica propia, generando la mejor decisión bajo demanda incierta en los paraderos. Este provee dinámicamente las acciones de control para optimizar el comportamiento del sistema de buses de acuerdo a dos dimensiones en la función objetivo. Las dos dimensiones corresponden a la regularización del tiempo de espera de los buses y a la minimización del impacto debido a la aplicación de las estrategias de control ya mencionadas. El primer término está relacionado con la minimización del tiempo de espera de los pasajeros en las paradas de los buses, mientras que el último penaliza el tiempo extra de viaje y el tiempo de espera sólo de los pasajeros afectados por las estrategias (retención

y salto de estación). En este trabajo se formaliza estos dos aparentes conflictos (objetivos opuestos) por medio de una optimización dinámica multiobjetivo (*multi-objective optimization* MO) para el control en tiempo real de un sistema de buses basados en un controlador predictivo híbrido como el formulado en (Cortés *et al.*, 2010).

En la literatura de optimización multiobjetivo, la mayoría de los problemas son estáticos (Hajri-Gabouj, 2003). La literatura sobre problemas dinámico evolucionario MO es escasa en una clara metodología de evaluación. (Farina *et al.*, (2004)). Existe un trabajo hecho por Tan *et al.* (2007), donde un problema de ruteo de vehículos estocástico multiobjetivo es resuelto con un algoritmo evolucionario MO.

El control predictivo basado en MO es reportado en la literatura bajo distintos enfoques. Álvarez y Cruz, (1998) proponen un método de optimización dinámica multiobjetivo para sistemas de tiempo discreto. Primero un sub-problema de programación multiobjetivo es resuelto en cada paso con un conjunto de restricciones generales y luego se derivan políticas para derivar las condiciones de optimalidad. Por último, políticas de priorización son utilizadas como criterios para encontrar las acciones de control óptimo. En Kerrigan *et al.*, (2000) se presenta varios métodos para manejar una amplia clase de formulaciones multiobjetivo y priorización para sistemas de control predictivo híbrido basado en modelos. Los métodos son basados en modelos dinámicos basados en lógicas mixtas (MLD) que representan la priorización de las restricciones débiles para las estrategias de control predictivo, garantizando la satisfacción de un número máximo de restricciones duras.

En el trabajo de Kerrigan y Maciejowski, (2002) resuelven un problema de control predictivo multiobjetivo basado en la priorización de restricciones y objetivos. En este caso, el problema de optimización más importante es resuelto y la solución de este problema es usada para imponer restricciones adicionales sobre la segunda optimización, etc. Luego la acción de control del controlador predictivo propuesto es encontrada, asumiendo cierta convexidad, por medio de técnicas de programación convexa. Esto es, priorizar un controlador predictivo multiobjetivo, el cual puede ser resuelto en línea sin necesidad de rediseñarlo fuera de línea; sin embargo, este incremento de la flexibilidad también demanda

un incremento de la cantidad del esfuerzo computacional. En Nunez-Reyes *et al.* (2002) se presenta una comparación de tres diferentes controladores predictivos aplicados a un molino de aceite de olivo, lo que corresponde a un conjunto típico de controladores predictivos basados en modelos. Esto es, un controlador basado en una función monobjetivo, un controlador predictivo multiobjetivo priorizado, y un controlador MPC estructurado. Luego, basado en un conjunto de simulaciones, el controlador predictivo multiobjetivo priorizado, entrega el mejor resultado sin la necesidad de encontrar los pesos como en el MPC monobjetivo, aunque es requerido un importante costo computacional. Una solución intermedia es el controlador MPC estructurado, el cual, usa una lista de decisiones para seleccionar la función objetivo, la cual debe ser entregada para determinar la acción de control.

En Zambrano y Camacho, (2002) se describe un algoritmo de un controlador predictivo multiobjetivo basado en el método denominado “logro de metas”, el cual considera las diferentes funciones objetivo como restricciones para la minimización de la variable de relajación. Este controlador predictivo multiobjetivo permite la especificación de diferentes metas, como por ejemplo un factor económico, en distintos puntos de operación. Fue aplicado a una planta solar de refrigeración y formulado para un sistema de configuración variable. Luego, por la inclusión del enfoque multiobjetivo el resultado muestra interesantes beneficios. Por otro lado Laabidi y Bouani, (2004) presentan una estrategia de control multiobjetivo para sistemas dinámicos no-lineales inciertos, modelándolos con redes neuronales. Un algoritmo de orden no dominado es usado para resolver el problema de optimización multiobjetivo. Cada función objetivo corresponde a una función objetivo convencional de un control MPC (minimizando el error de seguimiento y el esfuerzo de control) obteniéndose predicciones del sistema con diferentes redes neuronales. El criterio para escoger la acción de control óptima considera tomar sólo la solución que entrega la suma mínima de las funciones objetivo.

Considerando recientes aplicaciones, Subbu *et al.*, (2006) presenta un enfoque multi-predictivo con optimización multiobjetivo para una planta termoeléctrica y Hu *et al.* (2007) discute el desarrollo de un sistema de control predictivo multiobjetivo dinámico para

generar estrategias de control costo-efectivas para un área de biorremediación (definiendo como tal, cualquier proceso que utilice microorganismos, hongos, plantas o las enzimas derivadas de ellos para retornar un medio ambiente alterado por contaminantes a su condición natural).

Los controladores predictivos multiobjetivo reportados son interesantes desarrollos; sin embargo, una metodología sistemática de sintonía no está aún completa. Luego en este capítulo se propone una metodología sistemática para lograr soluciones genéricas, para la obtención de la acción de control óptima de un controlador predictivo multiobjetivo aplicado a un sistema de transporte público de buses.

En este enfoque, con un controlador predictivo híbrido basado en optimización multiobjetivo (HPC-MO), se incluye variables discretas (número de pasajeros sobre los buses), variables continuas (posición y velocidad de los buses) y variables cuantizadas (pertenecientes a un conjunto con número limitado de acciones de control). Por esta razón, un enfoque predictivo híbrido es utilizado, en el cual las acciones de control son optimizadas considerando los tres conjuntos de variables.

La estructura del presente capítulo es la siguiente. En la siguiente sección se describe la formulación del modelo. Después, en la sección 8.2 se presenta la estrategia HPC-MO y el algoritmo diseñado para resolver el problema resultante bajo el enfoque dinámico MO. En la sección 8.3 se presentan aplicaciones ilustrativas de la metodología, para finalizar en la sección 8.4 con una síntesis, conclusiones y líneas de investigación futuras.

## 8.1. Modelo dinámico para el diseño de un controlador predictivo híbrido

### 8.1.1 Formulación

La formulación del sistema de transporte utilizado en esta sección es idéntica a la utilizada en el capítulo 7 sección 7.1.2. Recordaremos sus principales características a continuación.

La red de transportes es una ruta de bucle de un solo sentido, con  $N$  estaciones equidistantes y  $b$  buses corriendo por el bucle, bajo el control de un operador. A partir de datos históricos, la matriz de origen-destino puede ser estimada para cada período del modelo.

El sistema evoluciona en un ambiente de tiempo discreto, esto es, los acontecimientos se desencadenan cada vez que un autobús llega a una parada, lo que determina un proceso dinámico discreto de intervalos de tiempo variables.

En el capítulo 7 se definieron dos variables que definen el estado del autobús y, son las que desencadenan los eventos. Se trata de la posición  $x_i(t)$  del autobús en cualquier instante  $t$  continuo, y el tiempo  $\hat{T}_i(t)$  esperado que le queda al autobús para llegar a la siguiente parada. En concreto, las variables manipuladas son las acciones de *holding*  $h_i(k)$  y las acciones de *stop-skipping*  $Su_i(k)$  asociadas con autobús  $i$  y el evento  $k$ .

En el momento que el bus  $i$  activa el evento  $k$ , las variables de salida corresponden a la carga estimada de pasajeros  $\hat{L}_i(k+1)$  y al tiempo estimado de salida  $\hat{T}d_i(k+1)$  del bus  $i$  de su parada actual.

Las expresiones analíticas (modelo predictivo 1, capítulo 7) para un modelo dinámico asociado con el autobús  $i$  que provoca el evento  $k$ , se pueden resumir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x_i(t) &= x_i(t_k) + \int_{t_k}^t v_i(\vartheta) d\vartheta \\
\hat{T}_i(t) &= t_k + h_i(k) + \hat{T}r_i(k) + Tv_i(k) - t \\
\hat{L}_i(k+1) &= L_i(k) + Su_i(k) \left( \hat{B}_i(k) - \hat{A}_i(k) \right) \\
\hat{T}d_i(k+1) &= t_k + h_i(k) + \hat{T}r_i(k)
\end{aligned} \tag{8.1}$$

donde  $\hat{B}_i(k)$  corresponde con el número esperado de pasajeros que abordará el bus  $i$  mientras esté en la parada, y  $\hat{A}_i(k)$  representa el número estimado de pasajeros que bajan del bus  $i$  en el evento  $k$ .

En las ecuaciones (8.1),  $t_k$  es el instante continuo en el cual evento  $k$  es generado,  $v_i(t)$  es la velocidad instantánea del bus en función del tiempo,  $\hat{T}r_i(k)$  representa el tiempo de transferencia estimado de pasajeros (máximo entre los tiempos de subida y bajada de los pasajeros) y por último  $Tv_i(k)$  el tiempo de viaje entre dos estaciones consecutivas. Notar que las ecuaciones en (8.1) son función de las acciones de control  $h_i(k)$  y  $Su_i(k)$ .

En este trabajo, se extiende el esquema de solución del controlador HPC desarrollado en el capítulo 7, a una solución que emplea la optimización multi-objetivo dinámica, considerando dos objetivos aparentemente contradictorios (nivel de servicio de pasajeros versus la penalización debido a las estrategias de control) para el control en tiempo real del sistema de buses. La Figura 8.1 resume la estrategia de HPC-MO para este problema. La variable asociada con el estimador de la demanda es el número de pasajeros  $\hat{\Gamma}(k+1)$  que esperan por a un autobús  $i$  que generó el evento  $k$ , el cual está determinado en datos históricos de demanda.

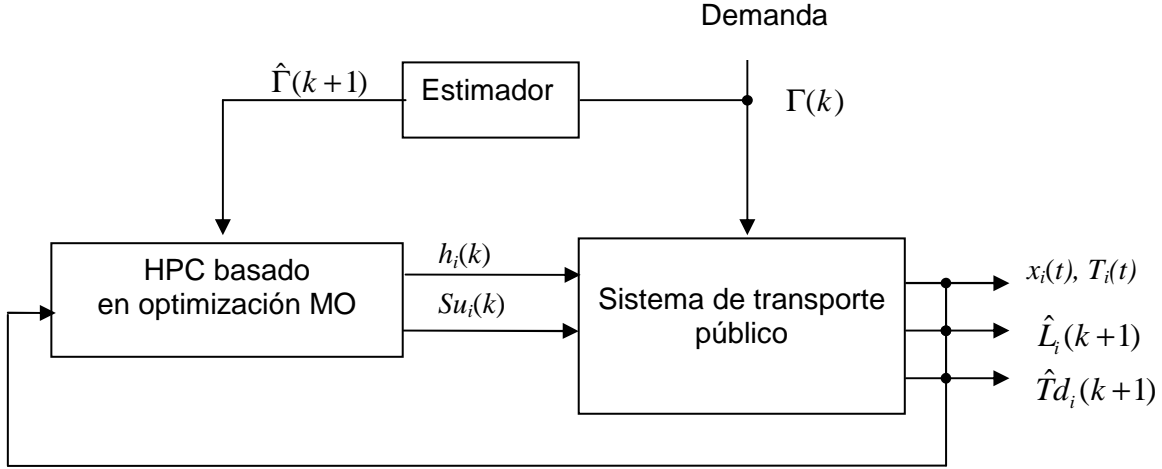


Figura 8.1. Estrategia de control HPC-MO para el sistema de transporte público.

Luego, teniendo el modelo del sistema, así como las variables manipuladas y de control, el siguiente paso es definir adecuadamente una función objetivo del esquema predictivo con el fin de tomar decisiones en tiempo real y optimizar las acciones de control del sistema dinámico.

### 8.1.2 Función objetivo

En este caso, se considera la minimización de las siguientes expresiones (8.2) y (8.3), que constan de cuatro componentes orientados a la mejora del nivel de servicio de los pasajeros a partir del tiempo de espera y la penalización de las acciones de control, que finalmente se agrupan en dos expresiones  $J_1$  y  $J_2$ . Analíticamente,

$$J_1 = \sum_{\ell=1}^{N_p} \left[ \theta_1 \cdot \hat{H}_i(k+\ell) \hat{\Gamma}(k+\ell) + \theta_2 \cdot (\hat{H}_i(k+\ell) - H_d)^2 \right]_{i=i(k+\ell-1)} \quad (8.2)$$

$$J_2 = \sum_{\ell=1}^{N_p} \left[ \theta_3 \cdot \hat{L}_i(k+\ell) h_i(k+\ell-1) + \theta_4 \cdot \hat{\Gamma}(k+\ell) \hat{H}_{i+1}(k+\ell+z_{i+1}) (1 - Su_i(k+\ell-1)) \right]_{i=i(k+\ell-1)} \quad (8.3)$$

con  $u(k+\ell-1) = h_i(k+\ell-1)$  o  $u(k+\ell-1) = Su_i(k+\ell-1)$  donde el bus  $i$  gatilla el evento  $k+\ell-1$ . Donde  $N$  es el horizonte de predicción y  $Nb$  es el número de buses de la flota.

Notar que  $i = i(k+\ell-1) \in \{1, \dots, Nb\}$ , si consideramos que el futuro evento  $k+\ell-1$  es generado por un bus  $i(k+\ell-1)$  que llega a una estación específica aguas abajo. En las expresiones (8.2) y (8.3),  $\theta_j$  son parámetros de ponderación, y tienen que ser ajustadas en función del problema específico a tratar y la interpretación física de los diferentes componentes. Por otra parte, estos parámetros permiten al modelador dar una importancia distintiva a los términos  $J_1$  y  $J_2$ .

Notar que las expresiones (8.2) y (8.3) dependen del tiempo de espera predicho entre buses consecutivos. Mediante el uso de la predicción de los tiempos de salida como se detalla en un (8.1), es posible predecir el tiempo de espera entre buses  $\hat{H}_i(k+\ell)$  del bus  $i$  que gatilla el evento  $k+\ell-1$  con respecto a su bus precedente  $i-1$  cuando se alcanza la misma parada, el cual corresponde al evento  $k+\ell-z_{i-1}$ . Analíticamente:

$$\hat{H}_i(k+\ell) = \hat{Td}_i(k+\ell) - \hat{Td}_{i-1}(k+\ell-z_{i-1}) \quad (8.4)$$

donde  $\hat{Td}_i(k+\ell)$  está asociada con el bus  $i$  que gatilla el evento  $k+\ell-1$ , y  $\hat{Td}_{i-1}(k+\ell-z_{i-1})$  representa la predicción del tiempo de partida del bus precedente  $i-1$ , que activa el evento  $k+\ell-z_{i-1}-1$ , en la misma parada. La variable  $z_{i-1}$  representa el número de eventos producidos entre el arribo del bus previo bus  $i-1$  y el bus  $i$ , ambos alcanzando la misma parada.

El último término de la expresión (8.3) incluye los tiempos de espera  $\hat{H}_{i+1}(k+\ell+z_{i+1})$  asociados con el bus  $i+1$  que gatilla el evento  $k+\ell+z_{i+1}-1$  y es calculado con respecto al



bus  $i$  que gatilla el evento  $k + \ell - 1$ , cuando ambos buses alcanzan la misma parada. Análogamente, la variable  $z_{i+1}$  representa el número de eventos entre el arribo del bus  $i$  y el próximo bus  $i+1$  en la misma parada.

En la expresión (8.2),  $H_d$  corresponde al *headway* deseado (referencia) diseñado para servir la demanda de pasajeros del sistema durante cierto período de tiempo. Normalmente, el *headway* deseado  $H_d$  se relaciona con la frecuencia de diseño que depende directamente de la carga del segmento, y puede ser determinado como la mínima frecuencia necesaria para mover a los pasajeros en el segmento más cargado a lo largo de la ruta del bus (ver capítulo 4 sección 4.4.1). Ahora, el primer término de (8.2) cuantifica el tiempo total de espera de los pasajeros en las paradas, y depende del tiempo de espera predicho, junto con la carga del paradero, que al mismo tiempo cuantifica el nivel de servicio. El segundo término considera la regularización del tiempo de espera del bus, con la intención de mantener el tiempo de espera del bus lo más cerca posible del tiempo de espera de diseño. El primer término en (8.3) mide el retraso asociado con pasajeros a bordo de un vehículo cuando son retenidos en el paradero debido a que se aplicó una acción de control de *holding*. Por último, el segundo componente (8.3) es el tiempo adicional de espera de pasajeros, cuya estación ha sido saltada por un vehículo, asociadas con una acción de control de *stop-skipping*.

En la siguiente sección se describe el algoritmo de solución implementado con el fin de resolver el problema de control predictivo híbrido bajo el enfoque con optimización multi-objetivo, teniendo en cuenta la minimización de las funciones objetivo (8.2) y (8.3).

## 8.2. Control predictivo híbrido basado en la optimización multi-objetivo.

### 8.2.1. Descripción de la estrategia HPC-MO

La estrategia de HPC-MO es una generalización de la HPC, en el que la acción de control se selecciona basada en un criterio el cual toma soluciones de la región Pareto óptima teniendo en cuenta el siguiente problema multi-objetivo:

$$\underset{\{u(k), u(k+1), \dots, u(k+N_p-1)\}}{\text{Min}} \{J_1, J_2\} \quad (8.5)$$

con  $J_1$  y  $J_2$  correspondientes a las funciones objetivo definidas en (8.2) y (8.3). Considerar, que en este sistema no es necesario definir un factor de ponderación arbitraria (parámetro  $\lambda$ ) como se hace en los controladores predictivos híbridos convencionales (por ejemplo, minimizar  $\lambda J_1 + (1-\lambda)J_2$ ). La solución del problema HPC-MO en cada caso corresponde a un conjunto de secuencias de control que forman el conjunto óptimo de Pareto. Teniendo en cuenta que  $u^r = \{u^r(k), \dots, u^r(k+N_p-1)\}$  es una secuencia de medidas de control posible, con un horizonte de predicción  $N$ , las siguientes definiciones asociadas a un problema de optimización multi-objetivo pueden ser establecidas:

Una solución  $u^r$  se dice Pareto dominante sobre otra  $u^m$  solución si y sólo si:

$$\left( J_1(u^r) \leq J_1(u^m) \text{ y } J_2(u^r) < J_2(u^m) \right) \text{ o } \left( J_2(u^r) \leq J_2(u^m) \text{ y } J_1(u^r) < J_1(u^m) \right) \quad (8.6)$$

Una solución  $u^r$  se dice que es un óptimo de Pareto si y sólo si no hay otra solución  $u^m$  que la domine de acuerdo con el criterio anterior.

El conjunto Pareto óptimo  $P_s$  contiene todas las soluciones Pareto óptimas.

El conjunto de todos los pares de valores que las funciones objetivos  $J_1$  y  $J_2$  toman para cada solución  $u^r$  en  $P_s$ , es conocido como el frente de Pareto óptimo  $P_F$ , esto es:

$$P_F = \left\{ \left( J_1(u^r), J_2(u^r) \right) : u^r \in P_s \right\} \quad (8.7)$$

En este caso, como las secuencias de control son enteros, y también definidas dentro de un conjunto finito factible, el resultado de la frontera óptima de Pareto corresponde a un conjunto con un número finito de elementos. A partir del frente de Pareto de las soluciones del problema HPC, es necesario seleccionar sólo una secuencia de control  $u^r = \{u^r(k), \dots, u^r(k + N_p - 1)\}$  y desde ésta, aplicar la acción de control  $u^r(k)$  al sistema de acuerdo con el concepto de horizonte deslizante. Una aplicación importante de este enfoque es en las decisiones del controlador de despachos, esto es, la definición de criterios para seleccionar la mejor acción de control en cada evento en el marco del HPC-MO. En esta aplicación, un criterio relacionado con la mayor o menor importancia dada a ambas componentes ( $J_1$  y  $J_2$ ) se utiliza en la selección de la secuencia y la aplicación inmediata de la acción de control  $u^r(k)$  sobre el sistema. La idea de esta aplicación es utilizar un criterio orientado a reducir el tiempo de espera de pasajeros en las paradas de autobús ( $J_1$ ) al variar la intensidad de las acciones de control aplicadas al sistema, que normalmente molestan a los usuarios ( $J_2$ ).

Con el fin de encontrar de manera eficiente el conjunto de soluciones de una forma dinámica, se propone el uso de algoritmos de búsqueda en el árbol de decisiones con poda probabilística PP (capítulo 7 sección 7.2.1) para cada decisión dinámica. Cuanto mejor sea el rendimiento del algoritmo, mejor será la calidad del conjunto de soluciones resultante, que en teoría son pseudo-óptima ya que la búsqueda en el árbol de decisiones con poda probabilística no es un método de optimización exacta. Sin embargo, esta aplicación es bastante simple, eficiente y, en consecuencia, se construye un frente de Pareto pseudo-óptimo muy cerca del óptimo.

A continuación, la aplicación para este problema en particular se explica en detalle.

## 8.2.2 Algoritmos de búsqueda en el árbol de decisiones con poda probabilística (PP) para el problema HPC-MO

El algoritmo de BPP se utiliza para resolver el problema planteado HPC-MO. En el PP, una posible solución se llama secuencia factible. La secuencia factible representa un camino de acciones de control posibles  $\{u(k), \dots, u(k + N_p - 1)\}$  sobre el árbol de decisiones, donde la longitud  $N$  correspondiente al horizonte de control, es igual al nivel de profundidad del árbol de decisiones generado.

La confección del árbol de decisiones es a partir de las soluciones factibles que genera cada rama. En cada etapa del algoritmo, se seleccionará la secuencia que está más cercana a la mejor frontera Pareto calculada hasta la iteración actual. Como se mencionó anteriormente, el algoritmo PP en HPC-MO proporciona frentes de Pareto sub-óptimos, pero muy cerca del óptimo global. El esfuerzo computacional más importante en la aplicación de este algoritmo es el cálculo de las predicciones, las cuales son calculadas recursivamente mediante el modelo y la acción de control entregada por la secuencia. Los parámetros de ajuste del algoritmo PP son el orden de las probabilidades asignadas a todas las acciones de control posibles. Los detalles se describen en la sección (7.2) del capítulo 7. El procedimiento completo para el algoritmo PP que se aplica a este problema de control HPC-MO es el siguiente:

Construir el árbol de decisiones con la profundidad equivalente al número de pasos futuros, cada rama es confeccionada por las acciones efectivamente posibles de realizar dada la acción del nodo (ver sección 7.2). Realizar la poda probabilística para disminuir el número de ramas y así mismo el tiempo computacional.

En general, una secuencia factible  $j$  significa un vector de las acciones de control futuras como el siguiente:

$$\text{secuencia } j = \left[ u^j(k) \ u^j(k+1) \ , \dots \ , \ u^j(k+N-1) \right]_{N \times 1}^T$$

Para cada secuencia, evaluar  $J_1$  y  $J_2$  correspondiendo a las funciones objetivo definidas en (8.2) y (8.3). De hecho, cuando consideramos las secuencias necesitamos el mejor pseudo-óptimo conjunto Pareto.

En cada etapa del algoritmo, para encontrar el conjunto de Pareto pseudo-óptimo, las mejores secuencias serán las que pertenecen al mejor conjunto Pareto logrado hasta la iteración actual.

Desde el frente de Pareto pseudo-óptimo, es necesario seleccionar sólo una secuencia de control  $u^* = \{u^*(k), \dots, u^*(k + N_p - 1)\}$  y a partir de ésta, aplicar la acción de control actual  $u^*(k)$  al sistema de acuerdo con el concepto de horizonte deslizante. Para la selección de esta secuencia, un criterio relacionado con la importancia dada a cada uno los costos de usuario ( $J_1$ ) y costos de operador ( $J_2$ ) es necesario en la decisión final, como se muestra en los experimentos realizados y detallados en la siguiente sección 8.4.

### 8.3. Experimentos de simulación

La estrategia propuesta se aplica a un corredor de buses de 4 [km] formado por 10 estaciones distribuidas uniformemente sobre la ruta del autobús con una flota de seis buses que circulan. Por razones operativas, se supone que las acciones de *holding* se pueden aplicar sólo a un subconjunto de las estaciones, y tal que no sean consecutivas. En este experimento, la acción de control de *holding* se aplica en las paradas de autobús 2 y 8, mientras que las acciones de *stop-skipping* se pueden aplicar en todas las estaciones. La simulación supone incertidumbre de la demanda dinámica en las estaciones, siguiendo un proceso de Poisson con tasas de demanda diferentes, diferenciados por la estación y periodo. El período de simulación total fue de 2 horas, con un tiempo de régimen transitorio (descartada por las estadísticas), de 15 minutos al principio de la simulación.

Como se explicó anteriormente, utilizamos dos variables manipuladas: *holding* y *stop-skipping*. Por simplicidad, en la presente aplicación la acción de *holding* tendrá sólo tres

valores posibles: 0, 30, 60 y 90 [s] en las paradas de autobús seleccionadas. La acción de *stop-skipping* se define con el valor "0" cuando el autobús se salta la parada y "1" si no lo hace. Ambas variables manipuladas son mutuamente excluyentes en cada parada de autobús. Así, cuando la acción de *stop-skipping* se aplica, la acción de *holding* no se puede aplicar en la misma estación. Además, en los experimentos hemos considerado dos horizontes de predicción diferentes  $N$  de 2 y 5 pasos.

Las tablas 8.1 y 8.2 muestran el tiempo medio de espera, tiempo de viaje y el tiempo total por pasajero durante el período de simulación, la aplicación de controlador HPC-MO basado en PP, de  $N$  de 2 y 5, respectivamente. Los promedios se obtuvieron con más de 30 repeticiones del experimento, en representación de 30 diferentes días de operación.

Con respecto a los diferentes casos resumidos en las tablas 8.1 y 8.2, los primeros datos presentados representan la respuesta de lazo abierto (sistema sin control). Ahora cuando se produce un nuevo evento (es decir, cuando un autobús llega a la estación), el operador debe decidir qué hacer a continuación, sobre la base de una solución elegida entre las disponibles de la dinámica del frente de Pareto pseudo-óptimo construido por el algoritmo PP. En estos experimentos, consideramos cinco casos.

Caso 1: Considera una importancia del 100% de  $J_1$  para cada decisión dinámica.

Caso 2: Considera una importancia del 80% de  $J_1$  y 20% de  $J_2$

Caso 3: Se da la misma importancia a  $J_1$  y  $J_2$

Caso 4: Considera una importancia del 80% de  $J_2$  y 20% de  $J_1$

Caso 5: Considera una importancia 100% a  $J_2$

Dependiendo del caso, la solución elegida por el operador para continuar con la operación del sistema en cada instante dependerá de dos aspectos muy importantes. Esto es la decisión tomada no sólo será la que pertenece al frente Pareto pseudo-óptimo sino también, la más cercana (en términos de distancia euclidiana) a un punto virtual en el espacio  $(J_1, J_2)$  que representa uno de los cinco casos seleccionados. Esto es, para el caso  $i$ , el

punto virtual tiene las coordenadas  $(\theta_i \cdot M_1, (1-\theta_i) \cdot M_2)$ , con  $M_1$  y  $M_2$  en representación de los máximos valores obtenidos para  $J_1$  y  $J_2$  entre el conjunto dinámico de soluciones Pareto pseudo-óptimo asociadas a cada evento. El parámetro  $\theta_i$  es el peso (importancia) de la decisión final, normalizada entre 0 y 1. Por ejemplo, en el caso 3,  $\theta_3 = 0.5$ .

Los casos 1 y 5 son las situaciones extremas, tanto mono-objetivo dando el 100% de importancia  $J_1$  o  $J_2$ . El objetivo de estos dos casos es visualizar el *trade-off* entre los dos objetivos en conflicto aparente.

Tabla 8.1. Promedio y desviación estándar del tiempo de espera, tiempo de viaje y tiempo total por pasajero, controlador HPC-MO de horizonte de predicción  $N = 2$ .

Casos	Tiempo de espera [min]		Tiempo de viaje [min]		Tiempo total [min]	
	media	desv.	media	desv.	media	desv.
Lazo abierto	7.07	1.01	4.26	0.16	11.94	0.40
1	3.41	0.26	4.24	0.15	8.26	0.20
2	3.46	0.24	4.22	0.14	8.29	0.19
3	3.47	0.24	4.25	0.16	8.34	0.20
4	3.54	0.21	4.24	0.15	8.40	0.18
5	3.66	0.25	4.22	0.18	8.49	0.21

Tabla 8.2. Promedio y desviación estándar del tiempo de espera, tiempo de viaje y tiempo total por pasajero, controlador HPC-MO de horizonte de predicción  $N_p = 5$ .

Casos	Tiempo de espera		Tiempo de viaje		Tiempo total [min]	
	[min]		[min]			
	media	desv.	media	desv.	media	desv.
Lazo abierto	7.07	1,01	4.26	0,16	11.94	0.40
1	3.34	0.21	4.23	0.15	8.17	0.18
2	3.40	0.21	4.21	0.14	8.22	0.17
3	3.51	0.23	4.21	0.13	8.33	0.17
4	3.65	0.24	4.27	0.14	8.70	0.18
5	3.78	0.22	4.23	0.15	8.57	0.19

De los resultados presentados, podemos darnos cuenta, que la estrategia HPC-MO permite al operador decidir de forma dinámica la importancia de cada término de la función objetivo propuesta. Además en el mejor de los casos, se observa un ahorro del 20% del tiempo total para los usuarios cuando se utiliza esta estrategia HPC en comparación con el sistema en lazo abierto. De los resultados se observa que el esquema de control predictivo principalmente mejora el tiempo de espera de pasajeros, con muy poco beneficio en términos de tiempo de viaje, lo que significa que la función objetivo en la sección 8.2 no toma en cuenta el ahorro en el tiempo de viaje como un tema relevante. El ahorro en el tiempo de espera debido a la estrategia de HPC son significativos (alrededor del 50% en el caso 1), lo que valida el modelo HPC propuesto, en la dirección de mejorar la regularidad del servicio (reflejado en  $J_1$ ).

También apreciamos en las tablas 8.1 y 8.2 que, independiente del caso, la reducción del tiempo de espera es considerable con respecto al sistema en lazo abierto, lo que significa que (sobre todo viendo los resultados de los casos extremos), aunque  $J_1$  y  $J_2$  parecen ser opuestos y adecuados para la formulación MO, en los experimentos los dos son útiles para mejorar la calidad del servicio en términos de tiempo de espera (regularidad del servicio). Sin embargo, la tendencia desde el caso 1 al caso 5 muestra un ligero deterioro del nivel de



servicio a través del tiempo de espera, que debe ser compensado por una mejora del nivel de servicio de los usuarios afectados por las acciones de control, todo esto con el fin de validar el marco multi-objetivo propuesto para este problema.

Para visualizar el *trade-off* entre los dos objetivos, tenemos que medir de alguna manera el impacto sobre los pasajeros afectados por las estrategias. Así, en la tabla 8.3 se presentan dos indicadores de *PTH* y *STP*, asociado *holding* y *stop-skipping*, respectivamente, que se definen de la siguiente manera:

$$PTH = P_{H30} \cdot N_{H30} \cdot 30 + P_{H60} \cdot N_{H60} \cdot 60 + P_{H90} \cdot N_{H90} \cdot 90$$

$$PTS = P_S \cdot N_S$$

donde

$P_{H30}$  : Número medio de pasajeros retenidos durante 30[s] en un paradero.

$P_{H60}$  : Número medio de pasajeros retenidos durante 60[s] en un paradero.

$P_{H90}$  : Número medio de pasajeros retenidos durante 90[s] en un paradero.

$N_{H30}$  : Número de acciones de *holding* de 30[s]

$N_{H60}$  : Número de acciones de *holding* de 60[s]

$N_{H90}$  : Número de acciones de *holding* de 90[s]

$P_S$  : Número medio de pasajeros afectados por una acción de *stop-skipping*

$N_S$  : Número de acciones de *stop-skipping*

Estos indicadores representan un estimador del tiempo total gastado por los pasajeros afectados por la acción de *holding* en el caso anterior (*PTH*) y un estimador del número total de pasajeros afectados por una acción de *stop-skipping* en el segundo (*PTS*), ambos calculados teniendo en cuenta la totalidad del período de simulación. Se obtienen por contar acciones *holding* y *stop-skipping* durante un período de simulación válido. Tomando 30 días de observación, se obtendrán los promedios y las desviaciones estándar para obtener todas las estadísticas necesarias para calcular *PTH* y *STP*. En el anexo D, se detalla el promedio y desviación estándar de las estadísticas antes mencionadas, para cada caso y el horizonte de predicción.

En la Tabla 8.3, se presenta la *PTH* y la *STP* para todos los casos estudiados, y para  $N = 2$  y 5.

Tabla 8.3. Indicadores de *PTH* y *STP*

Casos	$N=2$		$N=5$	
	<i>PTH</i>	<i>PTS</i>	<i>PTH</i>	<i>PTS</i>
	[s]	[s]	[s]	[s]
1	4506.05	8743.24	5978.77	9700.93
2	1431.69	8764.92	3889.64	9599.74
3	2835.56	7272.10	2764.57	6390.44
4	1715.75	6245.87	2883.84	1061.24
5	1283.54	6386.14	1567.34	544.57

Los resultados son en general bastantes razonables. El efecto de las diferentes ponderaciones de pesos evaluadas, es coherente con la definición de los dos objetivos planteados, en los diferentes casos. En primer lugar, podemos observar que el comportamiento obtenido al aplicar una acción de *stop-skipping* parece seguir mejor la tendencia esperada a través de los diferentes casos (disminuyendo desde el caso 1 al 5),

En la Figura 8.3 se presentan el *trade-off* resultante entre ambos objetivos, considerando el tiempo gastado promedio por pasajero, *PTH* y *STP*, para  $N = 5$  en todos los casos.

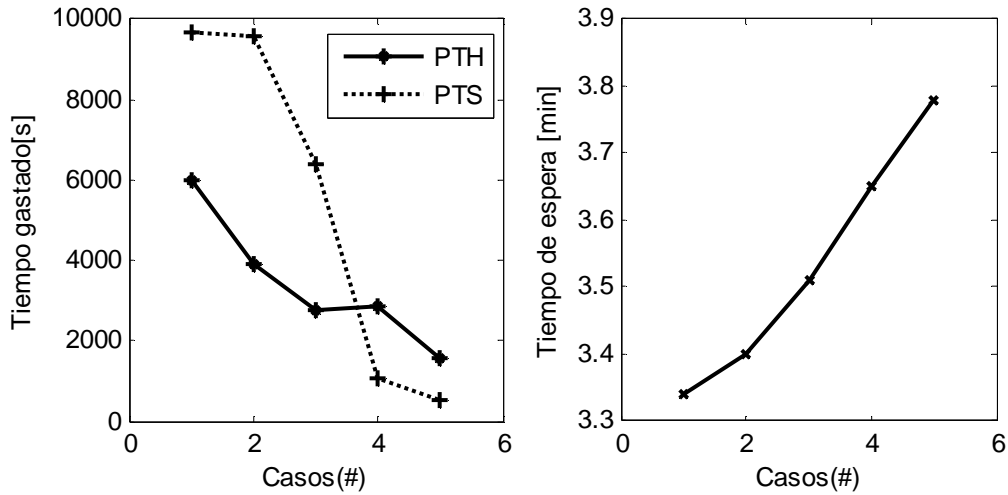
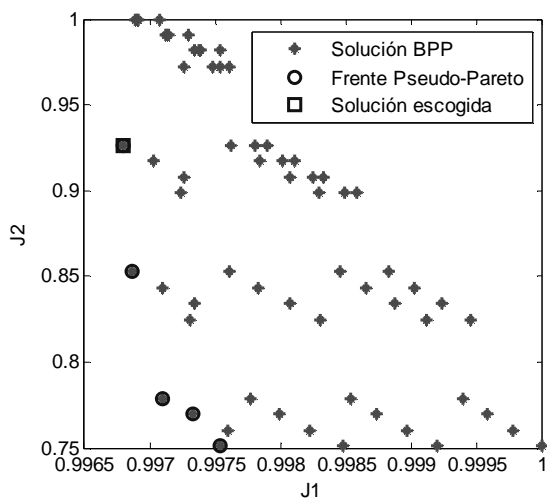


Figura 8.3. Trade-off entre los dos objetivos  $J_1$  y  $J_2$

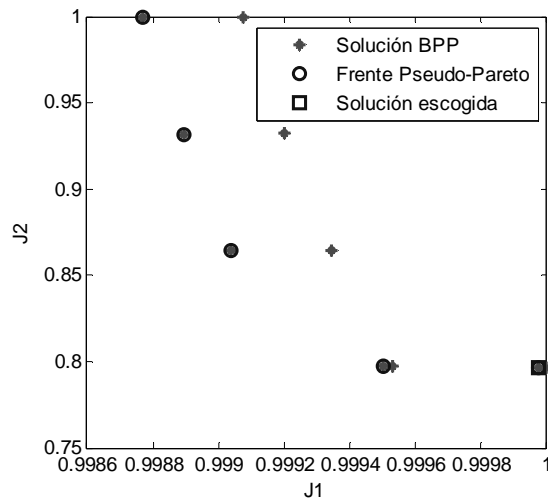
En la Figura 8.3 se muestra claramente la relevancia de considerar la variedad de soluciones ofrecidas por el esquema dinámico HPC-MO, el impacto de cada objetivo, se presenta a través de la tendencia opuesta de los indicadores que lo definen. Teniendo las dinámicas frente Pareto pseudo-óptimas disponibles en cada momento, se puede afectar significativamente la acción final aplicada por el operador, que en última instancia depende del objetivo final detrás de la operación del sistema de transporte público.

En la Figura 8.4, un conjunto de las soluciones exploradas se representa para los tres casos ( $J_1$  vs.  $J_2$ ), en un cierto evento  $k$  adecuadamente elegido a efectos de ilustración, con  $N = 5$ . Los puntos que pertenecen al frente de Pareto pseudo-óptimo se resaltan con círculos, la solución finalmente elegida por el operador en la simulación se indica con un cuadrado. De las Figuras, las curvas parecen conjuntos Pareto razonables en todos los casos.

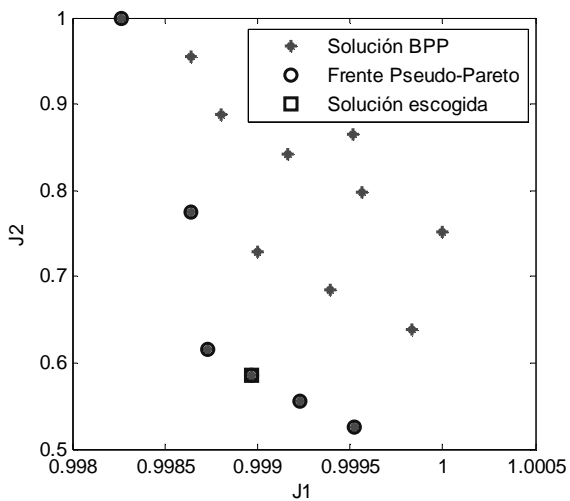
Durante la simulación, en ciertos eventos, se obtuvieron frentes pseudo-Pareto que consistían en sólo un punto. En tales situaciones, hemos eliminado ese punto y considerado el próximo frente pseudo-Pareto formado, con el fin de tener un conjunto razonable de puntos para decidir la acción a seguir de acuerdo al método del punto virtual explicado anteriormente.



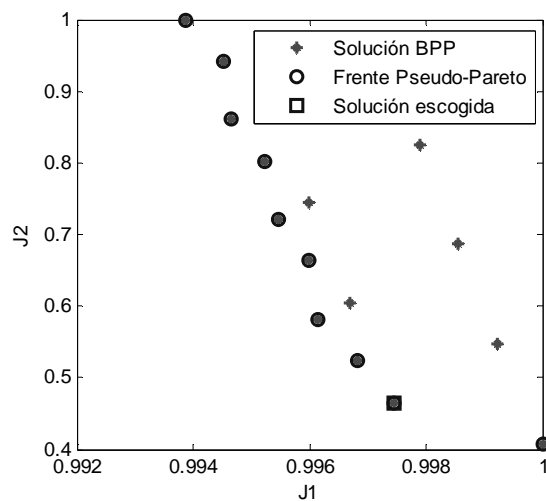
a) Caso 5,  $N = 5$



b) Caso 1,  $N = 5$



c) Caso 3,  $N = 5$



b) Caso 2,  $N = 5$

Figura 8.4. Frentes de Pareto pseudo-óptimo ilustrativos generadas con HPC-MO.

## 8.4. Discusión

En este trabajo se presentó una estrategia de control predictivo híbrido basado en optimización evolutiva multi-objetivo para optimizar dinámicamente el rendimiento de un sistema de transporte público a lo largo de un corredor lineal con incertidumbre en la demanda en las paradas de los buses (estaciones). La optimización del proceso se logró mediante la aplicación de acciones de control *holding* y *stop-skipping*. La estrategia propuesta HPC-MO se formuló en un entorno de simulación de eventos discretos, y se desarrolló con el fin de optimizar las operaciones de control en tiempo real del sistema de bus teniendo en cuenta los diferentes aspectos de la multidimensionalidad del problema analizado.

El objetivo múltiple se definió en función de dos objetivos: minimizar el tiempo de espera por un lado, y el impacto de las estrategias de control por el otro. Esta flexibilidad en la formulación permite al controlador acomodar sus acciones a políticas de servicios diferentes, según el caso. En esta formulación, el término  $J_2$  controla la posible penalización del impacto en los usuarios al aplicar las diferentes estrategias de control, que se refleja en tiempos de viaje y tiempos de espera extras debido a que los buses son retenidos en las paradas (*holding*) y/o los pasajeros esperando dos intervalos cuando las estaciones son saltadas (*stop-skipping*). Por otro lado  $J_1$ , ayuda al operador a regularizar el tiempo de espera entre buses, en torno a un valor predefinido  $H_d$  que eventualmente podría cambiar si se observan modificaciones de la demanda, medianas o de gran importancia. De los experimentos realizados, encontramos que los dos objetivos son opuestos (como finalmente se resumen en la Figura 8.4), pero con un cierto grado de superposición, en el sentido de que en todos los casos ambos objetivos mejoran significativamente el nivel de servicio con respecto al escenario de lazo abierto debido a la regularización del tiempo de espera. Por lo tanto, a pesar de que los objetivos tienen ciertas similitudes, en promedio, muestran de todos modos un *trade-off*, lo que valida la metodología HPC-MO para el sistema estudiado y basado en los componentes de la función objetivo propuesto.

Además, la mayor contribución del enfoque MO dinámico junto con el algoritmo de búsqueda en árbol de decisiones con poda probabilística (BB), es que proporcionan frentes de Pareto dinámicos pseudo-óptimo que permiten al operador (o el planificador) tomar decisiones en línea basado en una amplia variedad de opciones. Por lo tanto, son capaces de decidir a tiempo en cada caso lo que es mejor para el sistema en función de una política específica o de otros factores, pero con un gran rango de las soluciones no dominadas para hacer la mejor elección y mejorar el esquema operacional.

En otras aplicaciones, otras funciones objetivo se pueden probar, por ejemplo, añadiendo un componente directamente relacionado con los costos operativos o de necesidad de flota adicional para hacer frente a algunas situaciones inesperadas. Por otra parte, otras acciones de control también pueden ser analizadas (inyección de los vehículos, la prioridad de la señal para los buses, etc.) bajo un esquema de HPC-MO, identificando adecuadamente las diferentes dimensiones que podría dar lugar a objetivos opuestos.

En el siguiente capítulo se analiza el diseño de un controlador predictivo para un sistema de transporte público que considera estaciones de transbordo.

# Capítulo IX.

## Control avanzado de un sistema de transporte público con estaciones transbordo

En algunas áreas metropolitanas, el transporte público convencional no puede proveer un servicio directo debido a diferentes razones, una de las cuales es, ser económicamente no conveniente o tener densidades de demanda bajas. Luego, es necesario que en algunos puntos específicos de la ruta se realicen transferencias de pasajeros. De ahí que, el desarrollo de algún sistema coordinado puede reducir considerablemente el tiempo de viaje de los pasajeros. Esto es, para el caso donde existan transferencias, se plantea adicionalmente la minimización del tiempo de espera en las estaciones de transbordo.

Específicamente, una estación de transbordo es un conjunto de refugios o paradas, habilitadas sobre el espacio público, con el objetivo de ser utilizadas en el sistema de transporte público (por ejemplo de Santiago, "Transantiago"), las cuales están dispuestas próximas a las intersecciones de importantes avenidas que tengan un alto tránsito de pasajeros (aproximadamente 1000 pasajeros por hora), están orientadas a favorecer los intercambios entre bus - bus y en particular en Santiago, entre bus - Metro. En un esquema del transporte público, se diseña la malla de rutas para evitar en lo posible la superposición de recorridos, esto es, buses que circulen por las mismas calles. Por ello, se divide el servicio en dos; los buses troncales y buses locales. Los primeros son buses de alta capacidad que realizan recorridos en las principales avenidas de la urbe y los segundos son alimentadores que cubren las áreas locales, para suministrar pasajeros a los servicios de buses de la red troncal y al metro. En la Figura 9.1 se presenta una estructura típica de una estación de transbordo, donde se aprecia la existencia de los paraderos, buses troncales, locales y el Metro (<http://www.transantiagoinforma.cl/tiposParadero.doc>).

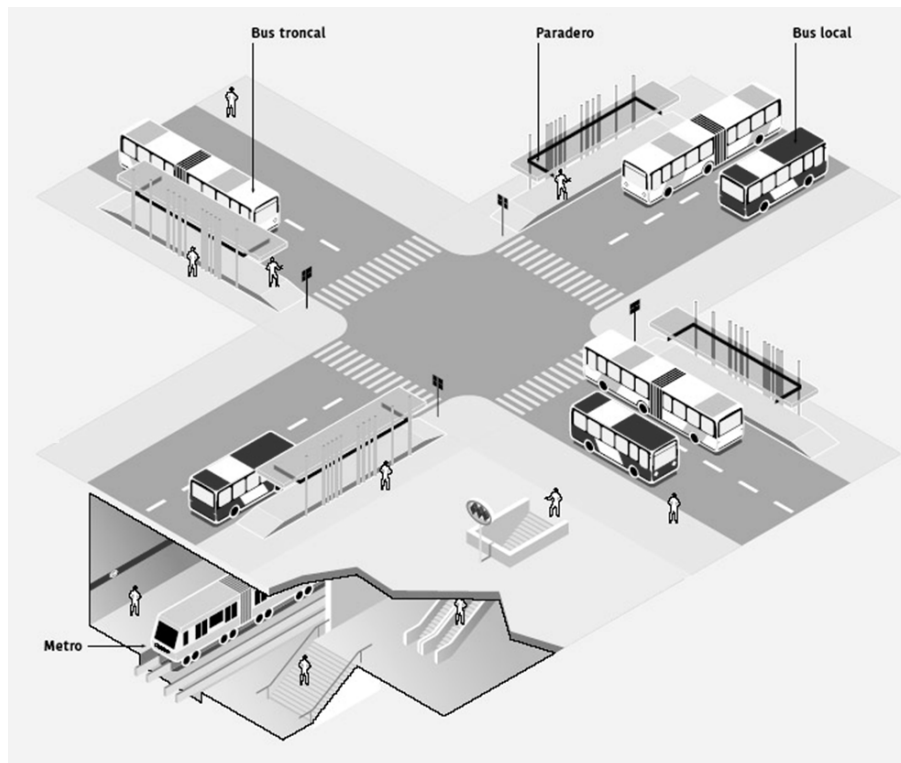


Figura 9.1: Estación de transbordo prototipo (fuente Transantiago informa, <http://www.transantiagoinforma.cl/tiposParadero.do>).



Por ejemplo en el sistema de transporte público de Santiago se diseñaron 36 estaciones (ver Figura 9.2) dispuestas en toda la capital con la finalidad de favorecer el transbordo (fuente Transantiago informa).

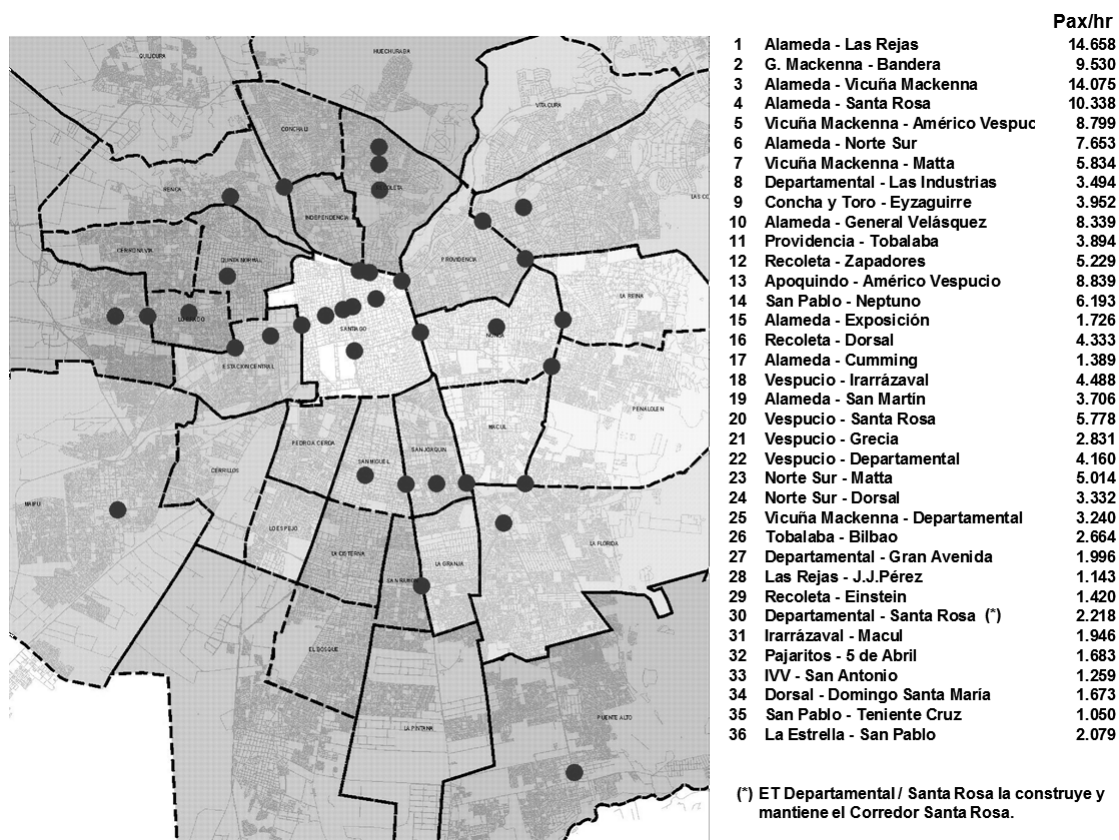


Figura 9.2: Estaciones de transbordo en sistema de transporte público de Santiago (fuente Transantiago informa, <http://www.transantiagoinforma.cl/tiposParadero.do>).

En el sistema de transporte público, las estaciones de transbordo han adquirido la mayor relevancia en la mejora de los índices de calidad de servicio a los usuarios. Esto es, mejorar los tiempos de espera, tiempos de viaje y posibilidades de acceso a las distintas localidades de la urbe a un costo económico. Entre los principales aspectos negativos de un transbordo se encuentran la incomodidad física y la incertidumbre del desplazamiento (desconocimiento del tiempo de viaje, frecuencia de los servicios, tiempo de espera, combinaciones o mejores rutas). Con todo esto, las estaciones de transbordo se configuran como una pieza fundamental del éxito de un sistema de transporte público moderno, y su éxito o fracaso no pasa únicamente por un buen diseño funcional del mismo, sino que en

gran medida viene condicionado por su integración en el propio sistema de transporte así como en la capacidad de gestión del mismo.

Luego, en este capítulo se intenta generalizar el conocimiento adquirido en los capítulos precedentes, donde, se diseñaron, en un sistema de transporte público simple (de una ruta), controladores basados en la teoría de conjuntos difusos como también controladores HPC. Se pretende avanzar paulatinamente en el grado de complejidad del sistema estudiado, de modo de lograr aplicaciones escalables a sistemas compuestos de varias rutas y que integren estaciones de transbordo.

La estructura de trabajo de este capítulo, implica en un primer momento controlar un sistema formado por dos rutas conectadas por una estación de transbordo. Los controladores diseñados serán analizados en distintos escenarios de demanda estadísticamente generada. Se aplicará, la teoría de control de sistemas de gran escala (capítulo 3) y la posterior generalización, del conocimiento adquirido, en un sistema de transporte público de mayor dimensión, esto es, en el capítulo siguiente se plantea implementar un sistema mayor de rutas con estaciones de transbordo para su interconexión.

## **9.1. Criterios de selección de la estrategia de control para un sistema de transporte con estación de transbordo**

Un conjunto mayor de rutas conectadas por estaciones de transbordo, implica un conjunto de estructuras básicas con características comunes. Luego, se debe decidir la forma de analizar el sistema. Esto es, se puede analizar el sistema en forma agregada o suponer que un análisis desagregado de las distintas partes que componen el sistema se aproximará en gran medida a un análisis del sistema completo. En otros términos, el sistema es una repetición de ciertas estructuras básicas ya analizadas y lo que se necesita es estudiar su interacción. En términos de control se debe decidir entre un control centralizado y un control descentralizado o distribuido.

Las objeciones al control centralizado a menudo no están restringidas sólo al costo computacional, si no, al costo organizacional. Esto es, debido a que el control centralizado se basa en un ente central, que realiza el control de toda la planta. Además, este control es en general difícil de coordinar y en particular someterlo a un mantenimiento eficaz, sin tener que paralizar grandes sectores del proceso controlado. Estos obstáculos tienden a impedir la aplicación de un control centralizado a plantas de gran escala (Stewart, (2010)). Por el contrario la descomposición de un problema MPC de gran escala en pequeños sub-problemas (Scattolini, (2009)) es útil para:

- Reducir la carga computacional.
- Reducir la carga de comunicación.
- Mejorar la robustez con respecto a fallas en la transmisión de información y/o en la unidad central de control.
- Mejorar la modularidad y la flexibilidad de los sistemas.
- Sincronizar subsistemas que trabajan en distintas escalas de tiempo.

En particular en el caso analizado en este capítulo, un control centralizado para un sistema de transporte público de dos rutas, manteniendo la forma de diseño de controladores de los capítulos precedentes, implica doblar el número de acciones de control posibles (por ejemplo pasar de 5 a 10 acciones de control). Luego, la solución para el controlador HPC implica recorrer un nuevo árbol de decisiones, el cual aumenta el tiempo de cómputo en un factor de  $2^q$  a medida que profundizamos en el nivel  $q$  del árbol. Esto es, un segundo nivel (predicción a dos pasos) en el árbol de decisiones exige cuadruplicar el número de cálculos, un tercer nivel (predicción a tres pasos) exige multiplicar por ocho veces el número de cálculos y así sucesivamente. Así mismo, para  $n$  rutas el factor de aumento es aún mayor, es  $n^q$ . Luego, el tiempo de cálculo de un esquema de control centralizado en un sistema de transporte público crece exponencialmente con respecto al número de rutas, en contraste con un control descentralizado o distribuido, en que el tiempo de cómputo crece linealmente con respecto al número de rutas.

Concretamente, en el simulador utilizado en este trabajo, el tiempo es discreto y avanza en intervalos variables generados por eventos. Los eventos están determinados por los instantes cuando alguno de los buses llegue a un paradero y se realiza una acción de control. En particular, en el caso de dos rutas los eventos se gatillan aleatoriamente en cualquiera de las dos rutas. Luego, en cada evento sólo se necesita determinar la acción de control en una ruta, situación que es más concordante con controladores descentralizados o distribuidos que con uno centralizado. Esta situación se repite, para un número mayor de rutas.

A partir de lo anterior, se plantean las siguientes soluciones:

Se diseñaran controladores descentralizados de las diferentes rutas que componen el sistema de transporte público, lo que implica un punto de partida razonable de control del sistema. Esto es, se comienza con la suposición fuerte de que existe una interacción débil entre los subsistemas que componen el sistema completo. En el último término este controlador será la base de comparación de los siguientes esquemas de control diseñados.

En el paso siguiente se diseñarán controladores distribuidos del sistema completo que considere la interacción entre los subsistemas. Esto es, diseñar un controlador que implique controles individuales para cada ruta, que además consideren en su funcionamiento, el compartir información relevante. Esto es, lograr una coordinación básica entre ellos.

En resumen correspondiendo al orden de presentación, se plantean los siguientes diseños: dos controladores difusos, uno descentralizado y otro distribuido, posteriormente se plantea tres controladores predictivos híbridos, uno descentralizado, uno distribuido y por último, uno centralizado En una etapa final se considera un sistema de control multicapas que considere consignas con diferentes jerarquías (control jerárquico).

Para comenzar la tarea, en la próxima sección se plantea la estructura de la demanda de pasajeros en los paraderos para un sistema de transporte formado por dos rutas y una

estación de transbordo, demanda que será aplicada a todos los controladores diseñados en este capítulo.

## 9.2. Características de la demanda del sistema de transporte público utilizado.

En primer lugar, se deben hacer suposiciones básicas con respecto a la estructura de la demanda de pasajeros en el sistema a analizar. En la Figura 9.3 se presenta un sistema de transporte con dos rutas R y R' y una estación de transbordo, además de los flujos de pasajeros vistos desde el punto de vista de la ruta R

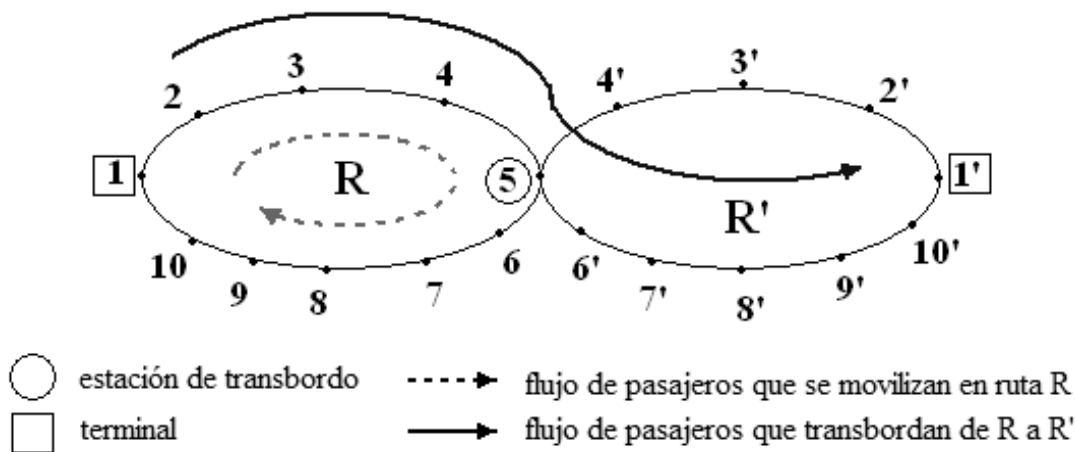


Figura 9.3: Sistema de transporte con dos rutas y una estación de transbordo

Se asume que el proceso de llegada de pasajeros a un paradero, se comporta como un proceso de Poisson. Esto es, los tiempos de llegada de los pasajeros a un paradero es una variable aleatoria con una distribución de Poisson de media  $\lambda$  [pas/min] (pasajeros por minuto). En la Figura 9.4 se presenta el tiempo medio de arribo por pasajeros a las paradas de ruta R, medida en [min/pas]. Se aprecia además como la variable  $1/\lambda$  disminuye a medida que nos acercamos a la zona central de la ruta, donde se supone que la ruta tiene la mayor demanda de pasajeros. De manera semejante, se definen tiempos medios para la ruta anexa R'.

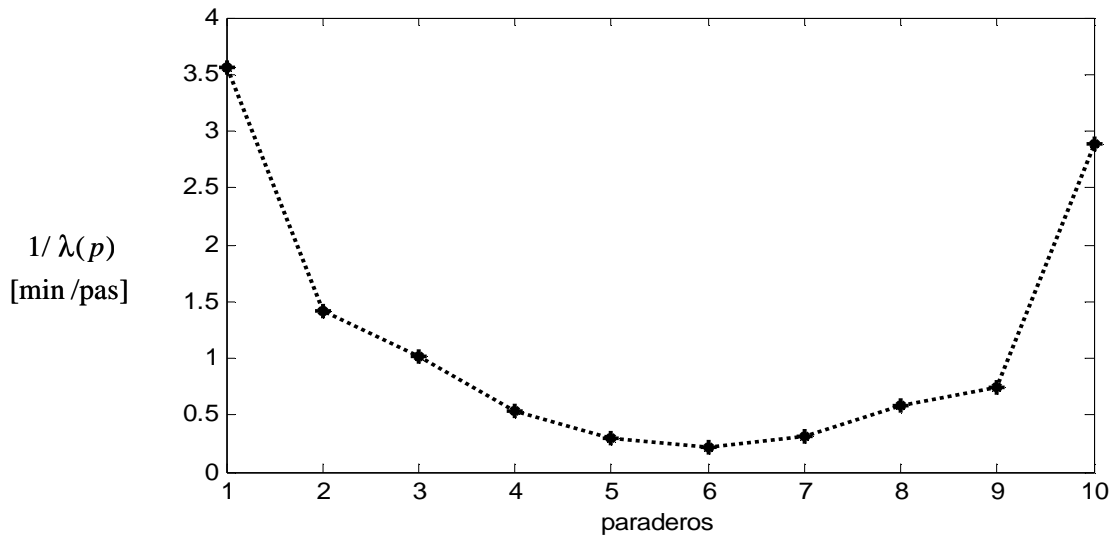


Figura 9.4: Tiempos medios de llegada

En la Figura 9.5 se grafica la cantidad de pasajeros acumulados por paradero, según los tiempos medios de llegada graficados en la Figura 9.4, para el periodo de una hora. Esta forma de acumulación de pasajeros concuerda a grosso modo, con datos reales tales como la gráfica de la acumulación de pasajeros en los paraderos de la línea 507 en la punta mañana, presentados por Valencia (2012) en la Figura 9.6. Donde, en el centro de la ruta se producen las grandes acumulaciones de pasajeros al contrario que en las secciones iniciales y finales donde la acumulación es menor.

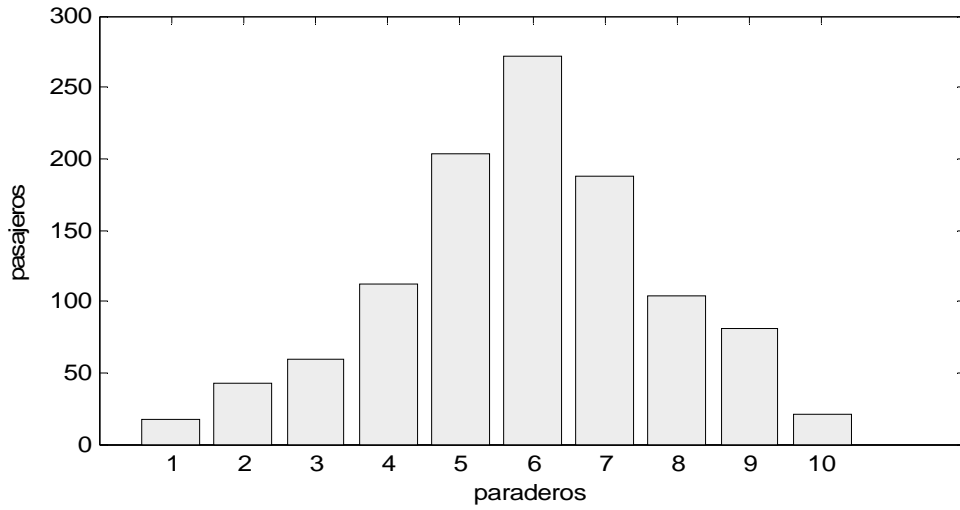


Figura 9.5: Pasajeros acumulados según los tiempos medios de llegada.

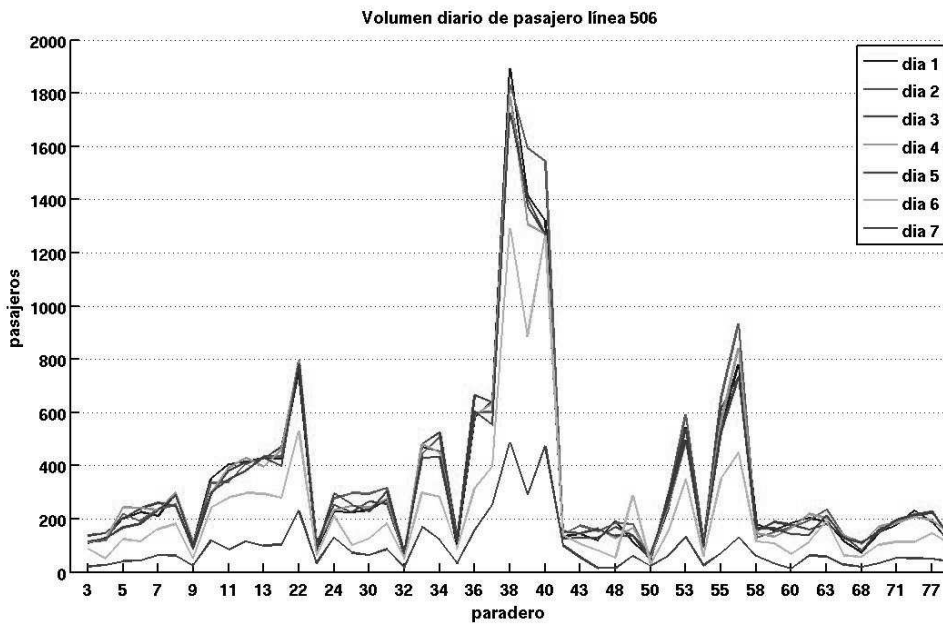


Figura 9.6: Acumulación de pasajeros en los paraderos de la línea 507 en la punta mañana para 7 días distintos (Valencia (2011))

Se considera además, modelar estadísticamente los destinos de los pasajeros con funciones  $f(p)$  de densidad de probabilidad gaussianas, centradas en la estación ubicada en el punto medio entre la estación donde abordan los pasajeros y la estación final de la ruta. Para la ruta R (Figura 9.7) se presenta la forma de las funciones de densidad de probabilidad. Del igual modo se pueden definir distribuciones para los destinos en la ruta R'.

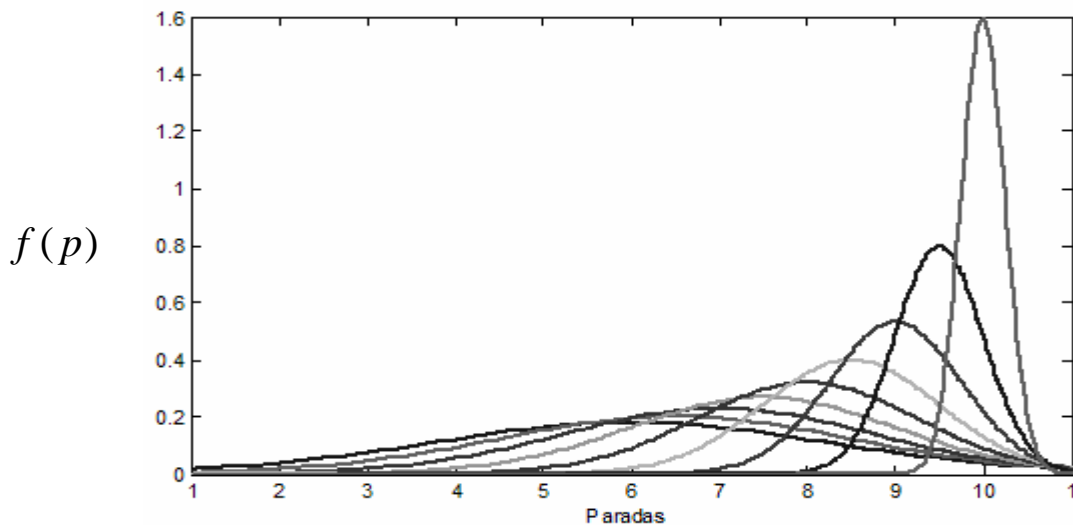


Figura 9.7. Densidades de probabilidad para los destinos en la ruta R

De igual modo, es necesario simular estadísticamente los destinos de los pasajeros que realizan transbordos. Esto implica considerar funciones  $f(p)$  de densidad de probabilidad gaussianas para los destinos en la ruta de transbordo tal como se presenta en la Figura 9.8.



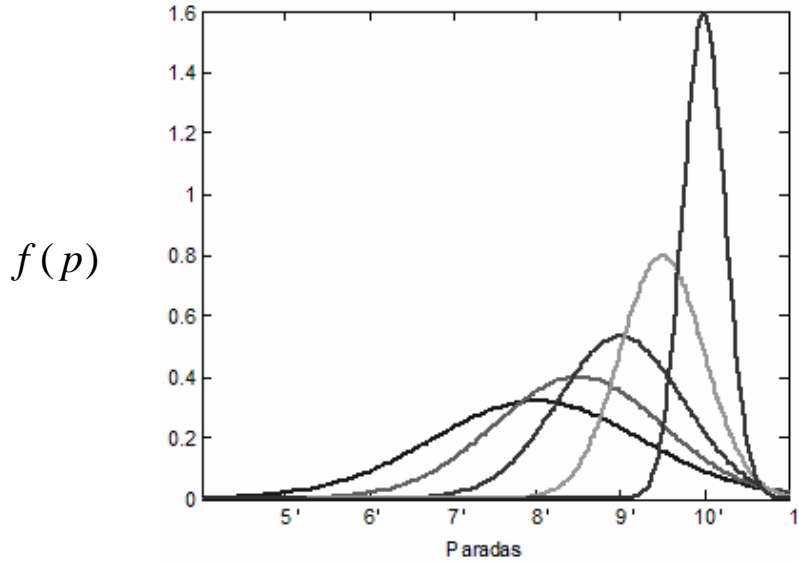


Figura 9.8.: Distribución de los destinos desde la estación de transbordo en la ruta R'

En la sección 9.10.3 se presentará la metodología para general la demanda que será utilizada en los experimentos de estudio.

A continuación, se plantea la solución del problema del transbordo por medio de un controlador descentralizado basado en lógica difusa.

### 9.3. Modelo dinámico de sistema de transporte público con estación de transbordo para un controlador difuso.

Para esta formulación, se mantiene la estructura básica de Sáez *et al.*, (2011), donde se supone la evolución del sistema en eventos discretos que concuerdan con los instantes en que los buses del sistema de transporte público lleguen a algún paradero.

En la Figura 9.9 se indica un esquema del sistema de transporte público analizado, el cual se supone compuesto por dos subsistemas. El subsistema 1 (correspondiente a la ruta R) con variables de entrada  $h_i$ ,  $Su_i$  que representan acciones de *holding* y *stop-skipping* respectivamente, variable de salida  $\Delta H_i^p$  que representa variación del *headway* en el paradero  $p$  para el bus  $i$  (ver capítulo 6 ecuación (6.13)), de forma simétrica, el subsistema

2 (correspondiente a la ruta R') presenta variables de entrada  $h_i'$ ,  $Su_i'$  y variable de salida  $\Delta H_i^p$ . Además, se considera la interacción entre los subsistemas representando efectos mutuos entre las rutas producidos por la estación de transbordo, como por ejemplo las cargas trasbordadas  $L_T$ ,  $L_T'$  para la ruta R y R' respectivamente. También, se considera la demanda para la ruta R y demanda' para la ruta R'. Por último, las variables representadas son función de tiempo discreto  $k$  y  $k'$  según su particular evolución por eventos en las rutas R y R' respectivamente.

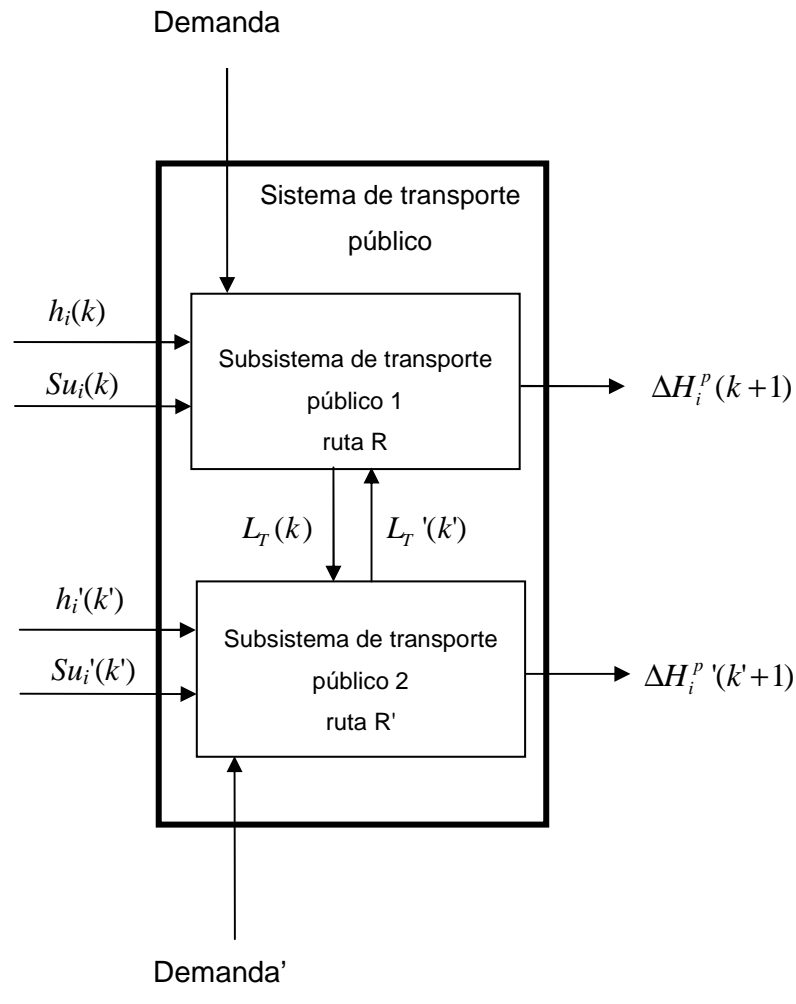


Figura 9.9: Esquema de un sistema de transporte público de dos rutas con estación de transbordo.

## 9.4. Controlador descentralizado difuso

A partir del esquema anterior, se plantea un control descentralizado difuso para el sistema compuesto de dos rutas individuales y una estación de transbordo, para lo cual, se aplica el control presentado en el capítulo 6, “asignación del *headway* por paradero en función de su demanda”, el cual se presenta en la Figura 9.10.

En la Figura 9.10 se muestra el lazo cerrado del sistema de buses y las principales variables correspondientes, las cuales son función de tiempo discreto  $k$  y  $k'$  según las rutas R y R' respectivamente. Cuando un evento  $k$  o  $k'$  ocurre, el controlador difuso correspondiente genera la acción de control exigida.

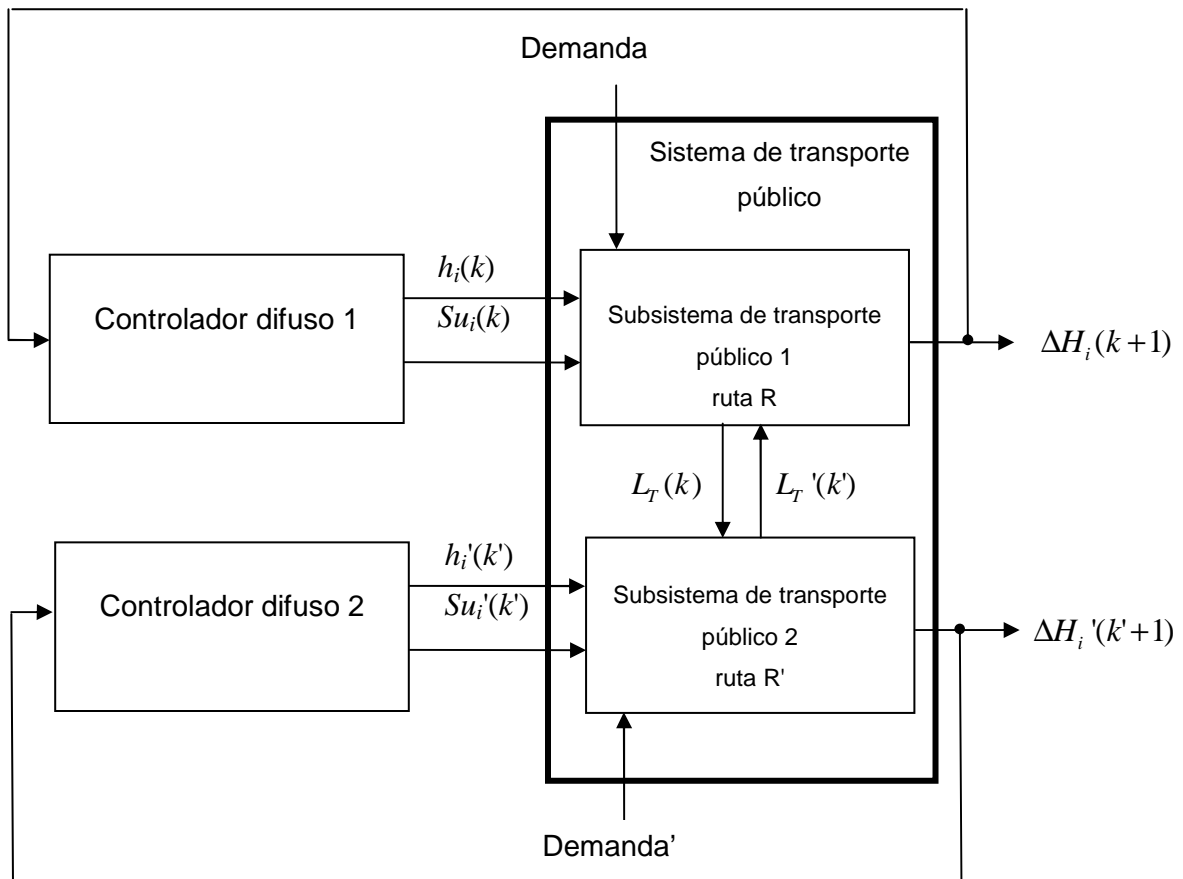


Figura 9.10: Controlador descentralizado difuso para el sistema de transporte público con estación de transbordo.

Naturalmente se puede implementar un control descentralizado difuso semejante, para el sistema compuesto de dos rutas individuales y una estación de transbordo, donde, se aplique el, “control difuso por ubicaciones relativas de los buses”, presentado en el capítulo 5.

## 9.5. Controlador distribuido difuso

Se considera, en esta sección una estrategia de control distribuido difuso, que además de un controlador individual por ruta como el presentado en la anterior sección 9.4, incluye la sincronización de los buses que llegan a la estación de transbordo.

La estructura del control distribuido difuso diseñada se presenta en la Figura 9.11, el sistema bajo control se supone compuesto por dos subsistemas de transporte público como se presentarán en la sección 9.9.

A diferencia del controlador difuso descentralizado presentado en la sección 9.4, en el controlador distribuido difuso de la Figura 9.11, existe comunicación entre los controladores difusos de cada ruta. Por ejemplo en un evento  $k$ , el controlador difuso 1 de la ruta R, necesita del controlador difuso 2 el valor del tiempo de sincronización  $Ts'$  de la ruta R'. Del mismo modo se debe transmitir  $Ts$  del controlador difuso 1 cuando el controlador difuso 2 lo solicite.

Por último, se define  $L_T(k)$  la cantidad de personas que transbordan hacia la ruta R' y que viajan en el bus más cercano a la estación de transbordo  $T$  sobre la ruta R en un evento  $k$ , también sea  $L_T'(k')$  la cantidad de personas que transbordan hacia la ruta R y que viajaron en el bus más cercano a la estación de transbordo sobre la ruta R' para el evento  $k'$  más cercano al evento  $k$  tal que  $k' \leq k$ . De igual modo se definen también, las capacidades al llegar a la estación de transbordo según las rutas R y R' como  $C(k)$  y  $C'(k')$ , en el evento  $k'$ . Luego, para analizar la importancia numérica del transbordo, es necesario la transmisión entre los controlares de los valores de las cargas a transbordar ( $L_T, L_T'$ ), así

como las capacidades libres ( $C, C'$ ). Notar que las variables de la ruta R se evalúan en un evento  $k$  y los de la ruta R' en  $k'$ ,

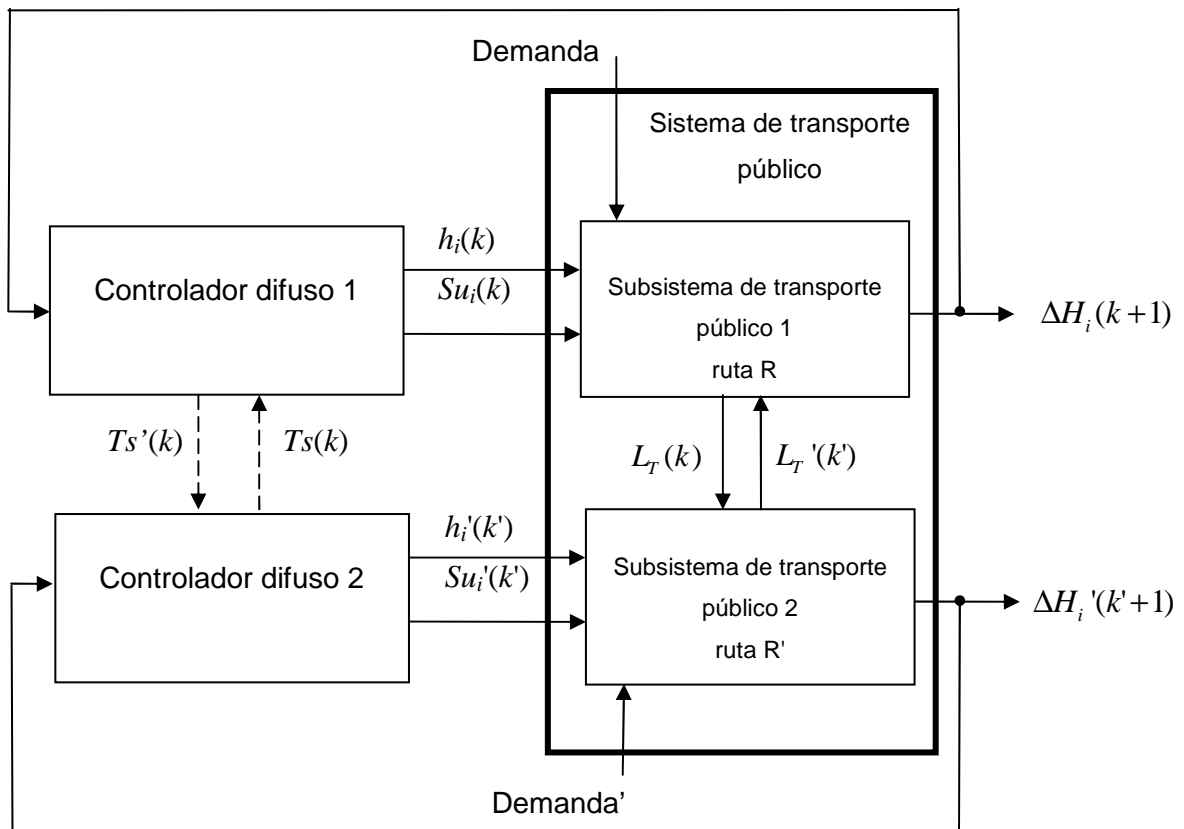


Figura 9.11: Controlador distribuido difuso para el sistema de transporte público con estación de transbordo.

### 9.5.1. Diseño de reglas de sincronización

Para la formulación de este controlador, se definen los siguientes términos:

$p_a$ : paradero anterior al paradero de transbordo según ruta R.

$p_a'$ : paradero anterior al paradero de transbordo según ruta R'.

$bus_{i*}$ : bus que produce el evento en el paradero  $p_a$ .

$bus_{NT}$ : bus *NT* (*next transfer*) más cercano a la estación de transbordo visto por la ruta R' y que se intenta coordinar con el bus que produjo el evento  $bus_{i*}$ .

Notar que el  $bus_{NT'}$  en R' se encuentra a una distancia  $dT(k)$  de la estación de transbordo y las distancias  $I_p$  entre los paraderos se suponen iguales en las dos rutas.

Luego, el controlador difuso de sincronización, está diseñado a base de reglas que intentan adelantar (con acciones  $Su_i(k)$  de *stop-skipping*) o atrasar (con acciones  $h_i(k)$  de *holding*) al  $bus_{i^*}$  que produjo el evento en el paradero  $p_a$  y hacer coincidir su llegada a la estación de transbordo con el bus  $bus_{NT'}$ . Se considera dos casos que analizar:

**Caso 1.** En la Figura 9.12 se presenta el caso 1, cuando el  $bus_{NT'}$  de la ruta R' se encuentra aguas arriba del paradero  $p_a'$ , por simpleza del diseño, a no más de un paradero de la estación de transbordo. Si  $\hat{T}_{NT'}^{p_a'}(k)$  es el tiempo de transbordo del  $bus_{NT'}$  en el paradero  $p_a'$  y  $v$  es la velocidad del bus. En este caso, se requiere retener el  $bus_{i^*}$  que produce el evento en la ruta R un tiempo de sincronización  $Ts_i(k) = (I_p - dT(k)) / v + \hat{T}_{NT'}^{p_a'}(k)$ . Es decir, el tiempo que le falta al  $bus_{NT'}$  para arribar al paradero  $p_a'$  más el tiempo de transbordo.

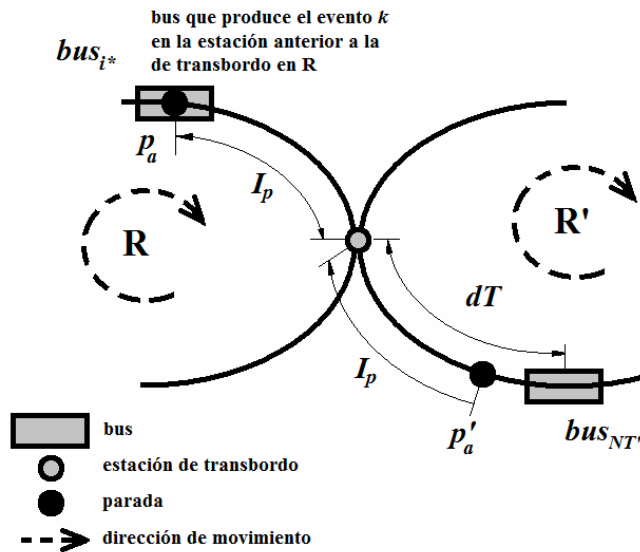


Figura 9.12: Buses a sincronizar caso 1

**Caso 2.** En la Figura 9.13 se presenta el caso 2, cuando el  $bus_{NT'}$  de la ruta R' se encuentra aguas abajo del paradero  $p_a'$ . Luego, se requiere adelantar el  $bus_{i^*}$  que produce el evento en

la ruta R un tiempo de sincronización  $Ts_i(k)$ . El adelantamiento se logra con una acción de *stop-skipping* en el  $bus_{i^*}$ .

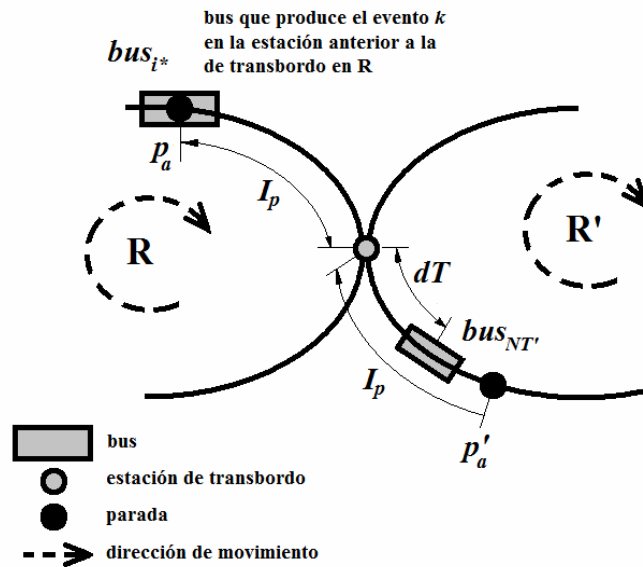


Figura 9.13: Buses a sincronizar caso 2

### Diseño de reglas de sincronización para controlador experto

Luego, para la sincronización de buses, se diseña un controlador experto compuesto de un conjunto de reglas heurísticas que logren que el tiempo de sincronización  $Ts_i(k)$  tienda a cero. Esto es, en el caso 1, cuando el  $bus_{i^*}$  se encuentra aguas arriba del paradero  $p_a'$  anterior al de transbordo, una acción de *holding* de valor  $h_i(k) = \beta$  se aplicará si  $Ts_i(k)$  pertenece a una vecindad de centro en  $Ts_i(k) = \beta$  de radio  $\beta/2$  (es decir  $\beta/2 < Ts_i(k) < 3\beta/2$ ). Siguiendo el mismo razonamiento, dentro de un rango  $3\beta/2 < Ts_i(k) < 5\beta/2$ , la acción de control de *holding* toma un valor de  $2\beta$ , ( $h_i(k) = 2\beta$ ) y para  $5\beta/2 < Ts_i(k) < 7\beta/2$  la acción de control de *holding* toma un valor de  $3\beta$ , ( $h_i(k) = 3\beta$ ). Ahora, una situación intermedia entre el caso 1 y el caso 2 es cuando  $-\beta/2 < Ts_i(k) < \beta/2$ , donde la acción de *holding* y *stop-skipping* no son necesarias ( $Su_i(k) = 0, h_i(k) = 0$ ).

Finalmente en el caso 2, cuando el  $bus_i'$  de la ruta R' se encuentra aguas abajo del paradero  $p_a'$  anterior al de transbordo, si  $Ts_i(k) < -\beta/2$ , la acción de control recomendada será solamente *stop-skipping* ( $Su_i(k) = 1$ ).

Al igual que el capítulo 5 (ecuación (5.2)), añadiendo los casos límites (igualdades), podemos formular el controlador experto (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas) con las siguientes cinco reglas heurísticas.

$$\text{Si } Ts_i(k) \leq -\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 1 \quad (9.1a)$$

$$\text{Si } -\beta/2 < Ts_i(k) \leq \beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 0, Su_i(k) = 0 \quad (9.1b)$$

$$\text{Si } \beta/2 < Ts_i(k) \leq 3\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = \beta, Su_i(k) = 0 \quad (9.1c)$$

$$\text{Si } 3\beta/2 < Ts_i(k) \leq 5\beta/2 \text{ entonces } h_i(k) = 2\beta, Su_i(k) = 0 \quad (9.1d)$$

$$\text{Si } 5\beta/2 < Ts_i(k) \text{ entonces } h_i(k) = 3\beta, Su_i(k) = 0 \quad (9.1e)$$

### **Diseño de reglas de sincronización para controlador experto difuso**

En la estrategia de control difusa diseñada con la ecuaciones (9.1a) a (9.1e), las variables manipuladas son una función discontinua del tiempo de sincronización  $Ts_i(k)$  para el  $bus_i'$  en la ruta R', lo cual genera una abrupta variación en la decisión de la acción de control *holding* cuando  $Ts_i(k)$  está cerca de su limite inferior o superior, para  $\beta/2, 3\beta/2$  o  $5\beta/2$  (ver ecuaciones de la (9.1b) a (9.1e)). Para evitar el comportamiento discontinuo asociado con las reglas de controlador experto, se adoptan las reglas básicas usando técnicas de lógica difusa (Babuska, 1998). Luego, las acciones de control *holding*  $h_i(k)$  y *stop-skipping*  $Su_i(k)$  son determinadas a partir de las siguientes reglas (denominadas reglas de sincronización RS):

$$\text{Si } Ts_i(k) \text{ es } D_4 \text{ entonces } Su_i(k) \text{ es } S_1 \quad (9.2a)$$



$$\text{Si } Ts_i(k) \text{ es } D_0 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_0 \quad (9.2b)$$

$$\text{Si } Ts_i(k) \text{ es } D_1 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_1 \quad (9.2c)$$

$$\text{Si } Ts_i(k) \text{ es } D_2 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_2 \quad (9.2d)$$

$$\text{Si } Ts_i(k) \text{ es } D_3 \text{ entonces } h_i(k) \text{ es } H_3 \quad (9.2e)$$

Para construir las reglas difusas del controlador se presentan en la Figura 9.14 los conjuntos difusos de las entradas y en la Figura 9.15 los conjuntos de salidas del controlador de sincronización, donde  $\mu$  es el grado de pertenencia de la variable al conjunto difuso.

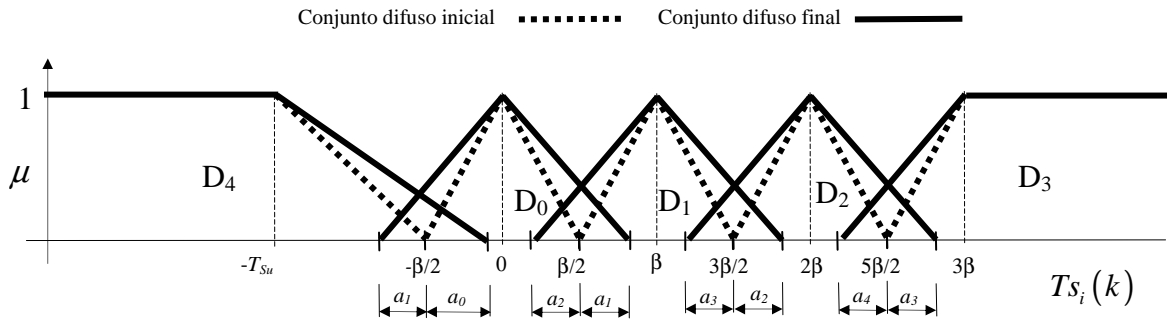


Figure 9.14: Funciones de pertenencia para la entrada  $Ts_i(k)$

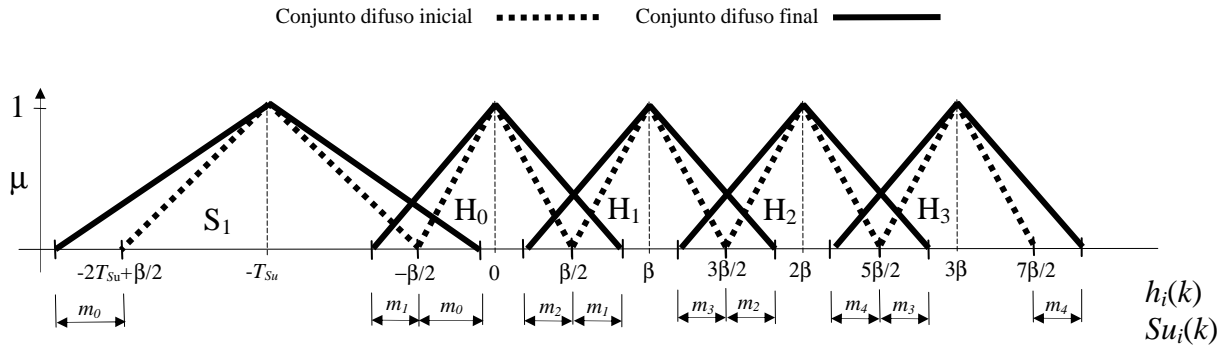


Figure 9.15: Conjuntos difusos de las salidas

En los conjunto difusos de entrada y salida, Figuras 9.14 y 9.15 respectivamente, los parámetros representan:  $T_{sk}$  la mejor suposición hecha sobre el tiempo adelantado por una acción de *skipping*,  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  variación simétrica de las bases de los conjuntos

difusos de entrada respectivos,  $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4$  variación simétrica de las bases de los conjuntos difusos de salida respectivos. Parámetros sintonizados en la sección 9.5.4.

### 9.5.2. Diseño de reglas para administrar el transbordo

Las reglas difusas de sincronización RS diseñadas, deben ser combinadas con nuevas reglas difusas que evalúen la pertinencia de forzar el transbordo, considerando los valores de las cargas a transbordar ( $L_T, L_T'$ ) y capacidades libres ( $C, C'$ ). Esto es, reglas que administren e incentiven el transbordo, cuando por ejemplo un bus con gran capacidad libre, se encuentre con un bus con alta carga de transbordo. Por el contrario, no debe haber demasiado esfuerzo en conectar buses cuyo encuentro no producirá considerables transbordos de pasajeros, ya que puede suceder, que por forzar el transbordo, se pierda eficiencia en los índices de comportamiento de las rutas individuales. Al momento del diseño de estas reglas se deben hacer las siguientes consideraciones que nos permitirán eliminar opciones infactibles (ver tablas 9.1 a 9.4):

a) Se deduce que para un bus que hace transbordo, si éste tiene una gran carga para transbordar implicará que quedará con una gran capacidad libre (esto es, en una misma ruta, un alto valor de  $L_T$  implica un alto valor de  $C$ ).

b) También, es claro que si un bus al llegar al transbordo tiene poca capacidad libre, implicará que su carga de transbordo era baja (esto es, pequeño  $C$  implica pequeño  $L_T$ ).

Luego, se implementan reglas que definen el controlador difuso basadas en los conjuntos difusos de la Figura 9.14 y 9.15 más los conjuntos difusos de las Figuras 9.16 y 9.17. En la notación de las Figuras 9.16 y 9.17, la letra G significa un conjunto difuso grande y la letra P significa un conjunto difuso pequeño.

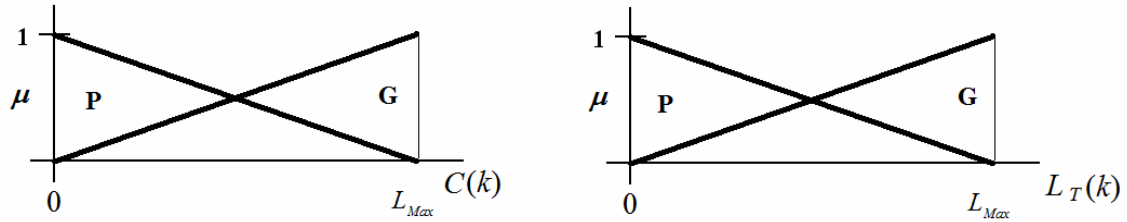


Figura 9.16: Conjuntos difusos de las variables de entrada carga ( $C$ ) y capacidad ( $L_T$ ) para recorrido R

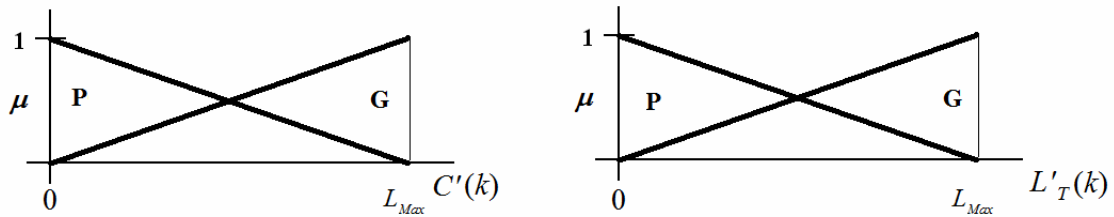


Figura 9.17: Conjuntos difusos de las variables de entrada carga ( $C'$ ) y capacidad ( $L'_T$ ) para recorrido R'

### 9.5.3. Combinación de reglas de sincronización con reglas de administración del transbordo.

A continuación, se muestran cuatro tablas que representan las reglas difusas que permiten relacionar las cargas a transbordar ( $L_T, L'_T$ ) con las capacidades libres ( $C, C'$ ) de las rutas ( $R, R'$ ) y la acción de control  $u_i$  de sincronización. Esto es, la acción de control  $u_i$  para sincronizar los buses, debe estar validada por valores de las variables ( $L_T, C$ ) y ( $L'_T, C'$ ) que impliquen que la cantidad de pasajeros transbordados será importante. Como se mencionó, esta validación es necesaria ya que la sincronización afecta las acciones de control en las rutas individuales.

Para la tabla 9.1a la salida RS significa, aplicar las consecuencias de las reglas RS a la acción de control de sincronización, la salida CDI, en las tablas 9.1a a la 9.1b, implica sólo realizar control difuso individual de las rutas (no sincronizar). En las tablas 9.1b, 9.1c y 9.1d el guión (-) representa condiciones infactibles determinadas por las consideraciones a) y b).

Las tabla 9.1a a la 9.1d se construyeron para analizar si para un evento  $k$ , las variables del par  $(L_T, C')$  son ambas importantes y obtener así un transbordo interesante, luego decidir si corresponde utilizar las reglas de sincronización RS (un análisis equivalente se plantea para el par  $(L_T', C)$ ). Ahora, si las cargas de transbordo  $L_T$  y  $L_T'$  son pequeñas, no vale la pena sincronizar, y se aplica un controlador difuso independiente para cada ruta, denominándolo CDI.

En la tabla 9.1b hay dos puntos inconsistentes (marcados con guión (-)), debido a que en el bus de la ruta R' su carga de transbordo  $L_T'$  es grande y su capacidad después del transbordo  $C'$  es pequeña. Ahora, los puntos consistentes presentan: cargas de transbordo  $L_T$  grandes y capacidad  $C'$ , del bus receptor, pequeña. También, cargas de transbordo  $L_T$  pequeñas. Situaciones poco propicias para transbordos importantes, luego se prefiere hacer un controlador difuso independiente para cada ruta (CDI).

Las tablas 9.1c y 9.1d tienen explicaciones semejantes a las tablas 9.1a y 9.1b.

Tabla 9.1a

$C$  es G,  $C'$  es G

$L_T \backslash L_T'$	G	P
G	RS	RS
P	RS	CDI

Tabla 9.1b

$C$  es G,  $C'$  es P

$L_T \backslash L_T'$	G	P
G	-	CDI
P	-	CDI

Tabla 9.1c

$C$  es P,  $C'$  es G

$L_T \backslash L_T'$	G	P
G	-	-
P	CDI	CDI

Tabla 9.1d

$C$  es P,  $C'$  es P

$L_T \backslash L_T'$	G	P
G	-	-
P	-	CDI

Del conjunto de cuatro tablas 9.1 se generan nueve reglas difusas (ecuaciones (9.3)), las cuales, serán integradas con las cinco reglas de sincronización (ecuaciones (9.2)).

Si  $L_T$  es G y  $L_T'$  es G y  $C$  es G y  $C'$  es G entonces a  $u_i$  se le aplican consecuencias de RS

Si  $L_T$  es G y  $L_T'$  es P y  $C$  es G y  $C'$  es G entonces a  $u_i$  se le aplican consecuencias de RS

Si  $L_T$  es P y  $L_T'$  es G y  $C$  es G y  $C'$  es G entonces a  $u_i$  se le aplican consecuencias de RS

Si  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y  $C$  es G y  $C'$  es G entonces realizar sólo CDI

Si  $L_T$  es G y  $L_T'$  es P y  $C$  es G y  $C'$  es P entonces realizar sólo CDI

Si  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y  $C$  es G y  $C'$  es P entonces realizar sólo CDI (9.3)

Si  $L_T$  es P y  $L_T'$  es G y  $C$  es P y  $C'$  es G entonces realizar sólo CDI

Si  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y  $C$  es P y  $C'$  es G entonces realizar sólo CDI

Si  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y  $C$  es P y  $C'$  es P entonces realizar sólo CDI

A continuación se presentan explícitamente todas las reglas difusas combinadas, estas son 45 reglas, 5 reglas de sincronización por 9 reglas de administración del transbordo. Notar que se eliminó la dependencia del tiempo por simplicidad de la notación.

Si  $Ts_i'$  es  $D_4$  y  $L_T$  es G y  $L_T'$  es G y  $C$  es G y  $C'$  es G entonces  $Su_i$  es  $S_1$  (9.4)

Si  $Ts_i'$  es  $D_4$  y  $L_T$  es G y  $L_T'$  es P y  $C$  es G y  $C'$  es G entonces  $Su_i$  es  $S_1$

Si  $Ts_i'$  es  $D_4$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es G y  $C$  es G y  $C'$  es G entonces  $Su_i$  es  $S_1$

Si  $Ts_i'$  es  $D_4$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y  $C$  es G y  $C'$  es G entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_4$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_4$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_4$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $G$  y  $C$  es  $P$  y  $C'$  es  $G$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_4$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $P$  y  $C'$  es  $G$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_4$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $P$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_0$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $G$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces  $h_i$  es  $H_0$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_0$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces  $h_i$  es  $H_0$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_0$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $G$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces  $h_i$  es  $H_0$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_0$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_0$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_0$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_0$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $G$  y  $C$  es  $P$  y  $C'$  es  $G$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_0$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $P$  y  $C'$  es  $G$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_0$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $P$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_1$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $G$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces  $h_i$  es  $H_1$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_1$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces  $h_i$  es  $H_1$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_1$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $G$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces  $h_i$  es  $H_1$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_1$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_1$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_1$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_1$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $G$  y  $C$  es  $P$  y  $C'$  es  $G$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_1$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $P$  y  $C'$  es  $G$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_1$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $P$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_2$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $G$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces  $h_i$  es  $H_2$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_2$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces  $h_i$  es  $H_2$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_2$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $G$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces  $h_i$  es  $H_2$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_2$  y  $L_T$  es  $P$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $G$  entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_2$  y  $L_T$  es  $G$  y  $L_T'$  es  $P$  y  $C$  es  $G$  y  $C'$  es  $P$  entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_2$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y C es G y  $C'$  es P entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_2$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es G y C es P y  $C'$  es G entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_2$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y C es P y  $C'$  es G entonces realizar sólo CDI  
 Si  $T_{S_i'}$  es  $D_2$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y C es P y  $C'$  es P entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_3$  y  $L_T$  es G y  $L_T'$  es G y C es G y  $C'$  es G entonces  $h_i$  es  $H_3$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_3$  y  $L_T$  es G y  $L_T'$  es P y C es G y  $C'$  es G entonces  $h_i$  es  $H_3$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_3$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es G y C es G y  $C'$  es G entonces  $h_i$  es  $H_3$

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_3$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y C es G y  $C'$  es G entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_3$  y  $L_T$  es G y  $L_T'$  es P y C es G y  $C'$  es P entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_3$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y C es G y  $C'$  es P entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_3$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es G y C es P y  $C'$  es G entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_3$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y C es P y  $C'$  es G entonces realizar sólo CDI

Si  $T_{S_i'}$  es  $D_3$  y  $L_T$  es P y  $L_T'$  es P y C es P y  $C'$  es P entonces realizar sólo CDI

A partir de estas 45 reglas se puede administrar más racionalmente el flujo de pasajeros en la estación de transbordo, reglas que pretenden sincronizar sólo los buses que potencialmente producirán un mayor transbordo de pasajeros.

#### 9.5.4. Sintonización de parámetros de los controladores difusos

Los parámetros de los controladores difusos propuestos, se sintonizaron por medio de un algoritmo de enjambres PSO. Se aplicó el algoritmo de enjambres de partículas sintonizando los parámetros ya descritos en las Figuras 9.14 y 9.15 para el controlador difuso diseñado. Para las simulaciones se consideró 30 días con distintas demandas.

La función objetivo para éste algoritmo fue:  $\sum_{d=1}^{N_d} \bar{T}_w(d)$  donde  $\bar{T}_w(d)$  es el tiempo de espera medio de todos los paraderos de la ruta para una simulación de 2 horas en el día  $d$ .

Los resultados de sintonización para los distintos controladores se presentan en la Tabla 9.2.

Tabla 9.2: Parámetros finales del controladores difusos *holding* y *stop-skipping* basado en reglas difusas con *headway* distribuido

$T_{Su}$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$
[s]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]
56	178	342	198	122	198	45	56	37	123	23

Los parámetros presentados en la Tabla 9.2, de acuerdo al controlador difuso correspondiente, fueron utilizados en distintos escenarios. El análisis se presentará en la sección 9.7.4 y se comparará con el controlador predictivo presentado a continuación.

## 9.6. Diseño de un controlador predictivo de un sistema de transporte público con una estación de transbordo y dos rutas.

En esta sección, se plantea los antecedentes básicos de un conjunto de tres controladores predictivos diseñados para un sistema de transporte público con una estación transbordo y dos rutas. En primer lugar, se plantea un análisis crítico a la formulación de un controlador predictivo para el mismo sistema desarrollado en Riquelme, (2007), formulación utilizada como base de estudio para esta sección. A continuación, se plantea un modelo dinámico de sistema de transporte, así como una representación dinámica de la demanda, la cual, debe ser incluida en el problema de optimización asociado.

### 9.6.1. Antecedentes

En esta sección se realiza un análisis crítico a la formulación de un controlador predictivo para un sistema de dos rutas y una estación de transbordo que se utilizará como base estudio.



En la tesis de Riquelme, (2007) se plantea una formulación de un controlador predictivo de un sistema de transporte público de dos recorridos conectados por una estación de transbordo. Esta formulación es motivada por un trabajo realizado por Bookbinder y Désilets, (1991) quienes establecen una función de “desutilidad” que considera el tiempo que los pasajeros deben esperar en las estaciones de transferencia hasta que llega su conexión. Es decir evalúa la inconveniencia de tiempos de viaje aleatorios, de una conexión de un viaje de un punto determinado moviéndose desde una línea alimentadora a una línea recibidora (ver detalles de la formulación en el anexo E).

### **Análisis de la formulación**

A partir de un análisis de esta formulación Riquelme, (2007), se pueden hacer las siguientes recomendaciones.

1) Es necesario agregar restricciones al tamaño mínimo de los intervalos  $w_1$  y  $w_2$ , ya que no se está considerando los tiempos necesarios para que los pasajeros suban y bajen de los buses esto, luego:

$$w_1(k) \geq Tr_i^{P_{tras}}(k) \text{ y } w_2(k) \geq Tr_i^{P_{tras}}(k)' \quad (9.5)$$

donde  $Tr_i^{P_{tras}}(k)$  y  $Tr_i^{P_{tras}}(k)'$  son los tiempo de transbordo de pasajeros del la ruta 1 a la 2 y de la ruta 2 a la 1 respectivamente.

2) Desde un punto de vista del control predictivo híbrido que se pretende implementar, la acciones de control para el proceso de transbordo son demasiado locales, esto es, sólo habrá una acción de control para este proceso si y sólo si algún bus generara un evento en la estación de transbordo. Lo anterior implica que las acciones de control en los otros paraderos no tendrán influencia en la optimización del proceso de transbordo, ya que en estos casos la función  $J_2$  no estaría activada. Por lo cual, sería recomendable realizar una formulación más flexible, donde los eventos en otros paraderos influyan en la coordinación de los buses que lleguen en la estación de transbordo.

Notar que, desde el punto de vista del control predictivo, puede ser necesario que se generen muchos eventos antes de lograr que vuelva a producirse un evento en la estación de transbordo, para sumarlo a  $J_2$  y lograr que este índice de comportamiento influya en los objetivos de sincronización. Esto exige un número excesivo de predicciones del proceso, con el correspondiente aumento de los tiempos computacionales.

En otros términos, el índice de comportamiento diseñado para hacerse cargo de la sincronización de los buses en la estación de transbordo, es difícil de evaluar, y para que su aporte sea significativo debería lograrse un número importante de predicciones. Además, es muy difícil predecir en cuantos eventos consecutivos a  $k$  un bus llegará nuevamente a la estación de transbordo.

Luego se recomienda modificar el índice de comportamiento para la sincronización de los buses, tal que se evalúe no sólo cuando un bus produzca un evento en la estación de transbordo, sino que en todo otro evento, evitando así sólo información parcial del sistema.

3) En el algoritmo de solución de un controlador predictivo híbrido, la presencia de una variable interna  $q(k)$  que depende del tiempo  $k$ , y que puede tomar por ejemplo, uno de dos valores diferentes  $a$  o  $b$ , se denomina conmutador. La inclusión de  $q(k)$  en las restricciones del problema de optimización correspondiente puede hacerse de la siguiente forma:

$$q(k) = \delta(k)a + (1 - \delta(k))b \quad (9.6)$$

donde la variable cuantizada  $\delta$  en un tiempo  $k$ , puede tomar valores 0 o 1.

Luego, para evaluar el índice de comportamiento  $J_2$  en Riquelme, (2007) es necesario considerar cuatro casos, luego su incorporación al problema de optimización del controlador predictivo implica considerar dicha expresión como un conmutador. Esto es, la representación de la función de optimización  $J_2$  en un tiempo  $k$ , puede ser de la siguiente forma. Se define las funciones de dos variables  $n(k) = (n_k^1, n_k^2)$  y  $f(k) = (w_1(k)^2, w_2(k)^2)$

luego  $C(T) = \sum_{K=1}^N n(k) \cdot f(k)$  donde el punto significa producto punto de las dos funciones.

Ahora, se sabe que  $f(k)$  puede tomar cuatro valores diferentes, representados en las ecuaciones (E.7) a la (E.9) y Figuras (E.1) a la (E.4) del anexo E. Sin embargo, el caso 1 y 2 se puede fundir en un solo caso que llamaremos caso A:

$$w_1 = \hat{Td}_i(k'+\ell') - t_k \text{ y } w_2 = \hat{Td}_i(k+\ell) - t_{k'} \text{ si } \left( t_k \leq t_{k'} \text{ y } t_{k'} \leq \hat{Td}_i(k+\ell) \right) \text{ o } \left( t_{k'} \leq t_k \text{ y } t_k \leq \hat{Td}_i(k'+\ell') \right) \text{ el}$$

caso 3 será el caso B:

$$w_1 = \hat{Td}_i(k'+\ell') - t_k \text{ y } w_2 = \hat{Td}_{i+1}(k+z+m) - t_{k'} \text{ si } t_k \leq t_{k'} \text{ y } t_{k'} \geq \hat{Td}_i(k+\ell)$$

el caso 4 será caso C:

$$w_1 = \hat{Td}_{i+1}(k'+\ell'+m') - t_k \text{ y } w_2 = \hat{Td}_i(k+\ell) - t_{k'} \text{ si } t_{k'} \leq t_k \text{ y } t_k \geq \hat{Td}_i(k'+\ell')$$

Luego, para construir el problema de optimización del controlador predictivo híbrido es necesario representar la función  $f(k)$  como un conmutador de tres posiciones que puede tomar los siguientes valores  $c_i(k)$  para  $i=1,2,3$ . Esto es:

$$\begin{aligned} c_1(k) &= \left( \hat{Td}_i(k'+\ell') - t_k, \hat{Td}_i(k+\ell) - t_{k'} \right) \\ c_2(k) &= \left( \hat{Td}_i(k'+\ell') - t_k, \hat{Td}_{i+1}(k+z+m) - t_{k'} \right) \\ c_3(k) &= \left( \hat{Td}_{i+1}(k'+\ell'+m') - t_k, \hat{Td}_i(k+\ell) - t_{k'} \right) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Por lo tanto, una forma posible de esta representación de la función  $f(k)$  es la ecuación:

$$f(k) = c_1(k) \frac{(1-\delta(k))(2-\delta(k))}{2} + c_2(k) \delta(k)(2-\delta(k)) + c_3(k) \frac{(1-\delta(k))\delta(k)}{2} \quad (9.8)$$

con  $\delta(k)$  una variable cuantizada tal que  $\delta(k) \in \{0,1,2\}$ . Esto es:

$$\begin{aligned}
\text{si } \delta = 0 &\Rightarrow f(k) = c_1(k) \\
\text{si } \delta = 1 &\Rightarrow f(k) = c_2(k) \\
\text{si } \delta = 2 &\Rightarrow f(k) = c_3(k)
\end{aligned}
\tag{9.9}$$

Entonces, para solucionar el problema de optimización correspondiente, a cada rama del árbol de decisiones además de las acciones de control ya descritas en capítulos anteriores (4 acciones de *holding de* 0, 30, 60 y 90 [s] y una acción de *skipping*) debería añadirse una variable  $\delta(k)$  que puede tomar tres valores posibles. Luego, de cinco ramas por hoja en el árbol de decisiones inicial, pasamos a uno de ocho ramas por hoja. Como el crecimiento del árbol a medida que avanzamos de nivel es una función exponencial del número de hojas posibles por rama, vemos que la complejidad de la solución del problema también va creciendo exponencialmente.

En la Figura 9.18 se presenta un ejemplo, de como el hecho de agregar un índice de comportamiento definido en términos de un conmutador de tres posiciones, produce un aumento exponencial en el árbol de decisiones utilizado para determinar la acción de control óptima (ver sección 7.2 capítulo 7). En la Figura 9.18a se presenta un ejemplo de recorrido del árbol de decisiones para un horizonte de 2 pasos, donde se detallan las acciones de control factibles  $u_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) y las evaluaciones de los índices de comportamiento clásicos  $J_n^i$ , siendo  $n$  el nivel de profundidad del árbol. En la Figura 9.18b se muestra el árbol de decisiones para un índice de comportamiento que se define como un conmutador de tres posiciones, notar, que las acciones de control  $u_i^s$  ( $s=0,1,2$  posiciones del conmutador) se replican por un factor de tres, en cada punto del árbol.

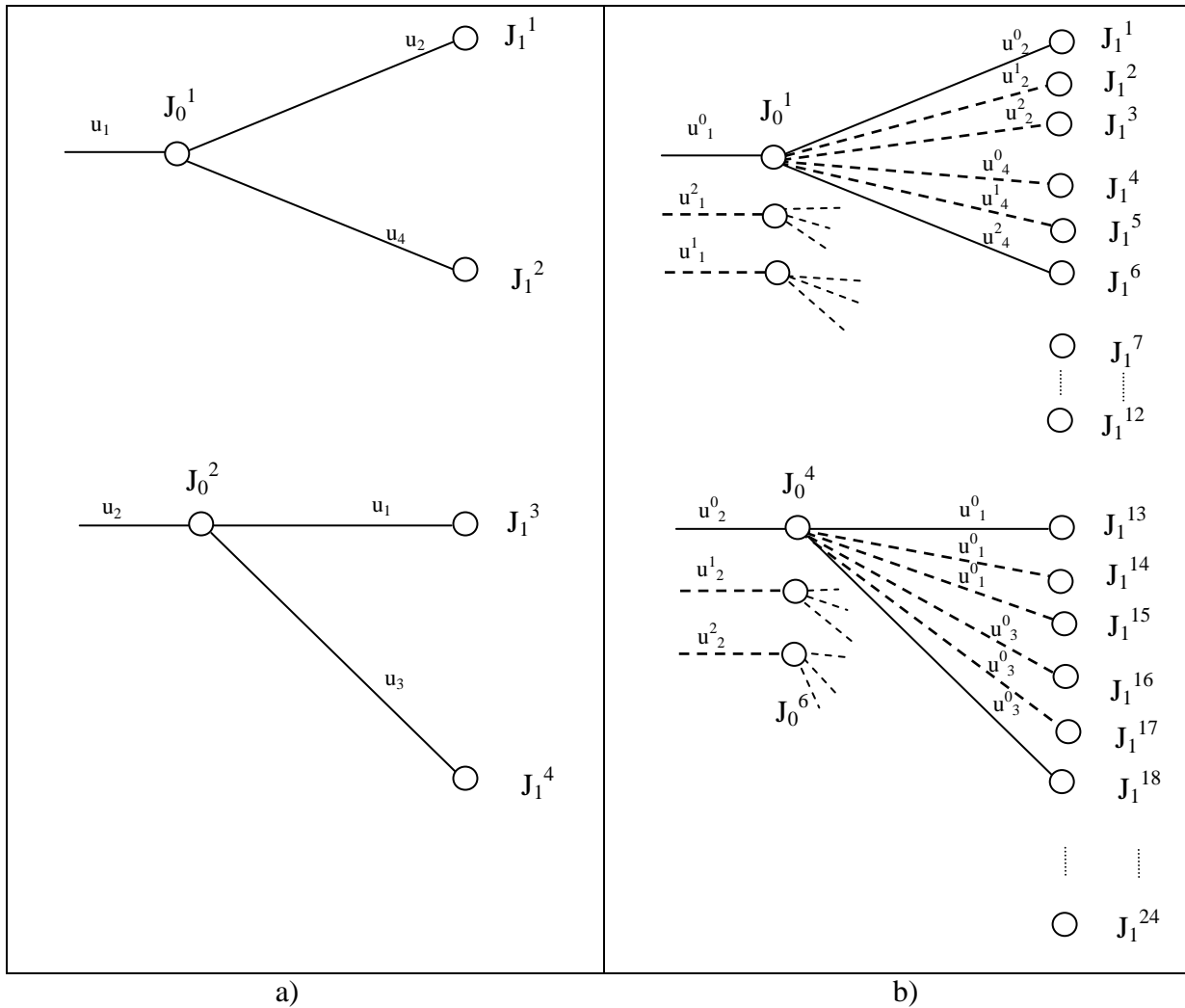


Figura 9.18: Árbol de dicciones

La complicación de la nueva solución, es aparte del aumento de complejidad de la solución, al tener dos rutas que optimizar. Estas consideraciones influirán en la decisión de buscar otra función que remplace a  $J_2$  y que implique menor costo computacional.

Finalmente, el intento de sincronizar los buses es miope con respecto a la cantidad de pasajeros a transbordar. Es decir, se intenta sincronizar todos los buses sin discriminar el tamaño de la carga, lo que podría perjudicar las decisiones en el control de las rutas individuales, por efecto de forzar la sincronización en la estación de transbordo de todos los buses. Los cuales, podrían venir vacíos o por el contrario, llenos con pasajeros sin la intención de transbordo.

A partir del análisis previo, se realiza una nueva formulación del problema de control de un sistema de transporte público con transbordos que intenta superar las limitaciones detectadas.

### **9.6.2. Modelo dinámico de sistema de transporte público con estación de transbordo para un controlador predictivo**

Para esta formulación, mantenemos la estructura básica de Sáez *et al*, (2012) la cual fue mejorada en la sección 7.1.3, donde se supone la evolución del sistema en eventos discretos que concuerdan con los instantes en que los buses del sistema de transporte lleguen a algún paradero. Además, este modelo por ruta es aplicable a todas las rutas que compongan el sistema. Sin embargo, en un inicio estará compuesto por sólo dos rutas. Luego, cada una de las rutas R y R' del sistema se puede representar por el modelo discreto presentado en el capítulo 7.

En la Figura 9.19 se indica un esquema del sistema de transporte analizado, el cual se supone compuesto por dos subsistemas de transporte público. El subsistema 1 (correspondiente a la ruta R) con variables de entrada  $h_i, Su_i$  que representan acciones de *holding* y *stop-skipping* respectivamente, variables de salida  $x_i, L_i, Td_i$  que representan la posición, carga y tiempo de salida del bus  $i$  respectivamente, de forma simétrica, el subsistema 2 (correspondiente a la ruta R') presenta variables de entrada  $h'_i, Su'_i$  y variables de salida  $x'_i, L'_i, Td'_i$ . Además, se considera la interacción entre los subsistemas representando efectos mutuos entre las rutas producidos por la estación de transbordo, como por ejemplo la carga trasbordada  $L_T, L'_T$  para la ruta R y R' respectivamente. También, se considera la demanda  $\Gamma_p$  para la ruta R y  $\Gamma'_p$  para la ruta R'. Por último, las variables representadas son función de tiempo discreto  $k$  y  $k'$  según su particular evolución por eventos en las rutas R y R' respectivamente.

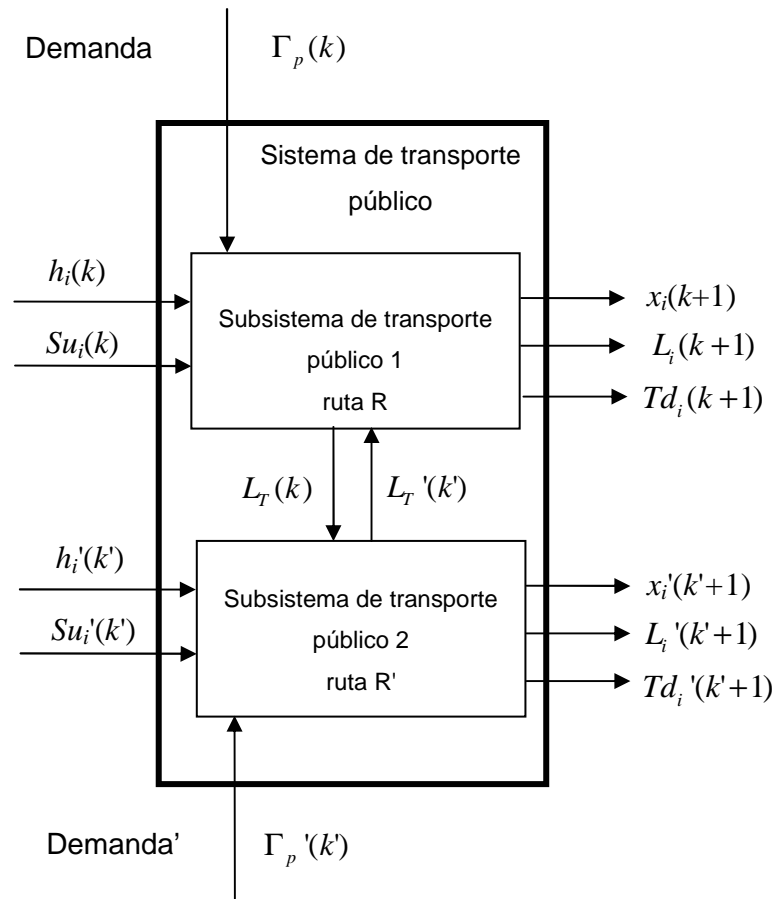


Figura 9.19: Esquema de un sistema de transporte público de dos rutas con estación de transbordo.

Del mismo modo, la formulación dinámica de la demanda por paradero y carga de los buses para una ruta única presentada en el capítulo 7, será generalizada para rutas conectadas por una estación de transbordo en la sección siguiente.

### 9.6.3. Representación dinámica de la demanda de paraderos y carga de buses para rutas conectadas por una estación de transbordo

#### Demanda por paradero con rutas con transbordo

Para una ruta R conectada a otra R' por medio de una estación de transbordo T se debe realizar las siguientes consideraciones: A partir de los datos recopilados de la demanda en paraderos, se debe determinar la proporción  $0 \leq r \leq 1$  de pasajeros que transbordan a la ruta

R' versus la suma de pasajeros que transbordan a R' y los pasajeros que al llegar a el bus a la estación de transbordo  $T$  siguen en la ruta R.

$$r = \frac{\text{n}^\circ \text{ de pasajeros que transbordan}}{\text{n}^\circ \text{ de pasajeros que tranbordan} + \text{n}^\circ \text{ pasajeros que una vez en } T \text{ siguen en la ruta R}} \quad (9.10)$$

Este valor puede ser considerado constante en cierto intervalo razonable de tiempo o en su defecto, actualizarlo para cada evento  $k$  con los datos recopilados en línea (ver ecuación (9.25)).

Entonces en el caso que existe transbordo, el vector estimado de aumento de pasajeros  $\hat{\Delta}\Gamma^p(k)$  en un paradero para un evento  $k$ , se puede representar desagregadamente por el vector de dimensión igual al número de destinos  $Np + Nd'$ : donde en sus componentes, el primer súper-índice representa el número de paradero y el segundo súper-índice representa el número de destino.

$$\hat{\Delta}\Gamma^p(k) = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}\Gamma^{p,1}(k) & \hat{\Delta}\Gamma^{p,2}(k) & \dots & \hat{\Delta}\Gamma^{p,T}(k) & \dots \\ \hat{\Delta}\Gamma^{p,Np}(k) & \hat{\Delta}\Gamma^{p,(T+1)'}(k) & \hat{\Delta}\Gamma^{p,(T+2)'}(k) & \dots & \hat{\Delta}\Gamma^{p,(T+Nd)'}(k) \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

Donde,  $Np$  es el número de paraderos totales de la ruta R,  $Nd'$  es el número de destinos posibles en la ruta R' iniciando el recorrido desde la estación de transbordo, que se denotará como  $T$  vista por la ruta R o  $T'$  vista por la ruta R'. En otras palabras un destino  $d$  cualquiera pertenece al conjunto  $d \in \{1, \dots, T, \dots, Np, (T+1)', \dots, (T+Nd)'\}$  donde los destinos en la ruta R son  $1, \dots, T, \dots, Np$  (que incluye la estación de transbordo  $T$ ) y los destinos posibles para hacer transbordo en la ruta anexa R' son  $(T+1)', \dots, (T+Nd)'$ .

Luego, considerando un número  $\hat{\lambda}_p$  pasajeros estimado arribando por unidad de tiempo en la parada  $p$  (con  $\hat{\lambda}_p$  constante para periodos de una hora), se tiene el aumento total de



$\hat{\lambda}_p(t_k - t_{k-1})$  pasajeros en un intervalo de tiempo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Si en cada evento  $k$  definimos una variable aleatoria  $rand(k)$  con una distribución uniforme  $rand(k) \rightarrow U(0,1)$ , entonces una forma de distribuir cada uno de los  $\hat{\lambda}_p(t_k - t_{k-1})$  pasajeros sobre el vector  $\Delta \hat{\Gamma}^d(k)$  es una de las siguientes formas:

- Si  $rand(k) \geq r$  el destino del pasajero es seleccionado aleatoriamente del conjunto de paraderos  $\{p+1, \dots, Np\}$  de la ruta R, con una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$  de parámetros  $\mu = \frac{Np+p}{2}$  y  $2\sigma = \frac{Np-p}{2}$ .
- Si  $rand(k) < r$  el destino del pasajero es seleccionado aleatoriamente del conjunto de paraderos  $\{T'+1, \dots, Np'\}$  de la ruta R', con una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$  de parámetros  $\mu = \frac{Np'+T'}{2}$  y  $2\sigma = \frac{Np'-T'}{2}$ .

En la Figura 9.20, se presenta un ejemplo de asignación el aumento de carga en el paradero número 3 en un intervalo de tiempo  $[t_k, t_{k+1}]$  donde la estación de transbordo es  $T = T' = 5$ . Esto es, se asignarán los destinos a los  $\hat{\lambda}_3(t_k - t_{k-1})$  pasajeros según el número aleatorio  $rand(k)$ . Si  $rand(k) \geq r$ , el pasajero se asigna probabilísticamente según una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$  de parámetros  $\mu = 6.5$  y  $2\sigma = 3.5$  sobre el conjunto de destinos  $\{p+1, \dots, Np\}$  de la ruta R, ahora si  $rand(k) < r$  se asignará los destinos a los pasajeros el destino según una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$  de parámetros  $\mu = 7.5$  y  $2\sigma = 2.5$  sobre el conjunto de destinos  $\{T'+1, \dots, Np'\}$  de la ruta R', como se presenta en la Figura 9.20c.

Considerar, que si desde el punto de vista de la ruta R, el flujo de transbordo es mayor que el flujo de pasajeros que circula por R esto es  $r = 0.85$  como se presenta en la Figura 9.20b, implicará que el número  $rand(k)$ , por ser variable aleatoria de distribución uniforme

$rand(k) \rightarrow U(0,1)$ , tendrá mayor probabilidad de que  $rand(k) < r$ , lo que implicaría que se asignaría un destino a la ruta de transbordo con mayor probabilidad.

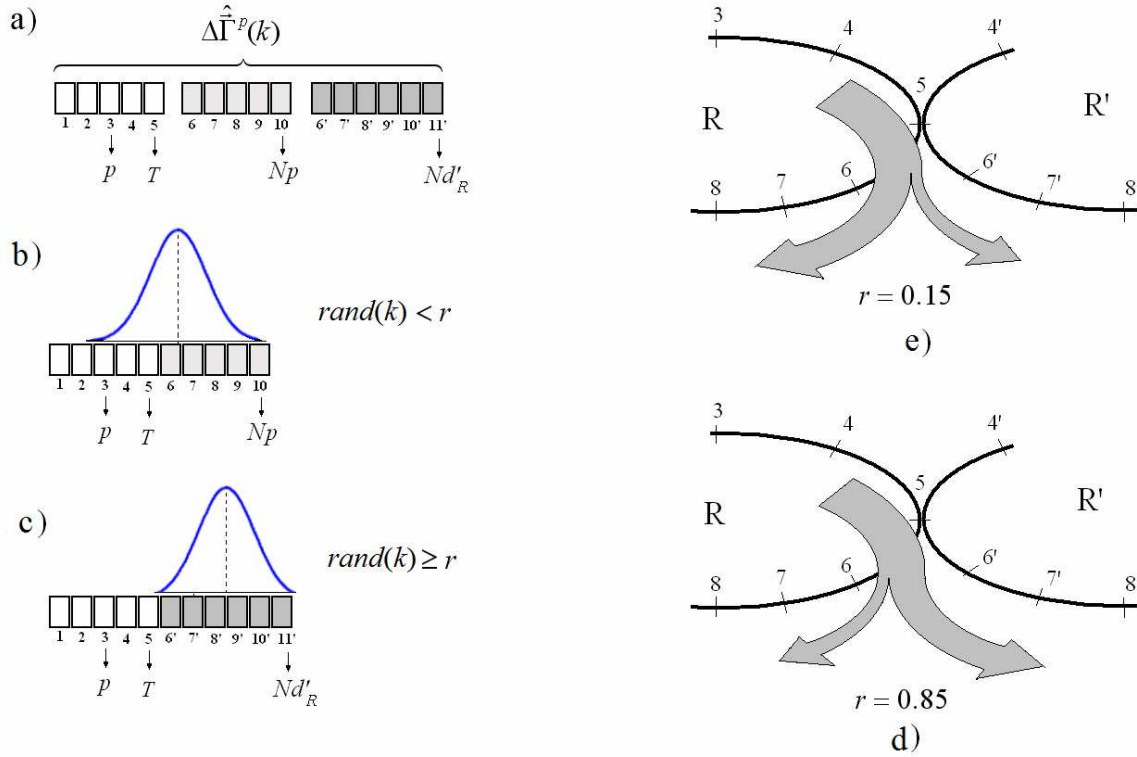


Figura 9.20: Asignación aleatoria de destinos

Luego  $\hat{\Gamma}^p(k+1)$  será la carga total acumulada desagregada estimada en un paradero  $p$  predicha para el evento  $k+1$ , actualizada según la ecuación (7.18) del capítulo 7 y donde en sus componentes, el primer súper-índice representa el número de paradero y el segundo súper-índice representa el número de destino.

$$\hat{\Gamma}^p(k+1) = \left[ \hat{\Gamma}^{p,1}(k+1) \ \hat{\Gamma}^{p,2}(k+1) \ \dots \ \hat{\Gamma}^{p,T}(k+1) \ \dots \ \hat{\Gamma}^{p,Np}(k+1) \ \hat{\Gamma}^{p,(T+1)'}(k+1) \ \hat{\Gamma}^{p,(T+2)'}(k+1) \ \dots \ \hat{\Gamma}^{p,(T+N)'}(k+1) \right] \quad (9.12)$$

## Carga de los buses en rutas con transbordo

De manera semejante a la sección 7.1.3 en el capítulo 7, se puede definir la carga desagregada estimada  $\hat{L}_i(k+1)$  de un bus  $i$  en el evento  $k+1$  en la ruta R, donde en sus componentes, el súper-índice representa el destino del pasajero y el sub-índice representa el número de bus:

$$\hat{L}_i(k+1) = \left[ \hat{L}_i^1(k+1) \ \hat{L}_i^2(k+1) \ \dots \ \hat{L}_i^T(k+1) \ \dots \ \hat{L}_i^{Np}(k+1) \ \hat{L}_i^{(T+1)'}(k+1) \ \hat{L}_i^{(T+2)'}(k+1) \ \dots \ \hat{L}_i^{(T+Nd)'}(k+1) \right] \quad (9.13)$$

la cual se actualiza según la ecuación (7.20) del capítulo 7.

## Estimación del parámetro $r$ de proporción de transbordo

Se puede estimar el parámetro de proporción de transbordo  $\hat{r}(k+1)$  en un evento  $k+1$ ; esto es, la proporción de pasajeros que usan sólo la ruta R con respecto a los que transbordan en el paradero  $T$  para dirigirse a la ruta R':

$$\hat{r}(k+1) = \frac{\sum_{p=1}^T \sum_{j=(T+1)'}^{(T+Nd)'} \Gamma^{p,j}(k)}{\sum_{p=1}^T \sum_{i=T+1}^{Np} \Gamma^{p,i}(k) + \sum_{p=1}^T \sum_{j=(T+1)'}^{(T+Nd)'} \Gamma^{p,j}(k)} \quad (9.14)$$

donde  $\sum_{p=1}^T \sum_{i=T+1}^{Np} \Gamma^{p,i}(k)$  es la suma total de pasajeros que continuarán en la línea R después de

pasar la estación de transbordo  $T$  y que ingresaron a la ruta R en los primeros  $T$  paraderos

$\sum_{p=1}^T \sum_{j=(T+1)'}^{(T+Nd)'} \Gamma^{p,j}(k)$  es la suma total de pasajeros que transbordan a la línea R' en la estación

de transbordo  $T$  y que ingresaron en los primeros  $T$  paraderos de la línea R.

## 9.7. Controlador predictivo híbrido descentralizado

En esta sección se plantea un controlador predictivo descentralizado para el sistema de transporte público con dos rutas y una estación de transbordo. Por lo cual, se considera una estrategia de control idéntica a la presentada en el capítulo 7, para cada una de las rutas. Esto, significa considerar en el modelo predictivo del controlador, la interconexión entre rutas sólo como una perturbación medible.

### 9.7.1. Estructura de control descentralizado

La estructura de control descentralizado diseñada se presenta en la Figura 9.21, donde el sistema bajo control se supone compuesto por dos subsistemas de transporte público cada uno controlado por un controlador predictivo híbrido como el presentado en el capítulo 7 sección 7.1.4. En esta Figura el subsistema 1, tiene variables de control  $h_i$ ,  $Su_i$  y variables de salida y realimentadas  $x_i$ ,  $L_i$ ,  $Td_i$ , así mismo, el subsistema 2, tiene variables de control  $h'_i$ ,  $Su'_i$  y variables de salida y realimentadas  $x'_i$ ,  $L'_i$ ,  $Td'_i$ . La interacción entre los subsistemas es la descrita en la Figura 9.19 sección 9.6.2 Las variables son función de tiempo discreto  $k$  y  $k'$  según las rutas R y R' respectivamente. Cuando un evento  $k$  o  $k'$  ocurre, el controlador predictivo híbrido correspondiente, genera la acción de control exigida.

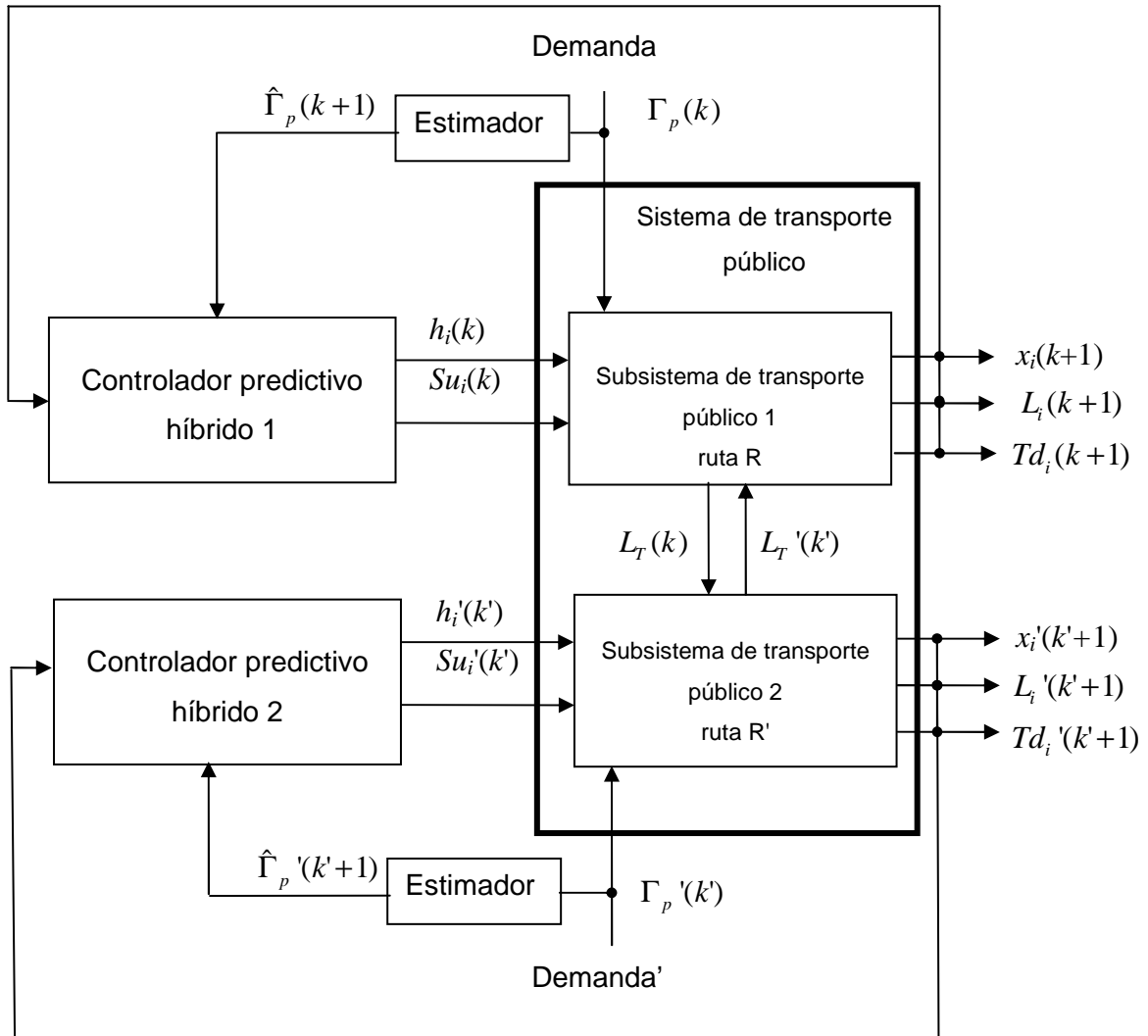


Figura 9.21: Controlador predictivo híbrido descentralizado para el sistema de transporte público con estación de transbordo.

### 9.7.2. Función objetivo

En este caso, se optimizará la función  $J_R$ , presentada en la ecuación (9.15), que consta de cuatro componentes, todas ellas mayoritariamente orientadas al costo experimentado por los usuarios a través de los tiempos totales de viaje de los pasajeros bordo de los buses y los tiempos de espera en paraderos.

$$J_R = \sum_{\ell=1}^N \left[ \theta_1 \cdot \hat{H}_i(k+\ell) \hat{\Gamma}_p(k+\ell) + \theta_2 \cdot (\hat{H}_i(k+\ell) - \bar{H})^2 + \theta_3 \cdot \hat{L}_i(k+\ell) h_i(k+\ell-1) + \theta_4 \cdot \hat{\Gamma}_p(k+\ell) \hat{H}_{i+1}(k+\ell+z_{i+1}) (1 - Su_i(k+\ell-1)) \right]_{\substack{i=i(k+\ell-1) \\ p=p(k+\ell-1)}} \quad (9.15)$$

El primer término de la ecuación (9.15) cuantifica el tiempo total de espera de los pasajeros en las paradas y depende del tiempo de espera de diseño, junto con la carga en la parada de autobús. El segundo término captura la regularización del tiempo de espera entre buses, para mantener éste lo más cerca posible al correspondiente tiempo de espera de diseño. La tercera componente mide el retraso asociado con pasajeros a bordo de un vehículo cuando se ejecuta una retención en una estación de control debido a la aplicación de una acción de *holding*. Por último, la cuarta componente es el tiempo adicional de espera de los pasajeros, cuya estación es saltada por un vehículo, asociadas con la estrategia de *stop-skipping*. Siendo  $N$  el horizonte de predicción y  $Nb$  el número de buses de la flota. Notar que  $i = i(k+\ell-1) \in \{1, \dots, Nb\}$ ,  $p = p(k+\ell-1) \in \{1, \dots, Np\}$ , si se considera que el evento futuro  $k+\ell-1$  está generado por un bus  $i(k+\ell-1)$  arribando a una estación específica aguas abajo  $p(k+\ell-1)$ . En la expresión (9.15),  $\theta_j$ ,  $j=1, \dots, 4$ , son parámetros de ponderación, y deben ser sintonizados dependiendo del problema específico analizado y también de la interpretación física de las diferentes componentes. La variable  $H_d$  corresponde al deseado tiempo de espera diseñado para servir la demanda del sistema durante un cierto periodo de tiempo. Se define un termino semejante  $J_{R'}$  para la ruta anexa R'.

Luego, los problemas de optimización para los controladores predictivos independientes aplicados a cada una de las rutas son:

$$\underset{\{u(k), \dots, u(k+Np-1)\}}{\text{Min}} J_R \quad (9.16)$$

Sujeto a que se cumpla el modelo predictivo y las restricciones operacionales correspondientes a la ruta R.

$$\underset{\{u'(k), \dots, u'(k'+Np-1)\}}{\text{Min}} J_{R'} \quad (9.17)$$

Sujeto a que se cumpla el modelo predictivo y la restricciones operacionales correspondientes a la ruta  $R'$ .

La minimización se realiza con respecto a la secuencia  $\{u(k), \dots, u(k + Np - 1)\}$  y  $\{u'(k'), \dots, u'(k' + Np - 1)\}$  para las rutas  $R$  y  $R'$  respectivamente. Con  $u(k)$  y  $u'(k')$  las acciones de control para las dos rutas  $R$  y  $R'$  en sus respectivos tiempo de evolución  $k$  y  $k'$  respectivamente.

En la siguiente sección, se presenta el diseño de un controlador que a diferencia del controlador presentado anteriormente, considera los efectos de interconexión entre los dos sistemas.

## **9.8. Controlador predictivo híbrido distribuido**

En este apartado, se plantea un controlador predictivo distribuido para el sistema de transporte público con dos rutas y una estación de transbordo. Lo que implica, incluir en el controlador los índices de comportamiento presentado en la ecuación (9.15) descritos como las funciones  $J_R$  y  $J_{R'}$ . Además, significa considerar en detalle, en el modelo predictivo del controlador, la interconexión entre rutas (los transbordos de pasajeros). Esto es, diseñar un conjunto de índices de comportamiento que promuevan la acción de transbordo y que junto a la funciones  $J_R$  y  $J_{R'}$  controlen eficientemente el sistema completo. Los nuevos índices de comportamiento añadidos consideran, un índice de sincronización de buses  $J_S$  en la estación de transbordo (sección 9.8.2), un índice de comportamiento  $J_T$  directamente dirigido a favorecer el transbordo en términos de la capacidades libres y cargas de los buses (sección 9.8.3.) y un grupo de restricciones adicionales para una administración eficiente del transbordo, esto es, restricciones que solucionan un conjunto de posibles problemas en la interconexión de los buses, no cubiertos por los índices  $J_S$  y  $J_T$  y lograr un encuentro eficaz entre pares de buses (ver sección 9.8.4).

### 9.8.1. Estructura de control distribuido

La estructura de control distribuido diseñada se presenta en la Figura 9.22, donde el sistema bajo control se supone compuesto por dos subsistemas de transporte público (ruta R y R'). Las variables de control y salida realimentadas son iguales a las indicadas en la Figura 9.21 de la sección 9.7.1. La interacción entre los subsistemas es la descrita en la Figura 9.19 sección 9.6.2.

El controlador descentralizado presentado en la sección 9.7, no considera los efectos de estación de transbordo y sólo la considera como una perturbación medible en la demanda de pasajeros en cada ruta. Sin embargo, en el controlador distribuido de la Figura 9.22, considera los efectos de la estación de transbordo, por lo cual incluye una comunicación entre los controladores predictivos de cada ruta. Es decir, los controladores deben compartir información relevante, para poder evaluar los nuevos índices de comportamiento diseñados, y así, regular el transbordo. En particular el controlador de la ruta R comunica un vector de estado del sistema  $\vec{X}(k)$  en el evento  $k$  al controlador de la ruta R', donde  $\vec{X}(k) = [x(k)^T \quad L(k)^T \quad Td(k)^T \quad \Gamma(k)^T]$  está compuesto de el vector transpuesto  $x(k)^T$  cuyas componentes contienen las posiciones de todos los buses de la ruta R, un vector  $L(k)^T = [L_1(k)^T \quad L_2(k)^T \quad \dots \quad L_{Nb}(k)^T]$  compuesto por los vectores de carga de todos los  $Nb$  buses, el vector transpuesto  $Td(k)^T$  cuyas componentes contienen los tiempos de salida de todos los buses de la ruta R y finalmente el vector  $\Gamma(k)^T = [\Gamma_1(k)^T \quad \Gamma_2(k)^T \quad \dots \quad \Gamma_{Nd_{totales}}(k)^T]$  compuesto por la demanda en los  $Nd_{totales}$  destinos posibles. Simétricamente el controlador de la ruta R' comunica un vector de estado del sistema  $\vec{X}'(k')$  en el evento  $k'$  al controlador de la ruta R. Ahora bien, si el controlador de la ruta R es a quien corresponde determinar la acción de control en el evento  $k$ , el evento  $k'$  en donde evaluar la variables representativas de la ruta R' debe ser el más cercano  $k$  y necesariamente  $k' \leq k$ . Un análisis simétrico se debe realizar si el controlador de la ruta R' es a quien corresponde determinar la acción de control en un evento  $k'$  con  $k \leq k'$ .



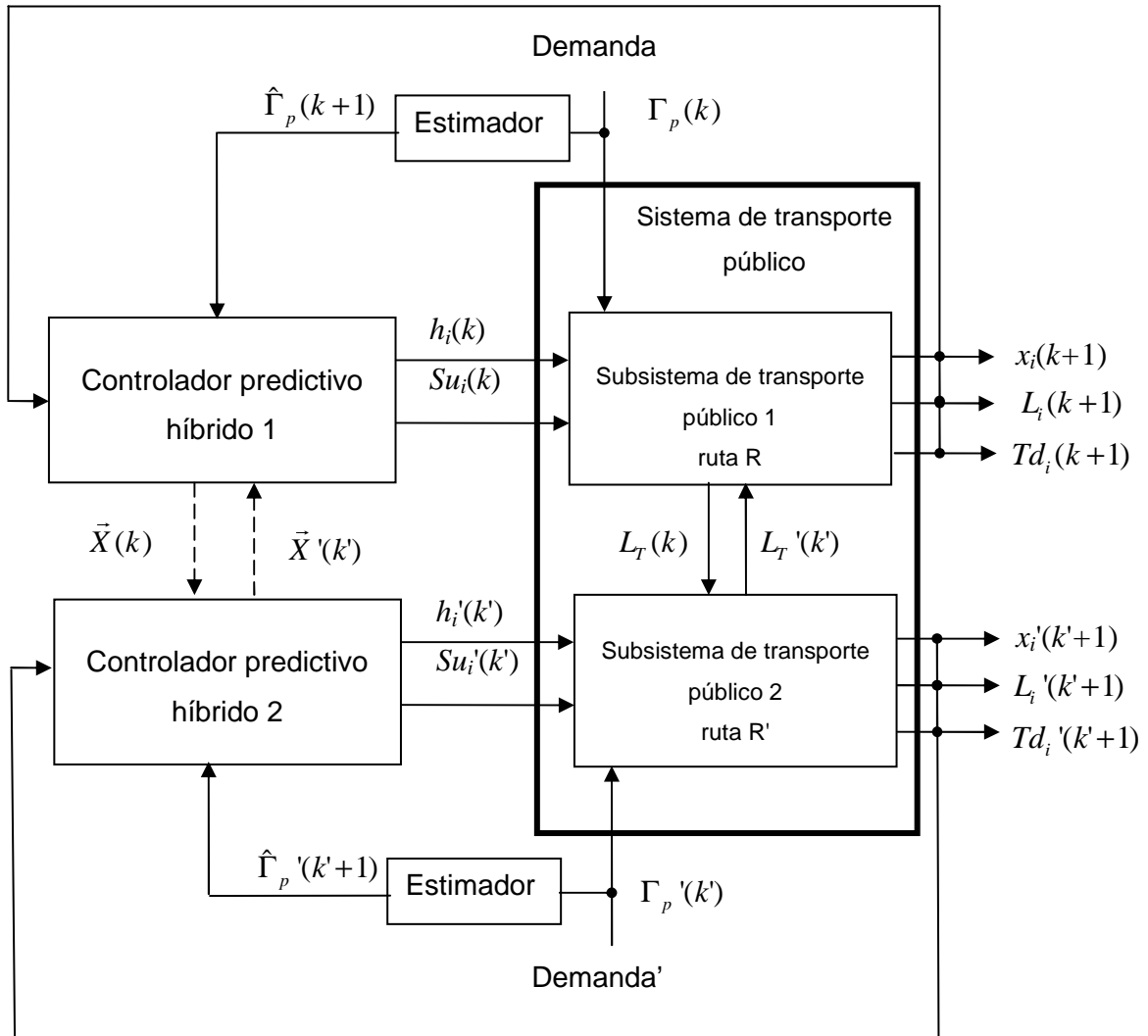


Figura 9.22: Controlador predictivo híbrido distribuido para el sistema de transporte público con estación de transbordo.

Notar que en un evento  $k$ , el controlador predictivo de la ruta  $R'$ , debe determinar las predicciones a  $N$  pasos  $\{\bar{X}(k+1), \bar{X}(k+2), \dots, \bar{X}(k+N)\}$  conociendo sólo la información en  $\bar{X}(k)$  entregada por el contralor de la ruta  $R$ , y lo logra, a partir del conocimiento del modelo dinámico de la ruta  $R$  (Modelo predictivo 2, sección 7.1.3, capítulo 7). Una situación análoga se presenta, si es el controlador predictivo de la ruta  $R$  quien necesita de la información de las predicciones a  $N$  pasos  $\{\bar{X}'(k+1), \bar{X}'(k+2), \dots, \bar{X}'(k+N)\}$  para determinar su correspondiente acción de control.

A continuación se plantea la función objetivo para el problema de optimización asociado al controlador predictivo distribuido para cada ruta. Esta función objetivo considera la suma ponderada de tres índices de comportamiento principales, denominados: término de control de rutas  $J_R$ , término de sincronización  $J_S$  y término de maximización del transbordo  $J_T$ .

En una primera etapa de investigación, cada controlador de los subsistemas (ruta R y R') posee su propia función objetivo y no se plantea iterar entre los controladores para lograr un consenso entre las soluciones finales. Luego, el controlador diseñado se clasificará como un controlador distribuido no-cooperativo y no-iterativo (ver sección 3.3, capítulo 3). Soluciones cooperativas o iterativas que impliquen la estabilidad del controlador distribuido se dejarán para una investigación futura.

### 9.8.2. Índice de comportamiento de sincronización

El controlador predictivo híbrido distribuido, para cada ruta considera el índice de comportamiento  $J_R$ , el término de control de rutas, el cual está orientado en general a minimizar el costo experimentado por los usuarios a través de los tiempos de viaje a bordo de los buses y los tiempos de espera en paraderos (ya utilizado en el controlador descentralizado presentado en la sección 7.1.4) más un índice de comportamiento  $J_S$  denominado término de sincronización, el cual intenta coordinar los tiempos de llegada de los buses más cercanos a la estación de transbordo. Esto se logra minimizando  $\hat{w}(k)$  que representa la diferencia de los tiempos de llegada de los buses más cercanos a la estación de transbordo (definida en ecuación (9.21)), ponderada por la demanda total  $\hat{D}_T(k)$  de dicha estación (definida en la ecuación (9.24)). Luego,  $J_S$  se define como:

$$J_S = \sum_{\ell=1}^{Np} \hat{D}_T(k + \ell) \cdot \hat{w}(k + \ell)^2 \quad (9.18)$$

La determinación de los componentes de  $J_S$  se presenta a continuación:

## Tiempos de llegada de los buses más cercanos a la estación de transbordo

Se define,  $t_{NT}$  el tiempo que le falta llegar el bus  $NT$  ("next transfer"), el más cercano a la estación de transbordo, según la ruta  $R$ . Simétricamente sea  $t_{NT'}$  el tiempo que le falta llegar al bus  $NT'$  más cercano a la estación de transbordo según la ruta  $R'$ . Estos tiempos se calculan a partir de las posiciones relativas y la velocidad de cada bus. Además se le añaden los tiempos de transbordo estimados a los paraderos en el trayecto antes de llegar a la estación de transbordo. Es claro que la estimación de estos tiempos mejorará en la medida que el bus se acerque a la estación de transbordo, esto es debido a que no se conocen a priori las acciones de control en los paraderos en el trayecto.

Si el bus se encuentra a un solo paradero de distancia, la aproximación del tiempo de llegada es:

$$t_{NT} = \frac{x^T - x_{NT}(k)}{v} + \hat{T}r_{NT}^{T-1}(k) \quad (9.19)$$

con  $x^T$  posición del paradero de transbordo,  $x_{NT}(k)$  posición del bus  $NT$  el más cercano a la estación de transbordo en el evento  $k$ ,  $\hat{T}r_{NT}^{T-1}(k)$  el tiempo de transbordo del bus  $NT$  en el paradero anterior a la estación de transbordo  $T$ . Debido a que en la estación de transbordo se encuentra en una ubicación de alto flujo de pasajeros, se supone una probabilidad muy baja de acciones de control *stop-skipping* (las acciones de *holding* a priori se supone que se realizan sólo en los paraderos iniciales o finales). De forma análoga se define

$$t_{NT'} = \frac{x^T - x_{NT'}(k_a)}{v'} + \hat{T}r_{NT'}^{T'-1}(k_a) \quad (9.20)$$

con  $k_a$  el instante anterior y más cercano al instante  $k$ . Luego definimos:

$$\hat{w}(k) = t_{NT}(k) - t_{NT'}(k_a) \quad (9.21)$$

la diferencia de tiempos según R y R' a la estación de transbordo para los buses más cercanos a ella.

### **Demanda en la estación de transbordo**

Para determinar la demanda total  $\hat{D}_T(k)$  en la estación de transbordo  $T$  se define:  $L_T(k)$ , la cantidad de personas que transbordan hacia la ruta R' y que llegaron en el bus  $NT$  y sea  $L_T'(k)$  la cantidad de personas que transbordan a la ruta R y que llegaron en el bus  $NT'$ ,

$$\hat{L}_T(k) = \sum_{j=(T+1)'}^{Nd'} \hat{L}_{NT}^j(k) \quad \text{y} \quad \hat{L}_T'(k) = \sum_{j=T+1}^{Nd'} \hat{L}_{NT'}^j(k) \quad (9.22)$$

donde  $\hat{L}_{NT}^j$  y  $\hat{L}_{NT'}^j$  es la componente  $j$  del vector de carga del bus  $NT$  y  $NT'$  respectivamente.

Además, sean  $\hat{P}(k)$  y  $\hat{P}'(k)$  los pasajeros que llegarán a la estación de transbordo del lado de la ruta R y R' respectivamente, los cuales se determinan como:

$$\hat{P}(k) = \sum_{d>T}^{Nd} \hat{\Gamma}^{T,d}(k) \quad \text{y} \quad \hat{P}'(k'_N) = \sum_{d>T'}^{Nd'} \hat{\Gamma}^{T',d}(k'_a) \quad (9.23)$$

donde  $\hat{\Gamma}^{T,d}$  y  $\hat{\Gamma}^{T',d}$  es la componente  $d$  del vector de demanda del paradero de transbordo  $T$  según ruta R y  $T'$  según ruta R', respectivamente.

Luego, si  $k'_a$  el instante anterior y más cercano al instante  $k$ , la demanda total  $\hat{D}_T(k)$  en la estación de transbordo  $T$  según el punto de vista de la ruta R es:

$$\hat{D}_T(k) = \hat{L}_T(k) + \hat{P}(k) + \hat{L}_T'(k'_a) + \hat{P}'(k'_a) \quad (9.24)$$

En la Figura 9.23 se presenta un diagrama que muestra las distintas variables que definen la carga de transbordo  $D_T$ . Se presentan las rutas R y R' de color negro y gris respectivamente, interconectadas por una estación de transbordo al centro del dibujo. De la estación de transbordo, salen los flujos de pasajeros que transbordan  $L_T$  y  $L_T'$  y entran flujos de pasajeros  $P$  y  $P'$  que eligieron esta estación para entrar al sistema. Para mayor claridad, colores negro y gris representan la ruta de origen de los flujos.

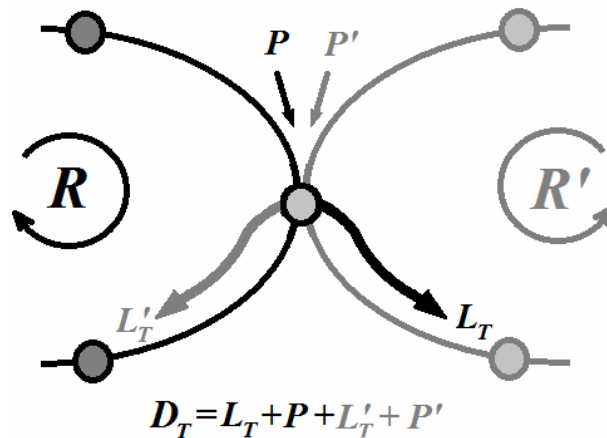


Figura 9.23: Diagrama de las distintas variables que definen la demanda total de transbordo  $D_T$ .

### 9.8.3. Índice de comportamiento de incentivo del transbordo

La siguiente formulación incluye un índice de comportamiento  $J_T$  directamente dirigido a favorecer el transbordo de pasajeros. Es decir, un índice que promueve el transbordo de pasajeros, considerando las capacidades y las cargas de pasajeros de los buses que utilizan la estación de transbordo. Para precisar la formulación, se realizan las siguientes definiciones: Sea  $Q(k)$  la cantidad de personas que se mantendrán en la ruta R y que viajan en el bus más cercano  $NT$  y sea  $Q'(k')$  la cantidad de personas que se mantendrán en la ruta R' y que viajan en el bus más cercano  $NT'$ . Estas se calculan como:

$$Q(k) = \sum_{j=T}^{N_p} \hat{L}_{NT}^j(k) \quad \text{y} \quad Q'(k') = \sum_{j=T}^{N_{p'}} \hat{L}_{NT'}^j(k') \quad (9.25)$$

con  $\hat{L}_{NT}(k)$  y  $\hat{L}_{NT'}(k')$  los vectores de carga de los buses más cercanos a la estación de transbordo, desde el punto de vista de la ruta R y R' respectivamente. Con  $k'_a$  el instante anterior y más cercano el instante  $k$ .

Además, sea  $B_{NT^*}(k)$  y  $B_{NT^*}(k'_a)$  los pasajeros que suben a los buses  $NT$  y  $NT'$  en las rutas R y R' cuando los buses producen el evento en la estación de transbordo. Las capacidades al llegar a la estación de transbordo según las rutas R y R' serán  $C(k)$  y  $C'(k'_a)$ , con  $k'_a$  el instante anterior y más cercano el instante  $k$ .

$$\begin{aligned} C(k) &= L_{Max} - (Q(k) + B_{NT^*}(k)) \\ C'(k'_a) &= L_{Max} - (Q'(k'_a) + B_{NT^*}(k'_a)) \end{aligned} \quad (9.26)$$

En la Figura 9.24 se presenta un diagrama que muestra las distintas variables que definen las capacidades  $C$  y  $C'$  de los buses  $NT$  y  $NT'$  en la estación de transbordo, respectivamente. Se aprecia en esta Figura, las rutas R y R' de color negro y gris, interconectadas por una estación de transbordo al centro del dibujo. De la estación de transbordo salen los flujos de pasajeros que transbordan  $L_T$  y  $L_{T'}$ , además salen los flujos de pasajeros que al pasar por la estación de transbordo  $T$  se mantiene en su ruta original  $Q$  y  $Q'$ . Por último se muestra, los pasajeros  $B_{NT}$  y  $B_{NT'}$  que suben a los buses  $NT$  y  $NT'$  respectivamente. Para mayor claridad, colores negro y gris representan la ruta de origen de los flujos.

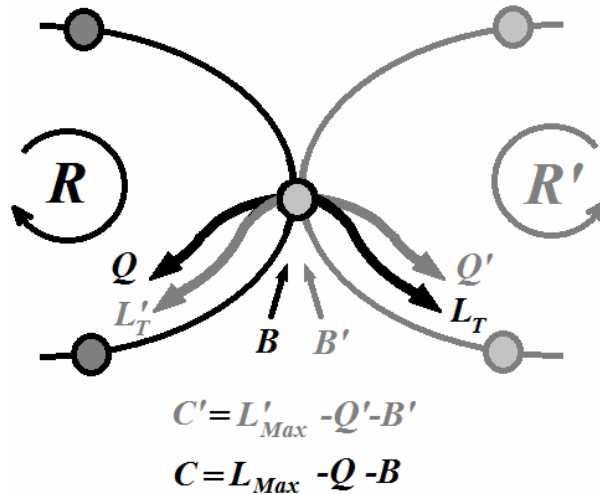


Figura 9.24: Descripción de las variables principales que intervienen en el transbordo.

Luego el nuevo índice de comportamiento  $J_T$  incluido en la función objetivo, plantea maximizar el valor de la expresión  $\min\{C(k), L_T'(k)_a\}$ , esto es por ejemplo, si  $C(k) < L_T'(k)_a$ , se debe esperar que el valor de  $C(k)$  sea lo más grande posible, luego obligamos a que también  $L_T'(k)_a$  sea grande, esto es, intrínsecamente estamos alentando a elegir situaciones donde los dos valores  $C(k)$ ,  $L_T'(k)_a$  sean importantes, por lo tanto se debería inducir mayor transbordo de pasajeros entre las rutas.

En otros términos, al maximizar la expresión  $\min\{C(k), L_T'(k)_a\}$ , se evita promover situaciones en que la capacidad  $C(k)$  de un bus de la ruta R sea grande y la cantidad de pasajeros  $L_T'(k)_a$  del bus que viene de la ruta R' sea pequeña (con  $k'_a$  definido como el instante anterior y más cercano el instante  $k$ ). O por el contrario, se evita que la cantidad de pasajeros  $L_T'(k)_a$  del bus que viene de la ruta R' sea grande y la capacidad de un bus  $C(k)$  de la ruta R sea pequeña. Claramente, se espera también maximizar la expresión simétrica  $\min\{L_T(k+j), C'(k'+j)_a\}$ .

Luego, el nuevo índice de comportamiento incluido en la función objetivo que se desea maximizar es:

$$J_T = \sum_{j=1}^N \left( \min \{ C(k+j), L_T'(k'+j)_a \} + \min \{ L_T(k+j), C'(k'+j)_a \} \right) \quad (9.27)$$

con  $(k'+j)_a$  el instante anterior y más cercano al instante  $k+j$ .

Notar que, erróneamente se podría considerar la maximización de la siguiente expresión  $\min \sum_{j=1}^{N_p} \left( [C(k+j) - L_T'(k'+j)]^2 + [C'(k'+j) - L_T(k+j)]^2 \right)$ , la cual, lograría el ajuste entre los pasajeros que cambian de ruta  $(L_T', L_T)$ , con las capacidades de los buses que los reciben  $(C, C')$  respectivamente. Pero, por el contrario esta expresión permitiría situaciones donde, por ejemplo, la variables  $C(k)$  y  $L_T'(k')_a$  son semejantes pero pequeñas, lo que produciría una cantidad de transbordo bajo, situación que claramente no ayuda a promover la maximización del transbordo de pasajeros entre las rutas.

#### 9.8.4. Restricciones para la administración eficiente del transbordo

La sincronización lograda por la función  $J_S$  no garantiza que los transbordos de pasajeros se produzca, debido a que problemas en el orden de llegada de los buses puede hacer que los pasajeros pierdan la posibilidad de transbordar. Por ejemplo; un caso donde en la estación de transbordo, un bus con mucha capacidad libre ( $C$  es grande), parta antes que arribe el bus con el cual se coordinaba (conjunto de buses sincronizados por  $J_S$ ) y que lleva mucha carga de pasajeros para transbordar ( $L_T$  grande). Luego, en esta sección se diseña las restricciones necesarias, tal que agregadas al problema de optimización respectivo, produzcan una administración eficiente del transbordo. Es decir, se plantea agregar restricciones al problema de optimización asociado al algoritmo HPC, que obliguen al encuentro eficaz entre pares de buses y asegurar un mayor transbordo. A continuación, se presenta el estudio de cuatro casos relevantes en la sincronización de los buses.



**Caso 1:** Se presenta en la Figura 9.25 el mejor caso posible para buses sincronizados en la estación de transbordo. Para las rutas R y R', se grafican con distintos tonos de grises las distintas cargas de pasajeros en los buses. Esto es, en color blanco se presenta la proporción de asientos vacíos sobre el bus, en color gris se presenta la proporción de asientos con pasajeros que pretenden transbordar a la ruta contraria ( $L_T, L_T'$ ) y en color negro los asientos ocupados por los pasajeros que se mantendrán en sus respectivas rutas ( $Q, Q'$ ). En la Figura 9.25 se muestra también, la potencial capacidad libre de los buses ( $C, C'$ ), una vez que se bajan los pasajeros que transbordan. En este diagrama se desprecia, por simplicidad, los pasajeros que sólo bajan en la estación de transbordo y no transbordan.

Como se mencionó, en la Figura 9.25 las cargas de transbordo  $L_T$  y  $L_T'$  en ambas rutas son grandes, lo que implica que las capacidades  $C$  y  $C'$  también lo serán. Luego, si suponemos un tiempo  $t_a$  de bajada por pasajero, el tiempo mínimo que un bus estará en la estación es  $t_a L_T$  y  $t_a L_T'$  para las rutas R y R' respectivamente. Luego sin saber que bus llega primero, para producir un encuentro de los dos buses, en la estación de transbordo; se debe cumplir que el intervalo de tiempo que se mide entre el bus que llega primero hasta la llegada de segundo bus ( $\|t_{NT} - t_{NT'}\|$ ) debe ser menor que el mínimo entre los valores  $t_a L_T$  y  $t_a L_T'$ . Esto se representaría por la siguiente regla:

$$\text{Si } L_T \text{ es grande y } L_T' \text{ es grande entonces } \|t_{NT} - t_{NT'}\| < \min\{t_a L_T, t_a L_T'\} \quad (9.28)$$

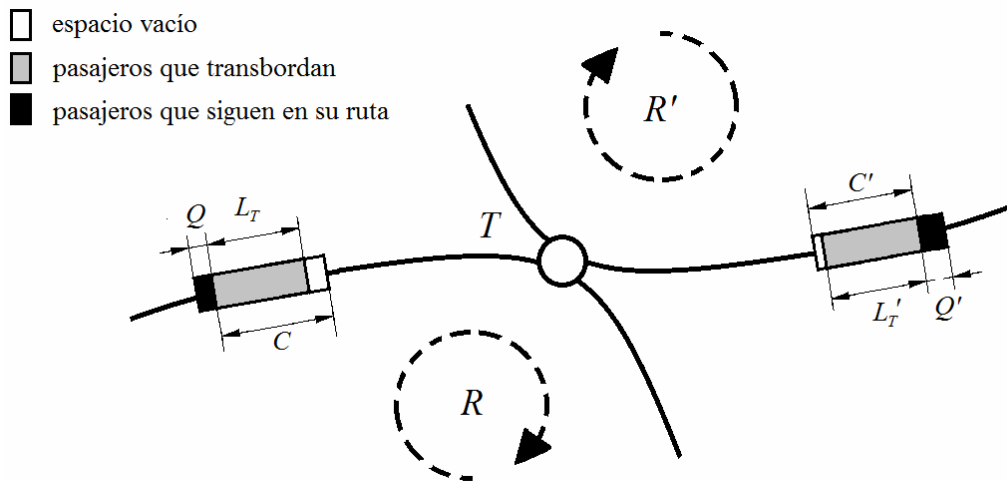


Figura 9.25: Mejor caso esperado de transbordo.

**Caso 2:** Se presenta en la Figura 9.26 el caso de máximo transbordo desde la ruta R a la ruta R'. Es decir, donde la carga de transbordo  $L_T$  del bus de la ruta R y la capacidad libre  $C'$  del bus de la ruta R', son grandes.

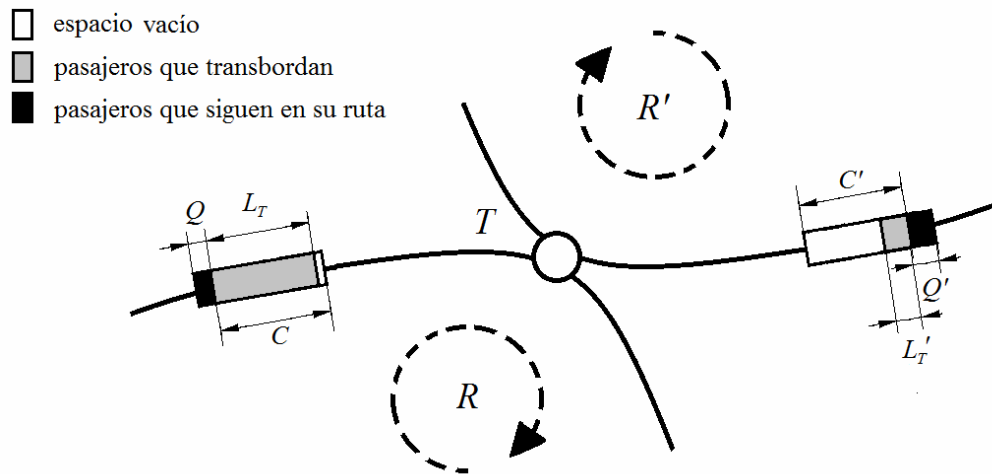


Figura 9.26: Transbordo máximo de R a R'.

En este caso es claro que lo relevante es que el bus de la ruta R llegue primero que el bus de la ruta R'. De tal forma, los pasajeros de la ruta R pueden esperar el bus de la ruta R' y hacer efectivo el transbordo. Notar que la función de sincronización  $J_S$  forzará que este tiempo de espera sea mínimo. La regla para este caso analizado será:

$$\text{Si } L_T \text{ es grande y } C' \text{ es grande entonces } t_{NT} < t_{NT'} \quad (9.29)$$

**Caso 3:** Se presenta en la Figura 9.27 el caso de máximo transbordo desde la ruta R' a la ruta R. Es decir, donde la carga de transbordo  $L_T'$  del bus de la ruta R' y la capacidad libre  $C$  del bus de la ruta R, son grandes.

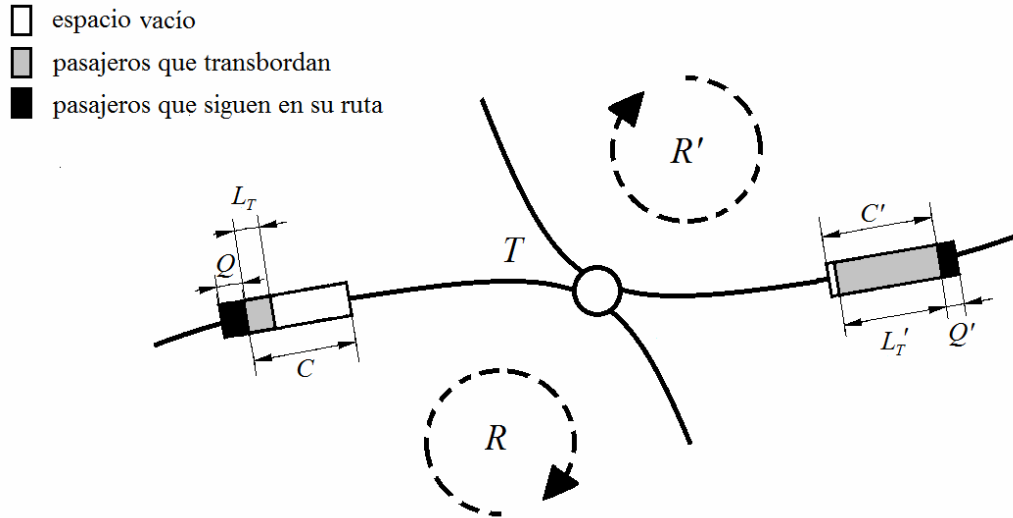


Figura 9.27: Transbordo máximo de R' a R.

En este caso, al contrario del caso anterior, lo relevante es que el bus de la ruta R' llegue primero que el bus de la ruta R, de esta forma, los pasajeros de la ruta R' pueden esperar el bus de la ruta R y hacer efectivo el transbordo. Notar también que la función de sincronización  $J_S$  forzará que este tiempo de espera sea mínimo. La regla para el caso analizado será:

$$\text{Si } L_T' \text{ es grande y } C \text{ es grande entonces } t_{NT} > t_{NT}'. \quad (9.30)$$

**Casos restantes:** En principio, desde el punto de vista de una administración eficiente, sólo los tres casos presentados anteriormente son de interés, la determinación exhaustiva de los restantes casos se presentará en la siguiente sección. Acá, sólo se muestra un representante de los restantes casos no considerados (Figura 9.28). En este caso las cargas de transbordo  $L_T$  y  $L_T'$  son pequeñas y no es necesario agregar restricciones al modelo, que al final implique limitar el espacio de soluciones del problema de optimización asociado.

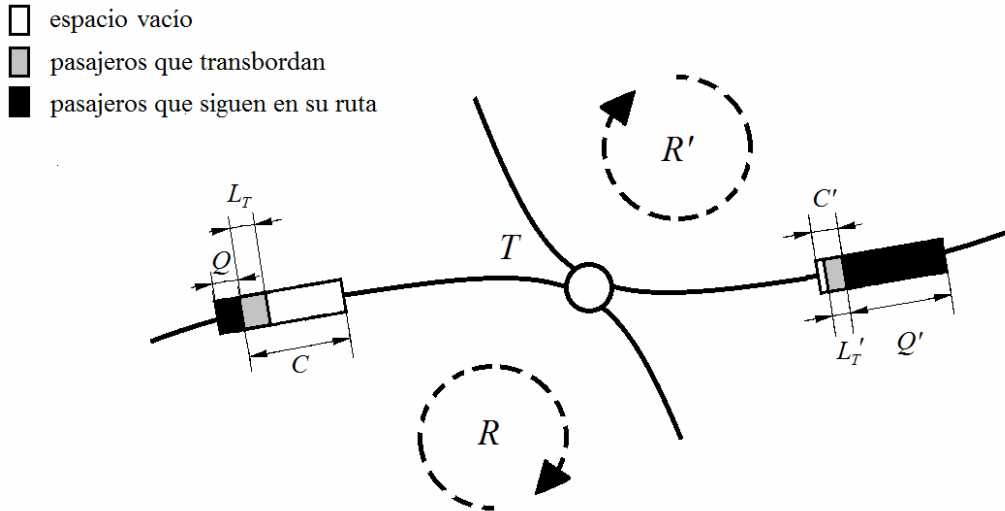


Figura 9.28: Representación de uno de los casos no considerados.

### Implementación de las reglas

Como ya se mencionó, el índice de comportamiento  $J_T$  está construido para maximizar la carga de transbordo; es decir, este índice propicia el encuentro de buses que produzcan mayor intercambio de pasajeros. Luego, se puede trabajar sólo con casos extremos en las capacidades  $C$  y  $C'$  y las cargas de transbordo  $L_T$  y  $L'_T$ , esto es, considerando sólo dos tipos de valores para estas variables: una cantidad  $G$  grande y una cantidad  $P$  pequeña de pasajeros. En la Tabla 9.3 se presenta todas las combinaciones posibles asignables a las cargas de transbordo  $L_T$  y  $L'_T$  como a las capacidades libre  $C$  y  $C'$  de dos buses que se encuentran en una estación de transbordo.

Considerando que una carga grande al llegar a la estación de transbordo implica una capacidad libre grande (esto es,  $L_T$  grande implica  $C$  grande), en la Tabla 9.3 se presenta en color gris los valores infactibles para estas cuatro variables. En la Tabla 9.7 se presenta sólo los valores factibles recogidos de la Tabla 9.3. Notar que en la Tabla 9.4 se marcó con gris los tres casos de interés presentados anteriormente, filas 1, 2 y 4. Notar que, dentro de estos seis casos existen cuatro casos (Tabla 9.4, fila 5, 6, 8 y 9) donde las cargas de transbordo  $L_T$  y  $L'_T$  son pequeñas (como en la Figura 9.28), y los otros dos restantes (fila 3 y 8) donde a pesar de que en una ruta hay una gran cantidad de pasajeros a transbordar, en la ruta

contraria el bus tiene poca capacidad para recibir esta carga. En principio estos seis casos deberían ser los menos frecuentes gracias a la influencia del índice de comportamiento  $J_T$ .

Tabla 9.3. Total de combinaciones posibles de cargas de transbordo  $C$  y  $C'$  y capacidades libres.  $L_T$  y  $L_T'$

$L_T$	$C$	$L_T'$	$C'$
G	G	G	G
G	G	G	P
G	G	P	G
G	G	P	P
G	P	G	G
G	P	G	P
G	P	P	G
G	P	P	P
P	G	G	G
P	G	G	P
P	G	P	G
P	G	P	P
P	P	G	G
P	P	G	P
P	P	P	G
P	P	P	P

Tabla 9.4. Selección de valores factibles cargas de transbordo  $C$  y  $C'$  y las capacidades libres.  $L_T$  y  $L_T'$

$L_T$	$C$	$L_T'$	$C'$
G	G	G	G
G	G	P	G
G	G	P	P
P	G	G	G
P	G	P	G
P	G	P	P
P	P	G	G
P	P	P	G
P	P	P	P

Los valores grande (G) y pequeño (P), los caracterizamos como se explica a continuación. Considerando que la capacidad máxima  $L_{\max}$  de pasajeros, se define el parámetro  $\xi = L_{\max}/2$ . Luego, se plantean las siguientes definiciones: se considera que  $L_T$  tiene un valor grande si  $L_T \geq \xi$ , asimismo  $L_T$  es chico si  $L_T < \xi$ , una definición semejante se aplica a  $L_T'$  y a la cargas libres  $C$  y  $C'$ .

Entonces, las tres reglas (casos 1, 2 y 3) que intentan administrar eficientemente, desde el punto de vista del transbordo de pasajeros, el encuentro entre un par de buses en la estación de transbordo se puede expresar concretamente de la siguiente forma:

$$\text{Si } L_T \geq \xi \text{ y } C \geq \xi \text{ y } L'_T \geq \xi \text{ y } C' \geq \xi \text{ entonces } \|t_{NT} - t_{NT'}\| < \min\{t_a L_T, t_a L'_T\} \quad (9.31)$$

$$\text{Si } L_T \geq \xi \text{ y } C \geq \xi \text{ y } L'_T < \xi \text{ y } C' \geq \xi \text{ entonces } t_{NT} < t_{NT'} \quad (9.32)$$

$$\text{Si } L_T < \xi \text{ y } C \geq \xi \text{ y } L'_T \geq \xi \text{ y } C' \geq \xi \text{ entonces } t_{NT} > t_{NT'} \quad (9.33)$$

Luego, para construir el problema de optimización del controlador predictivo híbrido definimos las siguientes funciones  $f_i(k)$  para  $i=1,2,3$ . Esto es:

$$\begin{aligned} f_1(k) &= t_{NT'} - t_{NT} \\ f_2(k) &= \min\{t_a L_T, t_a L'_T\} - \|t_{NT} - t_{NT'}\| \\ f_3(k) &= t_{NT} - t_{NT'} \end{aligned} \quad (9.34)$$

Por lo tanto, una forma posible de esta representación la restricción como la inecuación:

$$\begin{aligned} f_1(k) \frac{(1-\delta(k))(2-\delta(k))(3-\delta(k))}{6} + \frac{f_2(k)\delta(k)(2-\delta(k))(3-\delta(k))}{2} \\ + f_3(k) \frac{(\delta(k)-1)\delta(k)(3-\delta(k))}{2} + \frac{(\delta(k)-1)\delta(k)(\delta(k)-2)}{6} > 0 \end{aligned} \quad (9.35)$$

siendo  $\delta(k)$  una variable cuantizada, tal que  $\delta(k) \in \{0,1,2,3\}$ .

Esto confirma la forma de presentar esta sección, esto es, si relacionamos los valores de  $\delta$  para todo instante  $k$  con las siguientes inecuaciones:

$$\text{si } \delta=0 \Leftrightarrow L_T \geq \xi \text{ y } C \geq \xi \text{ y } L'_T \geq \xi \text{ y } C' \geq \xi \quad (9.36a)$$

$$\text{si } \delta=1 \Leftrightarrow L_T \geq \xi \text{ y } C \geq \xi \text{ y } L'_T < \xi \text{ y } C' \geq \xi \quad (9.36b)$$

$$\text{si } \delta=2 \Leftrightarrow L_T < \xi \text{ y } C \geq \xi \text{ y } L'_T \geq \xi \text{ y } C' \geq \xi \quad (9.36c)$$

$$\begin{aligned}
\text{si } \delta=3 &\Leftrightarrow (L_T \geq \xi \text{ y } C \geq \xi \text{ y } L'_T < \xi \text{ y } C' < \xi) \\
&\quad \circ (L_T < \xi \text{ y } C \geq \xi \text{ y } L'_T < \xi \text{ y } C' \geq \xi) \\
&\quad \circ (L_T < \xi \text{ y } C \geq \xi \text{ y } L'_T < \xi \text{ y } C' < \xi) \\
&\quad \circ (L_T < \xi \text{ y } C < \xi \text{ y } L'_T \geq \xi \text{ y } C' \geq \xi) \\
&\quad \circ (L_T < \xi \text{ y } C < \xi \text{ y } L'_T < \xi \text{ y } C' \geq \xi) \\
&\quad \circ (L_T < \xi \text{ y } C < \xi \text{ y } L'_T < \xi \text{ y } C' < \xi)
\end{aligned} \tag{9.36d}$$

la restricción 9.35 tendrá los siguientes valores según sea  $\delta$  para todo instante  $k$

$$\text{si } \delta=0 \Rightarrow t_{NT} < t_{NT'} \tag{9.37a}$$

$$\text{si } \delta=1 \Rightarrow \|t_{NT} - t_{NT'}\| < \min\{t_a L_T, t_a L'_T\} \tag{9.37b}$$

$$\text{si } \delta=2 \Rightarrow t_{NT} > t_{NT'} \tag{9.37c}$$

$$\text{si } \delta=3 \Rightarrow 1 > 0 \tag{9.37d}$$

notar que  $\delta=3$  genera una restricción que no disminuye el espacio factible de soluciones.

Finalmente, la solución se consigue con el método iterativo presentado en el capítulo 7, el cual considera recorrer el árbol de todas las soluciones posibles y elegir la trayectoria sobre sus ramas que minimice la función objetivo completa. Aquí la diferencia es, que para cada posible acción de control del árbol de decisiones, es necesario determinar la factibilidad de las restricciones (9.35) y (9.36) según sea el valor de la variable discreta  $\delta(k) \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

Finalmente, considerando que las variables con tilde caracterizan a la ruta  $R'$  y las variables sin tilde, a la ruta  $R$ . El problema de optimización para cada ruta, del respectivo controlador predictivo híbrido distribuido es:

$$\underset{\{u(k), \dots, u(k+Np-1)\}}{\text{Min}} J = J_R + \theta_5 J_S + \theta_6 J_T \quad \text{y} \quad \underset{\{u'(k), \dots, u'(k'+Np-1)\}}{\text{Min}} J' = J_{R'} + \theta_5 J_{S'} + \theta_6 J_{T'} \tag{9.38}$$

donde las variables que representan a  $R$  y  $R'$  están sujetas al cumplimiento de los respectivos: modelo predictivo, las restricciones operacionales de la correspondiente ruta y las restricciones para la administración eficiente del transbordo vistas en la sección 9.8.4.

Notar, que  $J_R$  incluye los otros parámetros de sintonía faltantes  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  y de la misma forma  $J_{R'}$  incluye los parámetros  $\theta_{1'}, \theta_{2'}, \theta_{3'}, \theta_{4'}$ .

## **9.9. Controlador predictivo híbrido centralizado**

En esta sección se propone un controlador predictivo centralizado cuya estructura de control se indica en la Figura 9.29, donde el sistema bajo control se supone compuesto por dos subsistemas de transporte público con un único controlador. Las variables de control y salida realimentadas son iguales a las indicadas en la Figura 9.21 de la sección 9.7.1. La interacción entre los subsistemas es la descrita en la Figura 9.19 sección 9.6.2.

En la Figura 9.29 se muestra el lazo cerrado del sistema de buses y las principales variables correspondientes, las cuales son función de tiempo discreto  $k$  y  $k'$  según las rutas  $R$  y  $R'$  respectivamente. Cuando un evento  $k$  o  $k'$  ocurre, el controlador predictivo híbrido correspondiente, genera la acción de control exigida.



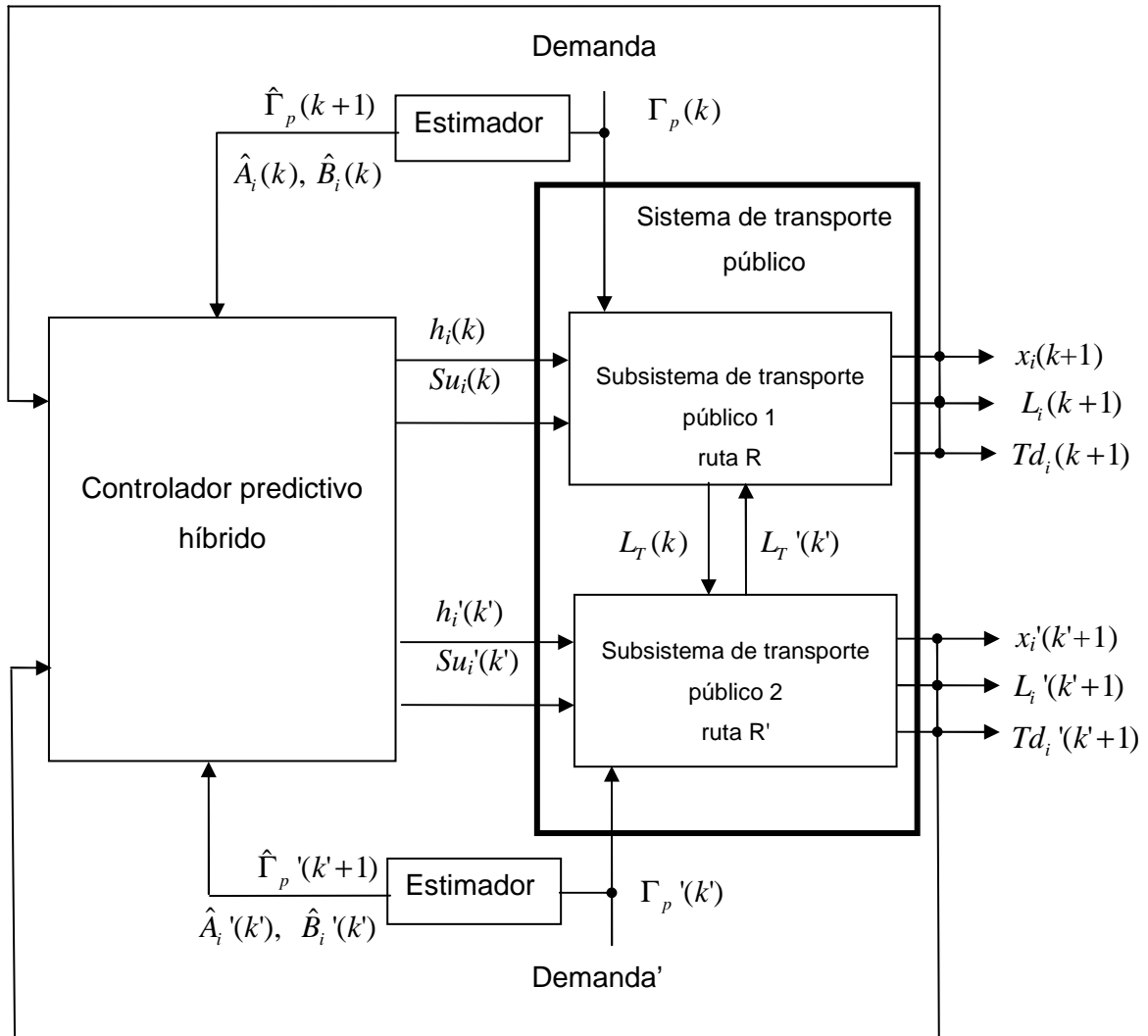


Figura 9.29: Controlador predictivo híbrido centralizado para el sistema de transporte público con estación de transbordo.

El controlador predictivo híbrido centralizado, implica un controlador único que incluye los índices de comportamiento presentados en las ecuaciones (9.16) y (9.17) descritos por las funciones  $J_R$  y  $J_{R'}$ . Además, significa considerar en detalle, en el modelo predictivo del controlador, la interconexión entre rutas (los transbordos de pasajeros). Esto es, agregar índices de comportamiento ya diseñados, que promuevan la acción de transbordo y que junto a la funciones  $J_R$  y  $J_{R'}$  controlen eficientemente el sistema completo. Para el transbordo se considera el índice de sincronización de buses  $J_S$  en la estación de transbordo

(sección 9.8.2), un índice de comportamiento  $J_T$  directamente dirigido a favorecer el transbordo en términos de las capacidades libres y cargas de los buses (sección 9.8.3). Por último, también se agregarán un grupo de restricciones adicionales para una administración eficiente del transbordo, esto es, restricciones que solucionan un conjunto de posibles problemas en la interconexión de los buses, no cubiertos por los índices  $J_S$  y  $J_T$  y se agregan para lograr un encuentro adecuado entre pares de buses (ver sección 9.8.4).

Finalmente, considerando que las variables con tilde representan la caracterización de la ruta R' y las otras variables a la ruta R, el problema de optimización para cada ruta, del único controlador predictivo híbrido centralizado debe ser:

$$\underset{\{u(k), u'(k'), \dots, u(k+Np-1), u'(k'+Np-1)\}}{\text{Min}} \quad J = J_R + \theta_5 J_S + \theta_6 J_T + J_{R'} + \theta_5 J_{S'} + \theta_6 J_{T'} \quad (9.39)$$

sujeto a que se cumpla el modelo predictivo y la restricciones operacionales de la correspondiente ruta más las restricciones para la administración eficiente del transbordo presentadas en la sección 9.8.4.

Recordar, que el término de control de rutas  $J_R$  incluye los otros parámetros de sintonía faltantes  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  y de la misma forma  $J_{R'}$  incluye los parámetros  $\theta_1', \theta_2', \theta_3', \theta_4'$ .

Notar que, por el hecho de haber considerado la evolución temporal del sistema por medio de eventos discretos (determinados por el arribo de los buses a los paraderos), se prevén situaciones críticas. Por ejemplo, se intenta determinar la acción de control en un paradero de la ruta R y los eventos predichos por el modelo sólo se producen en la ruta contraria R', luego no se tiene información actualizada para evaluar los índices de comportamiento. La existencias de esto casos exigirían un horizonte de predicción mayor para asegurar la cantidad de información necesaria, por lo menos doblar la longitud del horizonte de predicción del control HPC centralizado y así asegurar a lo menos una cantidad similar de información de cada ruta.

## 9.10. Análisis experimental de la estrategia propuesta

### 9.10.1. Descripción del experimento

En primera instancia, la estrategia propuesta se aplica sobre dos corredores de buses de 4000 [m] con flotas de tamaño  $b = 6$ , cada bus con capacidad para 72 pasajeros, capacidad típica de bus urbano según Rogat, (2009). El sistema consta de  $P = 10$  estaciones distribuidas uniformemente sobre cada ruta de autobús (la distancia entre las estaciones es de 400 [m], lo cual resulta ser bastante realista, al menos en el contexto de Santiago). La simulación supone incertidumbre en la demanda, para las llegadas de pasajeros a los paraderos, siguiendo un proceso de Poisson con tasas de demanda diferenciada por estación y período (ver Figura 9.4). Las tasas de subida y bajada promedio son  $t_a = 2$  [s/pers] y  $t_b = 1.5$  [s/pers], respectivamente, en segundos por pasajero. El deseado *headway* (referencia) es  $H_d$  se calcula según la sección 4.3 del capítulo 4, para ambas rutas de acuerdo a las demandas diseñadas para los distintos experimentos considerados. Por otra parte, se supone que los buses se mueven a una velocidad constante  $v_0 = 25$ [km/h] (6.94[m/s], donde los tiempos muertos de aceleración, desaceleración y acomodo en el anden de consideran despreciables) cuando no están en una parada. El tiempo de simulación total de los buses sobre las respectivas rutas fue de dos horas.

#### Flujo de pasajeros en rutas con transbordos

En este trabajo se consideró tres escenarios posibles con respecto a la proporción entre flujos de pasajeros de cada ruta individual y los flujos de pasajeros que transbordan:

1. Se considera que un 15% de flujo total es de transbordo y el resto es flujo de la ruta individual.
2. Se considera que un 85% de flujo total es de transbordo y el resto es flujo de la ruta individual.
3. Se considera iguales proporciones para ambos flujos.

En la Figura 9.30 se presenta un ejemplo del flujo (líneas gruesas con puntas de flechas, negra y gris) de pasajeros que trasbordan desde la ruta R a la ruta R'. En esta Figura se presenta el caso 2 donde el 50% de los pasajeros trasborda y el resto se mantiene en la misma ruta.

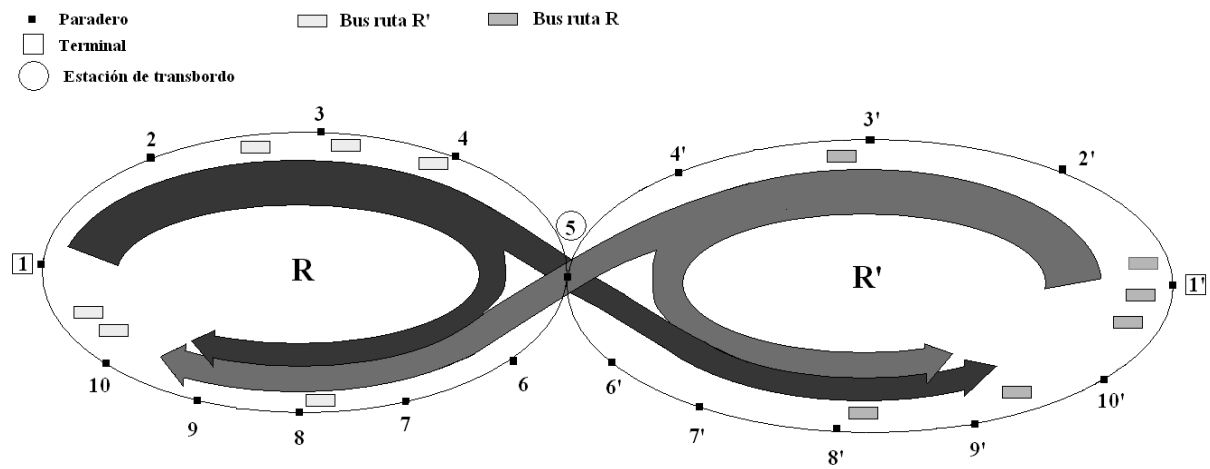


Figura 9.30. Flujos pasajeros en rutas con transbordos

A continuación, se propone un análisis de los parámetros de ponderación de la función objetivo de la expresión (7.8) para ser utilizadas en los experimentos descritos en la sección 4.4.

### 9.10.2. Sintonización de parámetros de la función objetivo

Los parámetros de la función objetivo propuestos se sintonizaron por medio de un algoritmo PSO. Se diseñó una serie de experimentos para determinar, los valores óptimos de los parámetros mencionados, en términos de minimización del tiempo de espera promedio, que en definitiva es el índice utilizado para comparar los distintos controladores diseñados en este trabajo. El algoritmo PSO utilizado, es el llamado optimización con enjambres de partículas con convergencia garantizada (*Guaranteed Convergence Particle Swarm Optimiser*, GCPSO, Kennedy y Eberhart 1995) el cual asegura convergencia local evitando la convergencia prematura típica del algoritmo original (ver detalles en anexo C).

Para las simulaciones se consideró  $Nd=30$  días con distintos valores de demanda, de acuerdo con los patrones y distribuciones establecidas.

La función objetivo para el algoritmo de enjambres fue  $\sum_{d=1}^{Nd} \bar{T}_w(d)$  donde  $\bar{T}_w(d)$  es el tiempo de espera medio de todos los pasajeros en el sistema de transporte público, para una simulación de dos horas en el día  $d$ .

El algoritmo de enjambres de partículas consideró los siguientes parámetros: saturación de velocidad de la partícula (saturación): 50, número de épocas: 20, tamaño de la población: 20, constante de aceleración 1 (mejor influencia local) =2, constante de aceleración 2 (mejor influencia global) =2, peso de inercia inicial: 0.9 y peso de inercia final: 0.4.

Los valores para los parámetros en el caso del controlador predictivo híbrido descentralizado diseñado en la sección 9.7, se presentan en las tablas 9.5 y 9.6.

Tabla 9.5: Controlador predictivo híbrido descentralizado ruta R

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$
8997	98	9027	277

Tabla 9.6: Controlador predictivo híbrido descentralizado ruta R'

$\theta_1'$	$\theta_2'$	$\theta_3'$	$\theta_4'$
9254	214	1089	401

Los valores para los parámetros en el caso del controlador predictivo híbrido distribuido diseñado en la sección 9.8, se presentan en las tablas 9.7 y 9.8

Tabla 9.7: Controlador predictivo híbrido distribuido ruta R

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
7895	234	6863	342	1345	15945

Tabla 9.8: Controlador predictivo híbrido distribuido ruta R'

$\theta_1'$	$\theta_2'$	$\theta_3'$	$\theta_4'$	$\theta_5'$	$\theta_6'$
6789	401	9875	98	979	12354

Los valores para los parámetros en el caso del controlador predictivo híbrido centralizado diseñado en la sección 9.9, se presentan en las tablas 9.12 y 9.13

Tabla 9.9: Controlador predictivo híbrido distribuido ruta R

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
10893	456	12394	45	15663	18656

Tabla 9.10: Controlador predictivo híbrido distribuido ruta R'

$\theta_1'$	$\theta_2'$	$\theta_3'$	$\theta_4'$	$\theta_5'$	$\theta_6'$
7298	2072	12381	564	1094	14549

Para la ruta R, los valores de los parámetros de la función objetivo obtenidos son razonables, ya que  $\theta_1$  y  $\theta_3$  son los parámetros que ponderan, los índices de comportamiento más relacionados con el tiempo de espera de los pasajeros. Los parámetros  $\theta_2$  y  $\theta_4$  están relacionados con el tiempo de espera, de una manera más indirecta. Lo descrito sucede tanto para el controlador predictivo híbrido descentralizado como para el controlador predictivo híbrido distribuido. Ahora, para el controlador predictivo híbrido distribuido, el parámetro  $\theta_6$  es un orden de magnitud superior al parámetro  $\theta_5$ , esto es razonable ya que el índice de comportamiento  $J_T$  está directamente dirigido a maximizar el

transbordo de pasajeros considerando las capacidades libres y las carga de transbordo, en cambio, el índice  $J_S$  sólo trata de sincronizar de forma miope los buses en la estación de transbordo. No obstante, pruebas realizadas sin considerar el  $J_S$  no dieron resultados satisfactorios, lo que valida su aplicación en la función objetivo. Conclusiones semejantes, pueden obtenerse para los parámetros  $\theta_1'$ ,  $\theta_2'$ ,  $\theta_3'$ ,  $\theta_4'$ ,  $\theta_5'$  y  $\theta_6'$  de la ruta R' y para los parámetros del controlador centralizado.

Analizando la teoría correspondiente, sólo podemos asegurar que los valores de las tablas 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9 y 9.10 son cercanos a un óptimo local. Es altamente probable que con un número mayor de generaciones y partículas se encuentre una solución mejor. Notar que, los resultados obtenidos para estos parámetros se obtuvieron en un tiempo no menor a siete días de procesamiento computacional.

### **9.10.3. Análisis con demanda estándar**

En esta sección, se presenta la metodología utilizada, para generar los distintos escenarios demanda de pasajeros en los paraderos. La Figura 9.31 presenta, la demanda diaria acumulada típica para un recorrido de transporte público, modificada proporcionalmente según los flujos de pasajeros utilizados en este experimento (Transantiago, [www.transantiagoinforma.cl](http://www.transantiagoinforma.cl)). Se puede identificar tres intervalos horarios, punta mañana, valle día, punta tarde. Para el análisis de las estrategias propuestas se considerará un intervalo de 6 horas centrado en el periodo punta tarde. Es decir, el intervalo entre las 14:00 y 20:00 [horas].

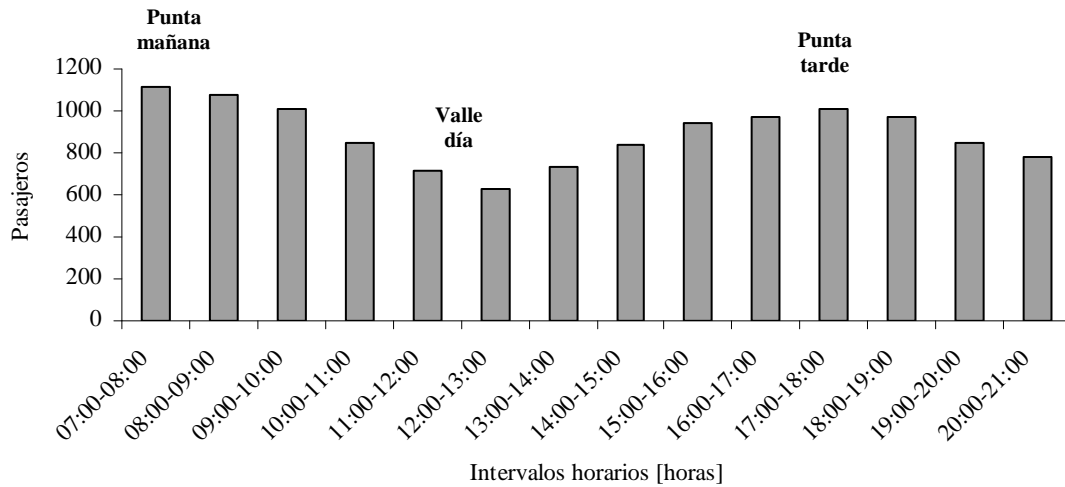


Figura 9.31: Demanda diaria de transporte público típica (Figura modificada de Transantiago, [www.transantiagoinforma.cl](http://www.transantiagoinforma.cl))

En la Figura 9.32, se presentan los tiempos medios de arribo de pasajeros  $1/\lambda(p,t)$  para el paraderos  $p = 1, \dots, 10$  y para el tiempo  $t$  perteneciente al intervalo que se extiende entre las 14:00 y 20:00 [horas] de la ruta R, Para una hora  $t^*$  determinada, las tasas de llegada  $1/\lambda(p,t^*)$  de pasajeros por minuto, se determina a partir de la grafica de la Figura 9.4 ponderada por un valor inversamente proporcional al valor correspondiente  $t^*$  en demanda acumulada (Figura 9.31) .

Luego, en la Figura 9.33 se presenta el número los pasajeros acumulados según los tiempos medios de llegada para cada uno de los  $p$  paraderos y cada una de las  $t$  horas que componen el intervalo de estudio. Se puede constatar que una proyección del volumen dibujado en la Figura 9.33 con respecto al plano formado por el eje vertical (tiempos de arribo por pasajero) y el eje de las horas, se asemeja a la forma de la Figura 9.31 entre las horas del intervalo punta tarde.

Por último, se considera además, simular estadísticamente los destinos de los pasajeros con distribuciones gaussianas tal como se mencionó en la sección 9.2, Figuras 9.5 y 9.6.



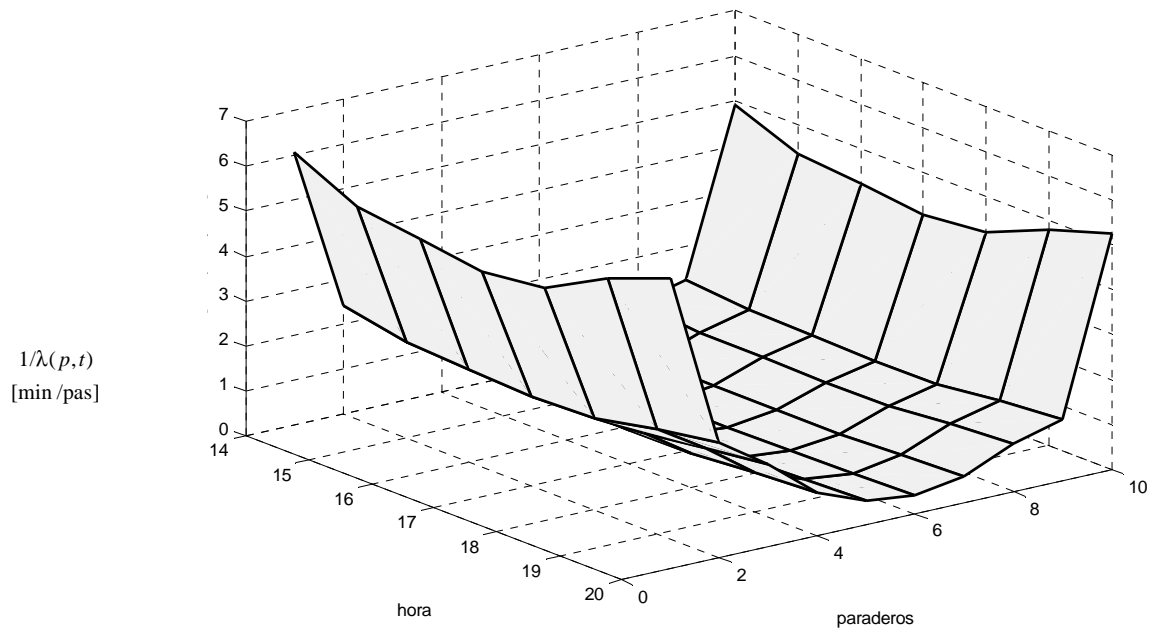


Figura 9.32: Tiempos medios de llegada entre las 14:00 y 20:00 [horas], para los 10 paraderos.

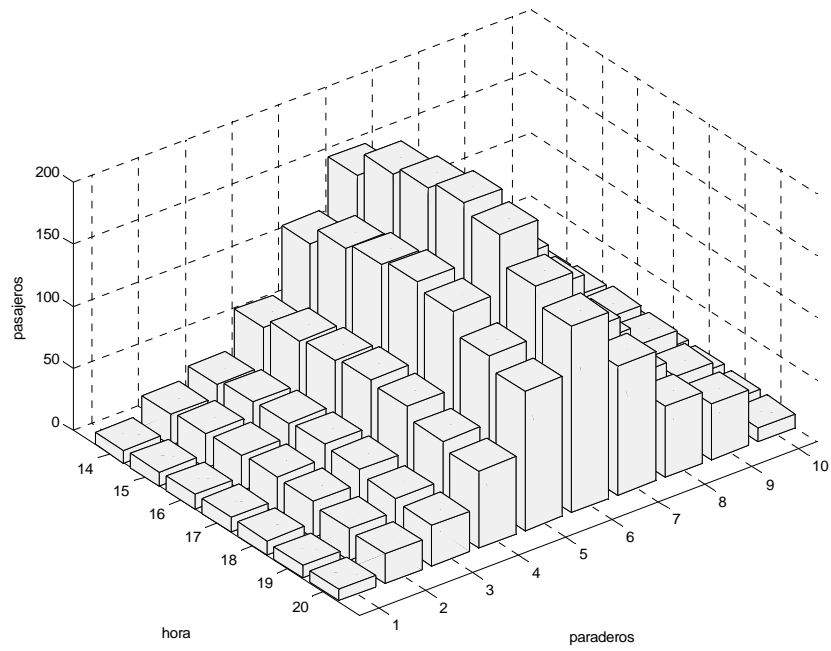


Figura 9.33: Pasajeros acumulados según los tiempos medios de llegada entre las 14:00 y 20:00 [horas].

#### 9.10.4. Resultados de la estrategia propuesta para demanda estándar

A continuación en las Tablas 9.11 a la 9.14 se presenta los resultados promedio, de la operación del sistema de transporte público de dos rutas y una estación de transbordo para distintas configuraciones de la función objetivo, durante 30 días, para demanda estándar. Se ilustra el comportamiento del controlador centralizado HPC (sección 9.9) con un horizontes de predicción de  $N = 4$ . Se presentan también el controlador descentralizado HPC (sección 9.7) y el controlador distribuido HPC (sección 9.8) ambos para un horizontes de predicción de  $N = 2$ . Se realiza, una comparación de su comportamiento en términos del beneficio obtenido en tiempo de espera de los pasajeros con respecto al sistema sin control. Es decir, se cuantifica el beneficio asociado con el desempeño del controlador propuesto, con respecto al sistema de lazo abierto (ver sección 7.3.2. del capítulo 7). También, se presenta el tiempo de espera promedio de los pasajeros en las paradas de las dos rutas, el tiempo de viaje promedio sobre vehículo y el tiempo total del viaje por pasajero de las dos rutas. En la última columna se presenta una comparación entre los rendimientos de los controladores descentralizados y distribuidos. Por último, los datos se presentan para tres escenarios posibles con respecto al porcentaje de transbordo de 85%, 50% y 15%. En particular, en la Tabla 9.11 se presentan los resultados obtenidos para los distintos controladores MPC con una función objetivo que sólo considera el índice de comportamiento  $J_S$  que está orientado a sincronizar los buses en la estación de transbordo (ver sección 9.8.2.).

En la Tabla 9.12 se presentan los resultados con una función objetivo que sólo considera el índice de comportamiento  $J_T$  orientado a maximizar el transbordo (ver sección 9.8.3).

En la Tabla 9.13 se presentan los resultados con una función objetivo compuesta por  $J_S$  y  $J_T$

En la Tabla 9.14 se presenta los resultados de los controladores MPC considerando los índices de comportamiento de sincronización  $J_S$ , y maximización de transbordo  $J_T$  más las restricciones para la administración eficiente del transbordo analizadas en la sección 9.8.4. Asimismo, se presenta los resultados obtenidos con el controlador descentralizado difuso

(sección 9.4) y el controlador distribuido difuso (sección 9.5), donde los controles individuales de las rutas se implementaron con controladores difusos que consideran la ubicación relativa de los buses (capítulo 5).

Tabla 9.11. Demanda estándar con solo  $J_5$ .

Controladores	% Transbordo	T espera sin control [min]	T viaje [min]	T espera [min]	% Beneficio c/r sin control	% Beneficio del control descentralizado c/r al control distribuido
centralizado						
HPC			19.67	11.22	21.20	
descentralizado						
HPC	85	14.24	19.58	9.91	30.40	3.47
distribuido HPC						
			19.84	9.42	33.87	
centralizado						
HPC			14.55	9.16	34.97	
descentralizado						
HPC	50	14.09	14.31	8.57	39.14	3.34
distribuido HPC						
			14.38	8.10	42.48	
centralizado						
HPC			11.12	7.57	46.03	
descentralizado						
HPC	15	14.03	11.04	6.44	54.12	3.37
distribuido HPC						
			11.06	5.97	57.48	

Tabla 9.12. Demanda estándar con sólo  $J_T$

Controladores	% Transbordo	T espera sin control [min]	T viaje [min]	T espera [min]	% Beneficio c/r sin control	% Beneficio del control descentralizado c/r al control distribuido
centralizado						
HPC			19.89	11.22	21.20	
descentralizado						
HPC	85	14.24	19.78	9.91	30.40	0.00
distribuido HPC			19.80	9.97	30.00	
centralizado						
HPC			14.62	9.16	34.97	
descentralizado						
HPC	50	14.09	14.78	8.57	39.14	0.00
distribuido HPC			14.58	8.57	39.14	
centralizado						
HPC			11.75	7.57	46.03	
descentralizado						
HPC	15	14.03	11.99	6.44	54.12	0.00
distribuido HPC			11.69	6.44	54.12	

Tabla 9.13. Demanda estándar con  $J_S$  y  $J_T$

Controladores	% Transbordo	T espera sin control [min]	T viaje [min]	T espera [min]	% Beneficio c/r sin control	% Beneficio del control descentralizado c/r al control distribuido
centralizado HPC			19.84	11.22	21.20	
descentralizado HPC	85	14.24	19.81	9.91	30.40	7.20
distribuido HPC			19.76	8.89	37.60	
centralizado HPC			14.08	9.16	34.97	
descentralizado HPC	50	14.09	14.11	8.57	39.14	5.74
distribuido HPC			14.13	7.76	44.89	
centralizado HPC			11.24	7.57	46.03	
descentralizado HPC	15	14.03	11.23	6.44	54.12	4.17
distribuido HPC			11.29	5.85	58.29	

Tabla 9.14. Demanda estándar con  $J_S$ ,  $J_T$  y restricciones

Controladores	% Transbordo	T espera sin control [min]	T viaje [min]	T espera [min]	% Beneficio c/r sin control	% Beneficio del control descentralizado c/r al control distribuido
centralizado HPC			19.83	10.46	26.53	
descentralizado HPC			19.78	9.91	30.40	9.60
distribuido HPC	85	14.24	19.69	8.54	40.00	
descentralizado difuso			19.90	10.63	25.33	2.67
distribuido difuso			20.11	10.25	28.00	
centralizado HPC			14.23	9.16	34.97	
descentralizado HPC			14.43	8.57	39.14	6.78
distribuido HPC	50	14.09	14.32	7.62	45.93	
descentralizado difuso			14.86	8.99	36.22	1.15
distribuido difuso			15.96	8.82	37.37	
centralizado HPC			11.12	7.57	46.03	
descentralizado HPC			11.20	6.44	54.12	4.22
distribuido HPC	15	14.03	11.15	5.85	58.33	
descentralizado difuso			11.99	6.95	50.49	1.05
distribuido difuso			12.03	6.80	51.54	

De las tablas 9.11, 9.12, 9.13 y 9.14 se deduce la importancia del trabajo conjunto entre los índices de comportamiento  $J_S$  y  $J_T$ . En particular, el trabajo en solitario de  $J_T$  no entrega ningún beneficio como se desprende de la tabla 9.12. Al contrario, el índice  $J_S$  por si solo logra obtener beneficios en el control del transbordo como lo muestra la Tabla 9.11. A partir de la tabla 9.13 se aprecia como los índices  $J_S$  y  $J_T$  se potencian mutuamente.

De las tablas 9.11, 9.13 y 9.14 se percibe la tendencia general, que a mayor porcentaje de transbordo los beneficios de los controladores HPC decrecen. Esto es, razonable ya que a mayor porcentaje de transbordo, la dinámica de las rutas individuales se ve cada vez más distorsionada y el índice  $J_R$  diseñado para el control de la ruta individual (ecuación (9.26)) pierde su eficacia, índice de comportamiento, que en general entrega el mayor aporte al porcentaje de beneficio del controlador distribuido; esto se puede corroborar realizando la comparación con el beneficio del control descentralizado que sólo posee el índice  $J_R$  como función objetivo.

Se desprende de las tablas 9.11, 9.13 y 9.14, que a medida que aumenta el porcentaje de transbordo, la relación del rendimiento entre el control distribuido versus control descentralizado mejora. Es decir, el controlador que considera en su diseño la dinámica del transbordo se hace más competitivo a medida que aumentan los porcentajes de transbordo (ver columna final de las tablas mencionadas).

Notar, que el controlador centralizado no tiene el rendimiento deseado (el cual, debería ser el mejor de todos). En parte, esto se debe a que el controlador se diseñó con un horizonte de predicción de tamaño doble en comparación a los controladores iniciales, con el objetivo de asegurar una cantidad de información equilibrada de cada ruta. Esto es, como el sistema de transporte se modela por medio eventos gatillados por el arribo de un bus a un paradero, puede darse la situación de que se gatille un evento en la ruta R y sus predicciones sean todas en la ruta R', lo que causaría una falta de información para evaluar los índices de comportamiento de la ruta R. Notar, que con el doble de predicciones se disminuye la probabilidad de este hecho. No obstante, la falta de información no está asegurada a no ser que se aumente el número de predicciones en un grado mayor. Sin embargo un aumento de

los horizontes de predicción deteriora el comportamiento de los controladores predictivos HPC diseñados para cada ruta, tal como se muestra en el capítulo 7 en la tabla 7.4.

Notar, que la inclusión de las restricciones para la administración eficiente del transbordo (sección 9.8.4) se obtiene el mejor rendimiento.

Los resultados en tiempo de espera de los controladores difusos con transbordo no superan a los respectivos controladores MPC, lo cual, es efecto de la mayor rigidez del control difuso frente al problema del transbordo. Esto es, el controlador difuso para el transbordo tiene un comportamiento demasiado localizado, sólo toma en cuenta información del sistema cercana al punto de transbordo, al contrario que el controlador MPC que considera la información de toda la ruta. Este problema no se presenta en el control de las rutas individuales ya que los controladores difuso y MPC reaccionan a eventos gatillados aleatoriamente por sobre toda la ruta, lo que les da un alcance global sobre el sistema.

#### **9.10.5. Resultados de la estrategia propuesta para demanda estándar con perturbaciones**

En la Figura 9.34, se presentan los tiempos de arribo de pasajeros  $1/\lambda(p,t)$  para una parada  $p$  en una hora  $t$  de la ruta R, en el intervalo que se extiende entre las 14:00 y 20:00 [horas]. Aquí se considera una distribución no-homogénea es decir, con perturbaciones aleatorias en las tasas de llegada sobre los diez paraderos analizados.



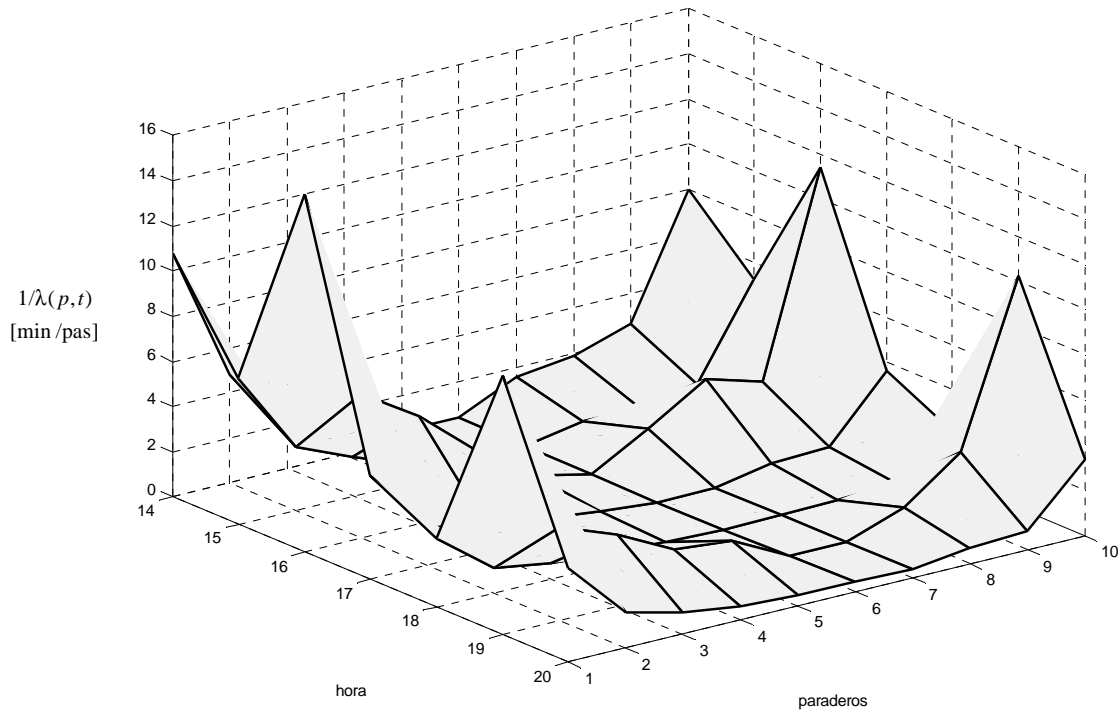


Figura 9.34: Tiempos medios de llegada entre las 14:00 y 20:00 [horas], para los 10 paraderos.

Del mismo modo, en la Figura 9.35 se presenta los pasajeros acumulados según los tiempos medios de llegada para cada uno de los paraderos ( $p = 1, \dots, 10$ ) y cada una de las horas  $t$  que componen el intervalo de estudio. Para demostrar que los datos utilizados tienen un comportamiento que se asemeja a la realidad, en términos de variaciones de tasa de llegada con respecto a las horas punta, se puede constatar, que una proyección del volumen dibujado en la Figura 9.35 con respecto al plano formado por el eje vertical (tiempos de arribo por pasajero) y el eje de las horas, se asemeja a la forma de la Figura 9.31 entre las horas del intervalo punta tarde.

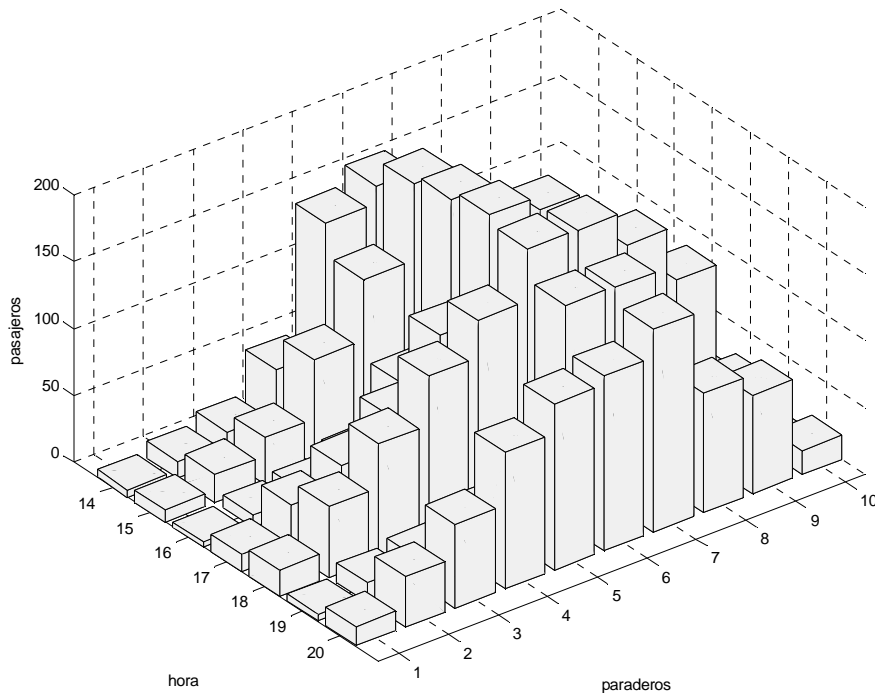


Figura 9.35: Pasajeros acumulados según los tiempos medios de llegada entre las 14:00 y 20:00 [horas].

En la Tabla 9.15 se presenta los resultados de los controladores MPC considerando los índices de comportamiento de sincronización  $J_S$ , y maximización de transbordo  $J_T$  más las restricciones para la administración eficiente del transbordo analizadas en la sección 9.8.4. Asimismo, en la Tabla 9.15 se presentan los resultados obtenidos con el controlador descentralizado difuso (sección 9.4) como el controlador distribuido difuso (sección 9.5), donde los controles individuales de cada ruta son implementados con controladores difusos por asignación de *headway* por paradero en función de la demanda (capítulo 6).

Los datos descritos en la tabla 9.15 tienen un comportamiento similar a los descritos en la tabla 9.14. Se puede apreciar una mejora de los índices evaluados para los controladores difusos, donde la base para el control en ruta es el controlador difuso II (control difuso para un sistema de transporte público por asignación de *headway* por paradero en función de su demanda), presentado en el capítulo 6. El escenario de demanda analizado, es propicio para este controlador como se revisó en el capítulo 6, es decir este controlador reacciona mejor a las variaciones de demanda en contraposición al controlador difuso I (control por ubicaciones relativas de los buses), el cual pierde efectividad para variaciones bruscas de la demanda estándar.

Tabla 9.15. Demanda estándar con  $J_S$ ,  $J_T$  y restricciones

Controladores	% Transbordo	T espera sin control [min]	T viaje [min]	T espera [min]	% Beneficio c/r sin control	Beneficio del control descentralizado c/r al control distribuido
centralizado HPC			20.38	10.46	26.04	
descentralizado HPC			20.34	9.91	29.93	9.53
distribuido HPC	85	14.24	20.40	8.56	39.46	
descentralizado difuso			20.98	10.63	24.83	3.36
distribuido difuso			20.77	10.16	28.19	
centralizado HPC			14.12	9.16	36.30	
descentralizado HPC			14.18	8.57	40.39	6.85
distribuido HPC	50	14.09	14.22	7.59	47.24	
descentralizado difuso			14.87	8.99	37.53	1.84
distribuido difuso			14.98	8.72	39.37	
centralizado HPC			10.22	7.57	46.50	
descentralizado HPC			10.31	6.44	54.52	4.18
distribuido HPC	15	14.03	10.29	5.85	58.70	
descentralizado difuso			10.35	6.95	50.92	1.44
distribuido difuso			10.78	6.74	52.37	

### 9.10.6. Análisis por paradero

Se presenta, en la tabla 9.16 los tiempos de espera por paraderos para las estrategias de control descentralizado y distribuido HPC y en la Tabla 9.17 el beneficio porcentual comparativo de transbordo.

Tabla 9.16. Tiempos de espera por paraderos para las estrategias de control descentralizado y distribuido

Paradero	Transbordo 85%		Transbordo 50%		Transbordo 15%	
	Control descen.	Control distribu.	Control descen.	Control distribu.	Control descen.	Control distribu.
	T viaje[min]	T viaje[min]	T viaje[min]	T viaje[min]	T viaje[min]	T viaje[min]
1	6.44	5.69	5.55	5.35	4.47	4.00
2	7.27	6.30	6.79	5.86	5.00	4.42
3	8.59	7.59	7.16	6.99	5.57	5.49
4	9.23	8.70	8.46	7.82	6.38	5.80
5	10.04	9.38	9.20	8.04	6.60	6.16
6	10.95	9.43	9.46	8.56	7.07	6.45
7	10.70	9.13	9.23	8.05	6.81	6.39
8	10.22	8.35	9.10	7.59	6.75	6.14
9	9.36	7.44	7.82	6.76	5.60	5.31
10	6.53	5.12	5.37	5.01	4.28	3.60

Tabla 9.17. Beneficio porcentual comparativo.

Paradero	Transbordo 85%	Transbordo 50%	Transbordo 15%
	[%] Beneficio control descentralizado v/s distribuido	[%] Beneficio control descentralizado v/s distribuido	[%] Beneficio control descentralizado v/s distribuido
1	11.58	3.62	10.55
2	13.34	13.72	11.62
3	11.60	2.40	1.40
4	5.68	7.53	9.16
5	6.62	12.59	6.66
6	13.89	9.51	8.79
7	14.63	12.77	6.23
8	18.30	16.63	9.03
9	20.56	13.54	5.15
10	21.56	6.74	15.86

Se presenta, en las Figura 9.36 los tiempos de espera por paraderos para las estrategias de control descentralizado y distribuido HPC descritos en la Tabla 9.16 para los distintos porcentajes de transbordo.

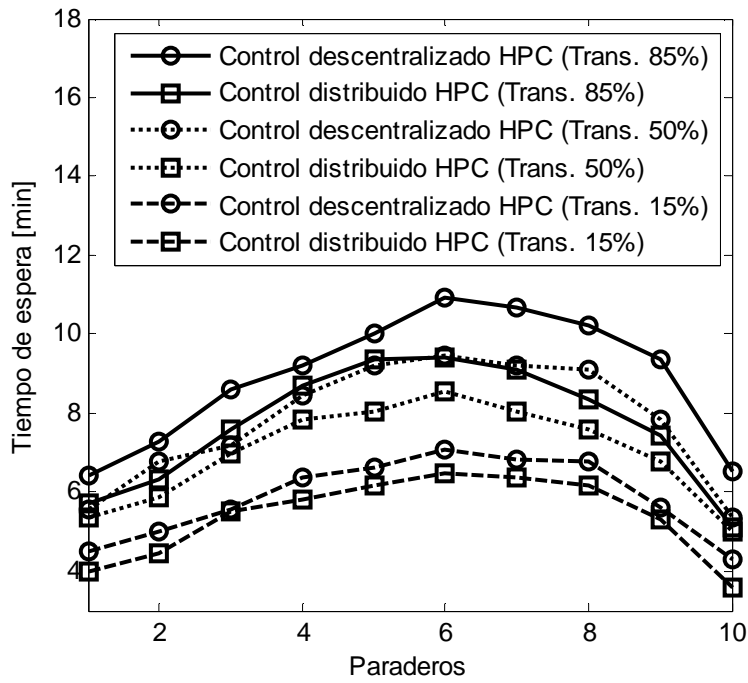


Figura 9.36: Tiempos de espera por paraderos para las estrategias de control descentralizado y distribuido.

En la Figura 9.37, se presenta el beneficio del controlador descentralizado v/s el controlador distribuido (ambos basados en la estrategia HPC), descritos en la tabla 9.17.

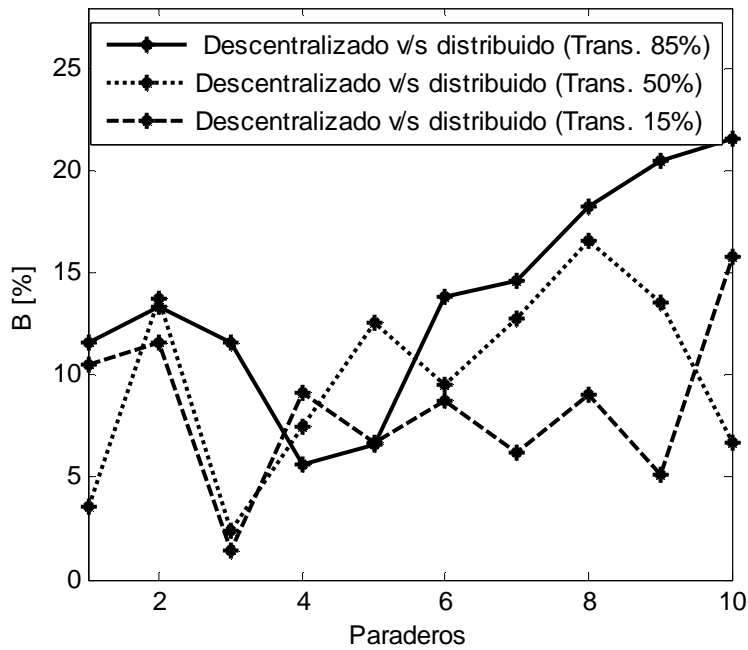


Figura 9.37: Beneficio del controlador descentralizado v/s distribuido.

De la Figura 9.36 se deduce la tendencia clara, que los tiempos de espera son mayores para los pasajeros que llegan a los paraderos centrales de la ruta. Esto es razonable, ya que es en este sector de la ruta donde se concentran las mayores demandas de pasajeros, y es donde el sistema es más exigido, por lo que el control HPC tiene menor rendimiento.

De la Figura 9.37 se deduce que los beneficios obtenidos al implementar el controlador distribuido (HPC) con respecto al control descentralizado (HPC) en general son mejores para los paraderos superiores al 5. Esto es razonable, ya que los tiempos de espera de los pasajeros en los paraderos anteriores al paradero de transbordo (parada 5) no deberían verse más afectados por la estación de transbordo que los paraderos posteriores a ella.

Finalmente se presenta un resumen de los controladores diseñados en tabla 9.18.

En la siguiente sección plantea la incorporación de los controladores diseñados a un sistema de transporte de tamaño superior.

Tabla 9.18. Clasificación de los controladores implementados en este capítulo

Tipo de controlador	Definición	Variables principales para los subsistemas	Objetivos	Ventajas
Descentralizado difuso (con difuso II)	Controladores difusos para cada subsistema de transporte público y sin interacción entre ellos.	$h_i$ :holding (variable manipulada) $Su_i$ :skipping (variable manipulada) $\Delta H_i^p$ :delta de headway (variable controlada)	Tender $\Delta H_i^p$ a cero y obtener para cada paradero $p$ el headway deseado.	Rapidez, se necesitan sólo datos de demanda media por paradero.
Distribuido difuso(con difuso II)	Controladores difusos para cada subsistema de transporte público y con interacción entre ellos.	$h_i$ :holding (variable manipulada) $Su_i$ :skipping (variable manipulada) $\Delta H_i^p$ :delta de headway (variable controlada) $Ts(k)$ : tiempo de sincronización (variable del transbordo)	Tender $\Delta H_i^p$ a cero y obtener para cada paradero $p$ el headway deseado, combinado con mejorar el transbordo con la disminución del tiempo de sincronización $Ts(k)$ de dos buses que convergen en la estación de transbordo, combinado con reglas difusas de administración del transbordo.	Mejor rendimiento que el descentralizado difuso, se necesitan sólo datos de demanda media por paradero.
Descentralizado HPC	Controladores HPC para cada subsistema de transporte público y sin interacción entre ellos.	$h_i$ :holding (variable manipulada) $Su_i$ :skipping (variable manipulada) posición $x_i$ , carga $L_i$ , tiempo de salida $Td_i$ (variables controladas)	Minimización de la función objetivo de cada ruta individualmente $J_R$ y $J_{R'}$ .	Mejor rendimiento que un control similar con controladores difusos.
Distribuido HPC	Controladores HPC para cada subsistema de transporte público y con interacción entre ellos.	$h_i$ :holding (variable manipulada) $Su_i$ :skipping (variable manipulada) posición $x_i$ , carga $L_i$ , tiempo de salida $Td_i$ (variables controladas) $\bar{X}(k)=[x(k)^T \ L(k)^T \ Td(k)^T \ \Gamma(k)^T]$ vector de estado (variables de transbordo)	Minimización de la función objetivo compuesta para cada ruta R, por los índices de comportamiento: control de ruta $J_R$ , sincronización de buses $J_S$ y maximización del transbordo $J_T$ más las restricciones para la administración eficiente del transbordo.	Mayor rendimiento con respecto a todos los controladores presentados.
Centralizado HPC	Un controlador HPC para todo el sistema de transporte público.	$h_i$ :holding (variable manipulada) $Su_i$ :skipping (variable manipulada) posición $x_i$ , carga $L_i$ , tiempo de salida $Td_i$ (variables controladas) $\bar{X}(k)=[x(k)^T \ L(k)^T \ Td(k)^T \ \Gamma(k)^T]$ vector de estado (variables de transbordo)	Minimización de la función objetivo compuesta por los índices de comportamiento: control de ruta $J_{RR'}$ (incluye las dos rutas R y R' en el mismo índice), sincronización de buses $J_S$ y maximización del transbordo $J_T$ .	Sin ventajas (uso para comparación)

## 9.11. Diseño de un control jerárquico de un sistema de transporte público con estaciones de transbordo

En esta sección se plantea la aplicación, de los controladores diseñados, a un sistema de transporte público más general, del tipo presentado en la Figura 9.38. Este incluye tres rutas troncales (línea gruesa), conectadas por estaciones de transbordo, más tres rutas locales (línea delgada), donde cada ruta incluye diez paraderos.

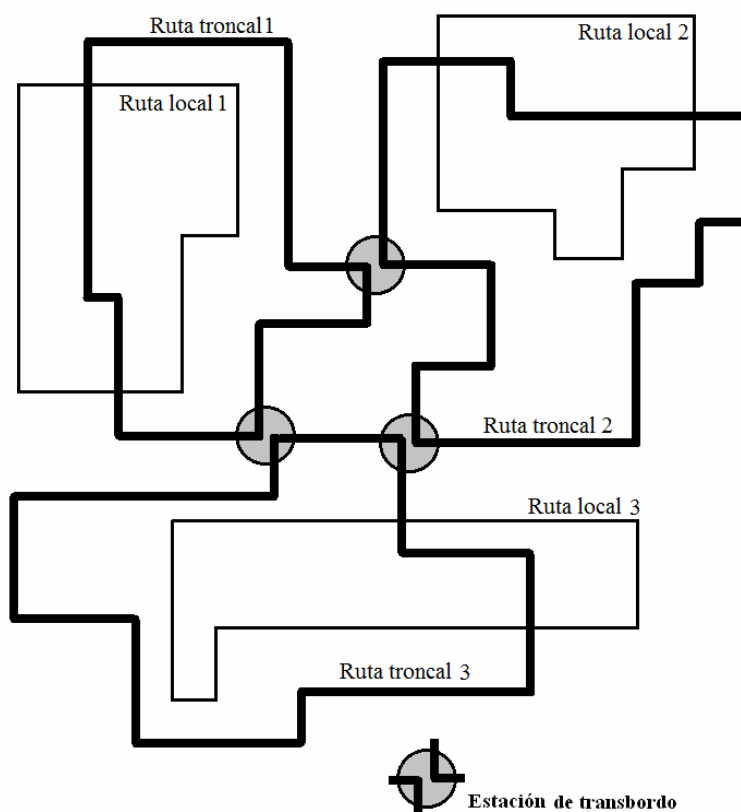


Figura 9.38: Configuración genérica de un sistema de transporte público

El control del sistema completo se plantea en términos de algunos de los controladores diseñados en esta tesis, estos son: el controlador predictivo híbrido, el controlador difuso por ubicaciones relativas de los buses (que se denominará control difuso I), el controlador difuso por asignación de *headway* por paradero en función de su demanda (que se denominará control difuso II). Estos controladores se utilizarán bajo sus correspondientes



adaptaciones para sistemas de gran escala, esto es, como controladores descentralizados y distribuidos.

### **9.11.1. Modelo dinámico de sistema de transporte público con estaciones de transbordo para un controlador jerárquico.**

En la Figura 9.39 se muestra el modelo dinámico del sistema de transporte público, compuesto por seis sub-sistemas (tres rutas troncales y tres rutas locales). Las variables de entrada y salida son función de tiempos discretos distintos  $k^i$  según las rutas  $R^i$  para  $i = 1, \dots, 6$  respectivamente.

En los subsistemas que representan las rutas troncales, se manifiesta un intercambio de información (línea doble achurada) entre los controlares correspondientes, generando un sistema de control distribuido. La interacción entre las rutas locales con las rutas troncales, no está esquematizada en la Figura, ya que esta interacción sólo se modelará como una perturbación en cada sub-sistema en la estación correspondiente de contacto. Lo cual es una suposición válida, en el contexto de que sólo se controlará las interacciones entre las rutas, en las estaciones de transbordo. En general, toda interacción entre dos rutas que no sean ambas troncales se supondrán comparativamente más pequeñas y se representaran como perturbaciones en la demanda del paradero de contacto.

Para cada subsistema  $i$  (correspondiente a un ruta  $R^i$ ) en un evento  $k^i$  la variable de entrada es  $u_i(k^i)$  que puede ser una acción de *holding* o *stop-skipping*, y la variable de salida es el vector  $y(k^i + 1) = [x(k^i + 1) \quad L(k^i + 1) \quad Td(k^i + 1)]$ , que está compuesto de información de los buses de la ruta  $R^i$ , la cual incluye: sus posiciones, su carga y los tiempos de salida respectivamente. Se aprecia de la Figura 9.39 las distintas demandas  $\Gamma_i$  de las correspondientes rutas  $R^i$  con  $i = 1, \dots, 6$ .

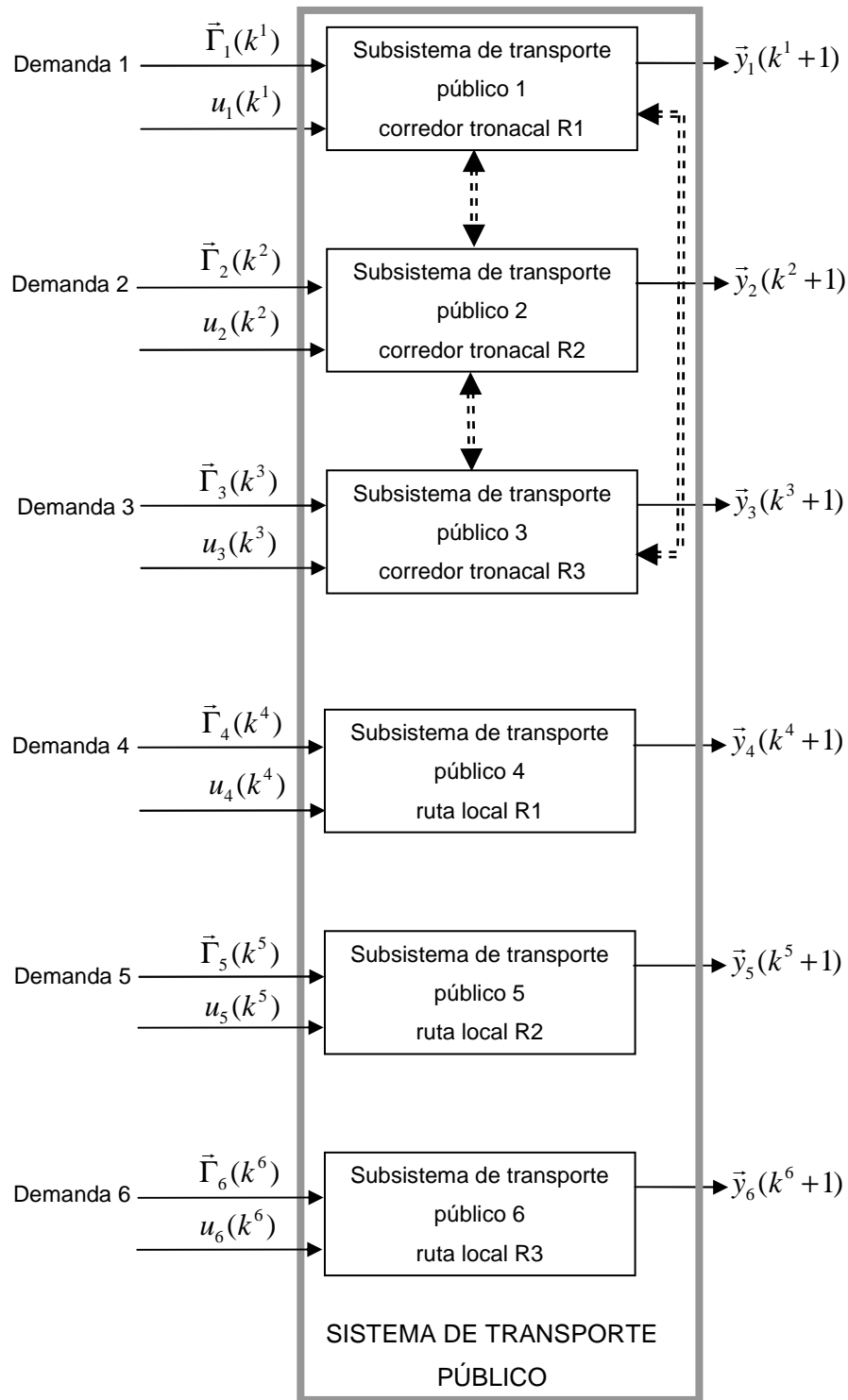


Figura 9.39: Esquema de un sistema de transporte público de seis rutas con tres estaciones de transbordo.

Del mismo modo, la formulación dinámica de la demanda por paradero y carga de los buses para una ruta única presentada en el capítulo 7, será generalizada para rutas conectadas por una estación de transbordo en la sección siguiente.

### 9.11.2. Representación de la demanda en paraderos y carga de buses para tres rutas con estaciones de transbordo.

Se plantea en esta sección la generalización del vector de demanda en paraderos y el vector carga en los buses, para tres rutas interconectadas por estaciones de transbordo.

#### Demanda en paraderos en rutas con transbordo

Como se muestra en la sección 9.6.3 se definen las proporciones de transbordo  $0 \leq r_1 \leq 1$  y  $0 \leq r_2 \leq 1$  para las estaciones  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente. Entonces en el caso que exista transbordo, el aumento de pasajeros en un paradero en un evento  $k$  se puede representar desagregadamente por el vector de dimensión igual al número de destinos  $Np + Nd' + Nd''$ : donde en sus componentes, el primer súper-índice representa el número del paradero y el segundo súper-índice representa el número de destino.

$$\hat{\Delta}\Gamma^p(k) = \left[ \begin{array}{cccccccc} \Delta\hat{\Gamma}^{p,1}(k) & \Delta\hat{\Gamma}^{p,2}(k) & \dots & \Delta\hat{\Gamma}^{p,T_1}(k) & \dots & \Delta\hat{\Gamma}^{p,T_2}(k) & \dots & \Delta\hat{\Gamma}^{p,Np}(k) & \Delta\hat{\Gamma}^{p,(T_1+1)'}(k) & \Delta\hat{\Gamma}^{p,(T_1+2)'}(k) \\ \dots & \Delta\hat{\Gamma}^{p,(T_1+Nd_1)'}(k) & \Delta\hat{\Gamma}^{p,(T_2+1)''}(k) & \Delta\hat{\Gamma}^{p,(T_2+2)''}(k) & \dots & \Delta\hat{\Gamma}^{p,(T_2+Nd_2)''}(k) & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \quad (9.40)$$

Donde  $Np$  es el número de paraderos totales de la ruta R,  $Nd_1$  es el número de destinos posibles en la ruta R' iniciando el recorrido desde la estación de transbordo  $T_1$  de la ruta R. Además,  $Nd_2$  es el número de destinos posibles en la ruta R'' iniciando el recorrido en la estación de transbordo  $T_2$  en la ruta R.

En otras palabras, un destino cualquiera pertenece al siguiente conjunto  $d \in \{1, \dots, T, \dots, Np, (T_1 + 1)', \dots, (T_1 + Nd_1)', (T_2 + 1)'', \dots, (T_2 + Nd_2)''\}$  donde los destinos en la

ruta R son  $1, \dots, T_1, \dots, T_2, \dots, Np$  (que incluye la estaciones de transbordo  $T_1$  y  $T_2$ ) y los destinos posibles para hacer transbordo en la ruta R' son  $(T_1 + 1)', \dots, (T_1 + Nd_1)'$  y los destinos posibles para hacer transbordo en la ruta R'' son  $(T_2 + 1)'', \dots, (T_2 + Nd_2)''$ .

Luego  $\hat{\Gamma}^p(k+1)$  será la carga total acumulada desagregada estimada en un paradero  $p$  predicha para el evento  $k+1$ , actualizada según la ecuación (7.18) del capítulo 7 y donde en sus componentes, el primer súper-índice representa el número de paradero y el segundo súper-índice representa el número de destino.

$$\hat{\Gamma}^p(k+1) = \left[ \hat{\Gamma}^{p1}(k+1) \hat{\Gamma}^{p2}(k+1) \dots \hat{\Gamma}^{pT_1}(k+1) \dots \hat{\Gamma}^{pT_2}(k+1) \dots \hat{\Gamma}^{pNp}(k+1) \hat{\Gamma}^{p(T_1+1)'}(k+1) \hat{\Gamma}^{p(T_1+2)'}(k+1) \dots \right. \\ \left. \dots \hat{\Gamma}^{p(T_1+Nd_1)'}(k+1) \hat{\Gamma}^{p(T_2+1)''}(k+1) \hat{\Gamma}^{p(T_2+2)''}(k+1) \dots \hat{\Gamma}^{p(T_2+Nd_2)''}(k+1) \right] \quad (9.41)$$

### Carga de los buses en rutas con transbordo

De manera semejante a la sección 7.1.3 en el capítulo 7, se puede definir la carga desagregada estimada  $\hat{L}_i(k+1)$  de un bus  $i$  en el evento  $k+1$  en la ruta R, donde en sus componentes, el súper-índice representa el destino del pasajero y el sub-índice representa el número de bus:

$$\hat{L}_i(k+1) = \left[ \hat{L}_i^1(k+1) \hat{L}_i^2(k+1) \dots \hat{L}_i^T(k+1) \dots \hat{L}_i^{Np}(k+1) \hat{L}_i^{(T_1+1)'}(k+1) \hat{L}_i^{(T_1+2)'}(k+1) \dots \right. \\ \left. \hat{L}_i^{(T_1+Nd_1)'}(k+1) \hat{L}_i^{(T_2+1)''}(k+1) \hat{L}_i^{(T_2+2)''}(k+1) \dots \hat{L}_i^{(T_2+Nd_2)''}(k+1) \right] \quad (9.42)$$

la cual se actualiza según la ecuación (7.20) del capítulo 7.

En la Figura 9.40 se presenta un ejemplo de los posibles flujos de pasajeros desde el punto de vista de la ruta troncal 1, (R). Notar que las estaciones de transbordo tendrán en general distinta numeración según la ruta que se las analice. Por ejemplo, se aprecia en la Figura 9.40 la posibilidad que tienen los pasajeros de transbordar en la estación 5 de R (conectada

con la estación 7'' de la ruta troncal R'') o trasbordar en la estación 7 de R hacia la estación 5' de R'.

Conocido los paraderos de transbordo y los destinos posibles, una vez realizado el transbordo, se puede utilizar un vector como el presentado en la ecuación (9.41) para representar la demanda desagregada por destinos del correspondiente paradero. De modo semejante se puede representar la carga de los buses y sus respectivos destinos (ver ecuación (9.40)).

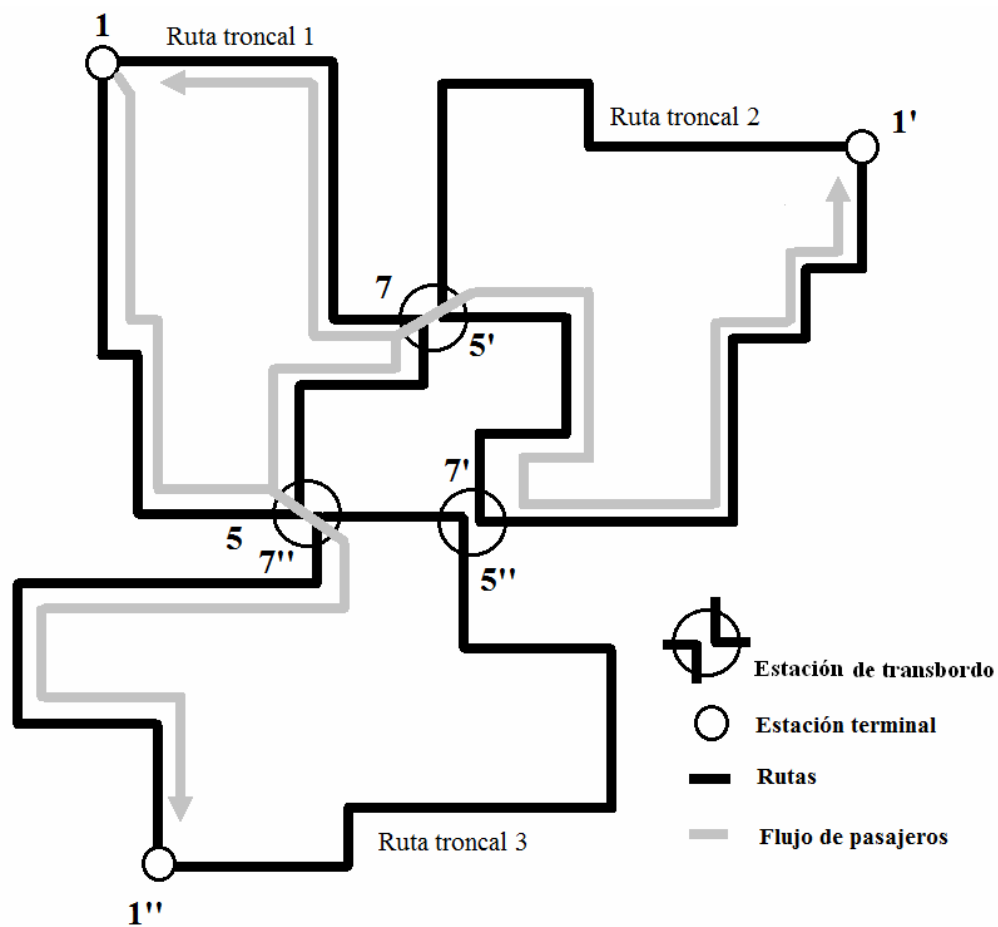


Figura 10.3: Flujos de pasajeros desde el punto de vista de la ruta troncal 1

La descripción de la demandas de las rutas locales conservara la lógica de la formulación para rutas individuales.

### 9.11.3. Criterios de asignación del controlador

La asignación del controlador correspondiente dependerá tanto de la estructura de la demanda, como del comportamiento de los controladores ante variaciones de ella y finalmente de la importancia del recorrido (medida por la cantidad de flujo de personas que transporta).

La demanda del sistema se puede clasificar en forma simple en términos de su distribución temporal y su distribución espacial:

Distribución temporal: clasificación de demanda de transporte público de acuerdo a su comportamiento durante el día. Permite clasificarla en tres intervalos horarios, como se presentó en la Figura 9.32. De forma muy gruesa los intervalos serán: punta mañana (6:00-9:00 [h]), valle día (9:00-16:00[h]), punta tarde (16:00-21:00[h]).

Distribución espacial: clasificación por el grado de homogeneidad de la distribución de pasajeros en el conjunto completo de paraderos. Es decir, determina si los paraderos en cierto intervalo de tiempo común para todos, reciben cantidades equivalentes de pasajeros o por el contrario hay paraderos particulares con aglomeraciones.

Características de los controladores: Las características principales de los controladores diseñados, se resumen en la tabla 9.16, la cual se analiza a continuación.

En la Tabla 9.19 en la columna 2, se presenta la comparación de infraestructura necesaria para implementar los controladores, se aprecia que el controlador más simple de implementar es el controlador Difuso I que sólo requiere conocer las posiciones de los buses en el recorrido, el segundo en cantidad de requerimientos es el control Difuso II el cual además de las posiciones de los buses, necesita conocer la carga de pasajeros en los paraderos y por último se presenta el controlador HPC el cual además de la información precedente, necesita la carga de los paraderos y sus destinos.

En la columna 3, de la Tabla 9.16 se presentan los tiempos de cómputo experimentales. En la columna 4 se hace un análisis de la robustez del controlador ante variaciones de espaciales de la demanda. Luego, se sabe que, el controlador Difuso I no fue diseñado para absorber variaciones de demanda, por el contrario los dos últimos controladores fueron diseñados para tal evento. Finalmente, la columna 5 presenta una clasificación de acuerdo al comportamiento de los controles implementados como controladores distribuidos, con respecto a variaciones de temporales de demanda. Como se demostró en la sección anterior, el controlador HPC posee el mejor comportamiento implementado como controlador distribuido, por el contrario las aplicaciones con controladores difusos son pobres.

Tabla 9.19. Resumen del comportamiento de los controladores.

Controlador	Infraestructura necesaria	Tiempo relativo de computo	Robustez ante variaciones espaciales de demanda de pasajeros	Comportamiento (cuando es implementado en un controlador distribuido) con respecto las variaciones de temporales de demanda
Difuso I	Baja (posición de los buses)	bajo 0.004 [s].	baja	pobre
Difuso II	Media (posición de los buses, carga promedio por paradero )	bajo 0.004 [s].	alta	pobre
HPC	Alta (posición de los buses, carga de los buses, carga de los paraderos)	medio 0.012[s].	alta	bueno

Tipo de recorrido: La asignación del controlador dependerá de la importancia del recorrido, es decir, de acuerdo al grado creciente de impacto del recorrido en la dinámica del sistema

completo. Esto es, si la ruta tiene un gran impacto se permitirá un número mayor de opciones de control aplicables. Por ejemplo, las rutas troncales por su gran impacto en la movilidad de los pasajeros a otras rutas, podrán ser controladas tanto por controladores distribuidos como descentralizados, por el contrario, en las rutas locales se prevé un impacto localizado, sólo se considera controladores descentralizados y la interacción con respecto a las otras rutas se considerará sólo como una perturbación.

Por último, la asignación dependerá del costo de la infraestructura de los controladores. Luego en orden de precedencia de mayor a menor costo se tiene la siguiente lista:

1. Control predictivo híbrido
2. Control difuso II
3. Control difuso I

El orden de los controladores diseñados, da cuenta también de los costos computacionales, que están relacionados directamente con la simplicidad de información requerida para su funcionamiento.

#### **9.11.4. Control jerárquico**

A partir de de la información entregada en la Tabla 9.19 y los criterios de asignación de la sección 10.4 se elaboró las tablas 9.20 y 9.21, que resumen el comportamiento del controlador jerárquico, dividiendo éste en acciones para rutas troncales y rutas locales.

##### **Tipo de control seleccionado para rutas troncales**

Para las rutas troncales el controlador jerárquico debe tener el siguiente comportamiento:

Independiente de la distribución de pasajeros por paradero (homogénea o no-homogénea) y si se está en el horario de mayor utilización del servicio (punta mañana o punta tarde), el controlador jerárquico debe combinar los controladores en un control distribuido HPC donde se intercambia información del transbordo entre las rutas troncales (subsistemas).



Si la cantidad de pasajeros promedio por paradero es homogénea y si se está en el horario de baja utilización del servicio (valle día), el controlador jerárquico deberá activar un control descentralizado con controladores difusos tipo I.

Si la cantidad de pasajeros por paradero es no-homogénea, es decir, hay grandes diferencias entre la cantidades promedio pasajeros que arriban a los paraderos, y si se está en el horario de baja utilización del servicio (valle día), el controlador jerárquico deberá activar un control descentralizado con controladores difusos tipo II.

El resumen de estas decisiones se presenta en la Tabla 9.20.

Tabla 9.20. Rutas troncales

Controlador jerárquico		Distribución temporal de demanda diaria	
		Punta mañana o punta tarde	Valle día
Distribución espacial de demanda por paradero	Homogéneo	Distribuido HPC	Descentralizado difuso I
	No-homogénea	Distribuido HPC	Descentralizado difuso II

## **Tipo de control seleccionado para rutas locales**

Para controlar las rutas locales, debido a su menor demanda relativa de pasajeros con respecto a las rutas troncales y debido a que se no se controlará su interacción con otras rutas (interacción débil), solo serán considerados controladores difusos descentralizados, esto es:

Independiente que la cantidad promedio de pasajeros por paradero es homogénea o no-homogénea o si se está en el horario de baja utilización del servicio (valle día), el controlador jerárquico debe combinar los controladores en un control descentralizado difuso tipo I.

Si la cantidad de pasajeros promedio por paradero es homogénea, y si se está en el horario de alta utilización del servicio (punta mañana o punta tarde), el controlador jerárquico debe realizar un control descentralizado con controladores difusos tipo I.

Por último, si la cantidad de pasajeros promedio por paradero es no-homogénea, y si se está en el horario de alta utilización del servicio (punta mañana o punta tarde), el controlador jerárquico debe realizar un control descentralizado con controladores difusos tipo II. Un resumen de estas decisiones se presenta en la Tabla 9.21.

Tabla 9.21. Rutas locales

Controlador jerárquico		Distribución temporal de demanda diaria	
		Punta mañana o punta tarde	Valle día
Distribución espacial de demanda por paradero	Homogénea	Descentralizado difuso I	Descentralizado difuso I
	No-homogénea	Descentralizado difuso II	Descentralizado difuso I

Notar que, bajo supuesto de variaciones lentas de demanda, tanto temporal (diaria) como espacial (por paradero), se afirma que el conjunto de reglas que se describen en las tablas 9.17 y 9.18 generan un controlador jerárquico suficientemente eficaz. A continuación se presenta las reglas discutidas, en términos de una formulación difusa, que relaja la suposición hecha, sobre variaciones lentas de demanda.

### 9.11.5. Control jerárquico difuso

Suponiendo que los cambios de demanda son más rápidos y además para evitar ambigüedades en las decisiones para ciertos casos límites, se plantea una estructura jerárquica difusa que se presenta a continuación.

En primer lugar, el grado de homogeneidad de la demanda espacial en la ruta, puede ser determinado, a partir de la desviación estándar del promedio de la demanda media (en cierto intervalo de tiempo igual para todos los  $Np$  paraderos). Esto es, si  $d^p$  es la demanda media de pasajeros que arriban a la parada  $p$  en un intervalo de tiempo  $I_d$  preestablecido, el promedio de la demanda de la ruta en  $I_d$  será  $\bar{d} = \frac{1}{Np} \sum_{p=1}^{Np} d^p$ . Luego, la homogeneidad de la

demanda en un intervalo  $I_d$  podrá ser descrita por medio de  $\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{Np} \sum_{p=1}^{Np} (\bar{d} - d^p)^2}$  la desviación estándar de la demanda. Luego para  $\sigma_d$  pequeño significa demanda homogénea y  $\sigma_d$  grande significa demanda es no-homogénea. El intervalo  $I_d$  fue un largo de 10[min]. Es decir, el control jerárquico monitorea el sistema de transporte público cada 10[min].

Ahora, las variable de entrada  $\sigma_d$  es asociada a funciones de pertenencia representadas por los conjuntos difusos P, G, (ver Figura 9.41), donde G se refiere a  $\sigma_d$  grande y P a  $\sigma_d$  pequeño.

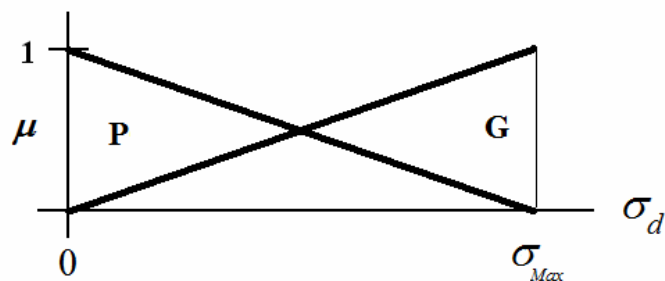


Figura 9.41: Conjuntos difusos de las variable de entrada  $\sigma_d$

Además, el intervalo  $I_d$  puede ubicarse en distintas zonas horarias, se puede asociar con los conjuntos difusos PM, V, PT, que corresponden a los horarios de punta mañana (alta demanda), valle (baja demanda) y punta tarde (alta demanda) respectivamente, los que son presentadas en la Figura 9.42.

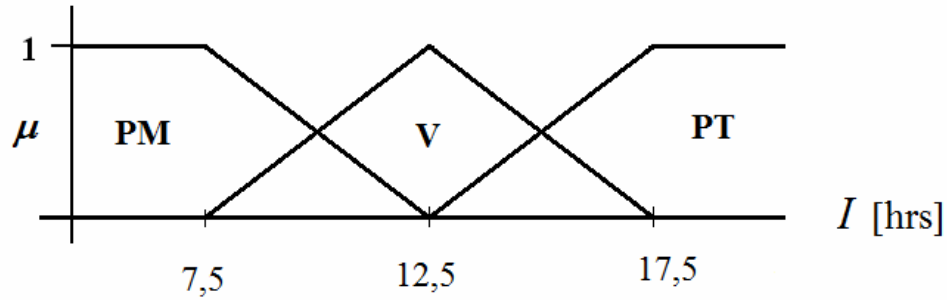


Figura 9.42: Conjuntos difusos de las variable de entrada  $I_t$

Finalmente, las funciones de pertenencia (*singleton*) para la salida del controlador son  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , que representen el tipo de controlador elegido: descentralizado difuso I, descentralizado difuso II y distribuido HPC respectivamente. Estos conjuntos se presentan en la Figura 9.43.

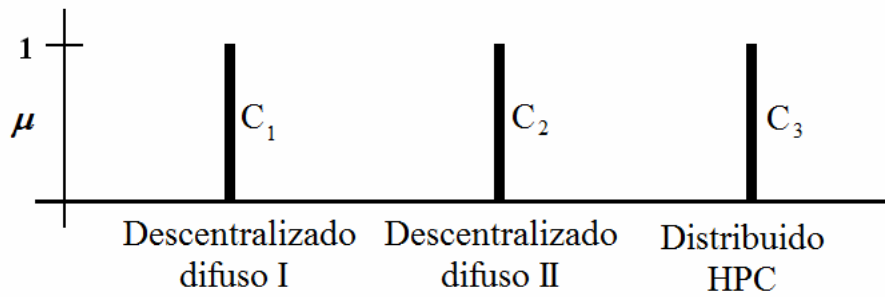


Figura 9.43: Conjuntos difusos de las variable de salida

A partir de los conjuntos difusos presentados se puede hacer una nueva representación de las tablas 9.20 y 9.21 para las rutas troncales y locales respectivamente, ver tablas 9.22 y 9.23.

Tabla 9.22. Rutas troncales

$I_d$ $\sigma_d$	PM, PT	V
P	C <sub>3</sub>	C <sub>1</sub>
G	C <sub>3</sub>	C <sub>2</sub>

Tabla 9.23. Rutas locales

$I_d$ $\sigma_d$	PM, PT	V
P	C <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>
G	C <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>

A partir de las tablas 9.22 y 9.23 se generan las siguientes reglas del control jerárquico difuso para las rutas troncales:

- Si ( $\sigma_d(k)$  es P) y ( $I_t(k)$  es V) entonces el controlador es C<sub>3</sub>
- Si ( $\sigma_d(k)$  es G) y ( $I_t(k)$  es V) entonces el controlador es C<sub>3</sub>
- Si ( $\sigma_d(k)$  es P) y ( $I_t(k)$  es PM o  $I_t(k)$  es PT) entonces el controlador es C<sub>1</sub> (9.43)
- Si ( $\sigma_d(k)$  es G) y ( $I_t(k)$  es PM o  $I_t(k)$  es PT) entonces el controlador es C<sub>2</sub>

Además, generan las siguientes reglas del control jerárquico difuso para las rutas locales:

- Si ( $\sigma_d(k)$  es P) y ( $I_d(k)$  es PM o  $I_d(k)$  es PT) entonces el controlador es C<sub>1</sub>
- Si ( $\sigma_d(k)$  es G) y ( $I_d(k)$  es PM o  $I_d(k)$  es PT) entonces el controlador es C<sub>2</sub>
- Si ( $\sigma_d(k)$  es P) y ( $I_d(k)$  es V) entonces el controlador es C<sub>1</sub> (9.44)
- Si ( $\sigma_d(k)$  es G) y ( $I_d(k)$  es V) entonces el controlador es C<sub>1</sub>

Se presenta en Figura 9.44, el diagrama de la estructura de control jerárquico. Donde el sistema de transporte público bajo control, se supone compuesto por seis subsistemas de transporte público, esto es: tres rutas troncales y tres rutas locales. Todos los subsistemas consideran variables de control  $u_i$  y variables de salida  $\bar{y}_i$  con  $i = 1 \dots 6$ . La interacción entre los subsistemas que representan las rutas troncales, se representa por a efectos mutuos

producidos por la estación de transbordo, como por ejemplo la carga trasbordada, efectos que se representan por la línea doble achurada.

En la Figura 9.44 se muestra el lazo cerrado de control de los sub-sistemas de transporte, las variables de entrada y salida son función de tiempos discretos distintos  $k^i$  según las rutas  $R^i$  respectivamente. Cuando algún evento  $k^i$  ocurre el control jerárquico activa el controlador correspondiente, y se genera la acción de control exigida. En los subsistemas que representan las rutas troncales, se manifiesta un intercambio de información entre los controlares correspondientes, generando un sistema de control distribuido. La interacción de las rutas locales con las rutas troncales no es representada ya que sólo se modelará como una perturbación en cada sub-sistema en la estación correspondiente de contacto. En particular en la Figura 9.44 se presenta el sistema de transporte público en un instante donde el controlador jerárquico tomo la decisión de controlar las rutas troncales con controladores predictivos híbridos (para horas punta) y las rutas locales con controladores difusos tipo II (para demanda no-homogénea). En la Figura 9.45 se presenta un caso especial donde el controlador jerárquico acciona controladores difusos, que puede corresponder al escenario de una distribución de demanda homogénea en un intervalo de tiempo que se produce en hora valle.

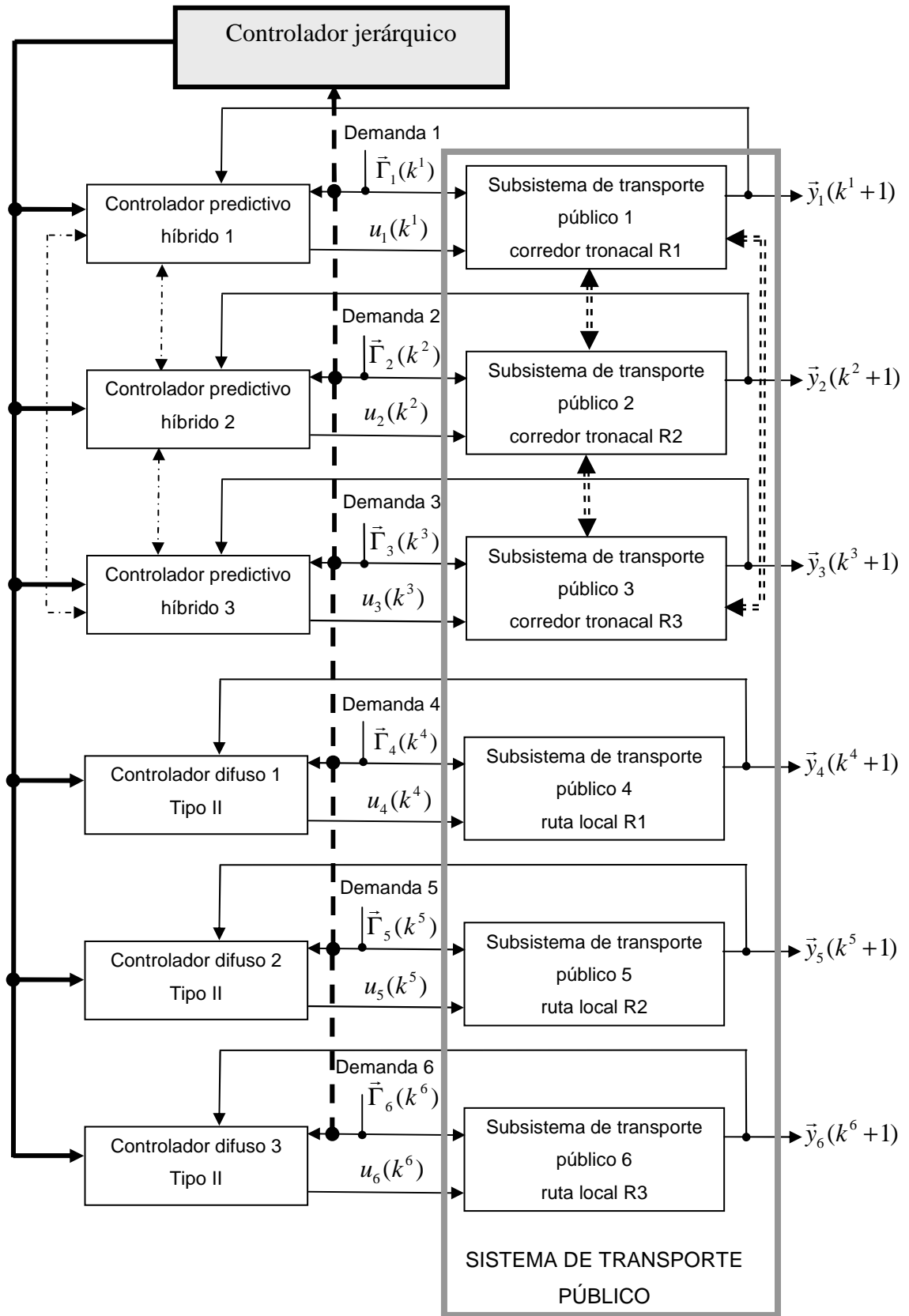


Figura 9.44: Controlador jerárquico para el sistema de transporte público.



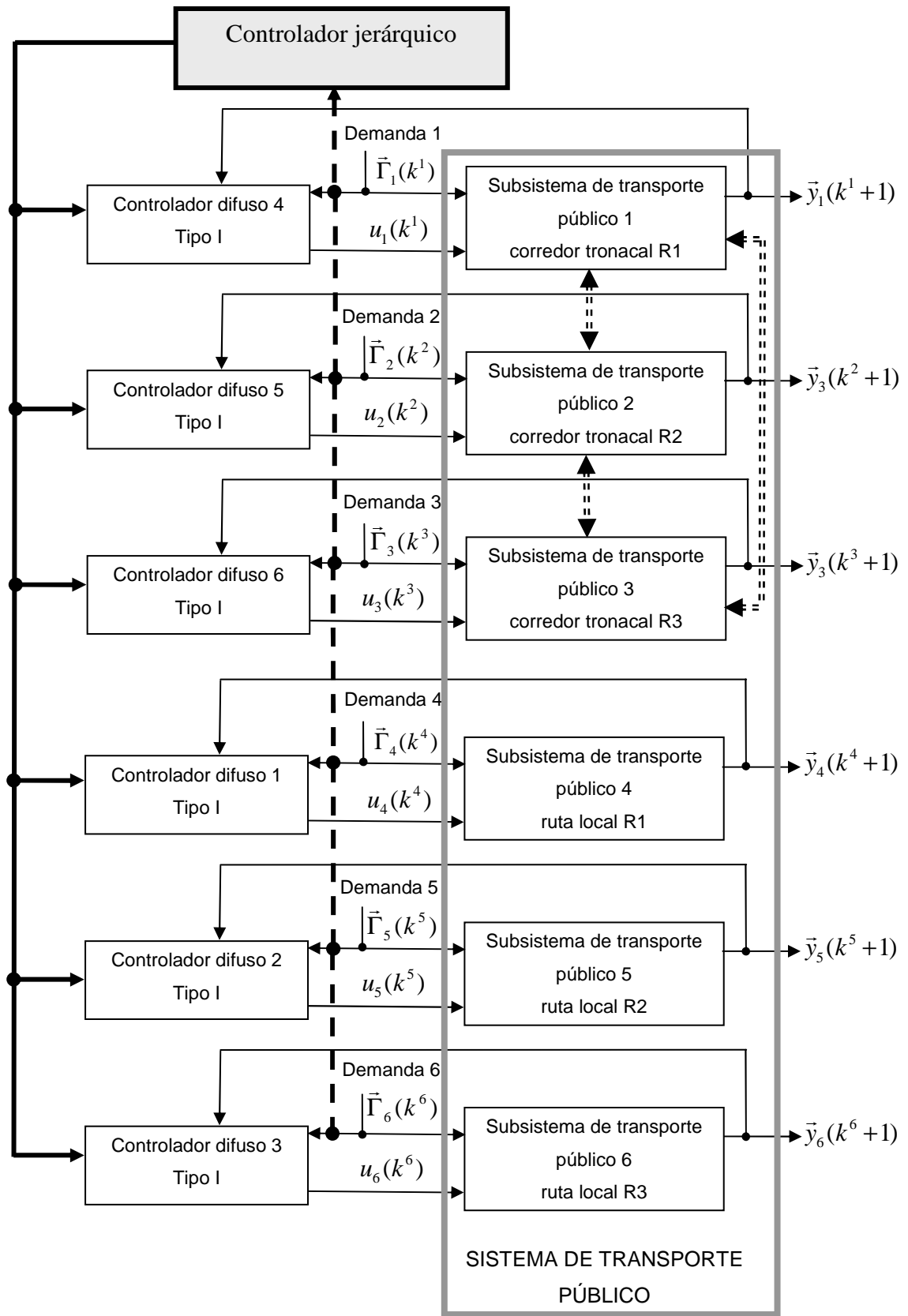


Figura 9.45: Controlador jerárquico para el sistema de transporte público.

### 9.11.6. Descripción del experimento

En la Figura 9.46 se presentan los porcentajes de transbordo entre las rutas del sistema analizado. Estas son: Troncal 1 al 2 con  $r=85\%$ . troncal 2 al 3 con  $r=15\%$ . troncal 3 al 1  $r=50\%$ . Local 1 con troncal 1,  $r=15\%$ . local 2 con troncal 2,  $r=50\%$  y local 3 con troncal 3,  $r=85\%$ . Notar que los flujos de transbordo entre las rutas troncales se consideran mucho más importes que los correspondientes entre las rutas locales. Esto se logra con menores demandas de pasajeros en las rutas locales. Además, como se planteó el proceso de transbordo en las rutas locales se modela sólo como una perturbación medible en el sistema.

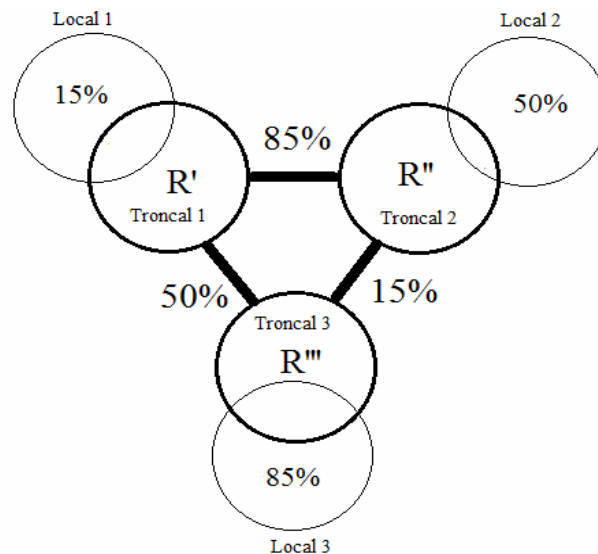


Figura 9.46: Porcentajes de transbordo entre rutas.

En la Figura 9.47, se presentan los tiempos medios de arribo de pasajeros  $1/\lambda(p,t)$  para una parada  $p$  en una hora  $t$  de la ruta  $R$ , en el intervalo que se extiende entre las 7:00 y 20:00 [horas]. Para una hora  $t^*$  determinada, las velocidades de llegada  $1/\lambda(p,t^*)$  de pasajeros por paradero, se determina a partir de la gráfica de la Figura 9.33 ponderada por un valor inversamente proporcional al valor correspondiente  $t^*$  en la demanda diaria de transporte público típica (Figura 9.32). Luego, en la Figura 9.48 se presenta los pasajeros acumulados según los tiempos medios de llegada para cada uno de los  $p$  paraderos y cada

una de las  $t$  horas que componen el intervalo de estudio. Se puede constatar que una proyección del volumen dibujado en la Figura 9.48 con respecto al plano formado por el eje vertical (tiempos de arribo por pasajero) y el eje de las horas, se asemeja a la forma de la Figura 9.32.

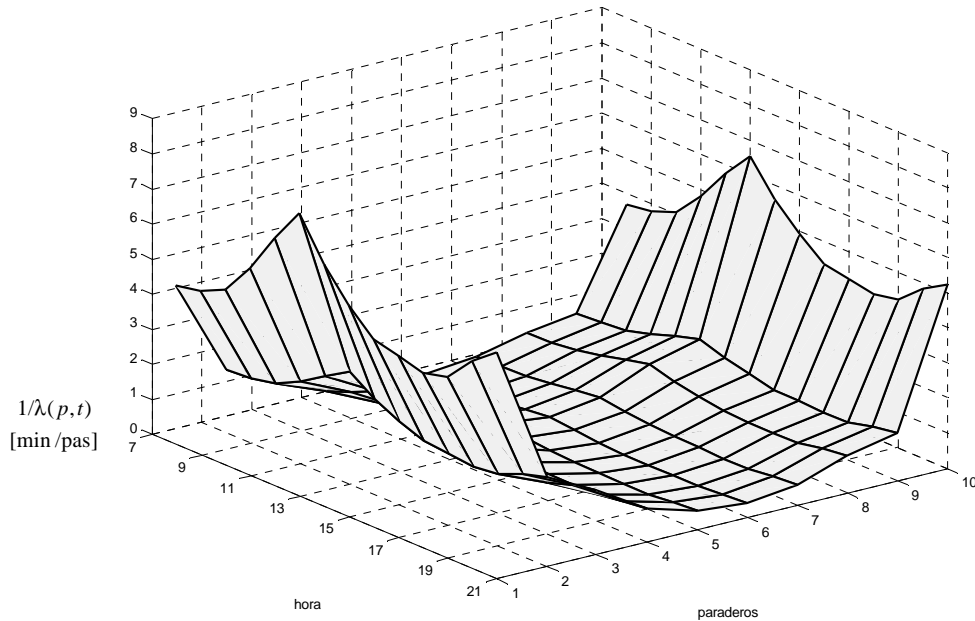


Figura 9.47: Tiempos medios de llegada entre las 7:00 y 20:00 [horas], para los 10 paraderos.

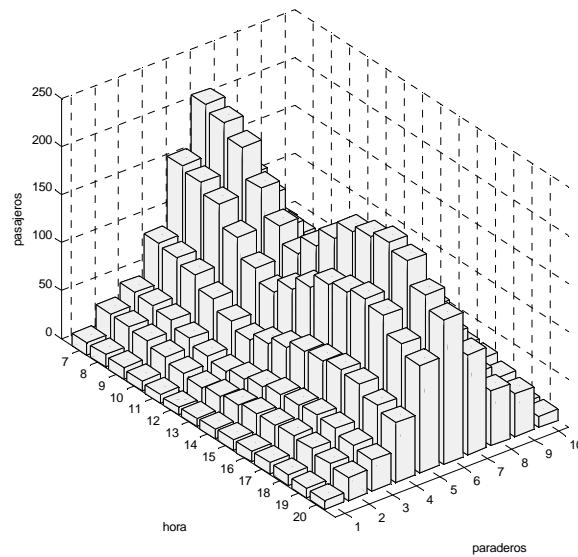


Figura 9.48: Pasajeros acumulados según los tiempos medios de llegada entre las 7:00 y 20:00 [horas].

En la Figura 9.49, se presentan los tiempos de arribo de pasajeros  $1/\lambda(p,t)$  para una parada  $p$  en una hora  $t$  de la ruta R, en el intervalo que se extiende entre las 7:00 y 20:00 [horas].

Esta, considera una distribución no-homogénea (con perturbaciones) de los tiempos de llegada de pasajeros sobre los diez paraderos analizados entre las 13:00 y 20:00 [horas].

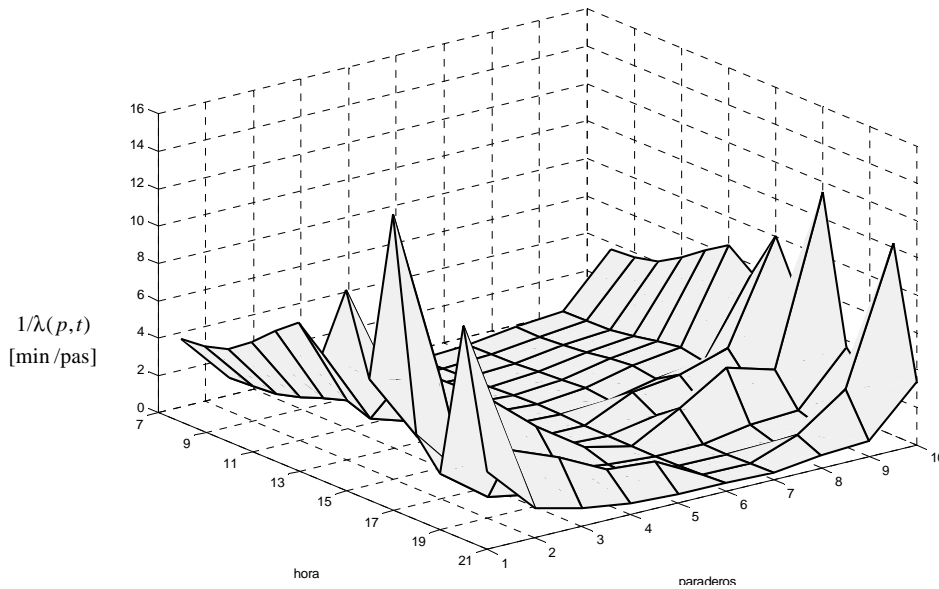


Figura 9.49: Tiempos medios de llegada entre las 7:00 y 20:00 [horas], para los 10 paraderos.

Del mismo modo en la Figura 9.50 se presenta los pasajeros acumulados según los tiempos medios de llegada para cada uno de los  $p$  paraderos y cada una de las horas  $t$  que componen el intervalo de estudio. Se puede apreciar que una proyección del volumen dibujado en la Figura 9.50 con respecto al plano formado por el eje vertical (tiempos de arribo por pasajero) y el eje de las horas, se asemeja a la forma de la Figura 9.31.

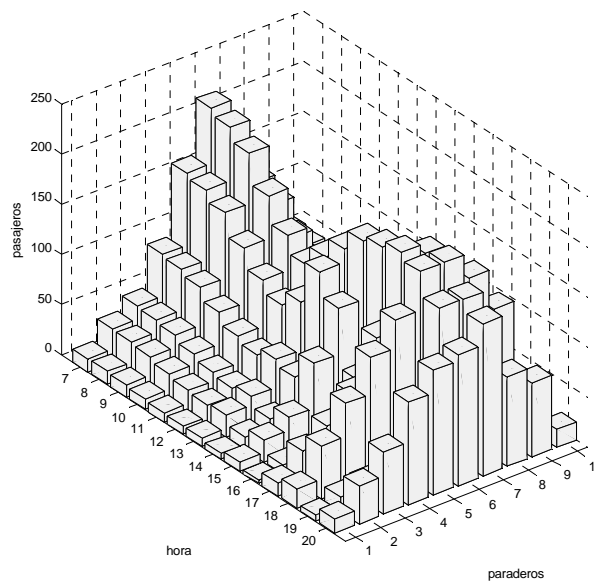


Figura 9.50: Pasajeros acumulados según los tiempos medios de llegada entre las 7:00 y 20:00 [horas].

### **9.11.7. Resultados experimentales del controlador jerárquico.**

Los resultados se plantean en términos de la comparación, del rendimiento del controlador jerárquico versus el controlador más simple de implementar, el controlador descentralizado difuso I (sección 9.4), todo esto sobre escenarios de demanda estándar y estándar con perturbaciones. Luego, en la Tabla 9.20 se presenta los resultados del controlador descentralizado difuso I sobre una demanda estándar (Figura 9.46) en un intervalo que se extiende entre las 7:00 y 20:00 [horas]. En la Tabla 9.21 se presenta los resultados del controlador jerárquico, sobre una demanda estándar, en un intervalo que se extiende entre las 7:00 y 20:00 [horas]. Notar que el porcentaje de transbordo para cada ruta troncal es el promedio de los porcentajes de transbordo con las otras dos rutas troncales. En la Tabla 9.21 se presenta los resultados del controlador descentralizado difuso I sobre una demanda estándar con perturbaciones (Figura 9.49) en un intervalo que se extiende entre las 7:00 y 20:00 [horas]. Por último, en la Tabla 9.23 se presenta los resultados del controlador jerárquico, sobre una demanda estándar con perturbaciones, en un intervalo que se extiende entre las 7:00 y 20:00 [horas]. Notar que para las rutas locales, las demandas por paradero fueron disminuidas a la mitad, para remarcar la diferencia entre flujos de pasajeros de rutas troncales y locales.

Tabla 9.20. Controlador descentralizado difuso I sobre demanda estándar

Ruta troncal	%				
	Transbordo promedio hacia las otras rutas troncales	T espera sin control [min]	T viaje [min]	T espera [min]	% Beneficio c/r sin control
1	67.5	16.22	13.12	10.67	34.22
2	50.0	14.35	13.23	8.98	37.42
3	32.5	11.22	13.34	6.4	42.96
				Media	38.20

Tabla 9.21. Controlador jerárquico sobre demanda estándar

Ruta troncal	%				
	Transbordo promedio hacia las otras rutas troncales	T espera sin control [min]	T viaje [min]	T espera [min]	% Beneficio c/r sin control
1	67.5	16.22	13.18	8.01	50.62
2	50.0	14.35	13.01	7.52	47.60
3	32.5	11.22	13.22	6.1	45.63
				Media	47.95

Tabla 9.22. Controlador descentralizado difuso I sobre demanda estándar con perturbaciones

Ruta local	% Transbordo	T espera sin control [min]	T viaje [min]	T espera [min]	% Beneficio c/r sin control
1	15	8.94	8.67	5.32	40.49
2	50	10.12	8.43	5.89	41.80
3	85	11.43	8.35	5.98	47.68
				Media	43.32

Tabla 9.23. Controlador jerárquico sobre demanda estándar con perturbaciones.

Ruta local	% Transbordo	T espera sin control [min]	T viaje [min]	T espera [min]	% Beneficio c/r sin control
1	15	8.94	8.56	4.57	48.88
2	50	10.12	8.54	5.38	46.84
3	85	11.43	8.45	5.78	49.43
				Media	48.38

Se desprende de la tabla 9.20 y 9.23 que a mayor porcentaje de transbordo dirigido a las otras rutas, menor es el rendimiento de los controladores descentralizado (difuso I) diseñados. Debido a que, para controladores descentralizados a mayor cantidad de transbordo, es menos válida la hipótesis exigida, de baja interacción entre sistemas.

Se observa además, entre las rutas troncales, un de beneficio total de 9.75% entre el promedio por ruta del el controlador jerárquico (el cual activa un controlador distribuido en las horas punta) versus controlador descentralizado difuso I.

Los tiempos de espera en las rutas locales son en general menores a los tiempos de espera en las rutas troncales, sólo por efecto que las rutas locales manejan un menor flujo de pasajeros.

Por último, entre las rutas locales con ambiente de demanda estándar perturbada (no-homogénea), existe un 5.06 % de beneficio total entre el promedio por ruta del controlador jerárquico (el cual en este tipo de ruta y el tipo de demanda, sólo activa el controlador descentralizado difuso II) versus controlador descentralizado difuso I. La menor diferencia entre los rendimientos se debe a la menor diferencia entre las estructuras internas de los controladores, en particular ambos consideran a los transbordos entre las rutas troncales y locales como perturbaciones.

## 9.12. Discusión

En este capítulo se desarrolló un conjunto de controladores para un sistema formado por dos rutas y una estación de transbordo. Estos fueron: los controladores centralizados, descentralizados y distribuidos con algoritmos HPC y difusos, y se logró optimizar los parámetros de los controladores diseñados por medio del algoritmo PSO.

Considerando los índices de comportamiento de sincronización  $J_S$ , y maximización de transbordo  $J_T$  más las restricciones para la administración eficiente del transbordo, se logró un 9.6 % de beneficio en la comparación del controlador distribuido HPC versus el



controlador descentralizado HPC (en el caso de mayor porcentaje de transbordo). Los resultados en tiempo de espera de los controladores difusos con transbordo, no superan a los respectivos controladores MPC. Esto es efecto, muestra la mayor rigidez del control difuso frente al problema del transbordo. Esto es, el controlador difuso para el transbordo tiene un comportamiento demasiado localizado, sólo toma en cuenta información proveniente de las inmediaciones del punto de transbordo del sistema, al contrario que el controlador MPC que considera la información de toda la ruta. Este problema no se presenta en el control de las rutas individuales, ya que los controladores difusos y MPC reaccionan a eventos gatillados aleatoriamente por sobre toda la ruta, lo que les da un alcance global sobre el sistema.

Además, en esta sección se diseñó un controlador jerárquico para un sistema compuesto de un número mayor de rutas y estaciones de transbordo, esto es, se planteó una estrategia de control para el sistema completo en función de los controladores diseñados. Los controladores utilizados fueron: el controlador predictivo híbrido, controlador difuso por ubicaciones relativas de los buses, controlador difuso por asignación de *headway* por paradero en función de su demanda, los cuales fueron utilizados en sus correspondientes implementaciones para sistemas de gran escala. Como resultado se obtuvo un 9.75% de beneficio total entre el controlador descentralizado versus el controlador jerárquico

Teniendo en cuenta que el controlador jerárquico diseñado en esta tesis, es una aproximación inicial a la tarea de controlar un sistema de transporte público real (es decir, que en el diseño se plantea un conjunto de simplificaciones razonables que en el futuro deben ser corregidas) se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Una aplicación real exige un acabado estudio del sistema, con el objetivo de determinar la mejor clasificación de las rutas troncales en función de su demanda. Luego, una segunda aproximación al control de un sistema de transporte público de mayor dimensión, considera que, independientemente del número de rutas troncales que se conectan en una estación de transbordo, siempre es posible simplificar la solución del problema integrando al controlador distribuido MPC, el par de rutas

que dan servicio al mayor volumen de demanda de pasajeros, y así, las rutas no seleccionadas cambiarían su categoría a ruta local. Notar que esta asignación podría ser dinámica, es decir, la selección del par de rutas podría cambiar en el tiempo de acuerdo a la variación de demanda.

- En particular, la metodología presentada, implica controlar las rutas locales por medio de controladores descentralizados, en los cuales se considera los trasbordos de pasajeros entre rutas como perturbaciones pequeñas. De igual modo que las rutas troncales, la categoría de ruta local puede variar en el tiempo.
- Se presume además que existirá por lo menos una relación directamente proporcional entre la intensidad de la congestión en las rutas y el rendimiento de los algoritmos diseñados. En todo caso la comprobación de este hecho queda para una futura investigación.
- Queda como trabajo futuro, un análisis del proceso de transbordo que implique el encuentro de un número mayor de buses en una misma estación de transbordo (por ejemplo tres buses). Esto permitiría una mayor generalización y una solución más cercana al óptimo de un problema de transporte real. Además, se podría incluir una categoría intermedia de rutas, entre troncal y local, rutas que incluirían por lo menos dos estaciones de transbordo, siendo la primera considerada como troncal y segunda como local, con la aplicación de la correspondiente estrategia de control.
- La estrategia de modelar el sistema de transporte por medio de eventos determinados por el arribo de los buses a los paraderos, resulta impracticable para sistema de mayor envergadura. Esto es, a medida que se aumentan el número rutas, las cantidades de eventos por unidad de tiempo aumentan proporcionalmente, por los que existe un límite donde la velocidad necesaria para determinar la acción de control es demasiado grande para las capacidades de los algoritmos predictivos. Sin embargo, los controladores difusos podrían seguir siendo competitivos pero sólo hasta cierto punto. Luego, se deberá analizar la implementación a futuro de un

simulador con una nueva filosofía en la evolución del tiempo, que considere por ejemplo el paralelismo de los procesos.

- Queda como tarea pendiente generalizar los controladores con respecto a una velocidad variable entre paraderos, lo cual se propone como investigación futura.

# Capítulo X

## Conclusiones

La principal contribución de esta tesis es el diseño de un conjunto de estrategias de control avanzado para un sistema de transporte público, con el objetivo de minimizar los tiempos totales de traslado de los usuarios del sistema (viaje, espera y transbordo). Se comienza con el desarrollo de estrategias de control sobre un sistema básico de transporte público, para finalizar con la propuesta de un controlador jerárquico para abordar sistemas más generales. En particular se lograron los siguientes hitos en el desarrollo de esta tesis.

1. Se propone un régimen para el funcionamiento de un sistema de buses a lo largo de un corredor lineal, basado en reglas heurísticas y lógica difusa. El sistema de control utiliza medidas de la posición de cada bus, variable fácil de obtener por medio de la tecnología GPS. Las estrategias utilizadas fueron *holding*, *stop-skipping* y la integración

de ambas, con el objetivo de mantener espaciamientos regulares entre las posiciones de los buses, para intentar de minimizar el tiempo total de espera de los pasajeros que utilizan el sistema. El conjunto de reglas, en ambos casos, se formulan en detalle, y luego se aplican a un corredor lineal a través de simulaciones. Los mejores resultados con controladores diseñados se obtienen de una estrategia integral que incluye las acciones de control de *holding* y *stop-skipping*, teniendo en cuenta reglas difusas, que para esta aplicación logran ahorro en el tiempo de espera promedio de un 53,04% con respecto al sistema en lazo abierto. Se destaca la sencillez y el potencial de ahorro en los recursos computacionales y tecnología, teniendo en cuenta que las metodologías propuestas se basan en un conjunto de normas de control fáciles de implementar en tiempo real.

2. Se propone un nuevo controlador basado en lógica difusa, con acciones de *holding* y *stop-skipping*. El objetivo propuesto es lograr que los intervalos de *headway* en cada paradero estén inversamente relacionados con la demanda de cada paradero como una forma más flexible de minimizar los tiempos de espera. Las reglas difusas diseñadas para esta aplicación logran ahorros en los tiempos de espera de 55.02% en promedio con respecto al control de lazo abierto. La estrategia de control difuso (*holding* y *stop-skipping* basado en reglas difusas) con *headway* distribuido en función de la demanda del paradero es la estrategia que mejor se comporta ante variaciones de la demanda.

3. Se desarrolló un controlador predictivo híbrido (HPC) para optimizar el rendimiento operacional de un sistema de transporte público sobre de un corredor lineal con incertidumbre en la demanda que se observa en los sitios de paradas. Las acciones de control, se llevan a cabo mediante la aplicación de *holding* y *stop-skipping*. La estrategia HPC propuesta se formuló en un entorno de simulación de eventos discretos, y fue resuelta usando la herramienta de poda probabilística (PP), para realizar eficientemente las decisiones óptimas en tiempo real basado en el marco propuesto, en especial considerando un compromiso entre precisión y tiempo de cálculo. Para la estrategia de control HPC-PP, el beneficio medio en tiempo de espera de los pasajeros obtenido es 2.36% mejor que el controlador difuso con espera distribuida en función de la demanda por paradero aplicado a igual sistema. De acuerdo a los resultados, a pesar que el deterioro del rendimiento con

respecto al error de medición de la velocidad es moderado, se recomienda utilizar los controladores difusos diseñados en los capítulos 5 y 6 en el caso que los errores en la medida de la velocidad sean considerables.

5. Se propone un controlador HPC basado en la optimización evolutiva multi-objetivo, para optimizar dinámicamente el rendimiento de un sistema de transporte público a lo largo de un corredor lineal. La optimización del proceso se logró mediante la aplicación de acciones *holding* y *stop-skipping*. El objetivo múltiple se definió en función de dos objetivos, por una parte: minimizar el tiempo de espera y el impacto de las estrategias de control por otra. Esta flexibilidad en la formulación permite al controlador acomodar sus acciones a políticas de servicios diferentes, según sea el caso. En esta formulación, el término  $J_2$  controla la posible penalización del impacto en los usuarios al aplicar las diferentes estrategias de control, que se refleja en tiempos de viaje y tiempos de espera extra debido a que los buses son retenidos en las paradas (*holding*) y/o los pasajeros esperando dos intervalos cuando las estaciones son saltadas (*stop-skipping*). Por otro lado  $J_1$  ayuda al operador a regularizar el tiempo de espera entre buses, en torno a un valor predefinido  $H_d$  que eventualmente podría cambiar si se observan modificaciones de la demanda, medianas o de gran importancia. A pesar de que los objetivos tienen ciertas similitudes, en promedio, muestran de todos modos un *trade-off*, lo que valida la metodología HPC-MO para el sistema estudiado y basado en las componentes de la función objetivo propuesta. Además, la mayor contribución del enfoque MO dinámico junto con el algoritmo de búsqueda en árbol de decisiones con poda probabilística (PBB), es que proporcionan frentes de Pareto dinámicos pseudo-óptimo que permiten al operador (o el planificador) tomar decisiones en línea, basándose en una amplia variedad de opciones. Por lo tanto, es posible decidir a tiempo en cada caso lo que es mejor para el sistema en función de una política específica o de otros factores, pero con un gran rango de soluciones no dominadas para hacer la mejor elección y mejorar el esquema operacional.

6. Se generalizó el conocimiento adquirido en los capítulos precedentes y se desarrolló un conjunto de controladores para un sistema formado por dos rutas y una estación de

transbordo. Estos son: controladores centralizados, descentralizados y distribuidos, los que fueron implementados bajo un marco teórico del control HPC y del control difuso.

Considerando los índices de comportamiento de sincronización  $J_S$ , y la maximización de las operaciones de transbordo  $J_T$  más las restricciones para la administración eficiente del transbordo analizadas en la sección 9.4.3, el controlador distribuido HPC logró un beneficio en tiempo de espera de los pasajeros del 9.6 % por sobre el controlador descentralizado HPC (en el caso de mayor porcentaje de transbordo) aplicado a igual sistema.

Para un sistema compuesto de tres rutas troncales, tres rutas locales y tres estaciones de transbordo, se planificó un control jerárquico en función de los siguientes controladores diseñados en capítulos anteriores: controlador predictivo híbrido (capítulo 7), controlador difuso por ubicaciones relativas de los buses (capítulo 5) y controlador difuso por asignación de *headway* por paradero en función de su demanda (capítulo 6). Los controladores mencionados fueron utilizados, formando parte de implementaciones para sistemas de gran escala, esto es, como componentes de un sistema de control descentralizado y como componentes de un sistema de control distribuido, donde la selección dinámica de su aplicación al sistema de transporte público quedó a cargo del controlador jerárquico. A partir de un análisis de distintos escenarios de demanda de pasajeros, se determinó un beneficio en tiempo de espera de los pasajeros del controlador jerárquico de un 9.75% superior al beneficio de un controlador descentralizado difuso utilizado como base de comparación a igual sistema.

7. Los parámetros de los controladores difusos propuestos se sintonizaron por medio de un algoritmo de enjambres de partículas, PSO. Por esto, se diseñó una serie de experimentos para determinar, los valores óptimos de los parámetros mencionados en términos de minimización del tiempo de espera promedio. De igual forma se logró optimizar los parámetros de los controladores basados en controladores HPC y sus correspondientes aplicaciones para sistemas de gran escala.

8. Se plantea como trabajo futuro ampliar la base de reglas difusas, teniendo en cuenta otros factores como la modificación del conjunto de tiempos de *holding* permitidos, considerando

por ejemplo tiempos de *holding* no discretos. Además, considerar la variación de velocidad en la formulación de los controladores difusos y controlador predictivo híbrido, trabajo ya adelantado en las secciones 5.4.4, 6.2.5 y 7.3.3. Por último, en el marco de controladores de sistemas de gran escala, se plantea como trabajo futuro encontrar soluciones cooperativas e iterativas que impliquen la estabilidad del controlador predictivo distribuido.



# Publicaciones generadas

## Revistas ISI

**Milla**, F., Sáez, D., Cortés, C.E., Cipriano, A. (2012). Bus-stop Control Strategies Based on Fuzzy Rules for the Operation of a Public Transport System. Aceptado a la revista ISI: *Transactions on Intelligent Transportation Systems*.

Sáez, D., Cortés, C.E., **Milla**, F., Núñez, A., Riquelme, M., Tirachini, A. (2012). Hybrid predictive control strategy for a public transport system with uncertain demand. *Transportmetrica*, **8**(1), 61-86.

Cortés, C.E., Sáez, D., **Milla**, F., Riquelme, M., Núñez, A. (2010). Hybrid predictive control for real-time optimization of public transport system' operations based on evolutionary multiobjective optimization. *Transportation Research Part C Emerging Technologies*, **18**(5), 757-769.

## Congresos internacionales

Cortés, C.E., Sáez, D., **Milla**, F., Riquelme, M., Núñez, A. (2008). Hybrid predictive control for real-time optimization of public transport systems' operations based on evolutionary multiobjective optimization. In 10th *International Conference on Application of Advanced Technologies in Transportation*, Athens, Greece.

# Bibliografía

Acar, L. (1992). Some examples for the decentralized receding horizon control. In *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1356–1359, Tucson, USA.

Alessio, A. and Bemporad, A. (2007). Decentralized model predictive control of constrained linear systems. In *Proceedings of the European Control Conference*, pages 2813–2818, Kos, Greece.

Álvarez, J. and Cruz, C. (1998). Multi-objective dynamic optimization of discrete-time systems. In *Proceedings of the 37<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision & Control*, pages 1804–1809, Tampa, USA.

Aske, E.M.B., Strand, S., Skogestad, S. (2008). Coordinator MPC for maximizing plant throughput. *Computers and Chemical Engineering*, **32**, 195–204.

Babuska, R. (1998). *Fuzzy Modelling for Control*. Kluwer Academic Publishers. United States.

Baillieul, J. and Antsaklis, P.J. (2007). Control and communication challenges in networked real-time systems. In *Proceedings of the IEEE*, **95**(1), 9–28.

Bakule, L. (2008). Decentralized control: an overview. *Annual Reviews in Control*, **32**(1), 87–98.

Barnett, A. (1974). On controlling randomness in transit operations. *Transportation Science*, **8**(2), 102-116.

Barra, A. (1999). Roteirizacao de onibus urbano: escolha de um método apropriado as cidades brasileiras. *Tesis de Maestría en Ingeniería de Transporte*, Universidade de Sao Paulo.

Bemporad, A. and Morari, M. (1999). Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica*, **35**(3), 407-427.

Biegler, L. T. (2000). Efficient solution of dynamic optimization and NMPC problems. In F. Allgöwer & A. Zheng (Eds.). *Nonlinear model predictive control*, pages 219–243, Basel, Birkhäuser.

Bookbinder, H. and Désilets, A. (1992). Transfer optimization in a transit network. *Transportation Science*, **26**(26), 106-118.

Brdys, M.A., Grochowski, M., Gminski, T., Konarczak, K., Drewa, M. (2008). Hierarchical predictive control of integrated wastewater treatment systems. *Control Engineering Practice*, **16**(6), 751–767.

Camacho, E.F. and Bordóns, C. (1999). *Model Predictive Control*. Springer-Verlag,

Camponogara, E., Jia, D. Krogh, B.H., Talukdar, S. (2002). Distributed model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, **22**(1), 44–52.

Ceder, A. and Wilson, N. H. M. (1986). Bus network design. *Transportation Research B*, **20**(4), 331–344.

Chang, C.S. and Thia, B.S. (1996). Online rescheduling of mass rapid transit systems: fuzzy expert system approach. In *Electric Power Applications. IEE Proceedings*, **143**(4), 307-316.

Cheng, R., Forbes, J.F., Yip, W.S. (2008). Dantzig–Wolfe decomposition and plant-wide MPC coordination. *Computers and Chemical Engineering*, **32**(7),1507–1522.

Cohen, J. E. (1998). Cooperation and self interest: Pareto-inefficiency of Nash equilibria in finite random games. *Proc. Natl. Acad. Sci*, **95**(17), 9724–9731.

Cordon, O., Herrera, F., Hoffmann, F., Magdalena, L. (2001). *Genetic fuzzy systems: evolutionary tuning and learning of fuzzy knowledge bases*. World Scientific Publishing, Singapore.

Cortés, C.E., Núñez, A., Sáez, D. (2008). Hybrid adaptive predictive control for a dynamic pickup and delivery problem including traffic congestion. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **22**(2), 103-123.

Cortés, C.E., Sáez, D., Núñez, A., Muñoz-Carpintero, D. (2009). Hybrid adaptive predictive control for a dynamic pick-up and delivery problem. *Transportation Science*, **43**(1), 27-42.

Cortés, C.E., Sáez, D., Milla, F., Riquelme, M., Núñez, A. (2010). Hybrid predictive control for real-time optimization of public transport system' operations based on evolutionary multiobjective optimization. *Transportation Research Part C Emerging Technologies*, **18**(5), 757-769.

Davison, E.J. and Chang, T.N. (1990). Decentralized stabilization and pole assignment for general proper systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35**(6), 652–664.

Desaulniers, G. and Hickman, M. D. (2003). Public transit. *Reporte Técnico G-2003-77*, GERAD. <http://www.gerad.ca/fichiers/cahiers/G-2003-77.pdf> (12-2004).

Desilets, A. and Rousseau, J.M. (1992). *Transit timetable synchronization: evaluation and optimization*, Springer-Verlag.

Dessouky, M., Hall, R., and Zhang, L. A. (2003). Singh, real-time control of buses for schedule coordination at a terminal. *Transportation Research A: Policy and Practice*, **37**(2), 145-164.

Du, X., Xi, Y., Li, S. (2001). Distributed model predictive control for large-scale systems. In *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, pages 3142–3143, Arlington, VA, USA.

Dunbar, W.B. (2007). Distributed receding horizon control of dynamically coupled nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**(7), 1249–1263.

Dunbar, W.B. and Murray, R.M. (2006). Distributed receding horizon control for multivehicle formation stabilization. *Automatica*, **42**(4), 549–558.

Eberhart, R. and Hu, X. (1999). Human tremor analysis using particle swarm optimization. In *Proceedings of Congress on Evolutionary Computation*, pages 1927-1930, Washington D.C.

Eberlein, X.J. (1995). *Real-time control strategies in transit operations: Models and Analysis*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

Eberlein, X.J., Wilson, N.H.M., Bernstein, D. (2001). The holding problem with real-time information available. *Transportation Science*, **35**(1), 1-18.

Eberlein, X.J., Wilson, N.H.M., Bernstein, D. (1999). Modeling real-time control strategies in public transit operations. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, **471**, 325-346.

Elliott, M.S. and Rasmussen, B.P. (2008). Model-based predictive control of a multi-evaporator vapor compression cooling cycle. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1463-1468, Seattle, USA.

Engell, S. (2007). Feedback control for optimal process operation. *Journal of Process Control*, **17**(3), 203–219.

Espinosa, J., Vandewalle, J., Wertz, V. (2004). *Fuzzy Logic, Identification and Predictive Control*. Springer-Verlag New York, Inc.

Farina, N. Deb, K. Amato, P. (2004). Dynamic multi-objective optimization problems: Test cases, approximations, and applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, **8**(5), 425.

Favela, A. (1999). *Modélisation et analyse du comportement dynamique des systèmes hybrides: une approche basée sur le modèle automate hybride*. Thèse pour obtenir le grade de docteur de L'Institut National Polytechnique de Grenoble.

Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst*, **14**(5), 676–697.

Ferrari-Trecate, G., Galbusera, L., Marciandi, M.P.E., Scattolini, R. (2007). A model predictive control scheme for consensus in multi-agent systems with single-integrator

dynamics and input constraints. In *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1492–1497, New Orleans, USA.

Franco, E., Magni, L., Parisini, T., Polycarpou, M., Raimondo, D. (2008). Cooperative constrained control of distributed agents with nonlinear dynamics and delayed information exchange: a stabilizing receding-horizon approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **53**(1), 324–338.

Fu, L. and Liu, Q. (2003). A real-time optimization model for dynamic scheduling of transit operations, *Paper presented at the 82nd Annual Meeting of the Transportation Research Board* (CD-ROM). Washington DC.

Gong, Z. and Aldeen, M. (1997). Stabilization of decentralized control systems, *Journal of Mathematical Systems. Estimation, and Control*, **7**(1), 1-16.

Gruttner, E., Pinninghoff, M. A., Tudela, A., Díaz, H. (2002). Recorridos óptimos de líneas de transporte público usando algoritmos genéticos. In *Jornadas Chilenas de Computación*, Copiapó, Chile.

Gu, D. (2008). A differential game approach to formation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **16**(1), 85–93.

Gudi, D.R. and Rawlings, J. B. (2006). Identification for Decentralized Model Predictive Control, *AIChE J.*, **52**(6), 2198–2210.

Hajri-Gabouj, S. (2003). A fuzzy genetic multi-objective optimization algorithm for multilevel generalized assignment problem. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **33**(2), 214-224.

Hall, R., Dessouky, M., Lu, Q. (2001). Optimal holding times at transfer stations. *Computers and Industrial Engineering*, **40**(4), 379-397.

Hickman, M. (2001). An analytic stochastic model for the transit vehicle holding problem. *Transportation Science*, **35**(3), 215–237.

Houng, Y. and Teodorovic, D. (1994). A DSS framework for advanced traffic signal control system investment planning. *Journal of Public Transportation*, **9**(4), 2006.

Hovd, M. and Skogestad, S. (1994). Sequential design of decentralized controllers, *Automatica*, **30**(10), 1601–1607.

Hu, Z.Y., Chan, C. W., Huang, G. H. (2007). Multi-objective optimization for process control of the in-situ bioremediation system under uncertainty. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **20**(2), 225-237.

Ikeda, M., Siljak, D. D., White, D. E. (1981). Decentralized control with overlapping information sets. *Journal of Optimization Theory and Application*, **34**(2), 279–310.

Ikeda, M., Siljak, D.D., White, D.E. (1984). An inclusion principle for dynamic systems. *IEEE Transactions*, **AC-29**(3), 244-249.

InterConsult, (1997). Estudio sobre utilización del transporte colectivo urbano de pasajeros en la ciudad de Montevideo - segunda fase - Informe final. Technical report. *IMM - Dirección de Tránsito y Transporte*, Montevideo.

Jadbabaie, A., Lin, J., Morse, A.S. (2003). Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**(6), 988–1001.

Jia, D. and Krogh, B. (2002). Min–max feedback model predictive control for distributed control with communication. In *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, pages. 4507–4512, Anchorage, AK, USA.



Johansson, B., Speranzon, A., Johansson, M., Johansson, K. (2006). Distributed model predictive consensus. In *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, pages 2438-2444, Kyoto, Japan.

Kadam, J. Marquardt, W. Schlegel, M. Backx, T. Bosgra, O. Brouwer, P.J. (2003). Towards integrated dynamic real-time optimization and control of industrial processes. In *Proceedings of the Foundations of Computer- Aided Process Operations (FOCAPO2003)*, pages 593–596. Coral Springs, FL, USA.

M.R. Katebi, and M.A. Johnson, (1997). Predictive control design for large-scale systems. *Automatica*, **33**(3), 421–425.

Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995). "Particle swarm optimization". In *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, vol IV, pages 1942-1948, Perth, Australia.

Kerrigan, E. Bemporad, A., Mignone, D., Morari, M., Maciejowski, J. (2000). Multi-objective prioritisation and reconfiguration for the control of constrained hybrid systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1694-1698, Chicago.

Kerrigan, E. and Maciejowski, J. (2002). Designing model predictive controllers with prioritised constraints and objectives. In *Proceedings IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*, pages 33-38, Glasgow, Scotland.

Khoat, N. D. and Bernard, D. G. (2006). Rescheduling in the urban transportation networks. In *Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications (IMACS)*, pages 953 - 959, Beijing.

Knudsen, T., Trangbk, K., Kallese, C.S. (2008). Plug and play process control applied to a district heating system. *IFAC'09 World Congress*, pages 336–341, Seoul, Korea.

Kolmanovsky, I. and McClamroch, N.H. (1996). Hybrid feedback laws for a class of cascade nonlinear control systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, **41**(9), 1271 - 1282.

Krishna Rao, K. V., Muralidhar, S., Dhingra, S. L. (2000). Public transport routing and scheduling using genetic algorithms. In *Proceedings of the 8th International Conference on Computer-Aided Scheduling of Public Transport (CASPT-2000)*, Berlin, Germany.

Laabidi, K. and Bouani, F. (2004). Genetic algorithms for multi-objective predictive control. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Control, Communications and Signal Processing*, pages 149-152, Hammamet, Tunisia.

Lee, K. and Schonfeld, P. (1991). Optimal slack time for timed transfers at a transit terminal. *Journal Advanced Transportation*, **25**(3), 281-308.

Limon, D., Alamo, T., Camacho, E.F. (2002). Input-to-state stable MPC for constrained discrete-time nonlinear systems with bounded additive uncertainties. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4619–4624, Las Vegas, NV, USA.

Lin, G., Liang, P., Schonfeld, P., Larson, R. (1995). *Adaptive control of transit operations*, Final Report. MD-26-7002, US Department of Transportation.

Lopez, J., Garcia, R., Garcia, A., Zuniga, I. (2007). Traffic lights fuzzy control proposals to improve vehicular flow". *IEEE Computer Society*, pages 406-411, Morelos, México.

Lunze, J. (1992). *Feedback Control of Large Scale Systems*, Prentice-Hall.

Lygeros, J. (1996). Hierarchical, hybrid control of large scale systems. Technical Report. *California PATH Research Report*, UCB-ITS-PRR, pages 96-23.

Magdi, M. (1977). Multilevel systems control and applications: a survey. *IEEE Tran. Systems, Man and Cybernetics*, **7**(3), 125 - 143.

Magni, L. and Scattolini, R. (2007). Robustness and robust design of MPC for nonlinear systems. In *Assessment and future directions of NMPC*. Springer.

Magni, L. and Scattolini, R. (2006). Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems. *Automatica*, **42**(7), 1231–1236.

Mamdani, E. (1974). Applications of fuzzy algorithms for simple dynamic plant. In *Proc. IEE*, **121**(12), 1585 –1588.

Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., Sokaert, P.O.M. (2000). Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, **36**, 789–814.

Mercangöz M., Doyle III, F.J. (2007). Distributed model predictive control of an experimental four-tank system. *Journal of Process Control*, **17**(3), 297–308.

Michalska, H. and Mayne, D.Q. (1993). Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**, 1623–1633.

Michel, A. (1977). Scalar vs. vector Lyapunov functions in stability analysis of large scale systems: Rapprochement. *Decision and Control including the 16th Symposium on Adaptive Processes and A Special Symposium on Fuzzy Set Theory and Applications*, pages 1262 - 1266.

Moreau, L. (2005). Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**(2), 182–198.

Motee, N. and Sayyar-Rodsari, B. (2003). Optimal partitioning in distributed model predictive control. In *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, pages 5300–5305, Denver, CO, USA.

Mutambara, A.G.O. and Durrant-Whyte, H.F. (2000). Estimation and control for a modular wheeled mobile robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **8**(1), 35–46.

Negenborn, R.R. (2007). *Multi-agent model predictive control with applications to power networks*. PhD Thesis, University of Delft.

Negenborn, R.R., Beccuti, A.G., Demiray, T., Leirens, S., Damm, G., De Schutter, B., Morari, M. (2008). Supervisory hybrid model predictive control for voltage stability of power networks. In *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, pages 5444–5449, New York City, USA.

Negenborn, R.R., De Schutter, B., Hellendoorn, H. (2007). Efficient implementation of serial multi-agent model predictive control by parallelization. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*, pages 175–180. London, UK.

Negenborn, R.R., De Schutter, B., Hellendoorn, H. (2002). Multi-agent model predictive control for transportation networks: serial versus parallel schemes. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **21**(3), 353–366.

Niederlinsky, A.A. (1971). Heuristic approach to the design of linear multivariable interaction subsystems. *Automatica*, **7**, 691–701.

Norambuena, A. (2002). *Diseño óptimo de sistemas de transporte público urbano*. Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Nunez-Reyes, C., Scheffer-Dutra, C., Bordons, (2002). Comparison of different predictive

controllers with multi-objective optimization, Application to an olive oil mill. In *Proceedings of International Conference on Control Applications*, pages 1242 – 1247, Glasgow, Scotland.

Ochoa, S. (2010). *Plantwide Optimizing Control for the Continuous Bio-Ethanol Production Process*. tesis de doctorado, Technischen Universität, Berlin.

Olfati-Saber, R. and Shamma, J. (2005). Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion. *Proceedings of the 44th Conference on Decision and Control*, pages 6698–6703, Sevilla, Spain.

Onifade, O., Oladejo, F., Oyedeji, T. (2010). Dynamic bus rapid transit (BRT) resource management modeling using fuzzy logic paradigm. In *Proceedings of Informing Science & IT Education Conference (InSITE)*, pages 327-329, USA.

Osuna, E.E. and Newell, G.F. (1972). Control strategies for an idealized public transportation system. *Transportation Science*, **6**, 52–72.

Panait, L. and Luke, S. (2005). Cooperative Multi-agent learning: the state of the art. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, **11**(3), 387-434.

Panait, L., Luke, S., Wiegand, R. P. (2006). Biasing coevolutionary search for optimal multiagent behaviors. *IEEE Transactions*, **10**(6), 629 - 645.

Pappas, G.J., Lafferriere, G., Sastry, S. (2000). Hierarchically consistent control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**, 1144–1160.

Paz, A. and Peeta, S. (2008). Fuzzy Control model optimization for behavior-consistent traffic routing under information provision. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions*, **9**(1), 27 – 37.

Qin, S.J. and Badgwell, T.A. (2003). A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, **11**(7), 733–764.

Raimondo, D.M., Magni, L., Scattolini, R. (2007). Decentralized MPC of nonlinear systems: an input-to-state stability approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **17**, 1651–1667.

Rawlings, J.B. and Stewart, B.T. (2008). Coordinating multiple optimization-based controllers: new opportunities and challenges. *Journal of Process Control*, **18**(9), 839–845.

Rawlings, J. B., Bonne, D., Jorgensen, J. B., Venkat, A. N., Jorgensen, S.B. (2008). Unreachable setpoints in model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **53**(9), 2209–2215.

Riquelme, M. (2007). *Estrategias de control predictivo híbrido basadas en optimización multiobjetivo y su aplicación al control de frecuencia de buses con transbordo*. Memoria para optar al título de ingeniero civil electricista. Universidad de Chile.

Rogat, J. (2009). *Regulación y planificación de buses en América Latina - resumen orientado a tomadores de decisiones*. UNEP Risø Centre (URC), Noviembre.

Sáez, D., Cortés, C., Milla, F., Núñez, A., Riquelme, M., Tirachini, A. (2012). Hybrid predictive control strategy for a public transport system with uncertain demand. *Transportmetrica*, **8**(1), 61-86.

Sáez, D., Cortés, C.E., Núñez, A. (2008). Hybrid adaptive predictive control for the multi-vehicle dynamic pickup and delivery problem based on genetic algorithms and fuzzy clustering. *Special Issue Real-time Supply Chain 4 Management of Computers & Operations Research*, **35**(11), 3412-3438.

Sandell, N.R., Varaiya, P., Athans, M., Safonov, M.G. (1978). Survey of decentralized control methods for large scale systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC23**(2), 108–128.

Scattolini, R. and Schiavoni, N. (1995). A multirate model based predictive controller, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(6), 1093–1097.

Scattolini, R. and Colaneri, P. (2007). Hierarchical model predictive control. *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4803–4808, New Orleans.

Scattolini, R., Colaneri, P., De Vito, D. (2008). A switched MPC approach to hierarchical control. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, pages 7790–7795, Seoul.

Scattolini, R. (2009). Architectures for distributed and hierarchical model predictive control – a review. *Journal of Process Control*, **19**(5), 723-731.

Stokaert, P.O.M. and Mayne, D. Q. (1998). Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(8), 1136–1142.

Siljak, D.D. (1991). *Decentralized Control of Complex Systems*, Academic Press, Cambridge.

Stewart, B.T., Venkat, A.N., Rawlings, J.B., Wright, S.J., Pannocchia, G. (2010). Cooperative distributed model predictive control. *Systems & Control Letters*, **59**(8), 460–469.

Subbu, R., Bonissone, P., Eklund, N., Weizhong, Y., Iyer, N., Feng, X., Rasik, S. (2006). Management of complex dynamic systems based on model-predictive multi-objective optimization. In *Proceedings IEEE International Conference on Computational Intelligence for Measurement Systems and Applications*, pages 64 – 69, La Coruña, Spain.

Sun, A. and Hickman, M. (2004). The holding problem at multiple holding stations. In *9th International Conference on Computer-Aided Scheduling of Public Transport (CASPT)*. San Diego. California. EE.UU. Available in <http://fugazi.engr.arizona.edu/caspt/sun.pdf>.

Sun, A. and Hickman, M. (2005). The real-time stop-skipping problem. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, **9**(2), 91-109.

Tan, K., Cheong, C., Goh, C. (2007). Solving multi-objective vehicle routing problem with demand via evolutionary computation. *European Journal of operational research*, **177**(2), 813-839.

Tatara, E., Cinar, A., Teymour, F. (2007). Control of complex distributed systems with distributed intelligent agents. *Journal of Process Control*, **17**, 415–427.

Tatjewski, P. (2008). Advanced control and on-line process optimization in multilayer structures. *Annual Reviews in Control*, **32**(1), 71–85.

Teodorovic, D. and Vukadinovic, K. (1998). *Traffic Control and Transport Planning: A Fuzzy Sets and Neural Networks Approach*. Massachusetts, USA, Kluwer Academic Publisher.

Teodorovic, D. and Luciz, P. 2005. Schedule synchronization in public transit using the Fuzzy Ant System. *Transportation planning and technology*, **28**(1), 47-76.

Teodorovic, D. and Kikuchi, S. (1991). Application of fuzzy sets theory to the saving based vehicle routing algorithm. *Civil Engineering Systems*, **8**, 87–93.

Ting, Ch. and Schonfeld, P. J. (2005). Schedule Coordination in a Multiple Hub Transit Network. *Urban Planning and Development*, **131**(2), 112-124.

Transantiago Informa. Tipos de Paradero. <http://www.transantiagoinforma.cl/tiposParadero>.



Transportation Research Board (1995). Synthesis of transit practice 10 - Bus route evaluation standards. <http://gulliver.trb.org/publications/tcrp/tsyn10.pdf> (03-2003).

Turnquist, M.A. and Blume S.W. (1980). Evaluating potential effectiveness of headway control strategies for transit systems. *Transportation Research Record*, **746**, 25-29.

Vadigepalli, R. and Doyle III, F.J. (2003). Structural analysis of large-scale systems for distributed state estimation and control applications. *Control Engineering Practice*, **11**(8), 895–905.

Valencia, F. (2012). *Predicción de demanda de pasajeros en tiempo real para evaluación de estrategias de control en sistemas de transporte público*. Tesis de magíster en ciencias de la ingeniería. Mención ingeniería eléctrica. Universidad de Chile.

van den Bergh, F. and Engelbrecht, A. (2002). A new locally convergent particle swarm optimizer. In *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pages 96-101.

Van Henten, E. J. and Bontsema, J. (2009). Time-scale decomposition of an optimal control problem in greenhouse climate management. *Control Engineering Practice*, **17**(1), 88–96.

Venkat, A.N., Rawlings, J.B., Wright, S.J. (2005). Stability and optimality of distributed model predictive control. In *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6680–6685, Seville, Spain.

Wang, S.H. and Davison, E. (1973). On the stabilization of decentralized control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-18**, 473–478.

Wirasinghe, S.C. (2003). Initial planning for urban transit systems. *W. H. K. Lam y M. G. H. Bell*, Elsevier Science, pages 1–29.

Wittenmark, B. Salgado, M.E. (2002). Hankel-norm based interaction measure for input–output pairing. In *IFAC – 15th Triennial World Congress*, Barcelona.

Wren, A. (1999). *Heuristics ancient and modern, transport scheduling through the ages*. <http://www.comp.leeds.ac.uk/seth/seminars/nov-17-99b.DOC> (03-2003).

Xu, W., He, S., Song, R., Guo, Y., Quan, L. (2008). Road occupancy rate based fuzzy logic for transit signal control at freeway ramp. *IEEE Computer Society*, **3**, 622-626.

Yinghui, W. and Xilin, L. (2010). Research on the Algorithm of Ordinated Management Control for Complex Systems in Urban Public Transport Service. In *International Conference on E-Business and E-Government (ICEE)*, pages 3054-3057, Guangzhou, China.

Yip, W.S. and Marlin, T.E. (2004). The effect of model fidelity on real-time optimization performance. *Computers and Chemical Engineering*, **28**(1), 267–280.

Yu, B. and Yang, Z. (2007). A dynamic holding strategy in public transit systems with real-time information. *Applied Intelligence*, **31**(1), 69-80.

Zadeh, L. (1973). Out line of a new approach to the analysis of complex systems and decision process. *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern (SMC)*, **3**(1), 28 – 44.

Zanin, A.C., Tvrzka de Gouvea M., Odloak, D. (2002). Integrating real-time optimization into the model predictive controller of the FCC system. *Control Engineering Practice*, **10**, 819–831.

Zhang, T. and Liu, J. (2010). Hierarchical Control Strategy of Hybrid Electric Vehicle. *International conference on Electrical and Control Engineering (ICECE)*, pages 5850 - 5853, Wuhan.

Zolfaghari, S., Azizi, N., Jaber, M. (2004). A model for holding strategy in public transit systems with real-time information. *International Journal of Transport Management*, **2**(2), 99-110.

# Anexo A

## A.1. En los sistemas MLD las expresiones lógicas de la parte discreta de un sistema híbrido se pueden expresar por restricciones lineales

Es decir, dadas dos declaraciones  $L_1$  y  $L_2$  que pueden ser verdaderas o falsas, por medio de variables lógicas  $\delta_1$  y  $\delta_2$  que pueden tomar valores 0 o 1 (variables cuantizadas). En general se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} L_1 \vee L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 + \delta_2 \geq 1 \\ L_1 \wedge L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 = 1, \delta_2 = 1 \\ \sim L_1 &\text{ es equivalente a } \delta_1 = 0 \\ L_1 \Rightarrow L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 - \delta_2 \leq 0 \\ L_1 \Leftrightarrow L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 - \delta_2 = 0 \\ L_1 \oplus L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 + \delta_2 = 1 \end{aligned} \tag{A.1}$$

con  $\oplus$  operador "o" exclusivo

Otras declaraciones posibles son  $L = [f(x) \leq 0]$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es lineal y se asume que  $x \in \mathfrak{X}$ , donde  $\mathfrak{X}$  es un conjunto acotado y definiendo.

$$M = \max_{x \in \mathfrak{X}} f(x) \quad \text{y} \quad m = \min_{x \in \mathfrak{X}} f(x) \quad (\text{A.2})$$

Entonces, otras expresiones lógicas comunes linealizables son como la siguiente:

$$[f(x) \leq 0] \wedge [\delta = 1] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) - \delta \leq -1 + m(1 - \delta) \quad (\text{A.3})$$

esto es si  $\delta = 1$  tenemos  $f(x) - 1 \leq -1 + m(1 - 1)$  que implica  $f(x) \leq 0$ .

Notar, la expresión (A.18) parece representar también la expresión  $[\delta = 1] \Rightarrow [f(x) \leq 0]$ , lo cual es falso. Esto es, si  $p \Rightarrow q$  es necesario que  $\sim q \Rightarrow \sim p$ , luego se debe verificar la expresión  $\sim [f(x) \leq 0] \Rightarrow \sim [\delta = 1]$  equivalente a  $[f(x) > 0] \Rightarrow [\delta = 0]$ , pero esta expresión no representa a (A.18).

También es fácil verificar que

$$[f(x) \leq 0] \vee [\delta = 1] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) \leq \delta M \quad (\text{A.4})$$

$$\sim [f(x) \leq 0] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) \geq \varepsilon \quad (\text{A.5})$$

donde  $\varepsilon > 0$  es una pequeña tolerancia (típicamente la precisión de la máquina), más allá de la cual la restricción es considerada violada. Con lo cual también se puede demostrar que

Se verificar también que

$$[f(x) \leq 0] \Rightarrow [\delta = 1] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) \geq \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta \quad (\text{A.6})$$

Esto es,  $f(x) \leq 0 \Rightarrow 0 \geq \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta$  se logra la expresión verdadera sólo si  $\delta = 1$ , es decir  $0 \geq m$  lo cual es obvio ya que el mínimo de una función menor que cero debe ser menor que cero.

También

$$[f(x) \leq 0] \Leftrightarrow [\delta = 1] \text{ es verdadero si sólo si } \begin{cases} f(x) \leq M(1 - \delta) \\ f(x) \geq \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

es fácil demostrar (2.5) por la expresiones:

$$[f(x) \leq 0] \Rightarrow [\delta = 1] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) \geq \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta \quad (\text{A.8})$$

$$[\delta = 1] \Rightarrow [f(x) \leq 0] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) \leq M(1 - \delta) \quad (\text{A.9})$$

Ahora otra expresión importante para linealizar, es la multiplicación de dos variables lógicas  $\delta_1$  y  $\delta_2$  expresada por una tercera  $\delta_3 \equiv \delta_1\delta_2$  lo cual que es equivalente a  $[\delta_3 = 1] \Leftrightarrow [\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1]$  luego, su linealización es:

$$\delta_3 = \delta_1\delta_2 \text{ es equivalente a } \begin{cases} -\delta_1 + \delta_3 \leq 0 \\ -\delta_2 + \delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Una forma de verificar la expresión (A.26) es observando la Tabla A.1, donde se presentan todos los valores posibles para las variables lógicas  $\delta_1$  y  $\delta_2$  y se demuestra que la expresión (A.26) nunca entrega inconsistencias lógicas.

Tabla A.1

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\begin{cases} -\delta_1 + \delta_3 \leq 0 \\ -\delta_2 + \delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 1 \end{cases}$
1	1	1	$\begin{cases} 0 \leq 0 \\ 0 \leq 0 \\ 1 \leq 1 \end{cases}$
0	1	0	$\begin{cases} 0 \leq 0 \\ -1 \leq 0 \\ 1 \leq 1 \end{cases}$
1	0	0	$\begin{cases} -1 \leq 0 \\ 0 \leq 0 \\ 1 \leq 1 \end{cases}$
0	0	0	$\begin{cases} 0 \leq 0 \\ 0 \leq 0 \\ 0 \leq 1 \end{cases}$

Finalmente, la expresión  $y = \delta f(x)$  es equivalente a las siguientes ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
 y &\leq M\delta \\
 y &\geq m\delta \\
 y &\leq f(x) - m(1 - \delta) \\
 y &\geq f(x) - M(1 - \delta)
 \end{aligned}
 \tag{A.11}$$

Lo que se demuestra de la siguiente forma:

si  $\delta = 1$  tenemos que  $y \leq M$ ,  $y \geq m$ ,  $y \leq f(x)$ ,  $y \geq f(x)$  implica  $y = f(x)$

si  $\delta = 0$  tenemos que  $y \leq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $f(x) \leq m$ ,  $f(x) \geq M$  implica  $y = 0$

Un ejemplo de aplicación es el siguiente:

Supóngase un sistema con dos modos de operación, un modo de operación si la salida del sistema es positivo y otro modo de operación si la salida del sistema es negativo, y que estos modos de operación son correctamente descritos por la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{cases} 0.8x(k) + u(k) & \text{si } x(k) \geq 0 \\ -0.8x(k) + u(k) & \text{si } x(k) < 0 \end{cases} \\ y(k) &= 2x(k) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$x(k) \in [-10, 10], \quad u(k) \in [-1, 1]$$

Se introduce una variable binaria  $\delta(k) \in \{1, 0\}$  tal que si  $\delta(k) = 1 \Leftrightarrow x(k) \geq 0$  y si  $\delta(k) = 0 \Leftrightarrow x(k) < 0$  la expresión 2.13 se puede representar como

$$x(k+1) = 1.6\delta(k)x(k) - 0.8x(k) + u(k) \quad (\text{A.13})$$

Esta representación es no-lineal, utilizando una nueva variable auxiliar de la forma,

$$z(k) = \delta(k)x(k) \quad (\text{A.14})$$

que según (A.26) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} z(k) &\leq M\delta(k) \\ z(k) &\geq m\delta(k) \\ z(k) &\leq x(k) - m(1 - \delta(k)) \\ z(k) &\geq x(k) - M(1 - \delta(k)) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

con  $M = 10$  y  $m = -10$ .

Luego, la expresión no lineal (A.27), se logra expresar como el siguiente sistema de restricciones lineales:



$$\begin{aligned}
x(k+1) &= 1.6z(k) - 0.8x(k) + u(k) \\
y(k) &= 2x(k) \\
z(k) &\leq 10\delta(k) \\
z(k) &\geq -10\delta(k) \\
z(k) &\leq x(k) + 10(1 - \delta(k)) \\
z(k) &\geq x(k) - 10(1 - \delta(k)) \\
x(k) &\leq 10 \\
x(k) &\geq -10 \\
u(k) &\leq 1 \\
u(k) &\geq -1
\end{aligned} \tag{A.16}$$

El sistema se puede describir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= 1.6z(k) - 0.8x(k) + u(k) \\
y(k) &= 2x(k) \\
-10\delta(k) + z(k) &\leq 0 \\
-10\delta(k) - z(k) &\leq 0 \\
10\delta(k) + z(k) &\leq x(k) + 10 \\
10\delta(k) - z(k) &\leq -x(k) + 10 \\
0 &\leq 10 - x(k) \\
0 &\leq 10 + x(k) \\
0 &\leq 1 - u(k) \\
0 &\leq 1 + u(k)
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Finalmente se puede describir de la forma (2.1)

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + B_1u(k) + B_2\delta(k) + B_3z(k) \\
y(k) &= Cx(k) + D_1u(k) + D_2\delta(k) + D_3z(k) \\
E_1\delta(k) + E_2z(k) &\leq E_3u(k) + E_4x(k) + E_5
\end{aligned}$$

con  $A=-0.8$ ,  $B_1=1$ ,  $B_2=0$ ,  $B_3=1.6$ ,  $C=2$ ,  $D_1=0$ ,  $D_2=0$ ,  $D_3=0$ , y con

$$E_1 = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Anexo B

## B.1. Aplicación del principio de inclusión

A modo de ejemplo ilustrativo vamos a considerar a continuación un sistema lineal:

$$\begin{aligned} \text{S: } \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{B.1}$$

Particionamos el estado del sistema (B.13) en tres vectores componentes  $x = (x_1^T, x_2^T, x_3^T)^T$  cuyas dimensiones son tales que  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ . La partición de  $u = (u_1^T, u_2^T)^T$ , sin embargo, tenemos sólo dos componentes de dimensión  $m_1$  y  $m_2$ , con  $m_1 + m_2 = m$ .

El sistema acoplado tiene la siguiente representación

$$\begin{aligned} \text{S: } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ y &= (C_1 \quad C_2 \quad C_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.2}$$

donde la línea punteada denota la partición del sistema de matrices  $A$  y  $B$  inducida por la partición del estado  $x$  y la entrada  $u$ , la descomposición (B.14) de  $S$  es una descomposición con solapamiento en dos sistemas, lo cual puede ser fácilmente extendido para cubrir cualquier número de sistemas interconectados con solapamiento.

Definimos el estado  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1^T, \tilde{x}_2^T)^T$  para un sistema  $\tilde{S}$  como  $\tilde{x}_1 = (x_1^T, x_2^T)^T$  y  $\tilde{x}_2 = (x_2^T, x_3^T)^T$ .

El nuevo estado  $\tilde{x}$  está relacionado con  $x$  de la siguiente forma

$$\tilde{x} = Vx \quad (\text{B.3})$$

donde la típica matriz de transformación  $V$  de dimensión  $n \times \tilde{n}$  utilizada en la literatura es

$$V = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

con  $I_{n_1}$ ,  $I_{n_2}$ ,  $I_{n_3}$  son matrices identidad con dimensiones compatibles con las componentes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  de  $x$ . Notar que  $\text{Ker}(V) = \{\vec{0}\}$ . Además, la pseudo-inversa  $U = (V^t V)^{-1} V^t$ , que claramente  $UV = I$  con  $\text{dim}(I) = n_1 + n_2 + n_3$

$$U = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{n_2} & \frac{1}{2}I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

En cuanto a la típica matriz complementaria  $M$  (3.13), es de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_{12} & -\frac{1}{2}A_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A_{22} & -\frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{22} & \frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

el cual satisface el teorema 3.1 (capítulo 3)

La expansión de  $\tilde{S}$  tiene la siguiente forma

$$\tilde{S}: \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{23} \\ A_{21} & 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & \frac{1}{2}C_2 & \frac{1}{2}C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

comparando (B.14) con (B.20), vemos que los dos sistemas solapados ahora aparecen disjuntos y anulando las matrices de interconexión el sistema aproximado totalmente desacoplado es

$$\tilde{S}: \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \\ 0 & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & \frac{1}{2}C_2 & \frac{1}{2}C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

una técnica tradicional puede ser utilizada para controlar los sistemas separados. Luego las acciones de control serán aplicadas (contraídas si es necesario) al sistema original (B.1).

## B.2. Estabilidad de controladores descentralizados lineales más generales

Considerando el controlador descentralizado para el sistema (3.30) y que la información disponible para el  $i$ -ésima estación de control en un tiempo  $t$  es representado por

$$I_i(t) = \{y_i(\xi), u_i(\zeta) : \xi \in [0, t], \zeta \in [0, t]\} \quad (\text{B.9})$$

Asumiendo que las restricciones de la información de la estructura descentralizada es tal que la entrada de control  $u_i(t)$  en la  $i$ -ésima estación de control puede ser solamente determinada desde  $I_i(t)$ , es decir,

$$u_i(t) = F_i(I_i(t), t) \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.10})$$

Donde la clase de los controladores (3.40) incluye los descentralizados lineales e invariantes en el tiempo, variantes en el tiempo, o aun controladores no lineales. De hecho ésta es la clase más amplia de controladores descentralizados para el sistema (3.30).

Para proseguir la argumentación es necesario introducir el concepto de grafo dirigido y fuertemente conectados para los sistemas de control descentralizados. Considerando los  $N$  sistemas de control descentralizados de (3.30), el grafo dirigido de este sistema es definido como el conjunto de  $N$  nodos y algunos arcos conectando directamente estos nodos. Los nodos representan las estaciones de control del sistema y los arcos directamente conectados, representan las conexiones entre estos nodos. Si  $C_j(sI - A)^{-1} B_i \neq 0$ , entonces existe un arco directo desde el nodo  $i$  al nodo  $j$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ). Si para cada distinto par  $i$  y  $j$ , el grafo dirigido contiene un camino directo desde el nodo  $i$  al nodo  $j$  y desde el nodo  $j$  al nodo  $i$ , entonces el grafo dirigido y el sistema (3.30) son denominados fuertemente conectados.

Si un grafo dirigido no es fuertemente conectado, puede siempre ser descompuesto unívocamente dentro de un número de componentes fuertemente conectados, el cual es el sub-grafo dirigido más grande fuertemente conectado, en el sentido que siempre que un nodo extra es añadido al tal sub-grafo dirigido, éste no será más fuertemente conectado.

Correspondiente a la descomposición de el grafo dirigido en un número de componentes fuertemente conectado, las ecuaciones del sistema (1) pueden ser escritas como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{N^*} B_i^* u_i^*(t) \quad (\text{B.11a})$$

$$y_i^*(t) = C_i^*(t), \quad (i = 1, \dots, N^*) \quad (\text{B.11b})$$

donde  $N^*$  denota el número de componentes fuertemente conectado de el sistema (1),  $u_i^*(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  y  $y_i^*(t) \in \mathbb{R}^{r_i}$  denota los vectores de la entrada y la salida consistentes de todos las entradas y salidas en el  $i$ -ésimo componente fuertemente conectado, respectivamente, con  $B_i^*$  y  $C_i^*$  las matrices de entrada y salida correspondientes.

Entonces el sistema de control descentralizado (3.40) con  $N^*$  estaciones de control es llamado un sistema cuociente del sistema (3.30).

Se denotará a  $\Lambda^*$  como el conjunto de modos fijos del sistema cuociente (3.1), es decir

$$\Lambda^* = \bigcap_{K_i^* \in R^{m_i \times r_i}} \sigma \left( A + \sum_{i=1}^{N^*} B_i^* K_i^* C_i^* \right) \quad (\text{B.12})$$

donde nuevamente  $\sigma(\cdot)$  denota el conjunto de valores propios de la matriz  $A + \sum_{i=1}^{N^*} B_i^* K_i^* C_i^*$  y

la intersección toma valores sobre todas las matrices  $K_i^* \in R^{m_i \times r_i}$ .

Es claro que los modos fijos del sistema (2.1) son subconjuntos del conjunto de modos fijos del sistema (1), es decir  $\Lambda^* \subset \Lambda$ .

### Teorema 3.3

Dado un sistema (1) existe un controlador descentralizado para este sistema tal que, el sistema de lazo cerrado es estable si y sólo si el sistema (2.1) no tiene modos fijos para el sistema cociente, es decir  $\Lambda^* \subset \mathbb{C}^-$ .

Demostración en Gong y Aldeen (1997)



# Anexo C

## C.1 Lógica difusa

La lógica difusa define un conjunto difuso  $A$  cuyos elementos pertenecen a un universo  $X$  como el conjunto de pares ordenados  $A = [(x, \mu_A(x)) / x \in X]$  donde  $\mu_A(x)$  se denomina función de pertenencia del conjunto difuso  $A$ . La función de pertenencia asigna a cada elemento de  $X$  un grado de membresía entre 0 y 1. Las funciones de pertenencia comúnmente utilizadas son del tipo triangular, trapezoidal y gaussiana. En base a esta definición, un sistema difuso corresponde a un conjunto de reglas de la forma

$$\text{Si } x_1 \text{ es } A_1 \text{ y } x_2 \text{ es } A_2 \text{ entonces } y \text{ es } C \quad (\text{C.1})$$

en donde  $A_1$ ,  $A_2$  y  $C$  son conjuntos difusos.

La figura 4 muestra la estructura de un sistema experto difuso, utilizado por ejemplo para propósitos de control, en el cual  $x(k)$  representa un vector de entradas de componentes  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  e  $y(k)$  representa la salida. La Base de Conocimientos contiene las reglas del sistema experto y el Motor de Inferencia determine la secuencia en que estas se procesan. La Interfaz de Fusificación transforma las variables de entrada convencionales (variables crisp) en variables difusas. La Interfaz de Defusificación determina las variables

manipuladas a partir del conjuntos difusos de salida (Mamdani, 1974). En nuestro estudio utilizaremos, como en la mayoría de de los casos, la lógica definida por Zadeh para procesar las reglas y el método del centro de gravedad para la defusificación (Zadeh, 1973, Babuska, 1998).

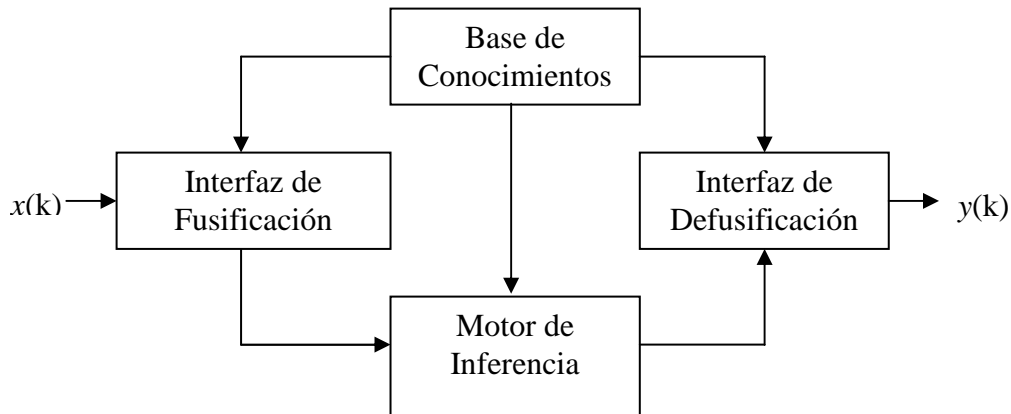


Figura 1. Estructura de un sistema difuso

## C.2 PSO con convergencia garantizada

En este trabajo se utilizó un nuevo algoritmo PSO, llamado optimizador con enjambres de partículas con convergencia garantizada (*Guaranteed Convergence Particle Swarm Optimiser*, GCPSO, van den Bergh y Engelbrecht, (2002)) el cual asegura convergencia local y evitando la convergencia prematura típica del algoritmo original.

Para esto un nuevo parámetro es introducido en el algoritmo PSO. Dado  $\tau$  el índice de la mejor partícula global, eso es  $\vec{y}_\tau = \vec{y}^*$  sólo para este índice se agrega una nueva conformación de la velocidad.

$$v_{\tau,j}(t+1) = -x_{\tau,j}(t) + y_j^*(t) + wv_{\tau,j}(t) + \rho(t)(1 - 2r_{2,j}(t)) \quad (C.2)$$

donde  $\rho(t)$  es un factor de escala definido como

$$\rho(t+1) = \begin{cases} 2\rho(t) & \text{si } \# \text{éxitos} > Sc \\ 0.5\rho(t) & \text{si } \# \text{fallos} > fc \\ \rho(t) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

donde en término  $\# \text{fallos}$  y  $\# \text{éxitos}$  denotan el número consecutivo de fallos o éxitos, respectivamente, donde un fallo es definido como  $f(\bar{y}(t)) = f(\bar{y}(t-1))$ , y con  $fc=5$ ,  $Sc=1.5$ .

# Anexo D

En las tablas D1 y D2 se presenta el número de pasajeros (personas) afectadas por la estrategia de *holding* en las cinco diversas opciones definidas en la formulación (30 [s], 60 [s], 90 [s]) y el número de veces que los pasajeros se vieron afectados por tales estrategias, y para los mismos dos y cinco horizontes de predicción presentados en el texto. Así mismo, las dos últimas columnas en las tablas D1 y D2 muestran idénticas estadísticas, pero asociadas con la estrategia de *stop-skipping*.

Tabla D1. Pasajeros afectados por las acciones de *holding* y *stop-skipping* utilizando HPC-MO. Horizonte de predicción  $Np = 2$

Casos		<i>Holding</i> 30[s]		<i>Holding</i> 60[s]		<i>Holding</i> 90[s]		<i>Stop-skipping</i>	
		Pas.	Número	Pas.	Número	Pas.	Número	Pas.	Número
1	media	9.47	1.70	1.52	2	3.05	13.94	119.29	73.29
	desv.	8.19	1.57	2.42	1.41	3.79	2.10	92.26	12.71
2	media	8.00	2.52	0.12	1.70	0.89	10.05	111.53	78.58
	desv.	6.74	1.66	0.43	1.64	0.98	1.88	64.12	14.44
3	media	12.00	6.35	1.11	2.47	0.45	9.29	92.88	78.29
	desv.	9.65	2.17	2.78	1.46	0.34	2.33	56.68	9.36
4	media	6.64	2.41	2.70	6.47	0.23	8.70	93.88	66.52
	desv.	8.01	1.54	2.28	2.06	0.75	2.46	74.66	15.87
5	media	6.29	2.70	0.13	1.64	0.88	9.52	101.18	73.00
	desv.	5.15	1.44	0.13	1.36	0.85	1.97	57.98	15.56

Tabla D2. Pasajeros afectados por las acciones de *holding* y *stop-skipping* utilizando HPC-MO. Horizonte de predicción  $Np = 5$

Casos		<i>Holding</i> 30[s]		<i>Holding</i> 60[s]		<i>Holding</i> 90[s]		<i>Stop-skipping</i>	
		Pas.	Número	Pas.	Número	Pas.	Número	Pas.	Número
1	media	10.76	3.82	0.941	3.11	4.47	11.35	97.35	99.64
	desv.	9.33	1.33	2.56	1.45	4.40	2.52	36.91	9.00
2	media	10.64	3.88	0.74	3.11	3.64	7.64	159.06	60.35
	desv.	8.63	2.11	0.86	1.53	0.74	2.28	67.83	9.80
3	media	9.05	7.52	0.93	3.41	0.96	6.05	110.18	58.00
	desv.	6.49	2.06	0.66	1.73	0.78	2.07	57.60	11.97
4	media	8.82	4.05	4.29	6.35	0.10	7.58	27.29	38.88
	desv.	6.66	1.56	7.50	1.69	0.12	1.73	22.47	8.12
5	media	10.11	2.88	0.12	2.82	0.87	8.52	50.58	10.76
	desv.	6.09	1.40	0.46	1.46	0.74	1.73	36.94	6.30

# Anexo E

En Riquelme, (2007), la función objetivo propuesta para minimización, en un sistema de dos recorridos fijos con una estación de transbordo es:

$$\underset{\{u(k), \dots, u(k+Np-1)\}}{\text{Min}} J = J_1 + \eta J_2 \quad (\text{E.1})$$

donde  $\eta$  corresponde a un factor que pondera la importancia entre optimizar recorridos por separado ( $J_1$ ) y optimizar la minimización de tiempos de espera en la estación de transbordo ( $J_2$ ) con

$$J_1 = \sum_{\ell=1}^{Np} \left[ \theta_1 \cdot \hat{H}_i(k+\ell) \hat{\Gamma}(k+\ell) + \theta_2 \cdot (\hat{H}_i(k+\ell) - \bar{H})^2 + \theta_3 \cdot \hat{L}_i(k+\ell) h_i(k+\ell-1) + \theta_4 \cdot \hat{\Gamma}(k+\ell) \hat{H}_{i+1}(k+\ell+z) (1 - Su_i(k+\ell-1)) \right] \Big|_{i=i(k+\ell)} \quad (\text{E.2})$$

$$J_2 = \sum_{\ell=1}^{Np} \left[ \gamma(k+\ell) \left[ n_{1i}(k+\ell) \cdot w_1(k+\ell)^2 + n_{2i'}(k'+\ell') \cdot w_2(k'+\ell')^2 \right] \right] \Big|_{i=i(k+\ell) \wedge i'=i'(k'+\ell')} \quad (\text{E.3})$$

con

$$\gamma(k+\ell) = \begin{cases} 1 & \text{Si se arribó a una estación de transferencia del sistema 1} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

El término  $\gamma(k + \ell)$  se activa exclusivamente al arribar a una estación del sistema de referencia (sistema 1).

La función objetivo  $J_1$  debe ser evaluada para cada bus  $i$  de cada ruta del sistema y  $J_2$  para cada bus  $i$  que arribe a la estación de transbordo.

Si  $t_k$ , que corresponde al tiempo estimado de llegada a la estación de transferencia del bus  $i$  del recorrido 1. Así,  $t_{k'}$  es el tiempo estimado para la llegada el bus del recorrido 2 a la estación de transferencia instantes después.

La ecuación (9.9) define al tiempo estimado de salida del bus  $i$  del recorrido 1 que llegó en el instante  $k$  :

$$\hat{Td}_i(k + \ell) = t_k + h_i(k) + h_{Ti}(k) + Tr_i(k) \quad (E.5)$$

donde  $Tr_i(k)$  es el tiempo asociado transferencia de pasajeros del bus  $i$  cuando llega a un paradero en el instante  $k$ ,  $h_i(k)$  es el tiempo asociado a la acción de *holding* en la parada en la cual se encuentra el bus  $i$  en el instante  $k$  ( $i$  puede ser cualquier paradero habilitado para la acción de *holding*). Por último, el término  $h_{Ti}(k)$  corresponde a la acción de *holding* únicamente aplicada a la estación de transbordo.

Análogamente, para el bus del recorrido 2 se tiene la siguiente función:

$$\hat{Td}_{i'}(k' + \ell') = t_{k'} + h_{i'}(k') + h_{Ti'}(k') + Tr_{i'}(k') \quad (E.6)$$

La ecuación (9.10) representa el tiempo estimado de salida para el bus  $i'$  del recorrido 2 que llegó en el instante  $k' + \ell'$  a esta estación de transbordo. De acuerdo a esta notación, si un bus no alcanza a llegar antes de que se vaya el de la línea contraria, se deberá esperar más tiempo, tiempo entre que llegue el bus siguiente, para cada sistema  $t_{k+z}$  y  $t_{k'+z'}$  que

posteriormente parten en  $\hat{T}d_{i+1}(k+z+m)$  y  $\hat{T}d_{i'+1}(k'+z'+m')$ ; estos serán los tiempos de salida estimados de los buses siguientes en la estación de transferencia, es decir los buses  $i+1$  e  $i'+1$ . Luego la función de espera para una predicción a un paso queda definida según los siguientes casos:

Caso 1: El bus del recorrido 1 llega primero y se alcanza a encontrar con el bus del recorrido 2 en la estación de transferencia.

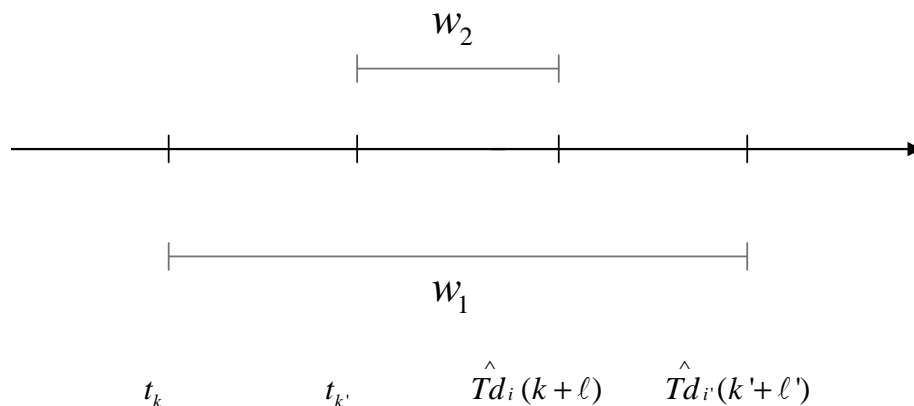


Figura E.1: Línea de tiempo para caso 1

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \hat{T}d_{i'}(k'+l') - t_k & \text{si } t_k \leq t_{k'} \\
 w_2 &= \hat{T}d_i(k+l) - t_{k'} & t_{k'} \leq \hat{T}d_i(k+l)
 \end{aligned}
 \tag{E.7}$$

Caso 2: El bus del recorrido 2 llega primero y se alcanza a encontrar con el bus del recorrido 1 en la estación de transferencia.

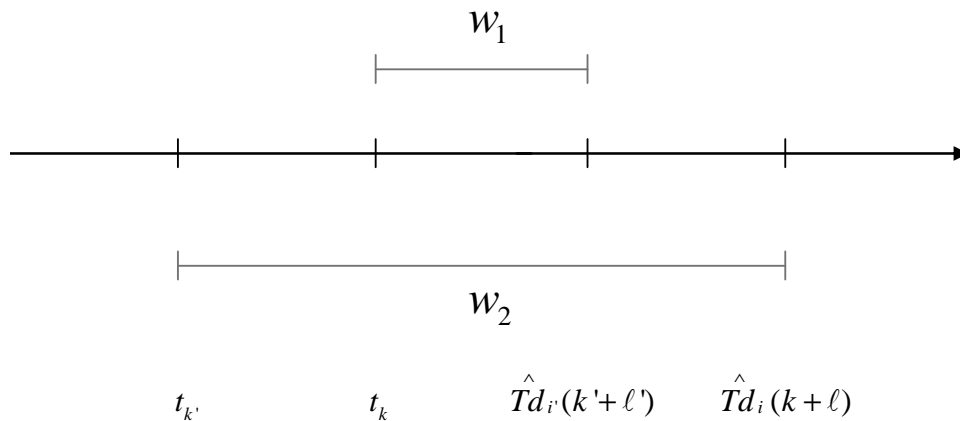


Figura E.2: Línea de tiempo para caso 2



$$\begin{aligned}
 w_1 &= \hat{Td}_{i'}(k'+\ell') - t_k & \text{si } t_{k'} &\leq t_k \\
 w_2 &= \hat{Td}_i(k+\ell) - t_{k'} & t_k &\leq \hat{Td}_{i'}(k'+\ell')
 \end{aligned}
 \tag{E.8}$$

Caso 3: El bus del recorrido 1 llega primero pero parte antes de que llegue el bus del recorrido 2.

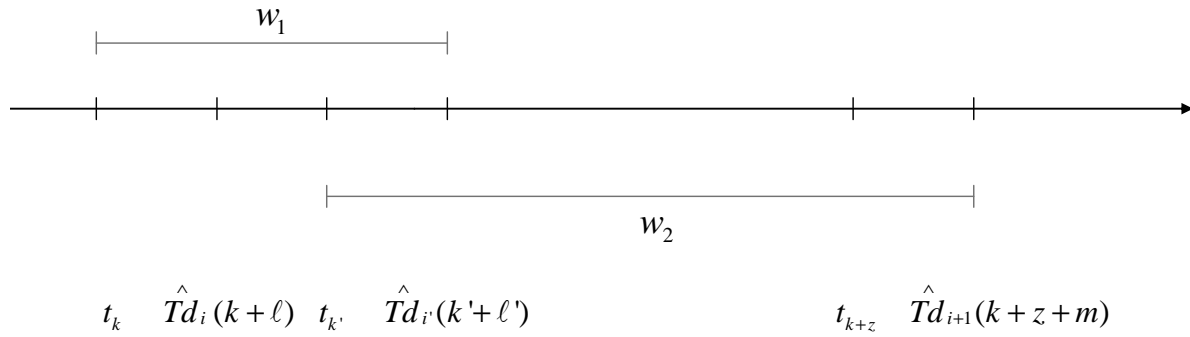


Figura E.3: Línea de tiempo caso 3

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \hat{Td}_{i'}(k'+\ell') - t_k & \text{si } t_k &\leq t_{k'} \\
 w_2 &= \hat{Td}_{i+1}(k+z+m) - t_{k'} & t_{k'} &\geq \hat{Td}_i(k+\ell)
 \end{aligned}
 \tag{E.9}$$

Caso 4: El bus del recorrido 2 llega primero pero parte antes de que llegue el bus del recorrido 1.

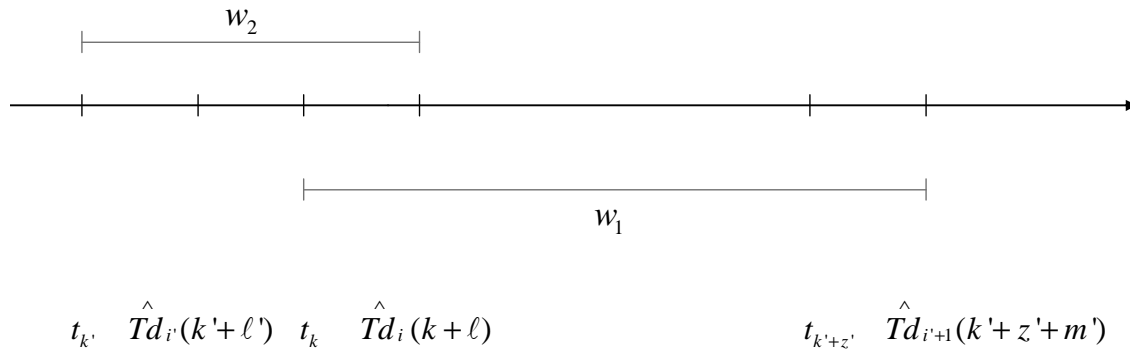


Figura E.4: Línea de tiempo caso 4

$$\begin{aligned}
w_1 &= \hat{T}d_{i'+1}(k' + \ell' + m') - t_k & \text{si } t_{k'} \leq t_k \\
w_2 &= \hat{T}d_i(k + \ell) - t_{k'} & t_k \geq \hat{T}d_{i'}(k' + \ell')
\end{aligned}
\tag{E.10}$$

Respecto de la función a minimizar,  $n_k^1$  corresponde a los pasajeros que están realizando el transbordo desde la línea 1 a la 2 y  $n_k^2$  el transbordo de la línea 2 a la 1. Finalmente  $D_k^1(T)$  y  $D_k^2(T)$  es el promedio de desutilidad para cada línea, que corresponde a la varianza del tiempo de espera, es decir  $D_k^1(T) = (w_1)^2$  y  $D_k^2(T) = (w_2)^2$  con  $k$  número de evento.

Así, la función a minimizar será

$$C(T) = \sum_{k=1}^N (n_k^1 \cdot D_k^1(T) + n_k^2 \cdot D_k^2(T))
\tag{E.11}$$

También se podría sumar un cierto tiempo constante que es el que pierde el pasajero haciendo la combinación de estaciones, pero en este modelo se considerará despreciable.