



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA**

**DISEÑO DE ESTRATEGIAS DE CONTROL SUPERVISOR PREDICTIVO
HIBRIDO PARA UNA PLANTA TERMoeLECTRICA DE CICLO
COMBINADO**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERIA, MENCIÓN ELECTRICA**

FREDDY MATIAS MILLA NANJARI

**PROFESOR GUIA:
DORIS SAEZ HUEICHAPAN**

**MIEMBROS DE LA COMISION:
LUIS VARGAS DIAZ
DANIEL SBARBARO HOFER**

**SANTIAGO DE CHILE
ENERO, 2007**

DISEÑO DE ESTRATEGIAS DE CONTROL SUPERVISOR PREDICTIVO HIBRIDO PARA UNA PLANTA TERMOELECTRICA DE CICLO COMBINADO

Los sistemas híbridos corresponden a un área de investigación que requiere de las ciencias de la computación, la ingeniería de control y las matemáticas aplicadas. La investigación en control de sistemas híbridos ha sido motivada por una variedad de aplicaciones dentro de las cuales destacan el manejo de tráfico aéreo, control automotriz, control de procesos en plantas químicas y control de plantas termoeléctricas. Un sistema híbrido corresponde a un conjunto de subsistemas que se comunican e interactúan entre ellos en respuesta a las órdenes generadas por eventos discretos.

En las plantas termoeléctricas de ciclo combinado existen diferentes elementos híbridos. En particular, el sistema regulatorio de la turbina a gas incluye un conmutador que selecciona la menor de tres señales de flujo de combustible relacionadas con la temperatura, potencia y frecuencia de eje de la planta. Este elemento puede ser modelado a través de una variable de estado cuantizada (híbrida).

Por lo tanto, el diseño e implementación de una estrategia de control supervisor predictivo híbrido en una central termoeléctrica de ciclo combinado es un tema de interés que además permite establecer las ventajas de la modelación de variables híbridas en su diseño.

Este sistema de control supervisor propuesto permite mejorar el funcionamiento del nivel regulatorio y optimización económica a través de la modificación dinámica de los set-points o referencias, manteniendo fijo todo el sistema regulatorio del proceso.

El trabajo contribuye principalmente en el diseño y desarrollo de un controlador supervisor predictivo híbrido para sistemas multivariables con variables de estado cuantizadas. En particular, se aplicó a la optimización económica y regulatoria de una planta termoeléctrica de ciclo combinado.

A continuación, se destacan los logros alcanzados en este trabajo:

- Diseño y desarrollo de un modelo híbrido MLD (“Mixed logical dynamical”) multivariable para la turbina a gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado, que incluye sus variables continuas y cuantizadas.
- Diseño e implementación de un controlador supervisor predictivo híbrido para la turbina a gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado, obteniéndose beneficios económicos de un 3%. El problema de optimización se resolvió en forma novedosa por medio de dos niveles: optimización basada en algoritmos genéticos y un nivel secundario basado en programación cuadrática.
- Integración de los controladores predictivos supervisores desarrollados en el sistema completo de la central termoeléctrica de ciclo combinado obteniéndose un ahorro de combustible en la caldera del 3.4% y mejoras en la regulación de la central completa.
- Análisis de estabilidad para una estrategia de control supervisor predictivo híbrido basado en algoritmos genéticos con función objetivo regulatoria.

- Análisis de factibilidad de la solución del problema de control supervisor predictivo híbrido en la turbina a gas con una ley de control realimentado a tramos sobre una partición poliédrica del espacio de estados.

Índice General

I. Introducción	10
1.1. Objetivos:	11
1.2. Metodología.....	12
1.3. Resultados esperados.....	13
II. Sistemas Híbridos	14
2.1 Modelos híbridos Tipo I	15
2.1.1. Máquina de estados finitos	15
2.1.2 Sistemas conmutados (Switching system).....	17
2.1.3. Redes de Petri	17
2.2 Modelos híbridos Tipo II.....	19
2.2.1 Sistemas lineales con dinámicas mezcladas ("Mixed Logical Dynamical Systems", MLD).....	19
2.2.2 Sistemas lineales a tramos ("Piece Wise Affine", PWA).....	20
2.2.3 Sistemas Lineales Complementarios ("Linear Complementary (LC) Systems") ...	21
2.2.4 Min – Max –plus –Scaling (MMPS) Systems	22
2.3. Equivalencia entre los modelos Tipo II.....	23
2.4 Control Predictivo Híbrido	25
2.4.1 Control Predictivo de sistemas MLD	25
2.4.2 Control Predictivo de sistemas PWA	26
2.4.3 Control predictivo con programación multiparamétrica	27

III. Plantas termoeléctricas de Ciclo Combinado.....	29
3.1. Plantas térmicas de ciclo combinado.....	30
3.2 Funcionamiento general	31
3.2.1. Sistemas de control de plantas de ciclo combinado	33
3.2.2. Principales lazos de control	34
3.3 Simulador de una Central Termoeléctrica de Ciclo Combinado.....	34
3.3.1. Turbina a vapor de una central térmica de ciclo combinado.....	35
3.3.2. Caldera de una central térmica de ciclo combinado.....	37
3.3.3. Turbina a gas de una central térmica de ciclo combinado.....	39
3.4 Implementación en Matlab-SIMULINK	42
IV. Sistema de Control predictivo supervisor híbrido.	44
4.1. Planteamiento del problema	46
4.2 Componentes del sistema de control predictivo supervisor híbrido.....	47
4.2.1 Función objetivo general	47
4.2.2 Modelo del nivel regulatorio	47
4.2.3 Restricciones generales.....	48
4.2.4 Modelo del proceso	48
4.2.5 Optimización	49
V. Aplicación a la Turbina a Gas de una Central Termoeléctrica de Ciclo Combinado.	51
5.1. Modelación multivariable de la Turbina a Gas	52
5.2. Modelación del sistema regulatorio de la turbina gas	53
5.2.1 Sección lineal del sistema regulatorio	54
5.2.2 Sección no lineal del sistema regulatorio	57
5.3. Diseño de estrategia de control predictivo supervisor híbrido para la turbina a gas:	
Enfoque 1.....	59
5.3.1. Controlador predictivo supervisor multivariable convencional (Solución 1 MPC1)	
.....	61
5.3.2. Controlador predictivo supervisor híbrido simple multivariable con elección de la	
variable manipulada (Solución 1 HPC-S1).	62
5.3.3 Control predictivo supervisor multivariable híbrido: Solución con algoritmo	
genético (Solución 1 HPC-GA1).....	65
5.3.4 Implementación en MATLAB simulink del control predictivo supervisor	67
5.3.5 Implementación de los controladores predictivos supervisores diseñados con	
función objetivo con características sólo regulatorias y conmutador con selección de tres	
señales u_a , u_b y u_c	68
5.3.6 Análisis de datos.....	74
5.4 Diseño de estrategia de control predictivo supervisor híbrido para la turbina a gas:	
Enfoque 2.....	76
5.4.1 Planteamiento del problema de optimización.....	76
5.4.10 Análisis de datos.....	97
5.4.2. Controlador predictivo supervisor multivariable convencional (MPC)	79
5.4.3. Controlador predictivo supervisor híbrido simple multivariable con elección de la	
variable manipulada (HPC-S).....	80

5.4.4 Controlador predictivo supervisor multivariable híbrido: Solución con enumeración explícita (HPC-EE).....	82
5.4.5 Controlador predictivo supervisor multivariable híbrido: Solución con algoritmo genético (HPC-GA)	83
5.4.6. Base de comparación: Control regulatorio con set-point óptimo estático.....	84
5.4.7 Implementación de los controladores predictivos supervisores diseñados con función objetivo con características sólo regulatorias y conmutador con selección de dos señales u_a y u_b	86
5.4.8 Implementación de los controladores predictivos supervisores diseñados con función objetivo con características económicas y regulatorias y conmutador con selección de dos señales u_a y u_b	89
5.5 Discusión	98
VI. Efectos de la estrategia de control predictivo supervisor para la planta termoeléctrica completa	99
6.1 Efectos de las estrategias de control predictivo supervisor híbridas diseñadas para la turbina gas sobre la CCC.....	101
6.1.1 Implementación en MATLAB simulink.....	102
6.1.3 Efectos en la Caldera	105
6.1.4 Efectos en la Turbina a Vapor	107
6.1.5 Efectos en la salida de la CCC.....	109
6.1.6 Análisis de datos	111
6.2 Efectos de las estrategias de control predictivo supervisor híbridas diseñadas para la turbina gas y una estrategia de control supervisor lineal para la Caldera.....	113
6.2.1 Diseño de un control supervisor predictivo lineal con característica económicas y regulatorias para la Caldera	113
6.2.2 Implementación en MATLAB simulink.....	117
6.2.3 Efectos en la Turbina a Gas.....	118
6.2.4 Efectos en la Caldera	120
6.2.5 Efectos en la Turbina a Vapor	122
6.2.6 Efectos en la salida de la CCC.....	124
6.2.7 Análisis de datos	126
6.3 Efectos de las estrategias de control predictivo supervisor híbridas diseñadas para la turbina gas y de los controladores predictivos supervisores lineales para la Caldera y la Turbina a vapor.....	129
6.3.1 Diseño de un control supervisor predictivo lineal con característica económicas y regulatorias para la Turbina a Vapor	130
6.3.2 Implementación en MATLAB simulink.....	133
6.3.3 Efectos en la Turbina a Gas.....	134
6.3.4 Efectos en la Caldera	136
6.3.5 Efectos en la Turbina a Vapor	138
6.3.6 Efectos en la salida de la CCC.....	140
6.4 Discusión	145

VII. Análisis de estabilidad del control predictivo con restricciones.....	146
7.1. Análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado con control predictivo con restricciones	147
7.1.1. Estabilidad de Lyapunov	149
7.1.2. Estabilidad asintótica de Lyapunov.....	150
7.1.3. Estabilidad de sistemas autónomos con restricciones	151
7.1.4. Estabilidad de sistemas no autónomos: funciones de Lyapunov de control.....	151
7.1.5. Teoría de conjuntos invariantes.....	153
7.1.6. Estabilidad del MPC con restricciones.....	155
7.1.7. El problema de la estabilidad: optimalidad no implica estabilidad.....	156
7.1.8. Formulación general del MPC: necesidad de la región terminal y el coste terminal	158
7.1.9. Cálculo general de la región terminal y una función de Lyapunov asociada.	160
7.2. Condiciones de estabilización para el control MPC de un sistema híbrido con restricciones	161
7.2.1. Condiciones de estabilidad basadas en un sistema LMI.....	163
7.3. Ejemplos de análisis de estabilidad	168
7.3.1. Control predictivo supervisor híbrido	172
7.3.1. MPC sobre planta con modelo PWA.....	168
7.3.2. Análisis de estabilidad en el control predictivo supervisor híbrido (sólo con características regulatorias) en la turbina a gas de una central térmica de ciclo combinado.	176
7.4. Discusión	183
VIII. Análisis de factibilidad de diseño de control predictivo supervisor híbrido usando ley de control PWA	184
8.1. Programación multiparamétrica	185
8.1.1. Programación lineal multiparamétrica	185
8.1.2. Programación cuadrática multiparamétrica.....	192
8.1.3. Solución del problema de control óptimo en tiempo finito con programación multiparamétrica.....	194
8.1.4. Problema estándar de control óptimo	196
8.1.5. Problema del regulador lineal cuadrático de tiempo infinito	196
8.1.6. Problema de control óptimo resuelto con ley de control PWA	197
8.1.7. Sistemas variantes en el tiempo.....	200
8.1.8. Control óptimo para sistemas híbridos con restricciones	200
8.2. Diseño de control predictivo supervisor híbrido utilizando PWA.	204
8.2.1. Ejemplo de solución de control supervisor utilizando MPT.	204
8.2.2. Ejemplo de solución de control supervisor utilizando MPT para planta con características híbridas.....	210
8.3. Discusión	213
IX. Conclusiones.	214
Bibliografía.....	216
Apéndice A1	221

Apéndice A2	225
Apéndice B1 (Modelación difusa)	230
B1.1. Modelo difuso de Takagi & Sugeno	230
B1.2. Método de identificación general.....	232
B1.3. Identificación de la estructura de premisas e inicialización de parámetros.....	234
B1.4. Identificación de variables de entrada relevantes	237
Apéndice B2 (Control predictivo supervisor basado en algoritmos genéticos para la turbina gas de una central térmica de ciclo combinado)	240
B2.1. Diseño de control predictivo supervisor de la turbina gas	241
B2.1.1. Modelo Lineal	242
B2.1.2. Modelo difuso Takagi & Sugeno	243
B2.1.3. Modelo de Análisis	245
B2.1.4. Nivel Regulatorio.....	245
B2.1.5. Control Supervisor Lineal.....	246
B2.2. Control Predictivo Difuso Basado en Algoritmo Genético	246
B2.2.1. Controlador Supervisor Difuso	246
B2.2.2. Datos de simulación.....	247
B2.2.3. Controladores Supervisores	248
B2.2.4. Análisis comparativo.	250
Apéndice C	252
Apéndice D	255
Apéndice E	258
Apéndice F	263
Apéndice G	285
Apéndice H	288

I. Introducción

Los sistemas híbridos corresponden a un área de amplio espectro que emerge durante los comienzos de la década de los noventa (David, 1992) y comprende las ciencias de la computación, la ingeniería de control y las matemáticas aplicadas. La investigación en el área de los sistemas híbridos ha sido motivada por una variedad de aplicaciones dentro de las cuales destacan el manejo de tráfico aéreo, control de centrales termoeléctricas, control automotriz, software integrado, control de procesos, manufactura y otras áreas.

Un sistema híbrido corresponde a un modelo matemático capaz de representar cierto sistemas físicos complejos, constituido por un conjunto de subsistemas que se comunican e interactúan entre ellos en respuesta a las ordenes generadas por eventos discretos (Alur, 1995).

La importancia actual del modelamiento y control de procesos híbridos (Morari, 2002) motivan este trabajo para profundizar en el tema y lograr diferentes implementaciones de un control predictivo híbrido y realizar un análisis comparativo significativo en esta temática.

1.1. Objetivos:

El objetivo del presente trabajo es contribuir al diseño y desarrollo de un controlador supervisor predictivo híbrido para sistemas multivariables con variables de estado cuantizadas. En particular, se considera su aplicación a la optimización económica y regulatoria de una planta termoeléctrica de ciclo combinado.

Los objetivos específicos son:

- Diseño y desarrollo de un modelo híbrido MLD (“Mixed logical dynamical”) multivariable para la turbina a gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado, que incluye sus variables continuas y cuantizadas.
- Diseño e implementación de un controlador supervisor predictivo híbrido para la turbina a gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado, obteniéndose beneficios económicos de un 3%. El problema de optimización se resolvió en forma novedosa por medio de dos niveles: optimización basada en algoritmos genéticos y un nivel secundario basado en programación cuadrática.
- Integración de los controladores predictivos supervisores desarrollados en el sistema completo de la central termoeléctrica de ciclo combinado obteniéndose un ahorro de combustible en la caldera del 3.4% y mejoras en la regulación de la central completa.
- Análisis de factibilidad de la solución del problema de control supervisor predictivo híbrido en la turbina a gas con una ley de control realimentado a tramos sobre una partición poliédrica del espacio de estados.
- Análisis de estabilidad para una estrategia de control supervisor predictivo híbrido basado en algoritmos genéticos con función objetivo regulatoria.

1.2. Metodología

El trabajo se realizó sobre un simulador fenomenológico de una central termoeléctrica de ciclo combinado, programado en Matlab-Simulink que incluye características no lineales, dinámicas e híbridas.

En este trabajo se optimiza el funcionamiento de la turbina a gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado, del punto de vista regulatorio y económico. Para esto, se diseñó un nivel supervisor que entrega un set-point óptimo dinámico al sistema regulatorio tradicional para la turbina a gas incluyendo variables de estado cuantizadas (híbridas).

En una primera etapa se diseñó y se desarrolló un controlador supervisor predictivo lineal convencional para la turbina a gas, que considera un sistema regulatorio simplificado para utilizarlo como patrón de comparación en la evaluación de los controladores supervisores predictivos híbridos propuestos a continuación.

En una segunda etapa, se diseñó y se desarrolló un controlador supervisor predictivo lineal para la turbina a gas, que incluye un sistema regulatorio más completo y su solución se basa en la elección explícita de la variable manipulada, resolviendo dos problemas de optimización cuadrática resultantes en cada instante.

En una tercera etapa se diseñó y se desarrolló un controlador supervisor predictivo lineal para la turbina a gas, que considera el modelamiento completo del sistema regulatorio híbrido MLD, es decir considera sus variables lógicas y las correspondientes ecuaciones que representen sus características híbridas. Luego se propuso, en forma novedosa, una solución del problema de optimización con algoritmos genéticos. Además, se comparó esta nueva propuesta con una solución por enumeración explícita.

En una cuarta etapa, se integraron los controladores supervisores propuestos al proceso completo de la central termoeléctrica de ciclo combinado y se analizaron sus efectos, sus beneficios tanto regulatorios como económicos.

En una quinta etapa, para verificar la factibilidad de una solución con optimización multiparamétrica del problema de control supervisor predictivo híbrido en la turbina a gas, se desarrollaron modelos simplificados en variables de estado que reúnen las características más relevantes de los modelos híbridos principales. Utilizando el algoritmo de control multiparamétrico, se aplicó al sistema y se analizaron sus resultados.

Por último, se analizó la estabilidad de una estrategia de control supervisor predictivo híbrido genético con función objetivo regulatoria considerando modelos híbridos simplificados, para luego extenderlo a la turbina a gas utilizando el algoritmo para trabajar con conjuntos invariantes (Kerrigan, 2000).

1.3. Resultados esperados

Se esperan mejoras desde el punto de vista regulatorio y económico de cada implementación de los controladores supervisores predictivos multivariable con respecto a los controladores tradicionales (estrategia de control convencional Proporcional Integral).

Se espera que los controladores predictivos multivariables híbridos muestren claras mejoras cuantitativas basadas en un índice económico-regulatorio con respecto a los controladores predictivos supervisores, que no incluyen caracterización híbrida. Estas mejoras serán evaluadas, específicamente, en cuanto a ahorro de combustible.

Además, la utilización de algoritmos genéticos en la resolución de los controladores híbridos debiese generar soluciones satisfactorias en tiempos computacionales adecuados para la planta de ciclo combinado.

Se espera determinar los elementos básicos en la elaboración de soluciones para el controlador supervisor predictivo híbrido por medio de la teoría de optimización multiparamétrica. Del mismo modo se espera recopilar la información necesaria para implementar una demostración de estabilidad del controlador mencionado.

II. Sistemas Híbridos

En este apartado se definen y describen en forma breve los distintos ámbitos de interés que componen el área del modelamiento y control de los sistemas híbridos.

Los sistemas híbridos se han modelado de distintas formas: como un grafo de transición de estados (con dinámica continua dentro de cada estado) que denominaremos modelos Tipo I o bien como un conjunto de ecuaciones diferenciales, o en diferencias, con variables discretas denominado Tipo II.

Luego en este apartado se presentan:

Modelos híbridos Tipo I

- Máquina de estados finitos.
- Redes de Petri.
- Sistemas conmutados.

Modelos híbridos Tipo II

- Sistemas lineales con dinámicas mezcladas ("Mixed Logical Dynamical Systems", MLD)
- Sistemas lineales afines a trozos PWA ("Piece Wise Affine").
- Sistemas lineales complementarios ("Linear Complementary (LC) Systems").

- Min – Max –plus –Scaling (MMPS) Systems.

Además en este capítulo se introduce en la teoría de Control Predictivo Híbrido y las formulaciones que se utilizarán en este trabajo

- Control predictivo de sistemas MLD (“Mixed logical dynamical”).
- Control predictivo de sistemas PWA.
- Control predictivo con programación multiparamétrica.

2.1. Modelos híbridos Tipo I

2.1.1. Máquina de estados finitos

Una máquina de estados finitos es un modelo utilizado cuando la cantidad de estados posibles que puede asumir el sistema es finita. Una máquina de estados finitos o máquina secuencialmente completa $M = \langle A, S, Z, f, g \rangle$ o $M = \langle A, S, Z, q_0, f, g \rangle$ consta de:

- Un conjunto finito A de símbolos de entrada.
- Un conjunto finito S de estados internos.
- Un conjunto finito Z de símbolos de salida.
- Una función de próximo estado $f: S \times A \rightarrow S$.
- Una función de salida $g: S \times A \rightarrow Z$.
- Opcionalmente, un estado inicial q_0 .

La función f permite determinar el nuevo estado q_k que la máquina asumirá cuando estando en el estado q_i reciba la entrada a_j ; esto es:

$$f(q_i, a_j) = q_k \quad (2.1)$$

La función g permite determinar la salida z_r que la máquina producirá cuando estando en el estado q_i reciba la entrada a_j ; esto es:

$$g(q_i, a_j) = z_r \quad (2.2)$$

Otra forma de representar una máquina de estados finitos es a través un grafo orientado rotulado denominado *diagrama de estado*. En el mismo, los nodos representan a los estados, los rótulos en los orígenes de los arcos representan a las entradas, los arcos representan a la función f , y los rótulos de los arcos representan a la función g . Por ejemplo, la Figura 2.1 se muestra el diagrama de estado de una máquina cuyos conjuntos son $A =$

$\{a, b\}$, $S = \{q_0, q_1, q_2\}$, y $Z = \{x, y, z\}$ y estado inicial q_0 (indicado por el arco que no tiene nodo de origen).

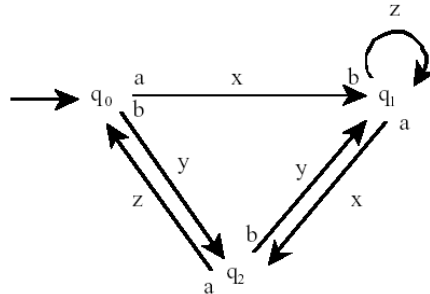


Figura 2.1 Diagrama de estado

Una representación alternativa es la *tabla de estado* (ver Tabla 2.1). La cual es una tabla de doble entrada, en las filas están los estados mientras que en las columnas están las entradas. En la celda (i,j) se encuentran el nuevo estado y la salida de la máquina cuando estando en el estado i se aplica la entrada j . El estado inicial se indica por separado o haciendo una marca en la tabla.

	a	b
q_0	q_1, x	q_2, y
q_1	q_2, x	q_1, z
q_2	q_0, z	q_1, y

Tabla 2.1 Tabla de estado

Una de las propuestas más extendidas que se pueden encontrar en el área de los sistemas híbridos es el autómata híbrido (Alur, 1995), (Alur, 2000). Un autómata híbrido es una máquina de estados finitos equipada con un conjunto de variables de valores reales.

Cada estado del autómata representa un comportamiento continuo del sistema, y las transiciones entre estados se representan mediante eventos o condiciones. El estado del autómata cambia mediante una transición discreta o mediante una actividad continua. En general, esta forma de modelado se utiliza para representar el comportamiento continuo de un sistema cuando se utiliza un controlador discreto. Esta forma de modelado no contempla el diseño jerárquico. Tampoco contempla la utilización de señales continuas en tiempo discreto. En sistemas donde intervienen distintos subsistemas, se diseña un autómata híbrido para cada subsistema, incluido el controlador. Por lo tanto, se obtiene el autómata híbrido del sistema completo mediante la composición paralela.

2.1.2 Sistemas conmutados (Switching system)

Otros trabajos tratan sobre el diseño y análisis de estabilidad de sistemas en los que se dispone de distintos controladores para controlar un proceso (Branicky, 1998), (De Carlo, 2005), (Liberzon, 1999). Los sistemas conmutados son sistemas dinámicos híbridos que constan de una familia de subsistemas continuos o discretos en el tiempo y una regla que determina la conmutación entre ellos. Los sistemas dinámicos híbridos surgen también cuando la conmutación entre controladores se utiliza para conseguir estabilidad y mejorar el funcionamiento. Un elemento supervisor selecciona el controlador de acuerdo con una ley de conmutación. El supervisor dispone de la información relativa a las señales de control aplicadas y las señales de salida del proceso. El comportamiento de conmutación se genera mediante el cambio de la dinámica en diferentes regiones de operación. Este ámbito de investigación se centra en el problema de la conmutación de controladores dinámicos en el tiempo.

Hay otro punto de vista que propone utilizar un controlador de eventos discretos para controlar un sistema continuo en el tiempo (Koutsoukos, 2000), (Raisch, 1998), (Stiver J, 1996). Estos sistemas híbridos consisten en un sistema continuo a ser controlado, también llamado planta, y un controlador de eventos discretos conectado a la planta mediante un interfaz en una configuración de realimentación. Mediante el interfaz se generan señales continuas a partir de los eventos del controlador, y se generan eventos a partir de las señales continuas de la planta. En este tipo de sistemas de control híbrido, la planta junto con el actuador y el generador (el interfaz) se comporta como un sistema de eventos discretos; acepta entradas simbólicas a través del actuador y produce salidas simbólicas a través del generador. Este planteamiento no trata el tema de la interacción entre las dinámicas continuas o discretas en el tiempo y las dinámicas de eventos discretos a nivel interno del proceso o a nivel interno del controlador.

2.1.3. Redes de Petri

Las redes de Petri son herramientas para el estudio de sistemas que presentan características como son: estar compuestos de partes que interactúan por separado, donde cada componente puede ser en sí un sistema, pero su comportamiento puede ser descrito independientemente de las otras partes del sistema. Dichos componentes presentan concurrencia o paralelismo, esto es que sus actividades se realizan de manera simultánea con las actividades de otros componentes del sistema.

Estas características crean un problema para modelar al sistema ya que se presenta el fenómeno de sincronización, en el cual la transferencia de información o materiales de una parte a otra parte del sistema requiera que las actividades de las otras partes estén en sincronía, para que no se tenga que un componente esté en espera de otro o se llegue a un punto muerto donde las actividades cesen.

La teoría de redes de Petri permite a un sistema con estas características ser modelado mediante una red de Petri, el análisis de la red de Petri puede entonces, ayudar a revelar información importante acerca de la estructura y el comportamiento dinámico del sistema modelado. Esta información puede ser utilizada para evaluar el sistema modelado y

sugerir mejoras o cambios. Así pues, el desarrollo de una teoría de redes de Petri está basada en la aplicación de redes de Petri en el modelado y diseño de dichos sistemas.

La aplicación de las redes de Petri es a través del modelado. En muchos campos de estudio, un fenómeno no es estudiado directamente, pero si indirectamente utilizando un modelo del fenómeno. Las redes de Petri fueron diseñadas principalmente para modelar los sistemas descritos anteriormente, en particular, pueden modelar el flujo de información u otros recursos dentro de un sistema. Estos pueden ser de distintas clases: hardware computacional, software, sistemas físicos, sociales, etc. Las redes de Petri son usadas para modelar la ocurrencia de varios eventos y actividades en un sistema.

Las redes de Petri han sido utilizadas para modelar sistemas híbridos. En R. David (1992) se hace una presentación tanto intuitiva como formal de las redes de Petri híbridas, es decir, de redes de Petri conteniendo una parte discreta y una continua, cuya aplicación permite el modelado de sistemas con eventos discretos y dinámicas de tiempo continuas. Para sistemas híbridos se ha modelado la parte discreta por una red de Petri mientras el aspecto continuo está descrito como un conjunto de ecuaciones algebraicas diferenciales. Este modelo puede ser visto como una extensión de un autómatas híbrido (J.E.Hopcroft 1979). Las redes de Petri de alto nivel están caracterizadas por el uso de *tokens* individuales estructurados, este modelo provee de una representación gráfica simple de sistemas híbridos tomando ventaja de la estructura de las redes de Petri para ver una descripción compacta de los sistemas.

Las redes de Petri híbridas que modelan sistemas híbridos, están compuestas de una red de Petri discreta y una red de Petri continua, que interactúan cada una de ellas a través de señales de condición evento. La cual toma ventajas de la estructura de redes de Petri y las características modulares de los sistemas condición-evento.

Una evolución de las redes de Petri ordinarias son las redes de Petri continuas (David 199). En este tipo de redes las marcas de los lugares son números reales, en lugar de ser números enteros. A su vez, en las transiciones se define una “cantidad de disparo” que es número real, en lugar de un número entero. Cuando se combina una red de Petri ordinaria con una red de Petri continua se tiene una red de Petri híbrida (David R 2001). Mediante este tipo de redes se pueden modelar sistemas dinámicos continuos en el tiempo que interaccionan con sistemas dinámicos de eventos discretos. Sin embargo, para sistemas sencillos la complejidad de modelado es elevada.

En García, France (2003), García, Brazil (2003), se presenta una propuesta para la integración en un mismo modelo de redes de Petri de subsistemas de distinta naturaleza, mediante la inclusión de lugares asociados a algoritmos continuos o discretizados. En estos trabajos se define un nuevo tipo de lugar de una red de Petri, el cual representa un algoritmo de control, ya sea continuo o discreto en el tiempo.

2.2. Modelos híbridos Tipo II

Los sistemas híbridos se han modelado como un conjunto de ecuaciones diferenciales, o en diferencias, con variables discretas. Existen variadas representaciones de los modelos híbridos tipo II que se presentan a continuación:

2.2.1. Sistemas lineales con dinámicas mezcladas ("Mixed Logical Dynamical Systems", MLD)

Una forma de modelar sistemas dinámicos híbridos es mediante un sistema con dinámicas mezcladas (sistemas MLD). Este tipo de sistemas propuesto en (Bemporad y Morari, 1999) corresponde al siguiente planteamiento:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + B_2 \delta_k + B_3 z_k \\ y_k &= Cx_k + D_1 u_k + D_2 \delta_k + D_3 z_k \\ E_1 x_k + E_2 u_k + E_3 \delta_k + E_4 z_k &\leq g \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde $x_t = [x_t^r \quad x_t^b]$ siendo $x_t^r \in \mathfrak{R}^n$ la parte continua del vector de estado y $x_t^b \in \{0,1\}^{n_b}$ la parte discreta. La salida tiene una estructura similar $y_t = [y_t^r \quad y_t^b]$ donde $y_t^r \in \mathfrak{R}^m$ es la parte continua y la parte discreta viene dada por $y_t^b \in \{0,1\}^{m_b}$. El vector de entradas $u_t = [u_t^r \quad u_t^b]$ está compuesto por una parte continua $u_t^r \in \mathfrak{R}^l$ y otra discreta $u_t^b \in \{0,1\}^{l_b}$. La descripción requiere variables auxiliares $z_t \in \mathfrak{R}^r$ y discretas $\delta_t \in \{0,1\}^{r_b}$.

En los sistemas MLD las expresiones lógicas de la parte discreta de un sistema híbrido se pueden expresar por restricciones. Es decir, dadas dos declaraciones L_1 y L_2 que pueden ser verdaderas o falsas, por medio de variables lógicas δ_1 y δ_2 que pueden tomar valores 0 o 1 y que a su vez puede tener las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} L_1 \vee L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 + \delta_2 \geq 1 \\ L_1 \wedge L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 = 1, \delta_2 = 1 \\ \sim L_1 &\text{ es equivalente a } \delta_1 = 0 \\ L_1 \Rightarrow L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 - \delta_2 \leq 0 \\ L_1 \Leftrightarrow L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 - \delta_2 = 0 \\ L_1 \oplus L_2 &\text{ es equivalente a } \delta_1 + \delta_2 = 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Otras declaraciones posibles son $L = [f(x) \leq 0]$ con $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ es lineal y se asume que $x \in \mathfrak{K}$, donde \mathfrak{K} es un conjunto acotado y definiendo

$$M = \max_{x \in \mathfrak{K}} f(x) \quad \text{y} \quad m = \min_{x \in \mathfrak{K}} f(x) \quad (2.5)$$

Entonces es fácil verificar que

$$[f(x) \leq 0] \wedge [\delta = 1] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) - \delta \leq -1 + m(1 - \delta) \quad (2,6)$$

$$[f(x) \leq 0] \vee [\delta = 1] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) \leq \delta M$$

$$\square [f(x) \leq 0] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) \geq \varepsilon$$

donde ε es una pequeña tolerancia (típicamente la precisión de la máquina), más allá de la cual la restricción es considerada violada. Con lo cual también se puede demostrar que

$$[f(x) \leq 0] \Rightarrow [\delta = 1] \text{ es verdadero si sólo si } f(x) \geq \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta \quad (2,7)$$

$$[f(x) \leq 0] \Leftrightarrow [\delta = 1] \text{ es verdadero si sólo si } \begin{cases} f(x) \leq M(1 - \delta) \\ f(x) \geq \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta \end{cases}$$

Además la multiplicación de dos variables $\delta_1 \delta_2$ expresada por una tercera $\delta_3 \equiv \delta_1 \delta_2$ se tiene que es equivalente a $[\delta_3 = 1] \Leftrightarrow [\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1]$ luego tenemos que

$$\delta_3 = \delta_1 \delta_2 \text{ es equivalente a } \begin{cases} -\delta_1 + \delta_3 \leq 0 \\ -\delta_2 + \delta_3 \leq 0 \\ \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 1 \end{cases} \quad (2,8)$$

Por último la expresión $y = \delta f(x)$ es equivalente a

$$\begin{aligned} y &\leq M\delta \\ y &\geq m\delta \\ y &\leq f(x) - m(1 - \delta) \\ y &\geq f(x) - M(1 - \delta) \end{aligned} \quad (2,9)$$

2.2.2. Sistemas lineales a tramos (“Piece Wise Affine”, PWA)

Un sistema lineal a tramos se puede describir por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A^i x_k + B^i u_k + f^i \quad \text{para} \quad \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \in X_i \\ y_k &= C^i x_k + g^i \end{aligned} \quad (2,10)$$

donde $\{X_i\}_{i=1}^s$ es una partición poliédrica del espacio de estado-entrada. Cada X_i está dada por:

$$X_i \equiv \left\{ \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad Q^i \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \leq q^i \right\} \quad (2,11)$$

donde x_k, u_k, y_k denotan los vectores de estados, de las entradas y salida, respectivamente. Cada subsistema s^i definido por la 6-tupla $(A^i, B^i, C^i, f^i, Q^i, q^i)$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ denominado componente del sistema PWA. En (2.10) $A^i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B^i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ y (A^i, B^i) es un par controlable. $C^i \in \mathfrak{R}^{r \times n}$, $Q^i \in \mathfrak{R}^{p_i \times (n+m)}$, f^i, g^i y q^i son vectores constantes adecuados. Note que n es un número de estados, m es el número de entradas, r es el número de salidas y p_i es el número de hiperplanos que define el poliedro i .

Los sistemas afines a trozos tienen la ventaja de permitir aproximar sistemas no lineales con un grado de precisión arbitrario. Su identificación se logra [Johansen 1995] definiendo una grilla y definiendo el mejor submodelo afín que se adapta a cada una de ellas. El principal problema de esta identificación es que su mejora tiene que ser lograda introduciendo un alto número de pequeñas regiones.

También se ha logrado su identificación por la combinación de técnicas con utilización de clúster, identificación lineal y reconocimiento de patrones (Ferrari, 2000).

2.2.3. Sistemas lineales complementarios (“Linear Complementary (LC) Systems”)

La formulación de esta clase de sistemas es la siguiente :

$$x_{k+1} = Ax_k + B_1 u_k + B_2 w_k \quad (2.12)$$

$$y_k = Cx_k + D_1 u_k + D_2 w_k \quad (2.13)$$

$$v_k = E_1 x_k + E_2 u_k + E_3 w_k + e_4 \quad (2.14)$$

$$0 \leq v_k \perp w_k \geq 0 \quad (2.15)$$

con $v_k, w_k \in \mathfrak{R}^s$ y donde \perp denota la ortogonalidad de vectores. v_k y w_k son llamadas las variables complementarias. Un primer ejemplo de este tipo de sistemas es el modelo de la característica ideal de un sistemas de diodos donde la variables complementarias serian el voltaje V_i y corriente I_i del i -ésimo diodo, como se presenta en la Figura 2.2. Se debe cumplir que

$$V_i \leq 0, \quad I_i \geq 0 \quad \{V_i = 0 \vee I_i = 0\} \quad (2.16)$$

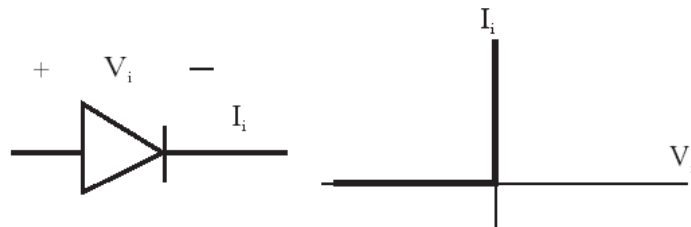


Figura 2.2 . Diodo y su característica ideal

Otro sistema que se modela con variables complementarias es correspondiente a una tubería con una válvula de una vía que se muestra en la Figura 2.3, donde claramente la señales, flujo $f(t)$ y presión $p(t)$ son variables complementarias para un modelo ideal del sistema.

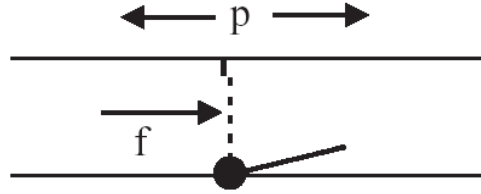


Figura 2.3. Tubería con válvula de una vía.

2.2.4. Min – Max –plus –Scaling (MMPS) Systems

Una expresión MMPS f de las variables x_1, \dots, x_n es definida por los siguientes elementos

$$f := x_i | \alpha | \max(f_k, f_l) | \min(f_k, f_l) | f_k + f_l | \beta | f_k \quad (2.17)$$

con $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ y f_k, f_l nuevamente expresiones MMPS. Un ejemplo para una expresión MMPS es $\max(\min(2x_1, -8x_2), x_2 - 3x_3)$. El símbolo $|$ corresponde al “o” lógico y la definición es recursiva.

Los sistemas MMPS pueden ahora ser descritos por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= M_x(x_k, u_k, d_k) \\ y_k &= M_y(x_k, u_k, d_k) \end{aligned} \quad (2.18)$$

junto con la restricción

$$M_c(x_k, u_k, d_k) \leq c \quad (2.19)$$

donde M_x, M_y y M_c son expresiones MMPS en términos de las componentes x_k, u_k y la variable auxiliar d_k

Un ejemplo es el sistema de manufactura de la Figura 2.4, el cual consiste de tres unidades de proceso M_1, M_2 y M_3 con los correspondientes tiempos de proceso d_1, d_2 y d_3 . Los insumos son traídos de dos fuentes: desde un proveedor externo, sobre el cual no se tiene control, y desde una fuente para la cual se tiene control completo de los tiempos de descarga (por ejemplo, una unidad de almacenaje con una gran capacidad tal que su nivel de stock nunca funciona por debajo de cero). Los tiempos en el cual el k -ésimo insumo desde la fuente controlable y la fuente externa llegan al sistema son respectivamente u_k y v_k . Los insumos de ambas fuentes pueden ser procesadas tanto por las unidad M_1 o por M_2 , las cuales realizan tareas iguales. Sin embargo, M_2 es más lento que M_1 . Por lo tanto, la

primera partida del insumo para k -ésimo producto debe ser procesado en M_2 y la segunda partida en M_1 . Esto implica que el k -ésimo insumo destinado para M_1 llega a la unidad de producción en el instante $t = \max(u(k), v(k))$, el k -ésimo insumo destinado para M_2 llega en el instante $t = \min(u(k), v(k))$. Los componentes intermedios generados por M_1 y M_2 son enviados al lugar de ensamblaje M_3 .

Se supone que los tiempos de transporte en el sistema de manufactura son despreciables y que entre las unidades de producción existe un sistema de almacenamiento con una capacidad suficientemente grande para que el sistema se renvide. El instante en que la unidad M_i comienza el procesamiento del k -ésimo lote se denota por x_k^i , y y_k^i es el instante en el cual el k -ésimo producto finalizado deja el sistema. Se asume que cada unidad de producción comienza a trabajar en el k -ésimo instante tan pronto como el insumo esté disponible y tan pronto como la unidad de producción haya finalizado de procesar la partida previa.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 x_k^1 &= \max(x_{k-1}^1 + d_1, \max(u_k, v_k)) = \max(x_{k-1}^1 + d_1, u_k, v_k) \\
 x_k^2 &= \max(x_{k-1}^2 + d_2, \min(u_k, v_k)) \\
 x_k^3 &= \max(x_{k-1}^3 + d_3, x_k^1 + d_1, x_k^2 + d_2) \\
 y_k &= x_k^3 + d_3
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

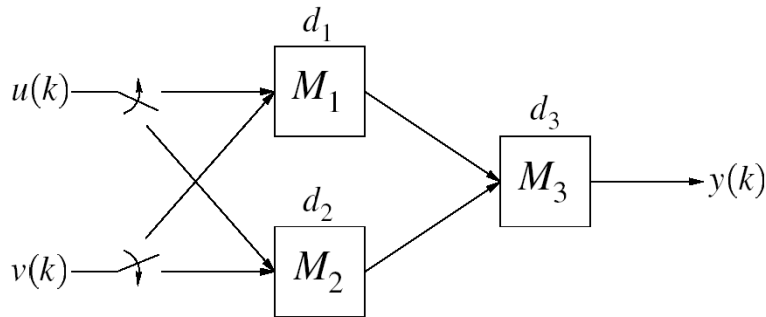


Figura 2.4. Sistema de manufactura simple

2.3. Equivalencia entre los modelos Tipo II

Se puede demostrar (Heemels, 2001) que los cuatro modelos Tipo II mencionados en 2.2, son equivalentes. A continuación se presentará un ejemplo para aclarar este punto.

Considere el siguiente sistema híbrido

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + u_k & \text{si } x_k + u_k \leq 1 \\ 1 & \text{si } x_k + u_k > 1 \end{cases}
 \tag{2.21}$$

representa un integrador inferiormente saturado, con las restricciones

$$-10 \leq x_k \leq 10, \quad -1 \leq u_k \leq 1 \quad (2.22)$$

el modelo presentado está en forma PWA con un espacio de estado/salida de dos dimensiones, particionado por el plano $x_k + u_k = 1$.

Para determinar la representación de la forma MLD del sistema (2.21) se crea la variable binaria $\delta_k \in \{1, 0\}$ y la variable z_k , para obtener

$$x_{k+1} = z_k \quad (2.23)$$

junto con las desigualdades

$$\begin{aligned} x_k + u_k + 10\delta_k &\leq 11 \\ -x_k - u_k - (12 + \varepsilon)\delta_k &\leq -1 - \varepsilon \\ -10\delta_k + z_k &\leq 1 \\ -12\delta_k - z_k &\leq -1 \\ -x_k - u_k + 12\delta_k + z_k &\leq 12 \\ x_k + u_k + 10\delta_k - z_k &\leq 10 \end{aligned} \quad (2.24)$$

las dos primeras inecuaciones provienen de traducir las expresiones $[\delta_k = 1] \Leftrightarrow [x_k + u_k \leq 1]$ y las otras de la traducción de $z_k = (x_k + u_k)\delta_k + (1 - \delta_k)$ más las restricciones de las variables de estado y entrada.

También el sistema (2.21) es representable por un sistema MMPS como sigue

$$x_{k+1} = x_k + u_k - \max(0, x_k + u_k + 1) \quad (2.25)$$

Del mismo modo la formulación LC del sistema (2.21) es

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + u_k - w_k \\ v_k &= -x_k - u_k + w_k + 1 \\ 0 &\leq v_k \perp w_k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

es decir el sistema está saturado cuando $v_k = 0$ ($\Rightarrow w_k = 1$).

Realizando un análisis sobre el estado del arte, se observa que el concepto de sistemas híbridos es muy amplio, y se trata desde perspectivas muy distintas.

2.4. Control Predictivo Híbrido

El Control Predictivo (“Model Predictive Control”, MPC) es un conjunto de métodos de control que hacen uso explícito de un modelo del proceso para obtener la señal de control minimizando una función objetivo. Estos métodos de control llevan a controladores que tienen básicamente la misma estructura y los siguientes elementos principales:

- Uso explícito de un modelo para predecir la evolución del proceso en los instantes futuros.
- Minimización de una función objetivo.
- Utilización de un horizonte de control finito y deslizante que implica el cálculo de la secuencia de control para todo el horizonte pero con la aplicación de la primera señal de la secuencia y la repetición de todo el proceso en el siguiente instante.

Los distintos algoritmos de control predictivo difieren en el tipo de modelo utilizado para representar al proceso y a las perturbaciones, y la función objetivo considerada. Existen aplicaciones de control predictivo a diversos procesos que van desde procesos tan diversos como robots (Gómez Ortega, 1996) a la anestesia clínica (Linkers 1994). Aplicaciones en la industria de cemento, secadoras, brazos robóticas se pueden encontrar descritas en Clarke 1998, mientras que desarrollos para columnas de destilación, plantas de PVC, generadores de vapor y servos se presentan en Richalet (1993) y Richalet (1978).

El control predictivo puede ser también aplicado a sistemas híbridos. En esta sección se describen a continuación los algoritmos de control predictivo basados en sistema MLD, Sistemas PWA y con programación multiparamétrica.

2.4.1. Control Predictivo de sistemas MLD

El problema de control predictivo se puede formular como:

$$u^* = \arg \min_u \left(\|x - r_x\|_{Q_x}^p + \|u - r_u\|_{Q_u}^p + \|\delta - r_\delta\|_{Q_\delta}^p + \|z - r_z\|_{Q_z}^p \right) \quad (2.27)$$

sujeto a las ecuaciones (1), donde $\|x\|_Q^p$ denota $x^T Q x$ cuando $p = 2$ y $Q \|x\|_p$ para $p = 1$ o $p = \infty$ y Q_x, Q_u, Q_δ , y Q_z son matrices de peso de dimensiones apropiadas y todas las señales se predicen con la información disponible hasta el instante t en la forma usual del control predictivo. Los vectores $x, u, \delta, z, r_x, r_u, r_\delta$ y r_z son los vectores de estados futuros predichos, movimientos de control, variables lógicas auxiliares, variables reales auxiliares, y sus referencias futuras correspondientes. El control predictivo resultante resulta ser un problema de optimización con un conjunto de restricciones lineales y con variables de decisión reales y enteras. Este tipo de problemas de optimización se conocen con el nombre de problemas de programación mixta (real y entera). Son problemas mucho más difíciles de

resolver que los problemas de programación lineal o programación cuadrática (Floudas, 1995).

2.4.2. Control Predictivo de sistemas PWA

Asumiendo que todo el estado está disponible (en caso contrario, un estimador del estado será necesario), la formulación del control predictivo en el caso PWA es:

$$\begin{aligned}
 u^* &= \arg \min J & (2.28) \\
 \text{s.a. } J &= \sum_{i=1}^N q_i (y(t+i/t) - w(t+i))^2 + \sum_{i=0}^{N-1} r_i \cdot u(t+i)^2 \\
 u_{\min} &\leq u(t+i) \leq u_{\max} \quad i = 0, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

Donde J representa un índice de comportamiento que penaliza el error de seguimiento de la salida predicha del sistema $y(t+i)$ en el instante $t+i$ conocida la del instante t con respecto al la referencia $w(t+i)$ en el instante $t+i$ y penaliza el esfuerzo de control relacionado con el cuadrado de la variable manipulada $u(t+i)$ en el instante $t+i$. Se incluyen constantes q_i y r_i como pesos relativos. Además se incluyen las restricciones impuestas a la variable manipulada.

Al analizar el problema de predicción vemos que el subsistema que describe el proceso en el instante t es conocido pero el siguiente subsistema donde el proceso estará en el instante de tiempo siguiente depende de la señal de control aplicada.

Por ejemplo si $\{X_i\}_{i=1}^s$ es la partición del espacio de estado-entrada, el subsistema $I(t)$ en el tiempo t correspondiente a subconjunto X_i de la partición queda definido como:

$$\begin{aligned}
 x_t &= A^i x_{t-1} + B^i u_{t-1} + f^i & \text{para } \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ u_{t-1} \end{bmatrix} \in X_i & (2.29) \\
 y_t &= C^i x_t + g^i
 \end{aligned}$$

Entonces $I(t)$ es conocido porque se conoce la señal de control aplicada u_{t-1} .

Supongamos ahora que la señal de control siguiente en el tiempo $t+1$ ocupa el subsistema $I(t+1)$ correspondiente a subconjunto X_j de la partición del espacio de estados, es decir

$$\begin{aligned}
 x_{t+1} &= A^j x_t + B^j u_t + f^j & \text{para } \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} \in X_j & (2.30) \\
 y_{t+1} &= C^j x_{t+1} + g^j
 \end{aligned}$$

En este caso la señal de control u_t no es conocida

En general, una secuencia de subsistemas $I = \{I(t) \ I(t+1) \ \dots \ I(t+N)\}$ se pueden "activar" a lo largo de la trayectoria. Sólo el primer valor $I(t) = I(t)(x(t-1), u(t-1))$ de esta secuencia es conocido. Nótese que si no hay restricciones, el número posible de secuencias para un horizonte de N es s^{N-1} , número que puede ser muy elevado. El problema de optimización resultante se puede expresar como:

$$u^* = \arg \min_{u, I} J \quad (2.31)$$

donde hay que añadir restricciones para considerar las dependencias entre los subsistemas y sus ecuaciones correspondientes, i.e.:

$$R^{I(t+j)} \cdot x(t+j) \leq r^{I(t+j)}, \quad j = \{1, \dots, N\} \quad (2.32)$$

Este problema podrá ser resuelto encontrando el óptimo para cada posibles secuencias de I , i.e.

$$u^* = \arg \min_I \left(\min_u \left(J_{R^{IU} \cdot u \leq q^{IU}} \right) \right) \quad (2.33)$$

donde $R^{IU} \cdot u \leq q^{IU}$ son las restricciones debidas a las dependencias entre I y U . Los problemas de programación entera mixta lineal o cuadrática resultante son mucho más difíciles de resolver en tiempo real que los problemas programación lineal o cuadrática de los controladores predictivos nominales.

2.4.3. Control predictivo con programación multiparamétrica

El control predictivo se puede considerar una técnica madura para sistemas lineales y no muy rápidos como los encontrados normalmente en la industria de procesos. Sistemas más complejos, tales como sistemas no lineales, híbridos, y o sistemas muy rápidos, eran considerados como fuera del alcance de los controladores predictivos. Con técnicas derivadas de la optimización multiparamétrica se ha logrado encontrar una solución factible a estos sistemas complejos.

La solución óptima del problema de programación multiparamétrica no es un número como en el caso de la optimización convencional, sino una función óptima $z^*(x)$ de un parámetro x perteneciente a un espacio acotado X . La solución utiliza el concepto de regiones críticas $Cr^i \quad i = 1, \dots, r$ las cuales generan una partición $\bigcup_{i=1}^r Cr^i = X$ del espacio de parámetros, en cada una de las cuales se logra definir una solución óptima afín $z^*(x) = F^i x + g^i$ del problema de optimización.

Recientemente se ha demostrado (Bemporad *et al.*, 2002) que el problema del control predictivo se puede expresar como un problema de programación multiparamétrica

donde la variable de optimización es la secuencia de control $U_N = [u'_0, \dots, u'_{N-1}]$ y el parámetro, la condición inicial x_0 de la variable de estado del sistema, luego la solución resultante es un controlador afín a trozos en el espacio de estado (espacio de las condiciones iniciales). La idea fue sugerida por primera vez en Zafiriou *et al.* (1990).

El óptimo de un problema de programación cuadrática se alcanza en un conjunto de restricciones activas (el conjunto puede ser vacío) y para todos los puntos del espacio que tengan el mismo conjunto de restricciones activas, la solución es afín.

La solución del problema de control óptimo en tiempo finito, con programación multiparamétrica, se transforma en una búsqueda de la ley de control representada por un modelo afín para cada región de la partición del espacio de estado (espacio de las condiciones iniciales) donde la condición inicial pertenezca.

Para este tipo de solución el tiempo de control debería ser reducido ya que el control consistiría en sólo acceder una tabla, en lugar de tener que resolver en cada instante un pesado problema de optimización.

También por medio de la optimización multiparamétrica se obtiene una solución afín a tramos para el problema de control óptimo de sistemas híbridos con restricciones.

Se profundizará más en este tema en el capítulo VI, cuando se analice la factibilidad de la solución del problema de control supervisor predictivo híbrido en la turbina a gas de la central termoeléctrica de ciclo combinado, considerando optimización multiparamétrica.

III. Plantas Termoeléctricas de ciclo Combinado

En este capítulo se describe el funcionamiento de la central termoeléctrica de ciclo combinado, incluyendo los siguientes puntos:

- Análisis de su comportamiento general explicando sus principales áreas de funcionamiento.
- Descripción de un simulador de una planta termoeléctrica y su implementación en Matlab-Simulink, el cual será utilizado para analizar y comparar los controladores diseñados en este trabajo

Las plantas termoeléctricas de ciclo combinado consisten en una turbina a gas y una turbina a vapor, lo cual se traduce en un aumento de la eficiencia en la generación de potencia eléctrica en comparación a las plantas termoeléctricas tradicionales. El principio de funcionamiento de las plantas termoeléctrica de ciclo combinado consiste en transferir la energía en forma de flujo de gas o flujo de vapor de una turbina a la otra, de forma de aumentar los índices de generación del sistema, en este sentido la configuración típica de los componentes de este tipo de plantas se basa en que el calor liberado como subproducto por la turbina a gas es utilizado para calentar el agua, de manera de generar vapor, que alimenta la turbina a vapor.

El propósito de estas plantas dentro de los sistemas de potencia radica en el hecho que reduce las pérdidas de energía, producto del aprovechamiento del calor producido en las distintas etapas del proceso, como por ejemplo en los gases producidos por la turbina a gas, para la generación de electricidad adicional. Este aprovechamiento del calor permite que las plantas de ciclo combinado alcancen índices de eficiencia de la transformación del combustible en energía eléctrica cercanos al 50 %, lo cual es superior a los 45% y 35% de eficiencia que alcanzan las turbinas a gas y a vapor respectivamente.

3.1. Plantas termoeléctricas de ciclo combinado

Las plantas termoeléctricas de ciclo combinado se pueden clasificar según la configuración existente entre la turbina a gas y la turbina a vapor en tres grupos (Boissenin, 1988), los cuales corresponden a:

- *Plantas con configuración estándar:* Estas plantas se caracterizan por el hecho que el gas producido como subproducto de la turbina a gas es usado para mejorar las condiciones del vapor (presión y temperatura) utilizadas por la turbina a vapor. En este tipo de configuración la turbina a gas es la que cumple el principal rol en la producción de energía eléctrica.
- *Plantas con configuración de ciclos con bajo exceso de aire:* En este caso el gas generado en la turbina a gas provee de aire a la cámara de combustión de la caldera, en este caso a diferencia de la configuración estándar, el principal rol en la generación de electricidad corresponde a la turbina a vapor correspondiéndole entre el 80% y el 85% de la producción de energía.
- *Plantas de configuración con la caldera suplementaria:* En este tipo de plantas, además de considerar el gas proveniente de la turbina a gas, se considera una caldera adicional encargada de aumentar la cantidad de vapor producido. En general, la eficiencia de este tipo de configuración es más baja que la eficiencia presentada por las plantas de configuración estándar, la ventaja de esta configuración es el hecho que presenta mayor flexibilidad en relación al combustible utilizado por la caldera adicional, que puede diferir del utilizado por la turbina.

El desarrollo de la estrategia de control planteada en el presente trabajo está basado en una planta de ciclo combinado con caldera suplementaria, siendo ésta configuración la que proporciona mayor flexibilidad en relación al combustible utilizado. En el contexto nacional, ante la coyuntura del recorte del suministro de gas importado, esta configuración va en la dirección correcta en apoyar la diversificación de las fuentes energéticas. Un diagrama de una planta de ciclo combinado cuya configuración es con caldera suplementaria, se presenta en la Figura 3.1

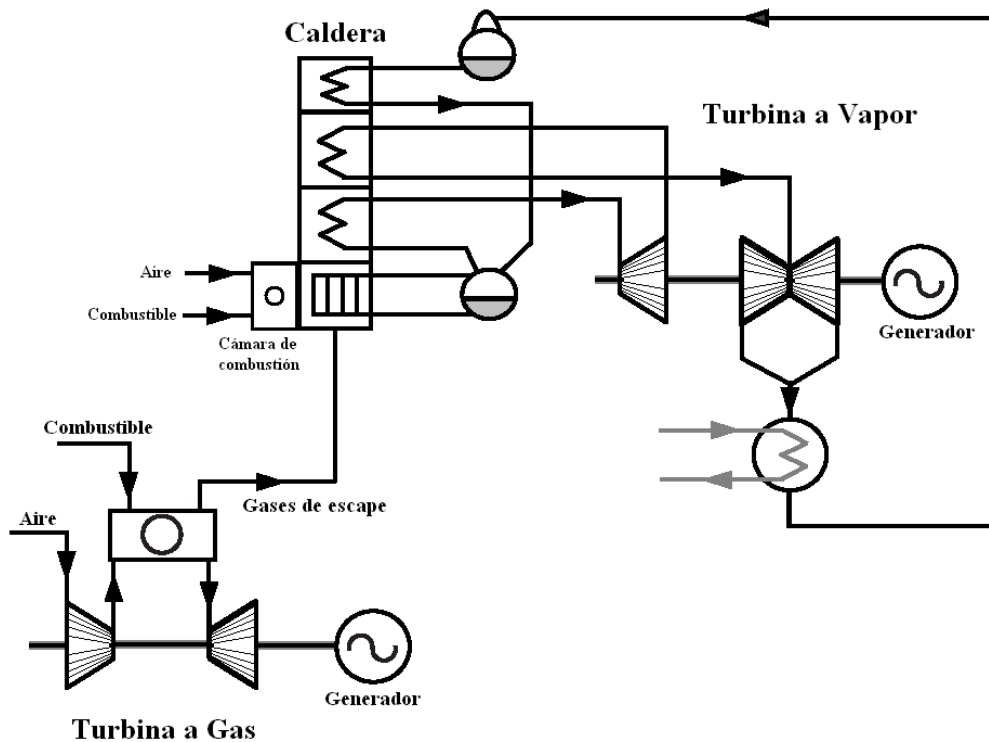


Figura 3.1: Diagrama de una planta termoeléctrica de ciclo combinado cuya configuración es con caldera suplementaria.

La ventaja de este tipo de plantas es que utiliza las principales características de las etapas de alta temperatura y de baja temperatura del proceso de combustión, este hecho se debe a que la turbina a gas tiene una alta eficiencia en la etapa de alta temperatura, mientras tanto que la turbina a vapor presenta un mejor desempeño en la etapa de baja temperatura.

3.2. Funcionamiento general

Una central termoeléctrica de ciclo combinado consiste básicamente en un grupo Turbina a Gas-Generador, una caldera con chimenea recuperadora de calor y un grupo Turbina a Vapor-Generador, formando un sistema que permite producir electricidad.

El proceso de generación de energía eléctrica en una central termoeléctrica de ciclo combinado comienza con la aspiración de aire desde el exterior siendo conducido al compresor de la turbina a gas a través de un filtro.

El aire es comprimido y combinado con el combustible atomizado (gas natural por ejemplo) en una cámara donde se realiza la combustión. El resultado es un flujo de gases calientes que al expandirse hacen girar la turbina a gas proporcionando trabajo. El generador acoplado a la turbina a gas transforma este trabajo en energía eléctrica (ver figura 2.1).

Los gases de escape que salen de la turbina a gas pasan a la chimenea recuperadora de Calor. En esta chimenea se extrae la mayor parte del calor aún disponible en los gases de escape y se transmiten al ciclo agua-vapor, antes de pasar a la atmósfera.

La chimenea de recuperación se divide en tres áreas de intercambio de calor:

Área 1: Se denomina economizador y está ubicado en la parte superior de la chimenea. El agua a alta presión ingresa al economizador para ser recalentada hasta el punto de saturación.

Área 2: Se denomina ciclo de evaporación y está ubicada en la zona intermedia de la chimenea. Es donde se transforma el agua en vapor.

Área 3: Se denomina recalentador y está ubicada en la parte inferior de la chimenea, zona donde la temperatura es más alta producto de que está cerca de la salida de la Turbina a Gas. Aquí el vapor saturado se recalienta aún más. Posteriormente este vapor recalentado es inyectado en la Turbina a Vapor donde se expande en las filas de alabes haciendo girar el eje de esta Turbina lo que genera trabajo, el cual es transformado en energía eléctrica en el generador acoplado a la Turbina a Vapor.

Si se hace necesario se puede incrementar la energía del vapor por medio de los quemadores de un horno en la caldera.

El vapor que sale de la turbina de vapor pasa a un condensador donde se transforma en agua. Este condensador es refrigerado mediante un sistema que inyecta agua fría por la superficie del condensador, lo que ocasiona la disipación del calor latente contenido en el vapor.

Posteriormente el agua pasa a un tanque desgasificador del agua de alimentación. En el desgasificador se eliminan todos los gases no condensables. El tanque envía, a través de bombas, el agua a alta presión hacia la chimenea de recuperación para iniciar nuevamente el ciclo.

La interconexión al sistema de transmisión eléctrico de la central termoeléctrica se inicia a partir de la tensión suministrada por los generadores de las turbinas a gas y vapor, cerca de 13 kV la cual se eleva en los transformadores principales conectados a cada generador, pudiendo ser del orden de los 220 kV. Esto se realiza porque a baja tensión la intensidad de corriente es muy alta, necesitándose cables de transmisión de gran sección que soporten el flujo de electrones y generando adicionalmente grandes pérdidas de transmisión. Al elevarse la tensión, la intensidad de corriente es baja lo que origina una reducción en las pérdidas de transmisión.

El equipamiento que incluye las centrales de ciclo combinado es el siguiente:

- Una o más turbinas a gas, que representan 2/3 de la generación total de la planta.
- Una o más turbinas a vapor, que representan 1/3 de la generación total de la planta.

- Uno o más una chimeneas recuperadoras de calor. Este equipo realiza la evaporación del agua, para inyectarla en forma de vapor en la Turbina a Vapor. Deben haber tantas chimeneas recuperadoras de calor como Turbinas a Gas.
- Estación medidora y reductora de la presión del gas natural, más la tubería de la central.
- Sistema de control basado en microprocesadores para la central.
- Estanque de almacenamiento para el combustible para el combustible de respaldo (petróleo diesel).
- Sistema de refrigeración si es que la zona donde se instalará la planta no cuenta con sistemas de refrigeración naturales (agua de mar, pozos profundos, etc.)

3.2.1. Sistemas de control

El control de las plantas termoeléctricas de ciclo combinado es muy complejo debido principalmente a la gran cantidad de subprocesos que deben funcionar de manera sincronizada para mantener la operación del sistema en un punto cercano al óptimo.

El sistema de control de más alto nivel está dividido en etapas y cada etapa tiene asociado un régimen de operación distinto, como son: Partida, Detención y Normal (régimen permanente).

Durante la operación normal, la planta termoeléctrica puede estar desconectada de la red (operación en modo isla) o conectada a la red. En el caso de estar conectada a la red, los requerimientos de potencia para cada unidad son especificados por un centro de despacho y este hecho pone nuevamente a la planta en uno de los siguientes modos de operación: generación constante de potencia, siguiendo programación del centro de despacho, regulación de frecuencia del sistema y operación con reserva en giro.

Los procedimientos de partida y detención son los más complejos desde el punto de vista del control asociado. Ellos requieren que una secuencia de operaciones sea exitosa de manera de llevar la turbina, y junto con ella a toda la planta, a través de una secuencia de estados seguros. Al mismo tiempo se deben monitorear y chequear una gran cantidad de variables para asegurar una operación segura. Además se desea que las pérdidas de energía durante estos procedimientos sean mínimas, lo que va directamente asociado con su tiempo de duración.

Una turbina de vapor moderna tiene un periodo de encendido que puede llegar a durar seis horas, dentro de las cuales se ejecutan las siguientes etapas: calentamiento de la cañería de vapor principal, calentamiento de la turbina y sus componentes, partida de la turbina (giro), sincronización y finalmente carga.

En el caso de la turbina a gas, las etapas que se deben ejecutar durante la partida son las siguientes: bombear lubricante para producir una capa de aceite bajo el rotor de la turbina y con ello disminuir el roce estático, usar el motor de partida para empezar la rotación de la turbina, inyectar combustible líquido para establecer una llama estable, después de obtener la velocidad deseada y la temperatura de los gases de escape es la deseada, sincronizarse con la red, cambiar gradualmente de combustible líquido a gaseoso, incrementar la carga hasta el valor deseado.

Las secuencias anteriormente descritas se aplican cuando las turbinas son parte de centrales de vapor o de gas, en el caso de centrales de ciclo combinado, las secuencias de partida son aún más complejas debido a que existen interconexiones entre ambas turbinas, tanto en la parte eléctrica como en la mecánica.

3.2.2. Principales lazos de control

En las plantas termoeléctricas de ciclo combinado existen principalmente dos categorías de control: Control de secuencia y control modulante.

Control de Secuencia. El control de secuencia está asociado sólo con las etapas de partida y detención de la planta. Una secuencia asegura que ciertos estados no existan, pues pueden poner en peligro el funcionamiento del sistema completo. Cuando las centrales son grandes, las secuencias asociadas pueden llegar a ser muy complejas y es esencial que operen de manera confiable de modo que la planta pueda operar de forma segura. Los principales problemas que deben ser superados son la no confiabilidad de las señales y el diagnóstico de fallas.

Control Modulante. Este corresponde al lazo de control principal que apunta a hacer ajustes al funcionamiento de una planta que ya está operando, de manera de mantener los parámetros en los valores deseados. La principal tarea que debe cumplir este lazo corresponde a mantener el balance entre la potencia producida y la demanda, cuyo principal indicador es la frecuencia. Si la frecuencia aumenta, esto quiere decir que existe una sobre producción de potencia y viceversa.

3.3. Simulador de una central termoeléctrica de Ciclo Combinado

El desarrollo de la estrategia de control supervisor presentada en este trabajo se realizará en base a un simulador de una planta termoeléctrica de ciclo combinado. Por lo tanto se hace necesario describir los distintos componentes del simulador y sus principales variables de modelación.

En el área de producción de energía se encuentran diversos trabajos sobre modelación de las componentes de una central termoeléctrica de ciclo combinado: caldera, turbina a vapor y turbina a gas, dependiendo de la aplicación. Este simulador se basa en las ecuaciones fenomenológicas del proceso, cuyos modelos y parámetros han sido adaptados de Ordys, *et al.* (1994).

Estas plantas consisten en una turbina a gas y una turbina a vapor para generar electricidad (Ordys *et al.*, 1994). Como se presenta en la Figura 3.2, estas turbinas se combinan en un ciclo, de manera que la energía se transfiere de una turbina a otra. Los gases de escape de la turbina a gas se utilizan para obtener el calor necesario para la producción de vapor en la caldera. Por último, este vapor alimenta a la turbina a vapor.

A continuación presentan componentes principales de una planta termoeléctrica de ciclo combinado y los supuestos para las principales para el simulador utilizado: caldera, turbina a gas y turbina a vapor (Cori y Busi, 1977; Shoberi, 1987; Ordys *et al.*, 1994).

3.3.1. Turbina a vapor de una central termoeléctrica de ciclo combinado

La turbina a vapor presenta por componentes principales un generador, una turbina de alta presión y una turbina de baja presión. En ocasiones a este tipo de turbinas se les incorpora una turbina de presión media. (Figura 3.2)

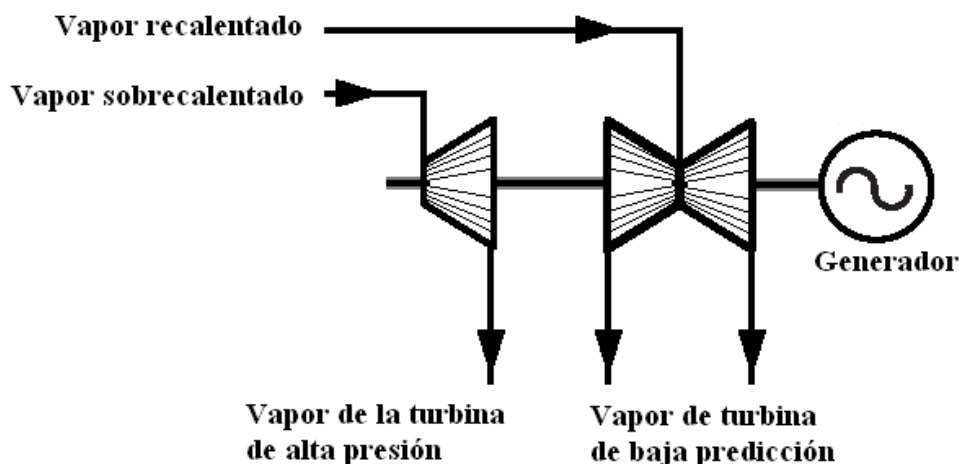


Figura 3.2: Diagrama de la turbina de vapor de una planta termoeléctrica de ciclo combinado.

La turbina a vapor es una máquina que utiliza el vapor para transformar la energía potencial acumulada en el eje de rotación de la máquina en energía eléctrica. En una primera etapa el vapor sobrecalentado entra a la turbina de alta presión mediante la válvula de acceso principal, luego de esta etapa el vapor pasa al recalentador (reheater) de la caldera donde su temperatura vuelve a ser incrementada a una presión constante, debido a la disminución de temperatura sufrida en la etapa de alta presión, posteriormente el vapor recalentado vuelve a la turbina a vapor para alimentar las etapas de media y baja presión, por último el vapor resultante de estas etapas es devuelto al condensador.

Las variables presentes en la turbina de vapor se detallan en la Figura 3.3

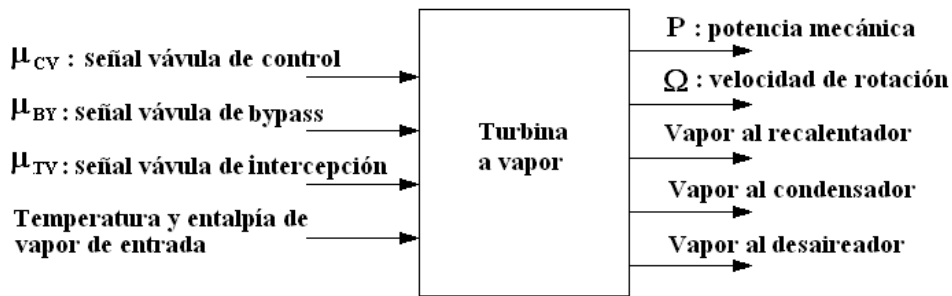


Figura 3.3: Esquema de variables de la turbina de vapor de una planta termoeléctrica de ciclo combinado.

El sistema de control presente en la turbina a vapor es el encargado de controlar el generador y las válvulas de admisión a la turbina. Las entradas al controlador corresponden a la potencia (P) y a la frecuencia de la electricidad producida (ω), así como el vapor resultante de las distintas etapas de la turbina a vapor (P^{des}), en función de estas variables y de los valores de referencia deseados de las mismas variables (ω_0, P_{sbis}), el sistema realimenta el error producido entre la variable y su referencia, de manera que mediante la multiplicación de este error por una constante y su respectiva integración (controlador PI), se calculan las señales de apertura o cierre de las válvulas de bypass (μ_{BY}) y de control (μ_{CV}). El esquema de este controlador se muestra en la Figura 3.4

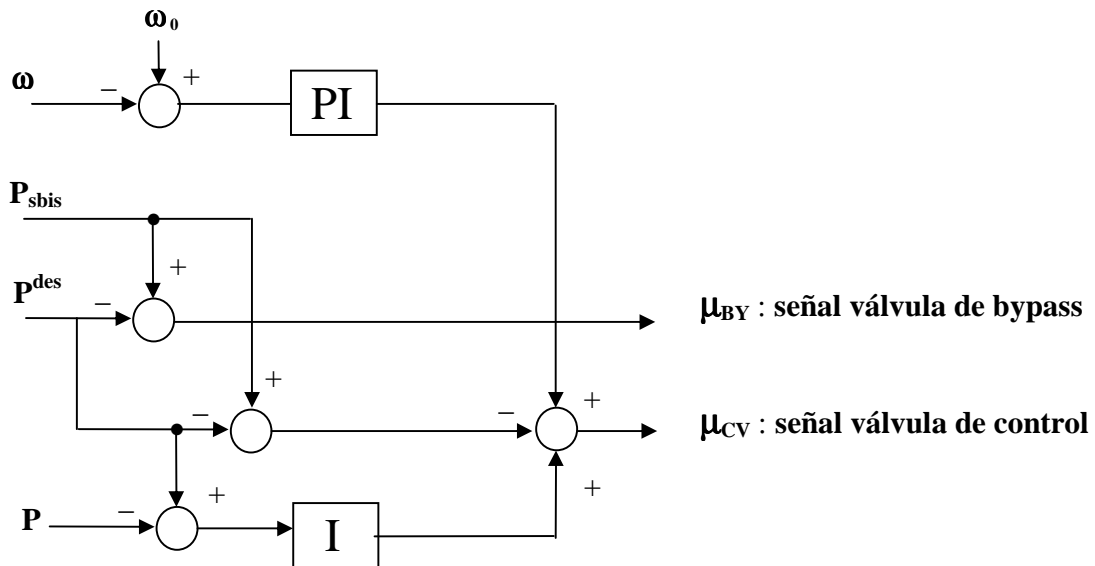


Figura 3.4: Esquema de control para la turbina de vapor de una planta térmica de ciclo combinado.

En el simulador utilizado en este trabajo las ecuaciones para la turbina a vapor se basan principalmente en los siguientes supuestos:

- El vapor sobrecalentado es tratado como gas ideal.

- Las etapas de la turbina de alta, baja e intermedia presión se representan a través de expansiones politrópicas uniformes unidimensionales del vapor.
- La dinámica del flujo másico entre la entrada y la salida se modela como un sistema de primer orden.

Las principales ecuaciones para el simulador de la turbina a vapor se presentan en el apéndice A1.

3.3.2. Caldera de una central termoeléctrica de ciclo combinado

La caldera juega un rol fundamental en los equipos de potencia, y en particular en las plantas de ciclo combinado, donde se encarga de la producción de vapor. El funcionamiento de la caldera consiste en recolectar los gases producidos en la turbina a gas, de modo de aprovechar el calor presente en estos gases. En este sentido existen dos tipos de caldera, las que se diferencian en la presencia de un ciclo de combustión adicional que genere calor y contribuya a la producción de vapor, junto con el aporte de los gases de la turbina a gas, mediante el calentamiento del agua presente en el domo. Un diagrama de la caldera y sus componentes se muestra la Figura 3.5.

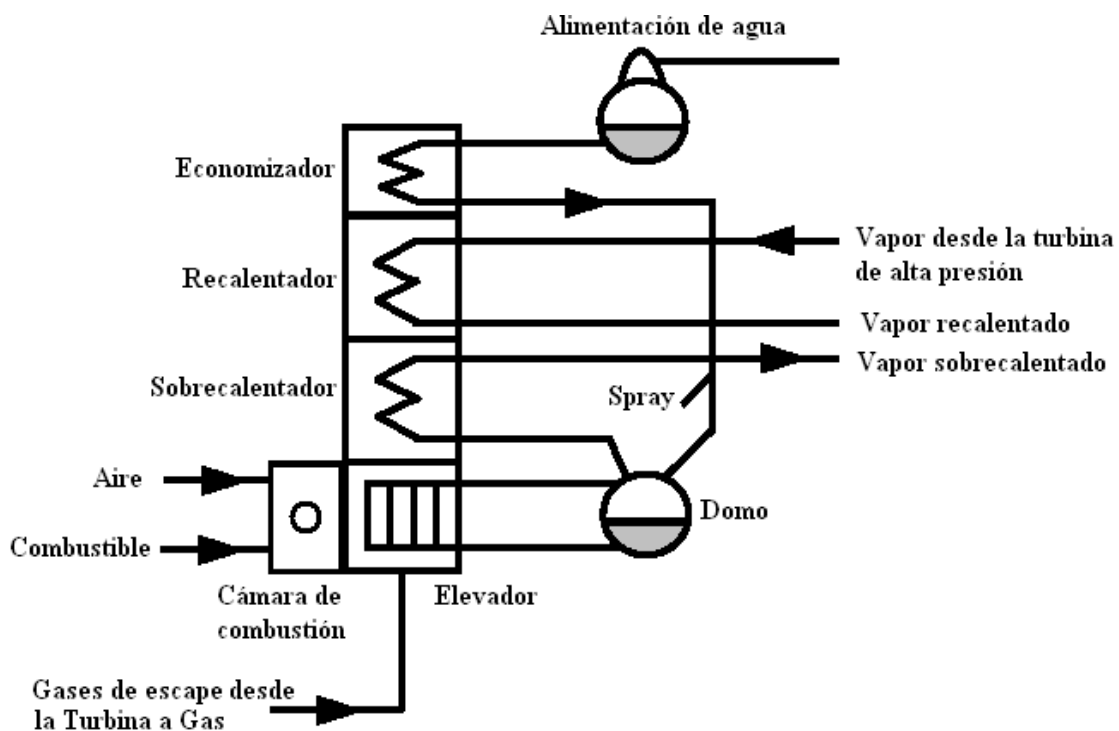


Figura 3.5: Diagrama de la caldera de una planta termoeléctrica de ciclo combinado.

El esquema de funcionamiento típico de una caldera, consiste de una alimentación de agua proveniente del sistema de alimentación de agua hacia el domo, luego el domo envía agua al elevador, donde el calor producido por el horno eleva la temperatura del agua

en el elevador produciendo vapor de agua, el cual regresa al domo. El vapor proveniente de la turbina de alta presión es enviado al recalentador y al sobrecalentador, con objeto de aumentar su contenido calorífico, la temperatura del vapor recalentado y sobrecalentado es regulado mediante la incorporación de agua por un sistema de spray. Un esquema de las variables presentes en la caldera se presenta en la Figura 3.6.

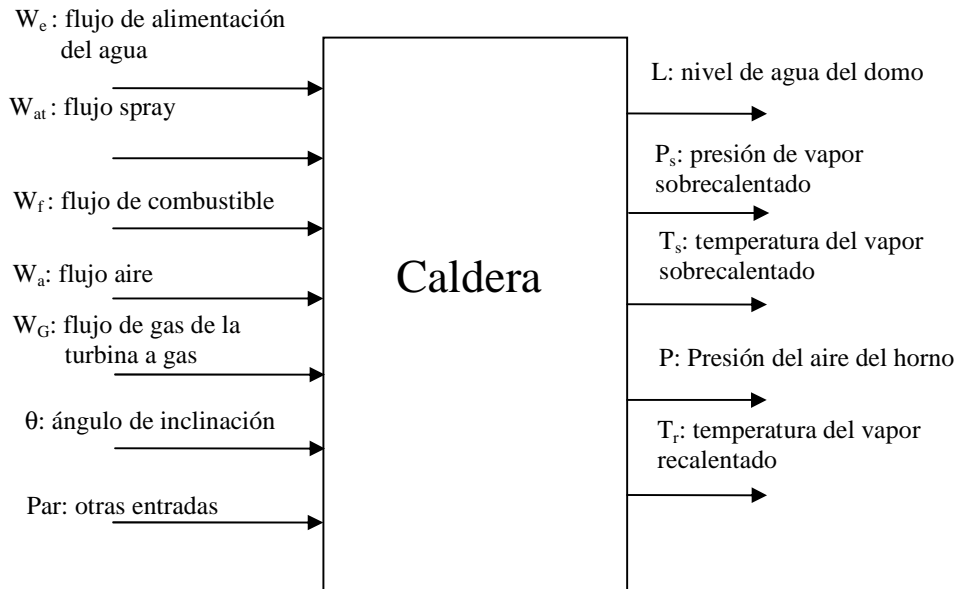


Figura 3.6: Esquema de variables presentes en la caldera de una planta termoeléctrica de ciclo combinado.

El sistema de control presente en la caldera es el encargado de administrar las válvulas que controlan los flujos de las variables de entrada; flujo de combustible (W_f), flujo de agua (W_e), flujo de aire al horno (W_a), flujo del spray de agua (W_{at}), ángulo de inclinación (θ). El sistema de control de la caldera se basa en controlador PI, donde el error las variables controladas son: presión de vapor sobrecalentado (P_s), nivel de agua del domo (L), presión del aire del horno (P_G), temperatura del vapor sobrecalentado (T_s), temperatura del vapor recalentado (T_r). En la Figura 3.7, se muestra el esquema de control de la caldera.

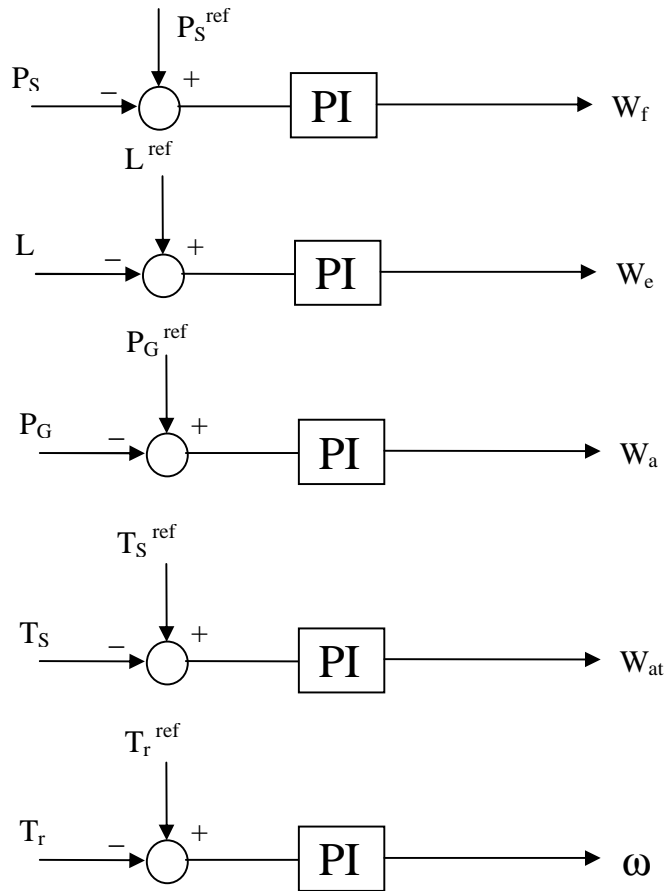


Figura 3.7: Esquema de control para la caldera de una planta térmica de ciclo combinado.

Las ecuaciones para el simulador de la caldera se basan en los siguientes supuestos:

- El vapor sobrecalentado y los gases de escape del horno son tratados como gases ideales.
- Aproximaciones polinomiales de las tablas de vapor para establecer las relaciones entre los parámetros del vapor, tales como, la entalpía, densidad, temperatura y presión.
- Los balances termodinámicos se satisfacen y se presentan en el apéndice A1.

3.3.3. Turbina a gas de una central termoelectrónica de ciclo combinado.

La turbina a gas tiene por objetivo la producción de energía eléctrica mediante la combustión de gas. A los principales componentes de la turbina a gas corresponde al compresor que tiene por objetivo proveer de aire y combustible, además posee tres niveles de turbinas, ductos de evacuación de gases y un sistema de refrigeración.

En la actualidad, las turbinas a gas producen potencia eléctrica, y gases de desecho con una alta temperatura, lo cual permite utilizar estos gases para la generación de energía eléctrica por parte de la turbina a vapor. En la Figura 3.8, se muestra un esquema de la turbina a gas.

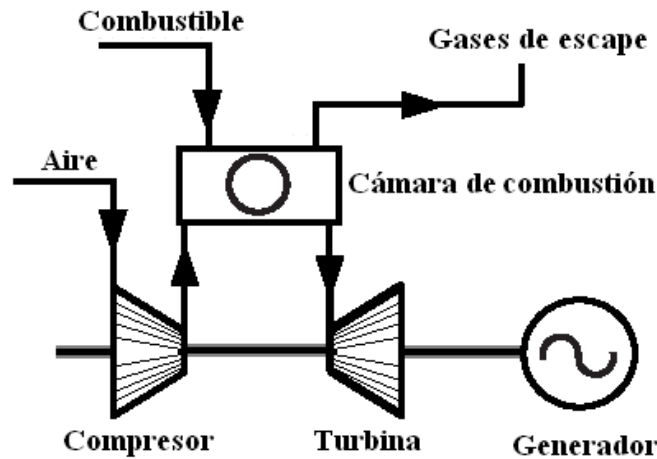


Figura 3.8: Diagrama de la turbina a gas de una planta termoeléctrica de ciclo combinado.

El aire a la presión atmosférica entra al compresor de la turbina a gas, en el compresor el aire es comprimido, de manera de generar mejores condiciones de combustión. El aire comprimido es mezclado con el combustible en la cámara de combustión, los gases resultantes de la combustión expanden la turbina para producir la potencia mecánica, la cual es transformada por el generador en energía eléctrica. Las principales variables presentes en la turbina a gas se muestran en la Figura 3.8.

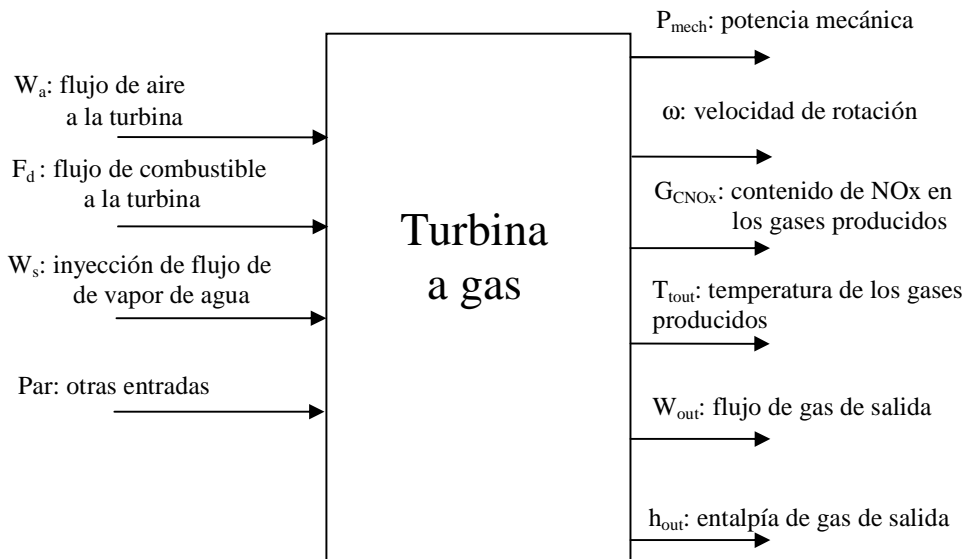


Figura 3.8: Esquema de variables presentes en la turbina a gas de una planta térmica de ciclo combinado.

El sistema de control utilizado por la turbina a gas es el encargado de regular la turbina y el generador asociado a la turbina. Este sistema de control está constituido por la combinación de varios controladores PID, luego las señales obtenidas se mezclan, y se

obtiene el mínimo o el máximo de la señal generada por la combinación de las restantes señales. Un esquema simplificado del sistema de control se muestra en la Figura 3.9.

Donde, P_{mech} corresponde a la potencia producida por la turbina, (ω) corresponde a la frecuencia del generador, T_{Tout} corresponde a la temperatura de los gases producidos por la turbina, g_c corresponde al contenido de NO_x de los gases, F_d corresponde al flujo de combustible, W_a corresponde al flujo de aire que entra al compresor, W_s corresponde al flujo de ingreso de vapor de agua.

En el sistema regulatorio se elige entre la menor de tres señales: la correspondiente a la salida del PI relacionada con la Temperatura (T_{Tout}), la salida del PI relacionada con la potencia mecánica (P_{mech}) y la salida del PID relacionada con la frecuencia (ω). Esto es debido a que la cámara de combustión, tiene un límite térmico para trabajar en condiciones normales, luego es necesario que se regule por medio de la señal que respete este límite. Se realizará un análisis más detallado en la sección 5.2. Notar la multiplicación de la señal de frecuencia y la salida de switch, esto es para modelar el efecto que tiene la variación de frecuencia en la velocidad de la bomba del sistema de combustible. Además existe una limitación del mínimo combustible a utilizar.

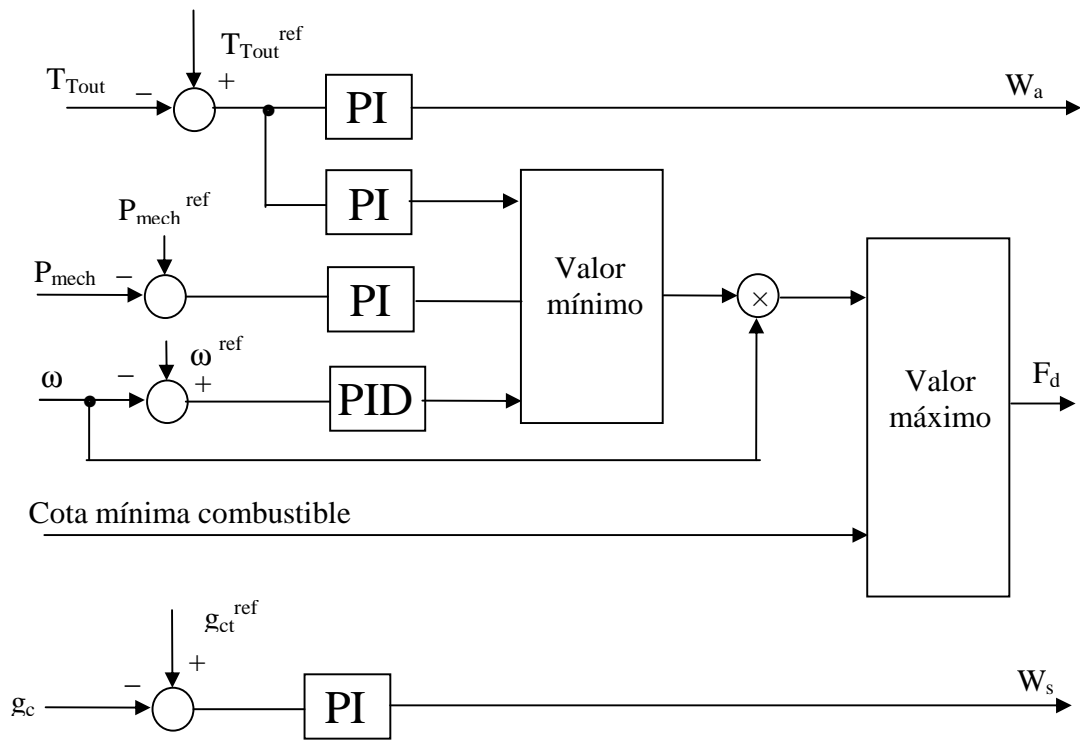


Figura 3.9: Esquema de control para la turbina a gas de una planta térmica de ciclo combinado.

El simulador de la turbina a gas se modela de acuerdo a los siguientes supuestos:

- Los productos de la combustión y el aire son tratados como gases ideales.
- Los calores específicos se suponen constantes para los productos de la combustión, aire y vapor inyectado.
- Los flujos a través del compresor y turbina son descritos por un proceso politrópico uniforme adiabático y se describen en el Apéndice A1.

3.3.4. Componentes complementarios de una central termoeléctrica de ciclo combinado

Algunos componentes complementarios que se destacan de una planta termoeléctrica son: condensador, sistema de agua de alimentación y generador eléctrico.

La función del condensador consiste en tomar el vapor liberado de la turbina a vapor (se refiere particularmente a la etapa de baja presión, en la cual el vapor deja la turbina casi en condiciones de vacío) y condensarlo. Para ello, el condensador posee cañerías por las cuales circula agua de enfriamiento la cual toma el calor que existe en el vapor y lo saca de él. Una bomba (llamada bomba de condensación) toma el agua condensada y la lleva a la caldera. Esto sirve para bajar la temperatura del vapor y mejorar la eficiencia del ciclo.

La principal función del sistema de agua de alimentación es tomar el condensado que produce el condensador y llevarlo a la caldera nuevamente. Durante el proceso de condensación no todo el vapor se condensa y por ello es necesario usar un aireador que toma la mezcla de vapor y agua que sale del condensador y la transforma en sólo agua. Para mantener el agua a una cierta temperatura dentro del aireador, se usa además vapor que también entra al aireador. Las pérdidas de agua que existen son suplidas mediante el uso de agua de compensación. El paso final consiste en tomar el agua del aireador y pasarla a través del economizador para calentarla un poco y luego llevarla al domo como agua de alimentación.

Por último la turbina a gas y la turbina a vapor tienen acoplados a sus ejes generadores síncronos trifásicos de rotor cilíndrico. Generalmente estas unidades tienen una alta eficiencia en la transformación de energía mecánica a eléctrica y por ello son ampliamente utilizados en estas labores.

3.4. Implementación en Matlab-SIMULINK

El simulador fenomenológico se desarrollo para una central termoeléctrica de ciclo combinado de 50 [MW], que incluye una turbinas a gas ($P_g = 34$ [MW]), una caldera y una turbinas a vapor ($P_s = 11$ [MW]). Los modelos y sus parámetros se han determinado y adaptado del trabajo de Ordys, *et al.* (1994). El simulador consta de 34 ecuaciones diferenciales y más de 100 ecuaciones algebraicas.

En la Figura 3.10 se presenta el simulador completo de la central termoeléctrica de ciclo combinado. Las principales componentes del simulador en Matlab-SIMULINK se presentan en el Apéndice A1.

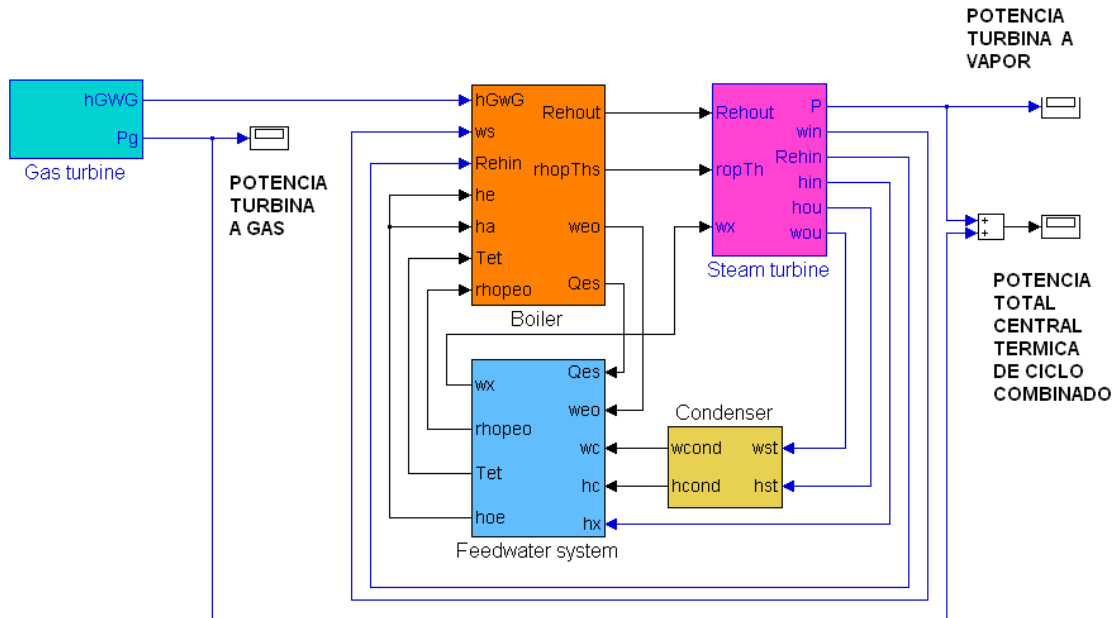


Figura 3.10. Simulador de planta termoeléctrica de ciclo combinado en Matlab-SIMULINK.

IV. Sistema de Control Supervisor Predictivo Híbrido.

En este capítulo se plantea la formulación del diseño de control supervisor predictivo híbrido con sus componentes principales. Para esto se describe:

- Planteamiento de la función objetivo general.
- Descripción de modelos para el sistema regulatirio y la planta termoeléctrica.
- Determinación de las restricciones para las variables controladas y manipuladas.
- Solución del problema de optimización.

En un mundo cada vez más competitivo el sector industrial pretende mejorar la productividad y reducir sus costos. Además las grandes inversiones en centrales termoeléctricas, en particular en centrales de ciclo combinado, exigen un gran esfuerzo en mantener su disponibilidad en el tiempo, optimizando su funcionamiento tanto por razones operacionales como económicas y/o ambientales.

Por su parte, aunque el nivel regulatorio logra mantener el error acotado, entre la referencia y variables del proceso, por las razones antes señaladas es necesario optimizar

aun más la operación de la planta. Ante este problema se tienen las siguientes alternativas de solución:

1. Reemplazar el sistema regulatorio por un sistema de control optimizante.
2. Agregar un nivel supervisor optimizante sin modificar el nivel regulatorio

Debido al alto costo asociado a la modificación de los controladores regulatorios (ejemplo, controladores PID), el sector industrial acepta con mayor facilidad la segunda alternativa. Además un sistema de control supervisor permite mejorar el nivel regulatorio a través de la modificación dinámica de los set-points o referencias, manteniendo fijo todo el sistema regulatorio del proceso.

Existen variadas contribuciones que tratan con la optimización de set-points basado en modelos de estado estacionario. Por ejemplo, (Ellis 1998) presenta la optimización económica de una unidad de craking catalítico de lecho fluizado. El nivel regulatorio es compuesto por una restricción no lineal del controlador, los set-point son entregados por el nivel optimizante. En este caso, los parámetros en estado estacionario son adaptados en línea.

En Zheng (1999) se presenta una estrategia de control jerárquico para maximizar los resultados de una planta química. En este caso, los modelos en proceso en estado estacionario son usados para determinar los set-points, los cuales optimizan una función objetivo económico.

Muñoz y Cipriano (Muñoz 1999) y (Muñoz 2000) proponen una estrategia económica de control para una planta de procesamiento de mineral. La estrategia está compuesta por un nivel regulatorio dado por un controlador predictivo multivariable y un optimizador económico global para determinar los set-points de controlador predictivo. En este trabajo son considerados modelos en estado estacionario no lineales del proceso de molienda y modelos dinámicos del proceso de flotación.

En Becerra (1999) se propone una formulación predictiva multi-objetivo que incluye tanto objetivos económicos como regulatorios, basándose en modelos en estado estacionario.

Además existen algunos trabajos con modelos dinámicos. Por ejemplo, en de Prada (1996) se propone una estrategia de control predictivo basado en la optimización de un índice económico. Esta estrategia fue aplicada a un reactor químico. En (Katebi 1997) se describe una estrategia de control descentralizada. En este trabajo se utiliza una representación en espacio de estado. La función objetivo representa solamente objetivos regulatorios. La estrategia de control fue aplicada a un simulador de una central termoeléctrica.

Por otro lado, Bemporad, (1997) y Angeli, (1999) proponen un regulador de referencia en el nivel supervisor. En este trabajo, la función objetivo está dada por la

minimización del error de trayectoria de la referencia. Los algoritmos son desarrollados usando una representación del espacio de estado y el objetivo es satisfacer ciertas restricciones.

Una visión diferente para el diseño del gobernador por referencia, con la misma función objetivo, es propuesta por Gilbert, (1999). En este caso, el control de referencia está dado por un pre-filtro no-lineal. Tadeo et al. (2002) proponen un controlador supervisor predictivo con restricciones, relacionado con el lazo de realimentación del controlador PID a nivel regulatorio y con función objetivo regulatoria.

En Garduno et. al. (2001) se presenta un procedimiento para optimizar el diseño de la relación potencia presión definiendo y resolviendo un problema de optimización multiobjetivo. Ambos, procedimiento son implementados con un sistema supervisor. El problema de optimización se resuelve optimizando una función objetivo no lineal, la cual entrega una sola solución desde el estudio de un conjunto de soluciones pareto óptimas.

4.1. Planteamiento del problema

La estrategia de control propuesta en este trabajo está basada en un nivel supervisor que determina el set-point óptimo para un sistema regulatorio dado. El nivel supervisor optimiza dinámicamente una función objetivo general incluyendo restricciones de igualdad y de desigualdad.

El problema planteado puede ser resuelto analíticamente con la teoría de control predictivo cuando se usan modelos lineales y puede ser resuelto por algoritmos numéricos cuando se trabaja con restricciones o se consideran modelos no lineales como por ejemplo modelos híbridos.

En la Figura 4.1 se muestra como el nivel supervisor entrega el set-point (r) basado en la optimización de la función objetivo (J), la trayectoria de una referencia externa (w), las variables controladas (y) y las variables manipuladas (u). El proceso es influenciado por perturbaciones no medibles (e) (Muñoz, 2000).

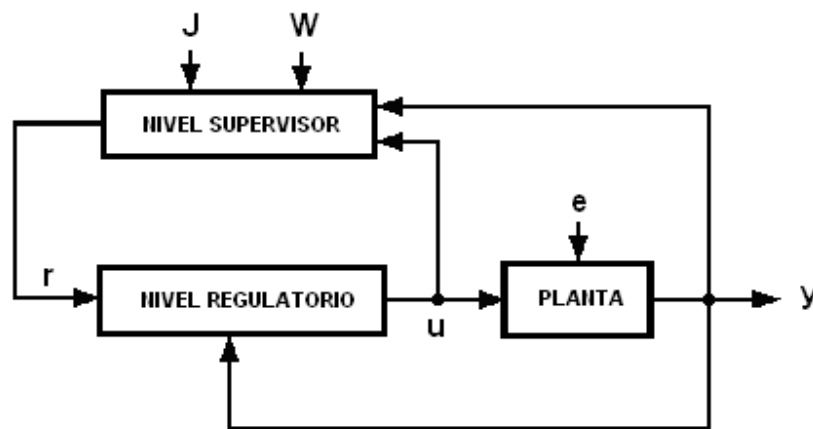


Figura 4.1 Diagrama de control supervisor.

4.2. Componentes del sistema de control supervisor predictivo híbrido

A continuación se presenta las partes principales del problema de optimización para lograr la ley del control supervisor.

4.2.1. Función objetivo general

La función objetivo considerada es:

$$\begin{aligned}
 J = & \sum_{j=1}^{Ny} \Psi_y^j \hat{y}^2(t+j) + \sum_{i=1}^{Nu} \Psi_u^i u^2(t+i-1) + \sum_{i=1}^{Nu} \Psi_{\Delta u}^i \Delta u^2(t+i-1) \\
 & + \sum_{j=1}^{Ny} \sum_{i=1}^{Nu} \Psi_{yu}^{ji} \hat{y}(t+j)u(t+i-1) + \sum_{j=1}^{Ny} \xi_y^j \hat{y}(t+j) + \sum_{i=1}^{Nu} \xi_u^i u(t+i-1) + \sum_{i=1}^{Nu} \xi_{\Delta u}^i \Delta u(t+i-1)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $u(t+i)$ son las variables manipuladas y $\hat{y}(t+j)$ son las predicciones a j -pasos de las variables controladas. Además Ψ y ξ son parámetros de peso, Nu es el horizonte de control y Ny es el horizonte de predicción. La trayectoria externa w también puede ser incluida en la función objetivo.

La función objetivo (4.1) puede representar metas diferentes de optimización en el nivel supervisor. Por ejemplo, costos operacionales del funcionamiento de la planta, y/o consumo de energía y/o criterios regulatorios.

4.2.2. Modelo del nivel regulatorio

La optimización de la operación de la planta se logra añadiendo un nivel supervisor óptimo sin modificar el nivel regulatorio. El nivel regulatorio puede ser más o menos complicado de modelar dependiendo de su complejidad. Por ejemplo un control PID simple puede ser representado por la siguiente expresión.

$$A_c(q^{-1})u(t) = B_{cr}(q^{-1})r(t) + B_{cy}(q^{-1})y(t) \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
 A_c(q^{-1}) &= I + a_{c_1}q^{-1} + \dots + a_{c_{nac}}q^{-nac} \\
 B_{cr}(q^{-1}) &= b_{r_0} + b_{r_1}q^{-1} + \dots + b_{r_{mb}}q^{-mb} \\
 B_{cy}(q^{-1}) &= b_{y_0} + b_{y_1}q^{-1} + \dots + b_{y_{mb}}q^{-mb}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para sistemas regulatorios más complejos que incluyan procesos híbridos es necesario incluir variables binarias las cuales deben ser activadas de acuerdo a la ocurrencia o no de los eventos discretos que activan un determinado subsistema.

Como ejemplo de un proceso híbrido en el sistema regulatorio sea una señal $y_{ab}(t)$ definida como la menor de dos señales iniciales $u_a(t)$ y $u_b(t)$ lo cual, se describe de la siguiente forma:

$$y_{ab}(t) = \min\{u_a(t), u_b(t)\} \quad (4.4)$$

La ecuación anterior es claramente no lineal y puede ser descrita por

$$y_{ab}(t) = u_a(t) + u_b(t)(1 - \delta) \quad (4.5)$$

Donde la variable binaria adicional δ es incluida para representar el comportamiento híbrido de la ecuación (4.5), es decir:

$$\begin{aligned} y_{abc}(t) = u_a(t) &\Leftrightarrow \delta = 1 \\ y_{abc}(t) = u_b(t) &\Leftrightarrow \delta = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Además por medio de las reglas descritas en el apartado 2.2.1, la ecuación no-lineal (4.5) se puede describir por un conjunto de inecuaciones lineales.

4.2.3. Restricciones generales

Se consideran restricciones de amplitud y velocidad en las variables manipuladas y límites en las variables controladas. Es decir:

$$\begin{aligned} u_{\min} \leq u(t+i-1) \leq u_{\max} &\quad \text{con } i = 1, \dots, N_u \\ \Delta u_{\min} \leq \Delta u(t+i-1) \leq \Delta u_{\max} &\quad \text{con } i = 1, \dots, N_u \\ y_{\min} \leq y(t+i) \leq y_{\max} &\quad \text{con } i = 1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2.4. Modelo del proceso

Para construir un controlador supervisor lineal es necesario determinar el modelo lineal del proceso. En este trabajo se utiliza un modelo ARIX (“Auto Regresive Integer with eXogenous Variables”), que es más apropiado para muchos procesos industriales, con perturbaciones no estacionarias.

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{e(t)}{\Delta} \quad (4.8)$$

con

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + aq^{-1} + \dots + aq^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \\ \Delta(q^{-1}) &= 1 - q^{-1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Además $e(t)$ es ruido blanco de media cero y q^{-l} es el operador de desplazamiento.

Para sistemas complejos se hace necesario modelar la planta con un modelo no lineal para obtener una mejor representación. Este modelo puede ser de muchas formas, por ejemplo en el Anexo B2, se utilizó un modelo difuso Takagi & Sugeno que se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_{k+j} = d^l y_{k+j-l} + \dots + d^{ny} y_{k+j-ny} + d^{ny+l} u_{k+j-l} + \dots + d^{ny+nu} u_{k+j-nu} + d^{ny+nu+l} \quad (4.10)$$

donde los parámetros $d^i = d^i(y_{k+j-l}, \dots, y_{k+j-ny}, u_{k+j-l}, \dots, u_{k+j-nu})$ son función no-lineal de los regresores.

4.2.5. Soluciones tradicionales

El control supervisor se resuelve al optimizar la función objetivo (4.1) con las ecuaciones del nivel regulatorio con modelo lineal (4.3) o no-lineal (4.3), las restricciones de las variables manipuladas y de las variables controladas (4.7) y según corresponda las ecuaciones del modelo lineal (4.9) o no-lineal (4.10) del proceso.

Para encontrar la ley de control cuando existen eventos híbridos modelados como restricciones, se puede utilizar un algoritmo de optimización entera mixta, el cual combina el método de optimización Branch & Bound y la programación lineal o cuadrática. Sin embargo esta solución a partir de un cierto número de variables binarias se vuelve computacionalmente muy costosa.

Otra posibilidad es trabajar con variables de estado y transformar el problema de control supervisor predictivo híbrido con restricciones en un problema de optimización multiparamétrica, cuya solución sería una ley de control afín a trozos sobre una partición poliédrica del espacio de estado. Se discutirá la posibilidad de esta solución en el capítulo VIII.

4.2.6. Solución combinada con algoritmos genéticos y programación cuadrática

Finalmente aprovechando la estructura específica del problema de control predictivo híbrido, que se desea resolver en este trabajo se ideó un método de solución del problema de optimización que combina los algoritmos genéticos y la programación cuadrática.

Éste al igual que el método tradicional de control predictivo considera la solución de un problema de optimización que consiste en una función objetivo que penaliza tanto el error de set-point como el costo del combustible, sometido a las restricciones del modelo de la planta y sus predicciones a n pasos como a las restricciones que modelan el sistema regulatorio del sistema y sus predicciones a n pasos.

En el caso de restricciones que representen modelos de eventos híbridos, estas incluirán variables cuantizadas para modelar dichos eventos (modelos MLD). Estas

variables cuantizadas como su nombre lo indica pueden tomar un número limitado de valores dependiendo del número de realizaciones del evento híbrido.

En esta solución cada gen de dimensión n , del algoritmo genético, determinará una serie de n realizaciones del evento híbrido en el futuro que ahora se transformarían en simples modelos lineales a n pasos, luego una vez definido un gen, lo que se obtiene es un problema de optimización que se puede resolver fácilmente por programación cuadrática. Es decir el fitness asociado a cada gen será el resultado del valor mínimo de la función objetivo del problema optimización correspondiente.

Luego de los pasos anteriores se logra un método de optimización mixto. Es decir un algoritmo genético de optimización global cuya solución se basa de un número grande de problemas de programación cuadrática en a cada generación, cada uno de los cuales de rápida solución. Luego haciendo evolucionar el algoritmo un tiempo apropiado se pueden encontrar soluciones satisfactorias con respecto a la precisión y costo computacional

Este algoritmo se aplica en el capítulo V con muy buenos resultados.

V. Aplicación a la Turbina a Gas de una Central Termoeléctrica de Ciclo Combinado.

En este capítulo se describe la aplicación del diseño de control supervisor predictivo híbrido para la Turbina a Gas de una Central Termoeléctrica de Ciclo Combinado. (En el Anexo B2, se realiza un análisis semejante pero sin modelar las características híbridas del sistema de control). Se presentan los siguientes temas:

- Obtención del modelo multivariable de la turbina a gas y del modelo híbrido de su sistema regulatorio.
- Diseño y aplicación de un controlador supervisor predictivo híbrido a la turbina a gas con control de frecuencia. Se desarrollaron tres tipos de controladores supervisores predictivos incluyendo el tradicional MPC, un controlador híbrido HPC-S con solución heurística óptima y finalmente un controlador híbrido HPC-G cuya solución se obtuvo a través de optimización con algoritmos genéticos.
- Diseño y aplicación de un controlador predictivo supervisor híbrido de la turbina a gas con simplificación del sistema regulatorio. Aquí se diseñó cuatro tipos de controladores supervisores predictivos incluyendo el tradicional MPC, un controlador híbrido HPC-S con solución heurística óptima, un controlador híbrido

HPC-EE cuya solución se obtuvo a través de enumeración explícita y finalmente un controlador híbrido HPC-G cuya solución se obtuvo a través optimización con algoritmos genéticos.

5.1. Modelación multivariable de la Turbina a Gas

El modelo lineal multivariable de la turbina a gas es obtenido a partir de datos experimentales del simulador definido en el capítulo IV por el método de mínimos cuadrados con tiempo de muestreo de 1 [seg]. Se consideran 3500 muestras para el conjunto de entrada y 3500 para validación.

El modelo lineal ARIX multivariable para la turbina a gas está dado por:

$$\begin{aligned} T_{tout}(t) + a_1 T_{tout}(t-1) &= b_1 W_a(t-1) + c_1 F_d(t-1) + \frac{e_1(t)}{\Delta} \\ P_{mech}(t) + a_2 P_{mech}(t-1) &= b_2 W_a(t-1) + c_2 F_d(t-1) + \frac{e_2(t)}{\Delta} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Donde las variables controladas son temperatura de los gases de escape (T_{Tout}), la potencia de la turbina a gas (P_{mech-G}). Las variables manipuladas son el flujo de aire al compresor (w_a), el flujo de combustible (F_d). Los parámetros se presentan en apéndice E

En la tabla 5.1 se muestran valores del error de validación a 1 paso y a 10 pasos, obtenidos con modelo lineal multivariable de la turbina a gas propuesto en (5.1).

Tabla 5.1. Error de validación con modelación lineal

Errores	Error validación e rms	Error validación porcentual c/r set-point e%=100*e/set-point
Predicción a 1 paso	5.6773e+005	1.4533
Predicción a 10 pasos	6.1258e+005	1.6799

Las ecuaciones del modelo lineal multivariable serán restricciones en el problema de optimización del control supervisor predictivo híbrido.

Como $e(t)$ es ruido blanco $E(e(t)) = 0$, luego se trabajará con las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{tout}(t+1) &= a_{11} T_{tout}(t) + a_{12} T_{tout}(t-1) + c_{11} F_d(t) + c_{12} F_d(t-1) \\ \hat{P}_{mech}(t+1) &= a_{21} P_{mech}(t) + a_{22} P_{mech}(t-1) + c_{21} F_d(t-1) + c_{22} F_d(t-2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\text{con} \quad \begin{array}{cccc} a_{11} = a_1 - 1 & a_{21} = a_2 - 1 & a_{12} = -a_1 & a_{22} = -a_2 \\ b_{11} = b_1 - 1 & b_{21} = b_2 - 1 & b_{12} = -b_1 & b_{22} = -b_2 \\ c_{11} = c_1 - 1 & c_{21} = c_2 - 1 & c_{12} = -c_1 & c_{22} = -c_2 \end{array}$$

En la Figura 5.1 se aprecia el comportamiento del modelo lineal multivariable de la turbina a gas con predicción a 10 pasos.

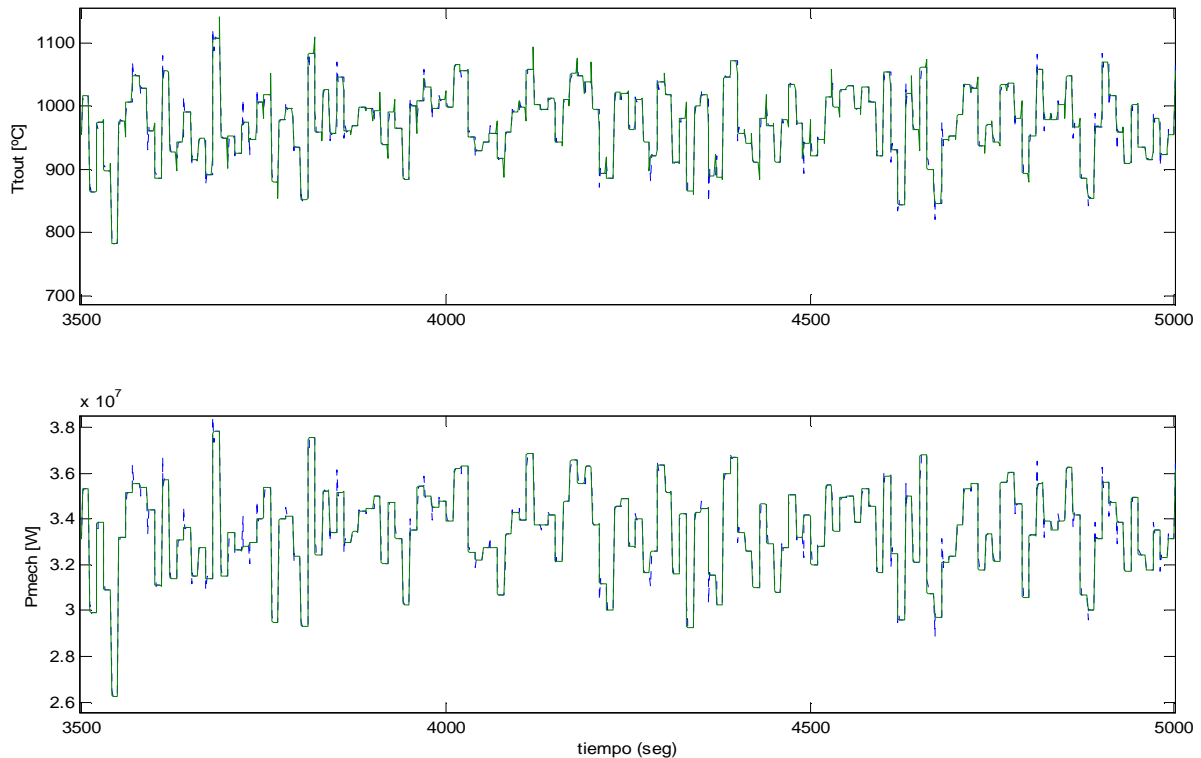


Figura 5.1. Modelo lineal multivariable de la turbina gas con predicción a 10 pasos
 — Modelo ARIX - - - Datos del simulador

5.2. Modelación del sistema regulatorio de la turbina gas

A continuación se describe el sistema regulatorio de la turbina gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado.

En la Figura 5.2 se muestra el sistema regulatorio de la turbina a gas (dentro de la línea achurada) y la conexión con la señal de frecuencia del generador de una central termoeléctrica de ciclo combinado. Se analizará la relevancia de cada parte del sistema con relación a su participación efectiva en el controlador predictivo supervisor que se implementará.

En el sistema regulatorio la función $f(x)$ elige entre la menor de tres señales u_a (relacionada con la Temperatura), u_b (relacionada con la potencia mecánica) y u_c

(relacionada con la frecuencia). De esta manera a mayor potencia mayor temperatura en la cámara de combustión, la cuál tiene límite térmico para trabajar en condiciones normales, luego en este caso es necesario que se regule por temperatura y entrara a controlar el PI2. De igual manera cuando se produce un aumento de velocidad en la turbina el PI4 debería controlar. Notar la multiplicación de la señal de frecuencia y la salida de switch, esto es para considerar el efecto que tiene la variación de frecuencia en la velocidad de la bomba del sistema de combustible. Además de aprecia la señal de referencia para la temperatura (r_1) y la de referencia para la potencia mecánica (r_2).

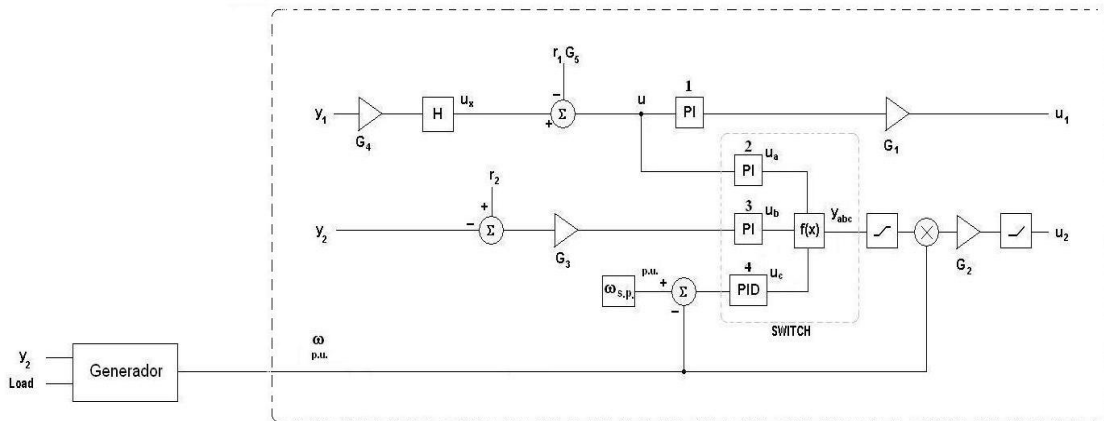


Figura 5.2. Sistema regulatorio de la turbina a gas (línea achurada) y la señal de frecuencia del generador.

A partir de lo anterior se desarrollan las ecuaciones para realizar el control supervisor predictivo híbrido con switch de tres controladores. Analizaremos el sistema por secciones lineales y no lineales.

5.2.1. Sección lineal del sistema regulatorio

En la Figura 5.3 se observa parte de la sección lineal del sistema regulatorio descrito en 5.2.

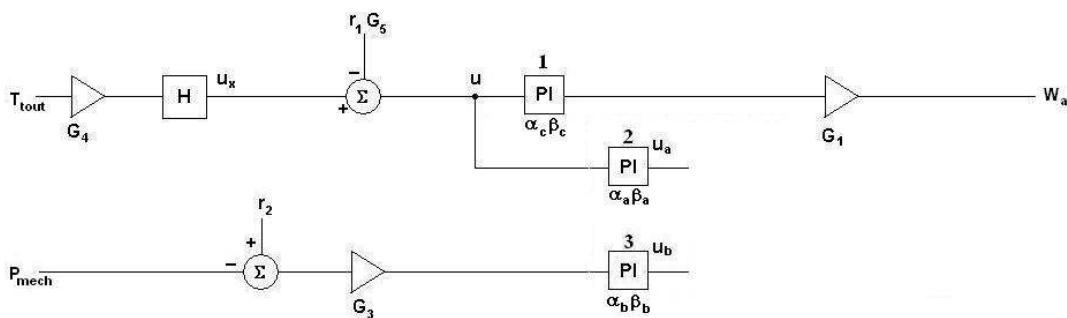


Figura 5.3. Sección lineal del sistema regulatorio

Las ecuaciones que representan la dinámica del sistema regulatorio son:

$$u_x(t) - a_x u_x(t-1) = b_x G_4 T_{tout}(t-1) \quad (5.3)$$

$$u(t) = u_x(t) - G_5 r_1 \quad (5.4)$$

$$W_a(t) - W_a(t-1) = G_1 \alpha_c u(t) + G_1 \beta_c u(t-1) \quad (5.5)$$

$$u_a(t) - u_a(t-1) = \alpha_a u(t) + \beta_a u(t-1) \quad (5.6)$$

$$u_b(t) - u_b(t-1) = G_3 \alpha_b r_2(t) + G_3 \beta_b r_2(t-1) - G_3 \alpha_b P_{mech}(t) - G_3 \beta_b P_{mech}(t-1) \quad (5.7)$$

donde los parámetros se presentan en apéndice E

De (5.3) tenemos:

$$u_x(t) = \frac{b_x G_4 T_{tout}(t-1)}{1 - a_x q^{-1}} \Leftrightarrow u_x(t-1) = \frac{b_x G_4 T_{tout}(t-2)}{1 - a_x q^{-1}} \quad (5.8)$$

También (5.4),(5.5) y (5.6)

$$W_a(t) - W_a(t-1) = -G_1 G_5 \alpha_c r_1(t) - G_1 G_5 \beta_c r_1(t-1) + G_1 \alpha_c u_x(t) + G_1 \beta_c u_x(t-1) \quad (5.9)$$

$$u_a(t) - u_a(t-1) = -G_5 \alpha_a r_1(t) - G_5 \beta_a r_1(t-1) + \alpha_a u_x(t) + \beta_a u_x(t-1) \quad (5.10)$$

entonces de (5.13),(5.14) y (5.15) las ecuaciones lineales del sistema regulatorio son:

$$W_a(t) - (1 + a_x)W_a(t-1) + a_x W_a(t-2) = -G_1 G_5 \alpha_c r_1(t) + G_1 G_5 (\alpha_c a_x - \beta_c) r_1(t-1) \quad (5.11)$$

$$+ G_1 G_5 \beta_c a_x r_1(t-2) + b_x G_4 G_1 \alpha_c T_{tout}(t-1) + b_x G_4 G_1 \beta_c T_{tout}(t-2) \quad (5.12)$$

$$u_a(t) - (1 + a_x)u_a(t-1) + a_x u_a(t-2) = -G_5 \alpha_a r_1(t) + G_5 (\alpha_a a_x - \beta_a) r_1(t-1) \quad (5.12)$$

$$+ G_5 \beta_a a_x r_1(t-2) + b_x G_4 \alpha_a T_{tout}(t-1) + b_x G_4 \beta_a T_{tout}(t-2) \quad (5.13)$$

$$u_b(t) - u_b(t-1) = G_3 \alpha_b r_2(t) + G_3 \beta_b r_2(t-1) - G_3 \alpha_b P_{mech}(t) - G_3 \beta_b P_{mech}(t-1) \quad (5.13)$$

donde los parámetros se presentan en apéndice E

Por lo tanto, las ecuaciones lineales del sistema regulatorio son:

$$0 = \alpha_{11} T_{tout}(t-1) + \alpha_{12} T_{tout}(t-2) + \beta_{13} W_a(t-2) \quad (5.14)$$

$$+ \gamma_{11} r_1(t) + \gamma_{12} r_1(t-1) + \gamma_{13} r_1(t-2) \quad (5.14)$$

$$0 = \alpha_{21} T_{tout}(t-1) + \beta_{22} u_a(t-1) + \beta_{23} u_a(t-2) \quad (5.15)$$

$$+ \gamma_{21} r_1(t) + \gamma_{22} r_1(t-1) + \gamma_{23} r_1(t-2) \quad (5.15)$$

$$0 = \alpha_{31} P_{mech}(t) + \alpha_{32} P_{mech}(t-1) + \beta_{31} u_b(t) + \beta_{32} u_b(t-1) + \gamma_{31} r_2(t) + \gamma_{32} r_2(t-1) \quad (5.16)$$

Modelo del generador

El modelo del generador implementado se observa en la Figura 5.4

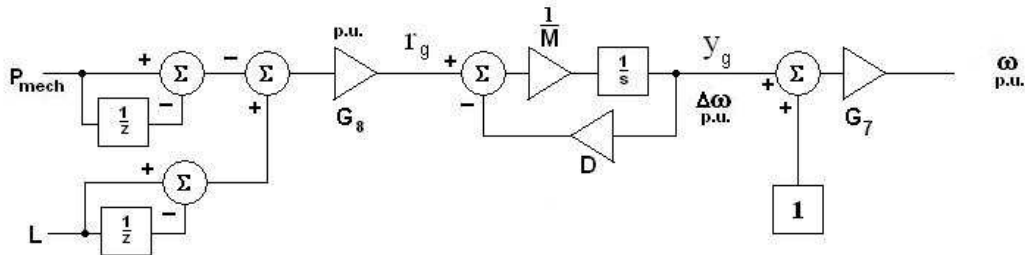


Figura 5.4. Modelo del generador implementado.

A partir del modelo carga (más detalles en el apéndice D)

$$\frac{y_g(s)}{r_g(s)} = \frac{1}{Ms + D} \quad (5.17)$$

donde

$$\begin{aligned} D = 0.8 & : \text{ Constante de amortiguamiento de carga.} \\ M = 4.5 & : \text{ Momentum angular de la maquina.} \end{aligned} \quad (5.18)$$

además se tiene de la Figura 5.4

$$r_g(t) = (\Delta L(t) - \Delta y_2(t)) \frac{1}{P_{s.p.}} \quad (5.19)$$

con $\Delta = 1 - z^{-1}$ y con $P_{s.p.} = 3.386 * 10^7$ y también

$$\omega(t) = y_g(t) + 1 \quad (5.20)$$

por lo tanto podemos encontrar la siguiente relación entre la potencia mecánica $P_{mech}(t)$, la carga $L(t)$ y la frecuencia $\omega(t)$

$$\begin{aligned} C_{L\omega} = \alpha_{41} P_{mech}(t-2) + \alpha_{42} P_{mech}(t-1) + \alpha_{43} P_{mech}(t) \\ + \psi_1 L(t-2) + \psi_2 L(t-1) + \psi_3 L(t) + \phi_{21} \omega(t-1) - \omega(t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

La obtención de la ecuación y los parámetros se presentan en apéndice E (modelo del generador)

Modelo del PID

También es necesario modelar el PID 4 con un modelo discreto. Solamente para una identificación clara de las variables implicadas se presenta la Figura 5.5.

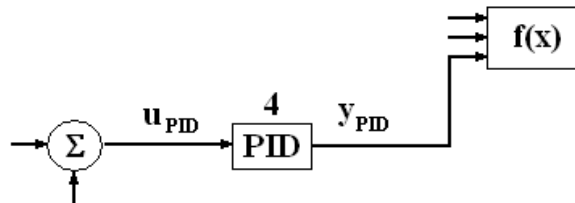


Figura 5.5. PID 4

La ecuación del PID puede ser descrita por

$$y_{PID}(t) - y_{PID}(t-2) = \phi_{13} u_{PID}(t) + \phi_{12} u_{PID}(t-1) + \phi_{11} u_{PID}(t-2) \quad (5.22)$$

cuya ecuación y parámetros se presentan en apéndice E.

Frecuencia

La relación con la frecuencia presentada en la Figura 5.2 se describe en detalle en la Figura 5.6

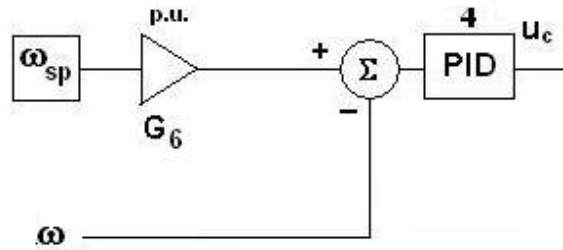


Figura 5.6. Frecuencia

Definiendo

$$y(t) = u_c(t) \quad (5.23)$$

$$u(t) = \omega_{s.p.} - \omega(t)$$

tenemos

$$u_c(t) - u_c(t-2) = (\phi_{13} + \phi_{12} + \phi_{11})\omega_{s.p.} - \phi_{13}\omega(t) - \phi_{12}\omega(t-1) - \phi_{11}\omega(t-2) \quad (5.24)$$

$$C_4 = -u_c(t-2) - u_c(t) + \phi_{11}\omega(t-2) + \phi_{12}\omega(t-1) + \phi_{13}\omega(t) \quad (5.25)$$

$$\text{con } c_4 = (\phi_{13} + \phi_{12} + \phi_{11})\omega_{s.p.} \text{ y } \omega_{s.p.} = 50 \quad (5.26)$$

5.2.2. Sección no lineal del sistema regulatorio

En la Figura 5.7 se observa la sección no-lineal del nivel regulatorio de la turbina a gas descrito

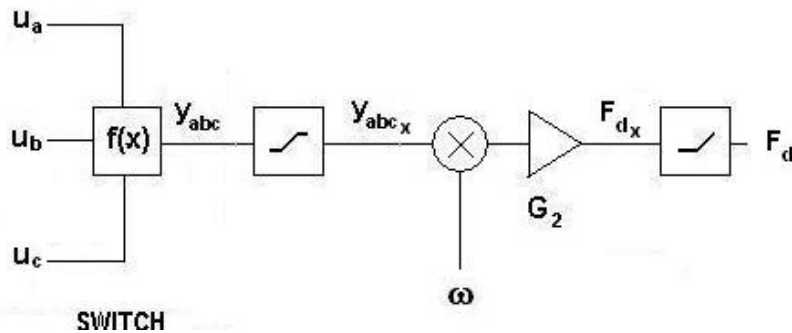


Figura 5.7. Sección no lineal del sistema regulatorio

Ecuaciones no lineales del sistema regulatorio

La multiplicación de la señal de frecuencia y la salida del switch, según la Figura 5.7, generan una ecuación no lineal la cual se simplificara por medio de una aproximación de Taylor de primer orden:

$$f \approx g \text{ cerca de } x_0 \text{ con } g = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) \quad (5.27)$$

Ahora si: $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ entonces

$$g(x_1, x_2) = x_1^0 x_2^0 + \begin{bmatrix} x_2^0 & x_1^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \end{bmatrix} = x_2^0 x_1 + x_1^0 x_2 - x_1^0 x_2^0$$

$$\Rightarrow f \approx g \text{ cerca de } (x_1^0, x_2^0)$$

en nuestro caso la aproximación de la ecuación

$$F_{d_x}(t) = G2 y_{abc_x}(t) \omega(t) \quad (5.28)$$

cerca del punto $(y_{abc_x}(t_0), \omega(t_0))$ es:

$$F_{d_x}(t) = G2 \omega(t_0) y_{abc_x}(t) + G2 y_{abc_x}(t_0) \omega(t) \quad (5.29)$$

El conmutador o switch tiene la siguiente ecuación

$$y_{abc}(t) = \min\{u_a(t), u_b(t), u_c(t)\} \quad (5.30)$$

la ecuación del conmutador (5.30) se puede remplazar por su formulación MLD (Mixed Logical Dynamic) ecuación (5.31):

$$y_{abc}(t) = u_a(t) \delta(t) (2 - \delta(t)) + u_b(t) \frac{(1 - \delta(t))(2 - \delta(t))}{2} - u_c(t) \frac{(1 - \delta(t)) \delta(t)}{2} \quad (5.31)$$

donde la variable ternaria adicional $\delta(t)$ es incluida para representar el comportamiento del conmutador, es decir:

$$\begin{aligned} y_{abc}(t) = u_a(t) &\Leftrightarrow \delta(t) = 1 \\ y_{abc}(t) = u_b(t) &\Leftrightarrow \delta(t) = 0 \\ y_{abc}(t) = u_c(t) &\Leftrightarrow \delta(t) = 2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Por último las restricciones de las variables manipuladas son

$$y_{abc_x}(t) = \begin{cases} 1.5 & y_{ab}(t) > 1.5 \\ y_{ab}(t) & y_{ab}(t) \geq -0.1 \quad \& \quad y_{ab}(t) \leq 1.5 \\ -0.1 & y_{ab}(t) < -0.1 \end{cases} \quad (5.33)$$

$$F_d(t) = \begin{cases} F_{d_x}(t) & F_{d_x}(t) \geq F_{d_{\min}} \\ F_{d_{\min}} & F_{d_x}(t) < F_{d_{\min}} \end{cases} \quad (5.34)$$

5.3. Diseño de estrategia de control supervisor predictivo híbrido para la turbina a gas: Enfoque 1

En esta sección se presenta el problema de optimización para obtener la solución en control supervisor predictivo híbrido con control de frecuencia en la turbina a gas de la central termoeléctrica de ciclo combinado.

En esta aplicación la función objetivo propuesta contiene solamente un términos regulatorios ($J_{CrT_{out}}$, $J_{CrP_{mech}}$) los cuales incluyen el error de set-point de trayectoria y el control del esfuerzo de control. EL criterio regulatorio asegura que la solución es estable dentro de las restricciones técnicas. La función objetivo a optimizar en el nivel supervisor esta dada por:

$$J = C_{rT_{out}} \cdot J_{CrT_{out}} + C_{rP_{mech}} \cdot J_{CrP_{mech}} \quad (5.35)$$

$$J_{CrT_{out}} = \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_{tout}(t+j) - T_{tout}^r \right)^2 + \lambda_{W_a} \sum_{i=1}^N \Delta W_a^2(t+i-1) \quad (5.36)$$

$$J_{CrP_{mech}} = \sum_{j=1}^N \left(\hat{P}_{mech}(t+j) - P_{mech}^r \right)^2 + \lambda_{F_d} \sum_{i=1}^N \Delta F_d^2(t+i-1) \quad (5.37)$$

donde $\hat{T}_{Tout}(t+j)$ es la j-ésima predicción de la temperatura de los gases de escape, $C_{rT_{out}} = 10^3$ es el factor de peso del nivel regulatorio y $\lambda_{W_a} = 10^{15}$ es el control de peso. La trayectoria externa del set-point para la temperatura de los gases de salida previamente fijada es $T_{tout}^r = 1015.8$. Además $\hat{P}_{mech}(t+j)$ es la j-ésima predicción de la potencia de la turbina a gas, $C_{rP_{mech}} = 1$ es el factor de peso del nivel regulatorio, $\lambda_{F_d} = 10^{17}$ es el peso de control. La trayectoria de set-point externo para la turbina a gas previamente fijada es constante e igual a $P_{mech}^r = 3.386 * 10^7$, y finalmente $N=10$ es la predicción y horizonte de control.

Por lo tanto, el problema de optimización se define por la minimización de la función objetivo (ecuación (5.35)) y considerando que las ecuaciones (5.39) del modelo de la turbina a gas, la ecuaciones (5.40) son los incrementos de las variables manipuladas, las fórmulas (5.41) corresponden las ecuaciones lineales del nivel regulatorio, las formulas (5.42) a las ecuaciones del conmutador y finalmente las ecuaciones (5.43) que representan la restricciones de la variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio. Entonces, el problema de optimización está dado por:

$$\underset{X}{\text{Min}} \quad J = C_{rT_{out}} \cdot J_{CrT_{out}} + C_{rP_{mech}} \cdot J_{CrP_{mech}} \quad (5.38)$$

sujeto a:

para $k = 0, \dots, N - 1$.

Donde el vector de optimización está dado por:

$$X = [\bar{r}_1 \quad \bar{r}_2]^T \quad (5.44)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= [r_1(t) \cdots r_1(t + N - 1)] \\ \bar{r}_2 &= [r_2(t) \cdots r_2(t + N - 1)] \end{aligned} \quad (5.45)$$

Por lo tanto este problema corresponde a un problema NP Hard no lineal entera mixta. La variable de optimización que se aplicará al sistema de control supervisor son el set-point óptimo de temperatura de los gases de escape (r_1^*) y el set-point óptimo de la potencia de la turbina a gas (r_2^*).

Este complejo problema de optimización se resolvió de tres maneras distintas obteniéndose tres controladores supervisores que a continuación se detallan.

5.3.1. Controlador supervisor predictivo multivariable convencional (Solución 1 MPC1)

Para apreciar los beneficios de los controladores híbridos diseñados se comienza diseñando en primer lugar un controlador supervisor tradicional MPC con control de frecuencia.

En la Figura 5.8 se observa el sistema regulatorio utilizado, el cual no considera el conmutador y la señal de control de la potencia mecánica se transfiere directamente.

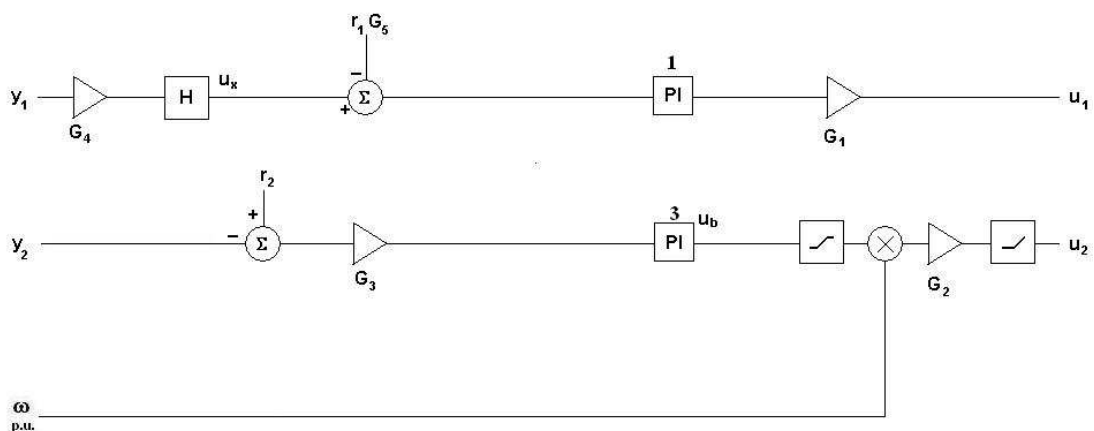


Figura 5.8. Sistema regulatorio para controlador supervisor MPC1

El problema de optimización es el siguiente:

$$\underset{X}{Min} \quad J = C_{rT_{out}} \cdot J_{CrT_{out}} + C_{rP_{mech}} \cdot J_{CrP_{mech}} \quad (5.46)$$

sujeto a:

- Las ecuaciones (5.39) que son las del modelo de la turbina a gas.
- Las ecuaciones (5.40) que son los incrementos de las variables manipuladas.
- Las fórmulas (5.41) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio.
- Las ecuaciones (5.43) que representan las restricciones de las variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio.
- La ecuación del conmutador (5.42) simplificada como:

$$y_{abc}(t+k) = u_b(t+k) \quad \text{para } k = 0, \dots, N-1. \quad (5.47)$$

esto significa que la señal de control de la potencia mecánica se transfiere directamente.

En este caso, el problema se convierte en uno con función objetivo cuadrática y restricciones lineales. La variable de optimización es $x = [\bar{r}_1 \ \bar{r}_2]^T$ y la ley de control aplicada son las primeras componentes de los vectores óptimos $\bar{r}_1^*(t) = [r_1^*(t) \cdots r_1^*(t+N-1)]$ y $\bar{r}_2^*(t) = [r_2^*(t) \cdots r_2^*(t+N-1)]$ es decir:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r_1^*(t) \\ r_2(t) &= r_2^*(t) \end{aligned} \quad (5.48)$$

5.3.2. Controlador supervisor predictivo híbrido simple multivariable con elección de la variable manipulada (Solución 1 HPC-S1).

En este caso se resuelven tres problemas de optimización paralelamente. En cada uno de estos problemas se considera que el conmutador selecciona sólo una de las señales $u_a(t)$, $u_b(t)$ y $u_c(t)$. Posteriormente, se selecciona la señal con mejor valor en la función objetivo. A continuación se describen cada uno de estos tres problemas:

Primer problema: en este caso se considera que se activan las ramas que contiene a la señal $u_a(t)$ y la rama que modela el generador y se busca r_1^* óptimo dinámico del problema de optimización anterior. Además r_2^* se considera como el set-óptimo estático

debido a que no hay ecuaciones relacionadas con r_2 . La estructura del sistema regulatorio se observa en la Figura 5.9.

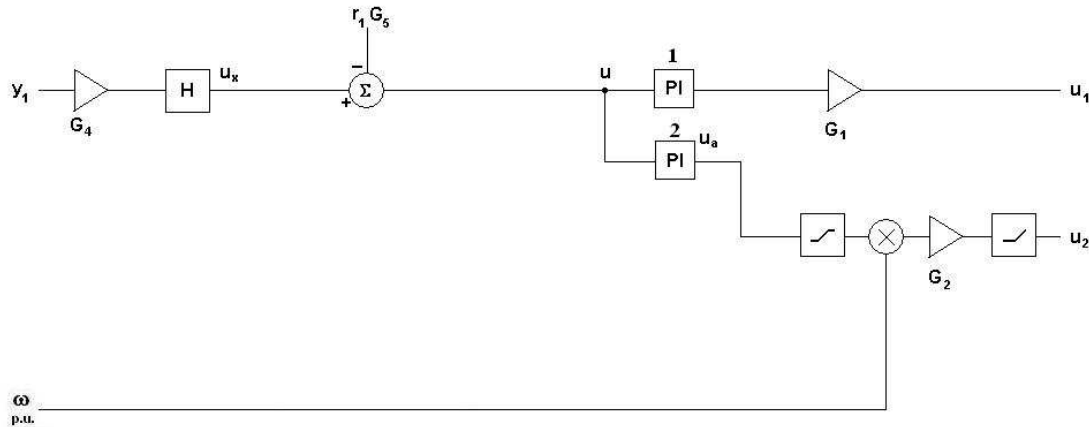


Figura 5.9. Sistema regulatorio para controlador supervisor HPC1 primer problema

Pot lo tanto, el problema de optimización para este caso, está dado por:

$$\underset{X}{\text{Min}} \quad J = C_{rT_{out}} \cdot J_{CrT_{out}} + C_{rP_{mech}} \cdot J_{CrP_{mech}} \quad (5.49)$$

sujeto a:

- Las ecuaciones (5.39) que son las del modelo de la turbina a gas.
- Las ecuaciones (5.40) que son los incrementos de las variables manipuladas.
- Las fórmulas (5.41) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio.
- Las ecuaciones (5.43) que representan las restricciones de las variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio.
- La ecuación (5.50) reemplaza a la ecuación del conmutador (5.42) del problema original.

$$y_{abc}(t+k) = u_a(t+k) \quad \text{para } k = 0, \dots, N-1. \quad (5.50)$$

esto significa que la señal de control de la temperatura se transfiere directamente.

Por lo cual, para resolver el problema de optimización, dado por una función objetivo cuadrática y restricciones lineales se utilizó programación cuadrática

Ahora el vector de optimización es $X = [\bar{r}_1]^T$ y la ley de control aplicada es la primera componente del vector óptimo $\bar{r}_1^*(t) = [r_1^*(t) \cdots r_1^*(t+N-1)]$ y el set-pont estático de potencia

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r_1^*(t) \\ r_2(t) &= 3.386 * 10^7 \end{aligned} \quad (5.51)$$

Segundo problema: en este caso se considera que se activan las ramas que contiene a $u_b(t)$ y la rama que modela el generador. Por lo tanto, se busca el set-óptimo dinámico para r_1 y r_2

El problema de optimización en este caso es idéntico al problema de optimización del control MPC-1 ya mencionado en la sección 5.3.2. El sistema regulatorio a modelar se presenta en la Figura 5.10

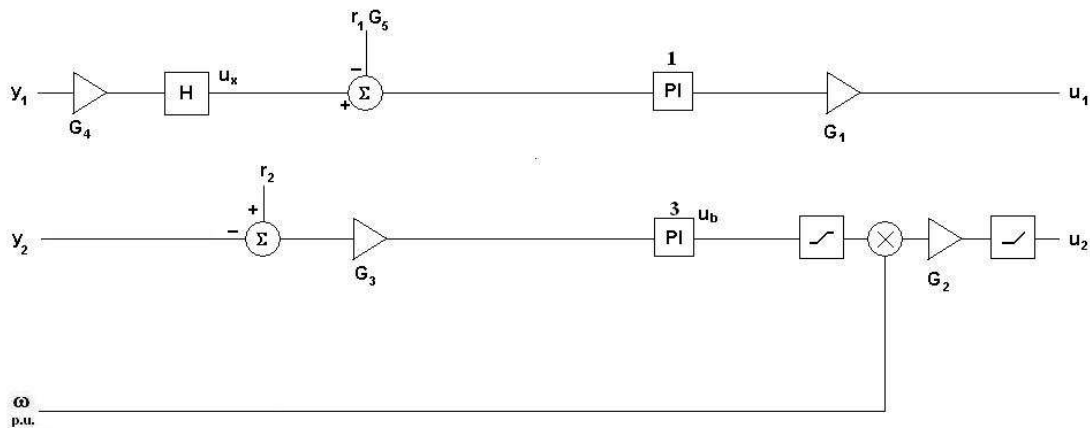


Figura 5.10. Sistema regulatorio para controlador supervisor HPC1 segundo problema

Tercer problema: en este caso se considera que se activan las ramas que contiene a la señal $u_c(t)$ y la rama que modela el generador y se busca r_1^* óptimo dinámico del problema de optimización anterior. Además r_2^* se considera como el set-óptimo estático debido a que no hay ecuaciones relacionadas con r_2 . La estructura de este sistema se observa en la Figura 5.11.

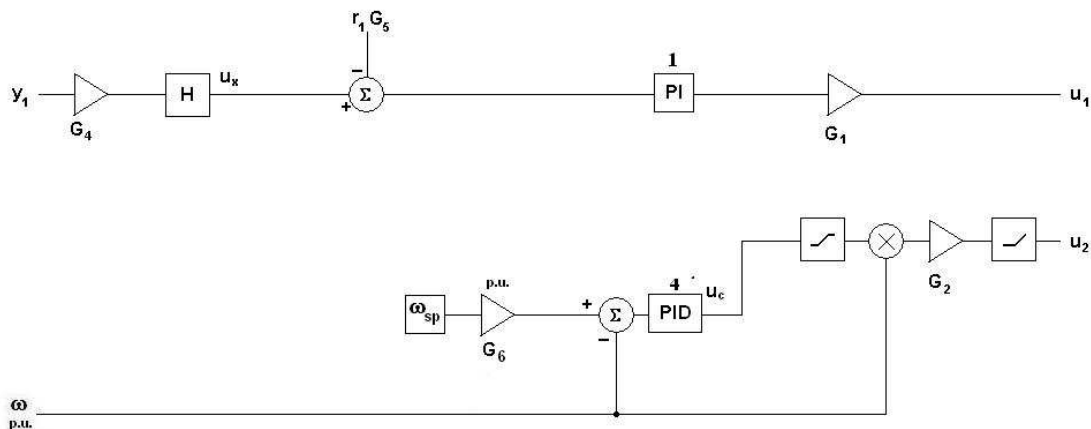


Figura 5.11. Sistema regulatorio para controlador supervisor HPC1 tercer problema

El problema de optimización es el siguiente:

$$\underset{X}{\text{Min}} \quad J = C_{rT_{out}} \cdot J_{CrT_{out}} + C_{rP_{mech}} \cdot J_{CrP_{mech}} \quad (5.52)$$

sujeto a:

- Las ecuaciones (5.39) que son las del modelo de la turbina a gas.
- Las ecuaciones (5.40) que son los incrementos de las variables manipuladas.
- Las fórmulas (5.41) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio.
- Las ecuaciones (5.43) que representan las restricciones de las variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio.
- La ecuación (5.53) reemplaza a la ecuación del conmutador (5.42) del problema original.

$$y_{abc}(t+k) = u_c(t+k) \quad \text{para } k = 0, \dots, N-1. \quad (5.53)$$

esto significa que la señal de control de la frecuencia se transfiere directamente.

Para resolver el problema de optimización, dado por una función objetivo cuadrática y restricciones lineales se utilizó programación cuadrática. El vector de optimización es $X = [\bar{r}_1]^T$ y la ley de control aplicada es la primera componente del vector óptimo $\bar{r}_1^*(t) = [r_1^*(t) \dots r_1^*(t+N-1)]$ y el set-point estático de potencia

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r_1^*(t) \\ r_2(t) &= 3.386 \cdot 10^7 \end{aligned} \quad (5.54)$$

5.3.3. Control supervisor predictivo multivariable híbrido: Solución con algoritmos genéticos (Solución 1 HPC-GA1)

En esta alternativa se utiliza el modelo completo del sistema regulatorio, el cual incluye la modelación híbrida de un conmutador que elige entre la menor señal de las salidas de los PI 2, PI 3 y PI 4 (ver Figura 5.12).

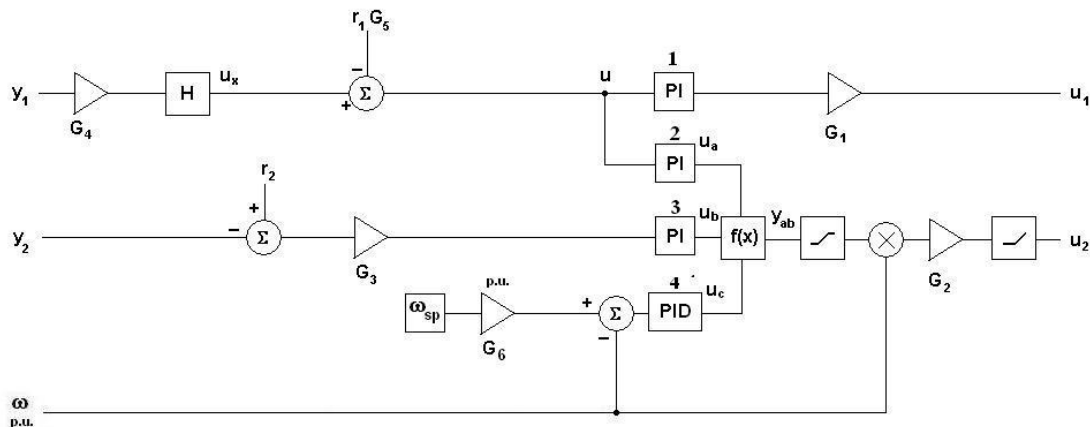


Figura 5.12. Sistema regulatorio para controlador supervisor HPC-AG1

El problema de optimización es el siguiente:

$$\underset{\delta(X)}{\text{Min}} \quad J = C_{rT_{out}} \cdot J_{CrT_{out}} + C_{rP_{mech}} \cdot J_{CrP_{mech}} \quad (5.55)$$

sujeto a:

- Las ecuaciones (5.39) que son las del modelo de la turbina a gas.
- Las ecuaciones (5.40) que son los incrementos de las variables manipuladas.
- Las fórmulas (5.41) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio.
- Las ecuaciones (5.43) que representan las restricciones de las variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio.
- La ecuación del conmutador (5.42) se reemplaza por su formulación MLD; es decir:

$$y_{abc}(t+k) = u_a(t+k)\delta_k(t)(2-\delta_k(t)) + u_b(t+k)\frac{(1-\delta_k(t))(2-\delta_k(t))}{2} - u_c(t+k)\frac{(1-\delta_k(t))\delta_k(t)}{2} \quad (5.56)$$

para $k = 0, \dots, N-1$

donde las variables ternarias adicionales $\delta_k(t)$ (con $k = 0, \dots, N-1$) son incluidas para representar el comportamiento del conmutador en un tiempo k , es decir:

$$\begin{aligned} y_{abc}(t+k) = u_a(t+k) &\Leftrightarrow \delta_k(t) = 1 \\ y_{abc}(t+k) = u_b(t+k) &\Leftrightarrow \delta_k(t) = 0 \\ y_{abc}(t+k) = u_c(t+k) &\Leftrightarrow \delta_k(t) = 2 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Solución del problema de optimización con algoritmos genéticos:

La solución del problema 5.55 se logra por optimización con respecto al vector $\vec{\delta} = [\delta_0(t) \ \dots \ \delta_{N-1}(t)]$ utilizando algoritmos genéticos (ver apéndice C). Esto es debido a que cada realización del vector $\vec{\delta}$ transforma el conjunto de N ecuaciones no lineales MLD (5.56) del problema de optimización 5.55, en un conjunto de N ecuaciones lineales.

Además podemos observar que, cada una de las realizaciones del vector $\vec{\delta}$ se puede considerar como un gen de la población de individuos del algoritmo de optimización genético, cuyo *fitness* está determinado por la solución del problema correspondiente de programación cuadrática generado.

Por lo tanto, la solución general del problema de optimización no lineal mencionado se puede realizar con dos niveles de optimización. Un nivel global de optimización con algoritmos genéticos y los problemas de optimización cuadrática resultantes.

Así tenemos que el vector de optimización del algoritmo genético será $\bar{\delta}(X)$ con $X = [\bar{r}_1 \ \bar{r}_2]^T$. Luego la ley de control dependerá del vector óptimo $\bar{\delta}^*(X)$, es decir será las primera componente de los vectores asociado a $\bar{\delta}^*$, $\bar{r}_1^*(t) = [r_1^*(t) \cdots r_1^*(t+N-1)]$ y $\bar{r}_2^*(t) = [r_2^*(t) \cdots r_2^*(t+N-1)]$

$$r_1(t) = r_1^*(t) \tag{5.58}$$

$$r_2(t) = r_2^*(t)$$

5.3.4. Implementación en MATLAB Simulink del control predictivo supervisor

En a la Figura 5.13 se aprecia la implementación en MATLAB Simulink del control supervisor predictivo multivariable de la turbina a Gas (Solución 1)

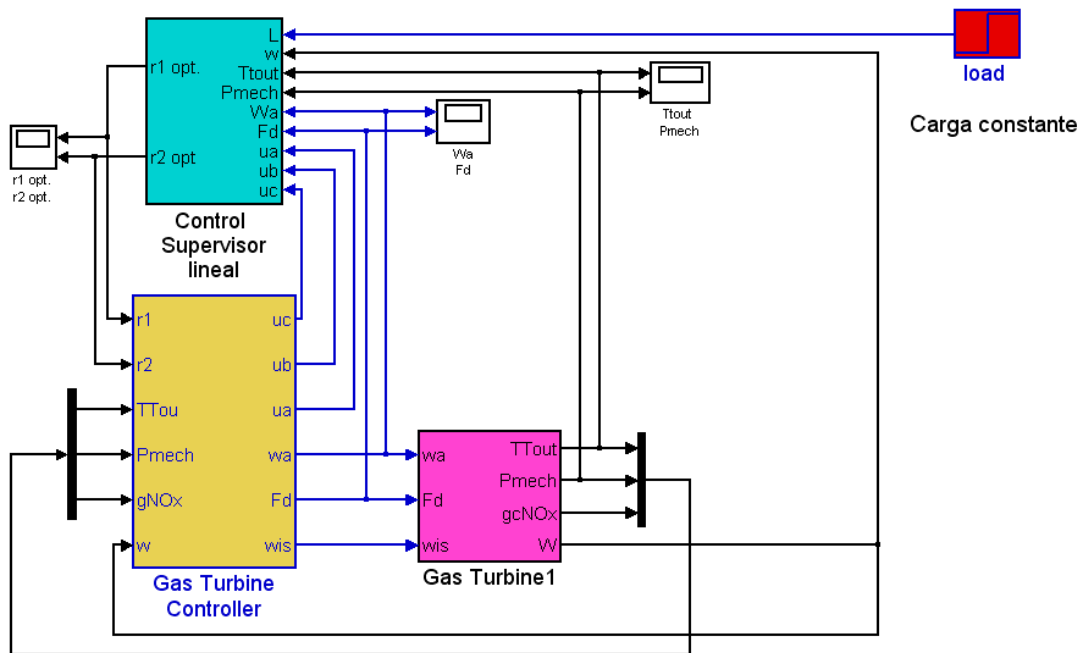


Figura 5.13. Implementación en MATLAB del control supervisor predictivo de la Turbina a gas de la central termoeléctrica de ciclo combinado (Solución 1)

El controlador predictivo (MPC1, HPC-S1, HPC-GA1) tiene como entradas la carga (L), la frecuencia (ω), la temperatura de los gases de salida (T_{tout}), la potencia (P_{mech}), el flujo de aire de entrada (Wa), el flujo de combustible (F_d), la señales de conmutación (u_a , u_b , u_c) y tiene como salida el set-point óptimo de la temperatura ($T_{\text{tout}}^* = r_1^*$) y el set-point óptimo de la potencia ($P_{\text{mech}}^* = r_2^*$).

5.3.5. Implementación de los controladores predictivos supervisores diseñados con función objetivo con características sólo regulatorias y conmutador con selección de tres señales u_a , u_b y u_c

En este apartado se presentan los resultados de la implementación de los controladores supervisores predictivos diseñados en las secciones 5.3.1, 5.3.2..

En la Figura 5.14 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la temperatura (Figura superior set-point óptimo, Figura central la variable controlada y Figura inferior variable manipulada) de los gases de escape para los tres tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC1, un controlador híbrido simple HPC-S1 y el controlador híbrido HPC-GA1 con solución con algoritmos genéticos. Se aprecia que controlador logrado con optimización genética HPC-GA1 es el entrega una respuesta con menos perturbaciones entre los controladores supervisores diseñados. También se aprecia como el controlador tradicional MPC1 y el controlador supervisor simple HPC-S1 tienen respuestas semejantes.

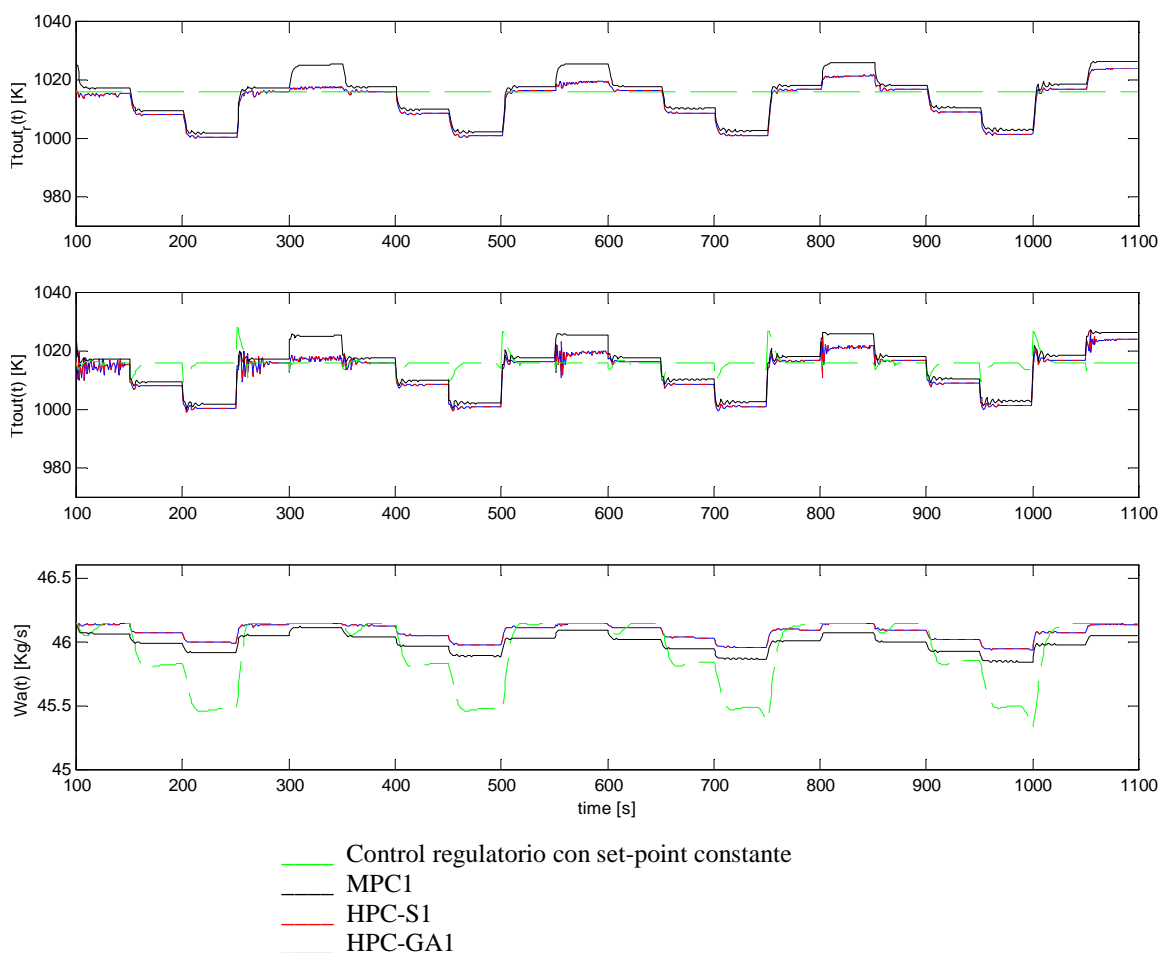


Figura 5.14. Respuesta de lazo cerrado de la temperatura de los gases de escape con los controladores propuestos

En la Figura 5.15 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia (Figura superior set-point óptimo, Figura central la variable controlada y Figura inferior variable manipulada) para los tres tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC1, un controlador híbrido simple HPC-S1 y el controlador híbrido HPC-GA1 con solución con algoritmos genéticos.

Se aprecia como los controladores supervisores predictivos superan en regulación (de la potencia de salida) al control regulatorio con set-point constante. Sin embargo la señal de control que se obtiene con la estrategia HPC-GA1 es la única aplicable, ya que los otros controladores predictivos contienen señales muy difíciles de seguir por un actuador. Esto se debe a que este controlador con algoritmos genéticos es el que mejor refleja las características híbridas del sistema regulatorio.

Además el controlador logrado con optimización genética HPC-GA1 es el que gasta menos energía de esfuerzo de control, de los controladores predictivos diseñados.

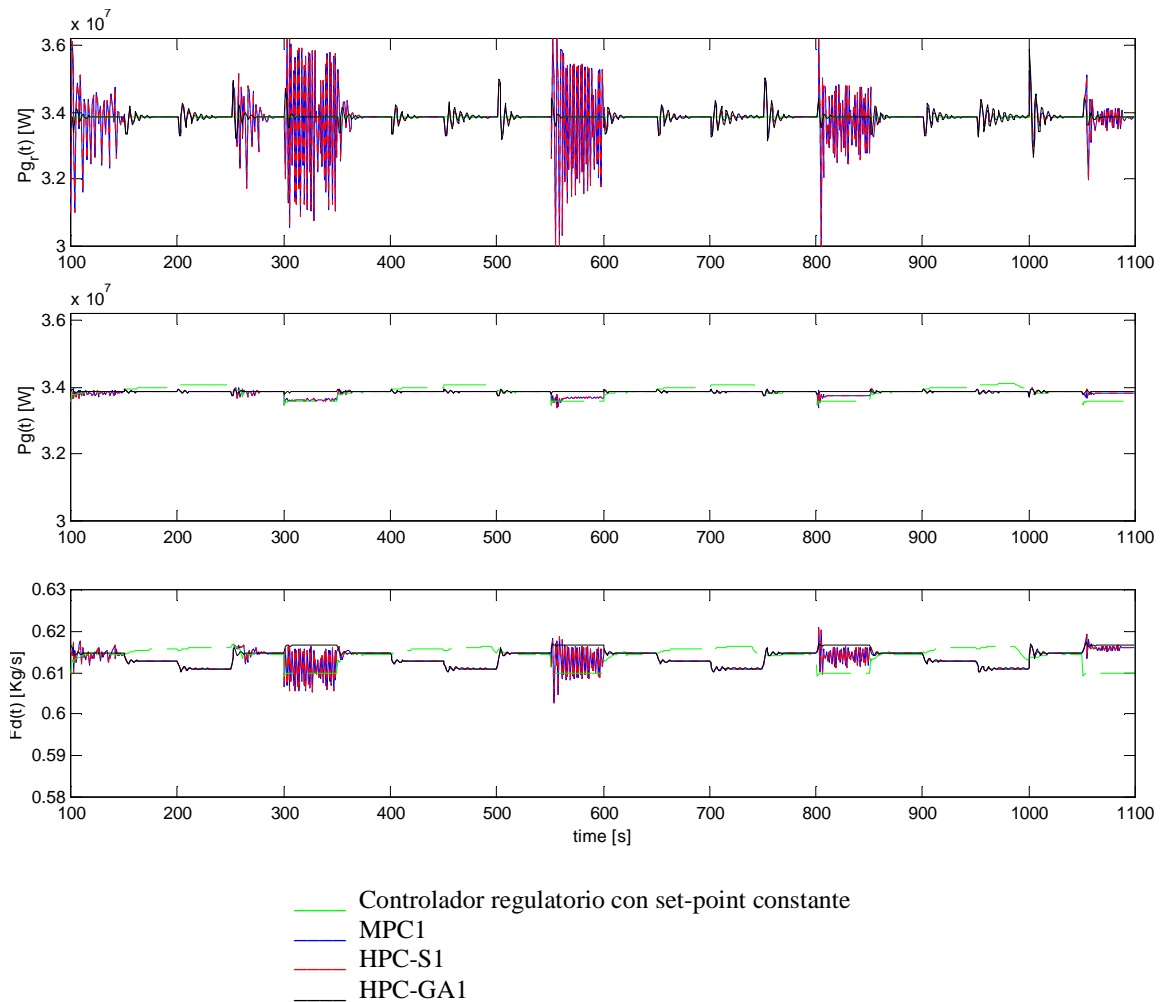


Figura 5.15. Respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos

En la Figura 5.16 se presenta el detalle de la variable controlada, de respuesta en lazo cerrado para la potencia, para los tres tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC1, un controlador híbrido simple HPC-S1 y el controlador híbrido HPC-GA1 con solución con algoritmos genéticos.

Se aprecia en la Figura 5.16 como el controlador logrado con optimización genética HPC-GA1 es el que presenta la mejor regulación dentro de los controladores utilizados.

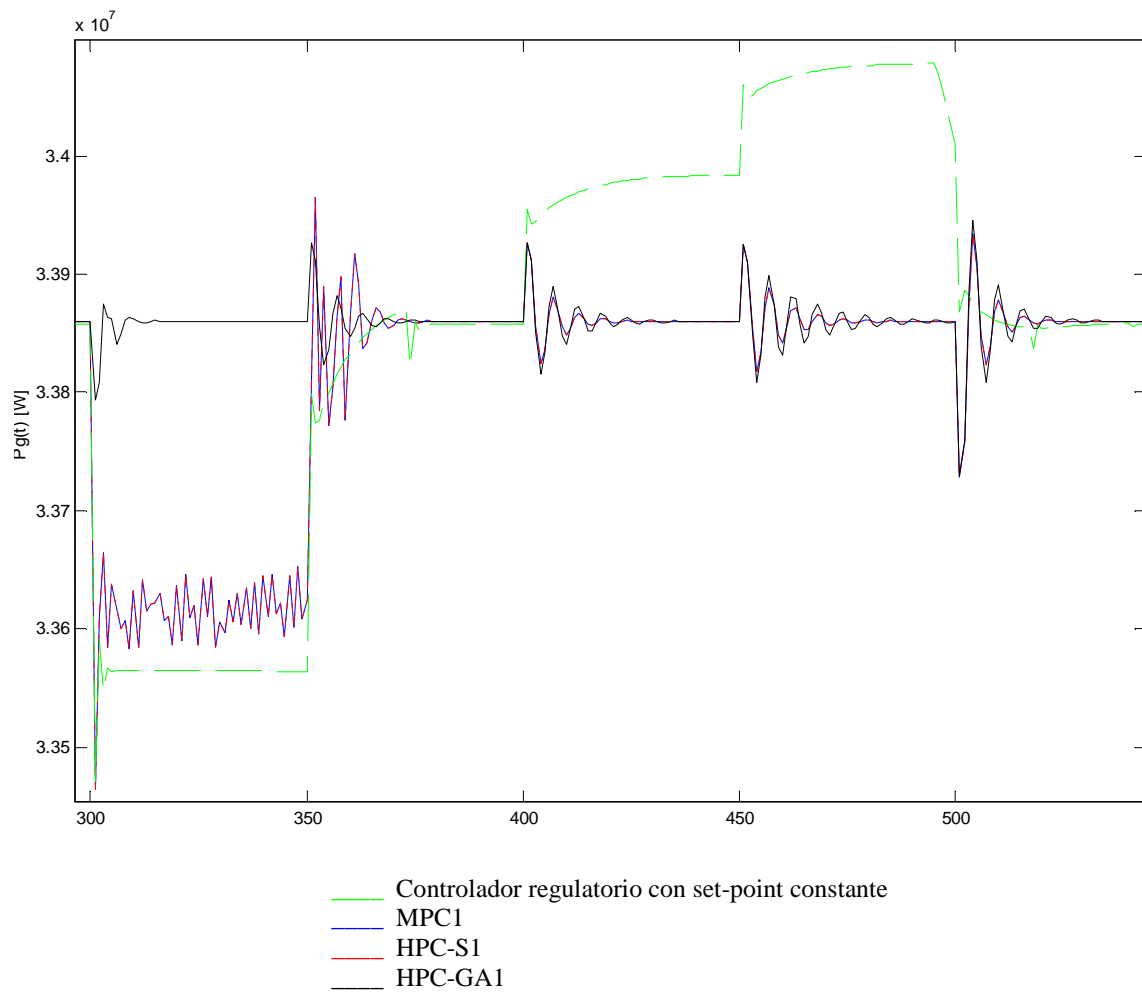


Figura 5.16. Detalle de la potencia de salida en la Turbina a Gas

En la Figura 5.17 se presenta la frecuencia del generador, para los tres tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC1, un controlador híbrido simple HPC-S1 y el controlador híbrido HPC-GA1 con solución con algoritmos genéticos.

Se aprecia como todos los controladores supervisores predictivos diseñados superan en regulación de frecuencia al control regulatorio con set-point constante.

En especial el controlador logrado con optimización genética HPC-GA1 es el que presenta la mejor regulación de frecuencia dentro de los controladores utilizados. Es decir este controlador es el que mejor refleja las características híbridas del sistema regulatorio.

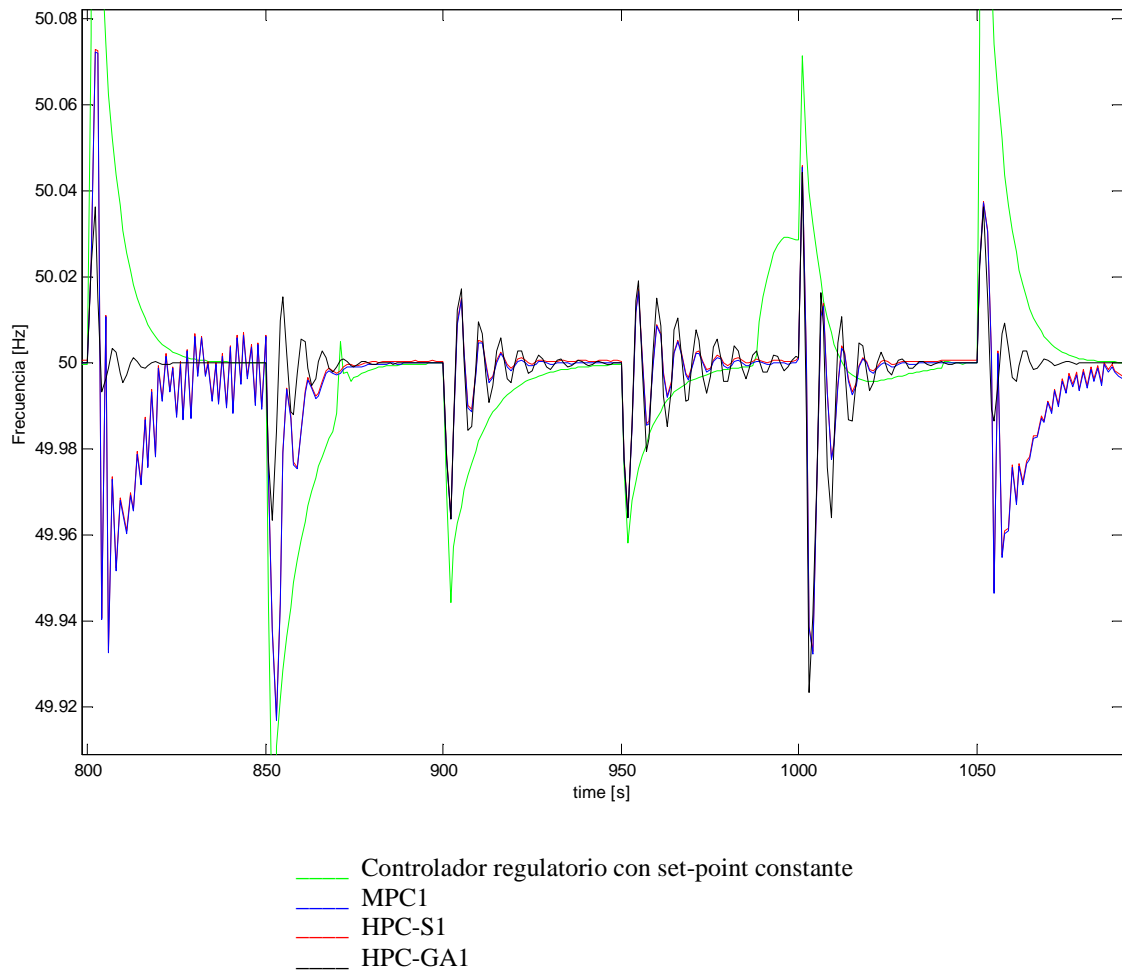


Figura 5.17. Frecuencia en la Turbina a Gas

En la Figura 5.18 se presenta el comportamiento de las señales de salida de los controles PI_2 , PI_3 y PI_4 correspondiente respectivamente a las señales u_a , u_b y u_c . En la Figura superior se presenta el controlador MPC1, en la Figura central el controlador HPC-S1 y la Figura inferior para el controlador supervisor con solución con algoritmos genéticos HPC-GA1.

Se aprecia como el controlador supervisor con solución con algoritmos genéticos HPC-GA1 produce el menor número de conmutaciones de todos los controladores diseñados. Esto va en directa relación con el menor gasto de energía.

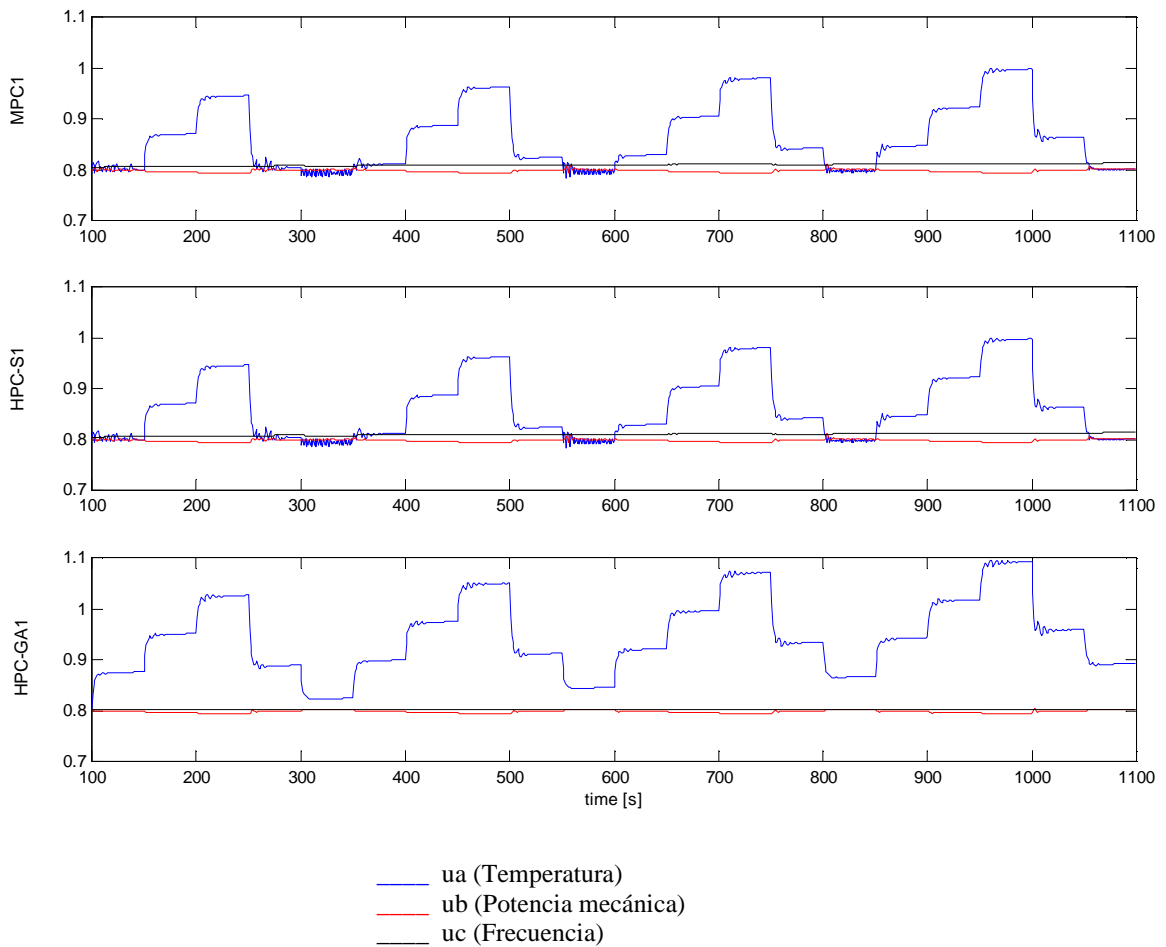


Figura 5.18. Señales a seleccionar por el conmutador en las salida del PI_2 (u_a), PI_3 (u_b) y PI_4 (u_c).

En la Figura 5.19 se presenta el detalle de el comportamiento de las señales de salida de los controles PI_2 , PI_3 y PI_4 correspondiente respectivamente a las señales u_a , u_b y u_c . En la Figura superior se presenta el controlador MPC1, en la Figura central el controlador HPC-S1 y la Figura inferior para el controlador supervisor con solución con algoritmos genéticos HPC-GA1.

Se aprecia en la Figura 5.19 que la señal $u_c(t)$, correspondiente al control de frecuencia, no es seleccionada por el conmutador al aplicar los controladores predictivos supervisores anteriormente diseñados.

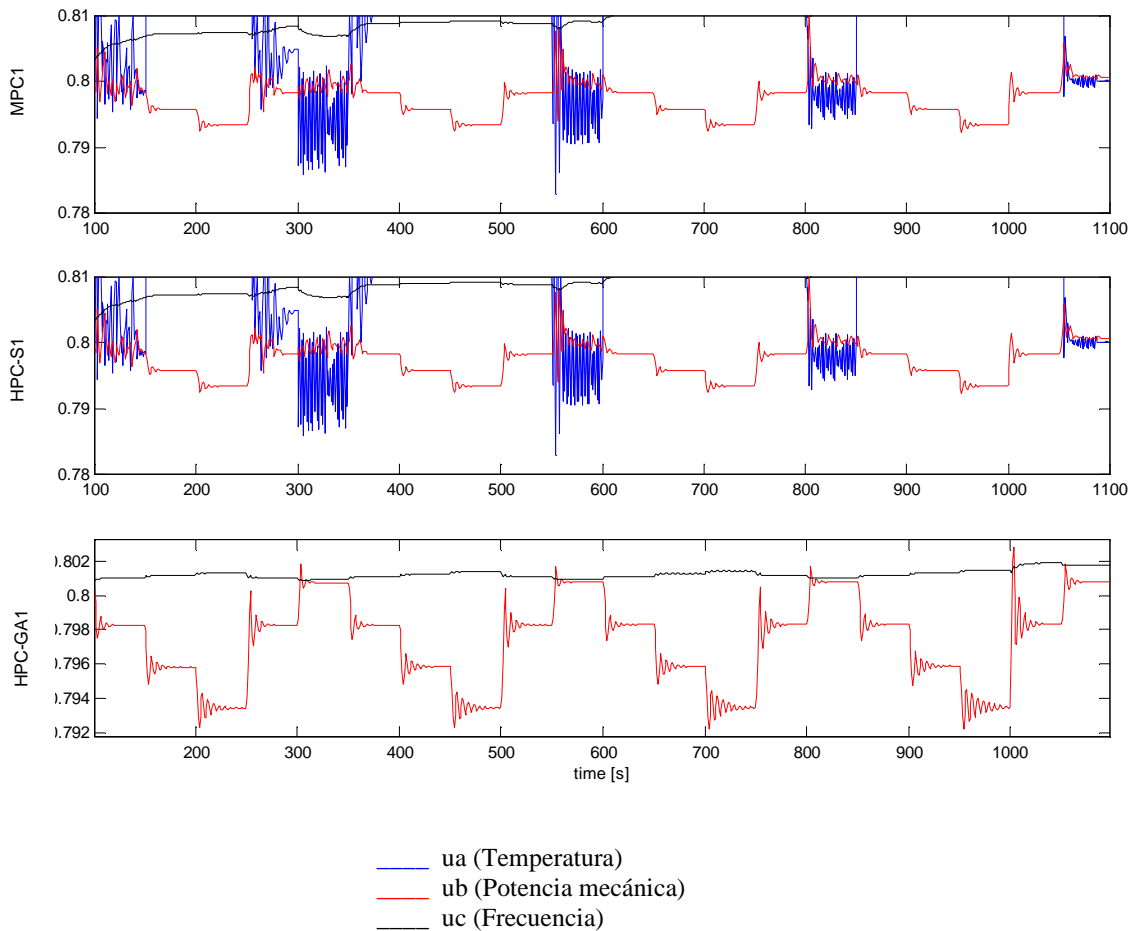


Figura 5.19. Detalle de las señales a seleccionar por el conmutador

5.3.6. Análisis de datos

En la tabla 5.2. se describen los valores medios de los índices de error de set-point de trayectoria y esfuerzo de acción de control en la turbina a gas.

Tabla 5.2. Índices de comportamiento de los valores medios del error de set-point de la trayectoria y el esfuerzo de la acción de control en la Turbina a Gas

Controlador	$J_{sp_{T_{out}}} = \sum_{j=1}^N (\hat{T}_{out}(t+j) - T_{out}^r)^2$	$J_{\Delta_{W_a}} = \sum_{j=1}^N (\Delta W_a)^2$	$J_{sp_{P_{mech}}} = \sum_{j=1}^N (\hat{P}_{mech}(t+j) - P_{mech}^r)^2$	$J_{\Delta_{F_d}} = \sum_{j=1}^N (\Delta F_d)^2$
MPC1	$5.674 * 10^2$	$0.394 * 10^{-3}$	$0.824 * 10^{11}$	$0.915 * 10^{-4}$
HPC-S1	$5.674 * 10^2$	$0.394 * 10^{-3}$	$0.824 * 10^{11}$	$0.915 * 10^{-4}$
HPC-GA1	$6.427 * 10^2$	$0.433 * 10^{-3}$	$0.040 * 10^{11}$	$0.915 * 10^{-4}$
PI	$0.340 * 10^2$	$2.363 * 10^{-3}$	$3.236 * 10^{11}$	$0.021 * 10^{-4}$

El índice de error de set-point de trayectoria de los gases de escape (T_{out}) de los controladores supervisores propuestos son entre 16.7 a 18.9 veces peor que la estrategia de control con set-point constante. El peor resultado se obtiene con la estrategia HPC-GA1.

El índice de del esfuerzo en la acción de control del flujo del aire del compresor (W_a) de los controladores supervisores propuestos están entre 5.5 y 5.4 veces mejor que la estrategia de control con set-point constante. El mejor resultado s obtiene con las estrategias MPC1 y MPC-S1.

El índice de error de set-point de trayectoria de la potencia de la turbina gas (P_{mech}) de los controladores supervisores propuestos son entre 3.92 y 80.4 veces mejor que la estrategia de control con set-point constante. El mejor resultado se obtiene con la estrategia HPC-GA1. Es decir este controlador es el que mejor refleja las características híbridas del sistema regulatorio.

El índice de del esfuerzo en la acción de control del flujo de combustible (F_d) de los controladores supervisores propuestos es 43.6 veces peor que la estrategia de control con set-point constante.

En la tabla 5.3 se detalla el comportamiento regulatorio de la frecuencia del generador al aplicar los distintos controladores diseñados.

Tabla 5.3. Índice de comportamiento regulatorio de la frecuencia en la Turbina a Gas

Controlador	$J_{frec} = \sum_{j=1}^N (\hat{frec}(t+j) - frec_{set_point})^2$	Beneficio c/r a PI [%]	Beneficio c/r a MPC [%]
MPCf1	0.00431	74.52	0
HPC-Sf1	0.00431	74.52	0
HPC-GAf1	0.00095	98.74	95.06
PI	0.00727	0	-

con $frec_{set_point} = 50$ [Hz]

Un índice de comportamiento es creado para evaluar el error de seguimiento de set-point se puede observar en la tabla 5.3. En ésta se presenta que los controladores diseñados superan en regulación sobre el 74% al sistema de control PI en especial el control híbrido con optimización genética HPC-GAf. Notar la semejanza con los resultados del error de seguimiento del set-point de la potencia de salida, esto se debe a que la regulación de potencia es directamente proporcional a la regulación de frecuencia.

5.4. Diseño de estrategia de control supervisor predictivo híbrido para la turbina a gas: Enfoque 2

Experimentalmente se ha comprobado que la señal $u_c(t)$, correspondiente al control de frecuencia, no es seleccionada habitualmente por el conmutador al aplicar los controladores predictivos supervisores anteriormente diseñados como se aprecia en la Figura 5.19. Por lo tanto, la simplificación del diseño permite un ahorro en tiempo de cómputo y la posibilidad de aplicar los distintos reguladores proyectados de la turbina a gas en el sistema completo de la central termoeléctrica de ciclo combinado en un tiempo de cómputo razonable. De este modo el conmutador selecciona entre las dos señales más importantes que influyen en la estrategia de control predictivo supervisor, que son la señal $u_a(t)$ que se relaciona con la temperatura de los gases de salida en la cámara de combustión y la señal $u_b(t)$ que se relaciona con la potencia mecánica generada por la turbina a gas.

5.4.1. Planteamiento del problema de optimización.

En la Figura 5.20 se describe el sistema regulatorio simplificado de la turbina a gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado que será utilizado para diseñar un controlador supervisor predictivo.

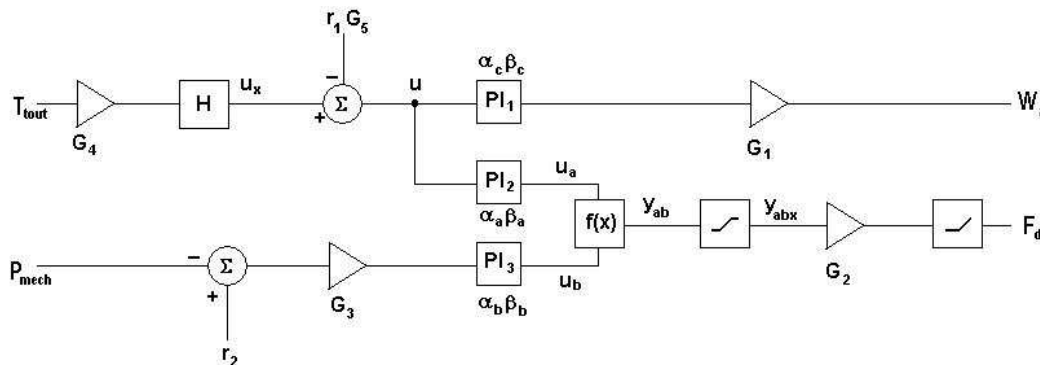


Figura 5.20. Sistema regulatorio simplificado de la turbina a gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado

En este caso las ecuaciones lineales del sistema regulatorio son las mismas ya identificadas en las ecuaciones (5.14), (5.15) y (5.16).

El comportamiento del conmutador, que se observa en la Figura 5.20, está dado por la siguiente expresión:

$$y_{ab}(t) = f(x) = \min(u_a(t), u_b(t)) \quad (5.58)$$

La ecuación (5.58) que describe su formulación MLD de la siguiente forma:

$$y_{ab}(t) = u_a(t) + u_b(t) \cdot (1 - \delta(t)) \quad (5.59)$$

Donde la variable binaria adicional $\delta(t)$ es incluida para representar el comportamiento híbrido del conmutador, es decir:

$$\begin{aligned} y_{ab}(t) = u_a(t) &\Leftrightarrow \delta(t) = 1 \\ y_{ab}(t) = u_b(t) &\Leftrightarrow \delta(t) = 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

La saturación y el límite de combustible están dados por la siguiente ecuación:

$$y_{abx}(t) = \begin{cases} 1.5 & y_{ab}(t) > 1.5 \\ y_{ab}(t) & y_{ab}(t) \geq -0.1 \quad \& \quad y_{ab}(t) \leq 1.5 \\ -0.1 & y_{ab}(t) < -0.1 \end{cases} \quad (5.61)$$

$$F_d(t) = \begin{cases} G_2 y_{abx}(t) & G_2 y_{abx}(t) \geq F_{d \min} \\ F_{d \min} & G_2 y_{abx}(t) < F_{d \min} \end{cases} \quad \text{donde } F_{d \min} = 0.061648 \quad (5.62)$$

En esta aplicación la función objetivo propuesta contiene dos términos. El primer termino relacionado con el comportamiento económico, en este caso el beneficio de la planta (J_C). El segundo término es un criterio regulatorio (J_{Cr}) el cual incluye el error de set-point de trayectoria y el control del esfuerzo de control. EL criterio regulatorio asegura que la solución es estable dentro de las restricciones técnicas. La función objetivo a optimizar en el nivel supervisor esta dada por:

$$J = J_C - \eta J_{Cr} \quad (5.63)$$

$$J_C = \sum_{i=1}^N C_{P_{mech}} \hat{P}_{mech}(t+i-1) - \sum_{i=1}^N C_{F_d} F_d(t+i-1) \quad (5.64)$$

$$J_{Cr} = C_{rT_{tout}} \left(\sum_{j=1}^N (\hat{T}_{tout}(t+j) - T_{tout}^r)^2 + \lambda_{W_a} \sum_{i=1}^N \Delta W_a^2(t+i-1) \right) + C_{rP_{mech}} \left(\sum_{j=1}^N (\hat{P}_{mech}(t+j) - P_{mech}^r)^2 + \lambda_{F_d} \sum_{i=1}^N \Delta F_d^2(t+i-1) \right) \quad (5.65)$$

donde $\hat{T}_{T_{tout}}(t+j)$ es la j-ésima predicción de la temperatura de los gases de escape, $C_{rT_{tout}} = 10^3$ es el factor de peso del nivel regulatorio y $\lambda_{W_a} = 10^{15}$ es el control de peso. La trayectoria externa del set-point para la temperatura de los gases de salida previamente fijada es $T_{tout}^r = 1015.8$. Además $\hat{P}_{mech}(t+j)$ es la j-ésima predicción de la potencia de la turbina a gas, $C_{rP_{mech}} = 1$ es el factor de peso del nivel regulatorio, $\lambda_{F_d} = 10^{17}$ es el peso de control, $C_{F_d} = 100$ es el precio del combustible, $C_{P_{mech}} = 10^{-5}$ es el factor de precio de la potencia y η es un factor de peso práctico. La trayectoria de set-point externo para la turbina a gas previamente fijada es constante e igual a $P_{mech}^r = 3.386 * 10^7$, y finalmente $N=10$ corresponde al horizonte de predicción y horizonte de control.

Por lo tanto, el problema de optimización se define por la minimización de la función objetivo (ecuación (5.63)) y considerando que las ecuaciones (5.67) son las del modelo de la turbina a gas, las ecuaciones (5.68) son los incrementos de las variables manipuladas, las fórmulas (5.69) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio, las formulas (5.70) la ecuaciones del conmutador y finalmente las ecuaciones (5.71) que representan la restricciones de la variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio. Por lo tanto tenemos:

$$\underset{X}{Max} \quad J = J_c - \eta J_{Cr} \quad (5.66)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \hat{T}_{tout}(t+k+1) &= a_{11}\hat{T}_{tout}(t+k) + a_{12}\hat{T}_{tout}(t+k-1) + b_{11}W_a(t+k) \\ &+ b_{12}W_a(t+k-1) + c_{11}F_d(t+k) + c_{12}F_d(t+k-1) \\ \hat{P}_{mech}(t+k+1) &= a_{21}\hat{P}_{mech}(t+k) + a_{22}\hat{P}_{mech}(t+k-1) + b_{21}W_a(t+k-1) \\ &+ b_{22}W_a(t+k-2) + c_{21}F_d(t+k-1) + c_{22}F_d(t+k-2) \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} \Delta W_a(t+k-1) &= W_a(t+k-1) - W_a(t+k-2) \\ \Delta F_d(t+k-1) &= F_d(t+k-1) - F_d(t+k-2) \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11}r_1(t+k) + \gamma_{12}r_1(t-k+1) + \gamma_{13}r_1(t-k+2) &= \alpha_{11}\hat{T}_{tout}(t+k-1) \\ &+ \alpha_{12}\hat{T}_{tout}(t+k-2) + \beta_{11}W_a(t+k) + \beta_{12}W_a(t+k-1) + \beta_{13}W_a(t+k-2) \\ \gamma_{21}r_1(t+k) + \gamma_{22}r_1(t+k-1) + \gamma_{23}r_1(t+k-2) &= \alpha_{21}\hat{T}_{tout}(t+k-1) \\ &+ \alpha_{22}\hat{T}_{tout}(t+k-2) + \beta_{21}u_a(t+k) + \beta_{22}u_a(t+k-1) + \beta_{23}u_a(t+k-2) \\ &+ \gamma_{21}r_1(t+k) + \gamma_{22}r_1(t+k-1) + \gamma_{23}r_1(t+k-2) \\ \gamma_{31}r_2(t+k) + \gamma_{32}r_2(t+k-1) &= \alpha_{31}\hat{P}_{mech}(t+k) + \alpha_{32}\hat{P}_{mech}(t+k-1) \\ &+ \beta_{31}u_b(t+k) + \beta_{32}u_b(t+k-1) \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$y_{ab}(t+k) = \min(u_a(t+k), u_b(t+k)) \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} y_{abx}(t+k) &= \begin{cases} 1.5 & y_{ab}(t+k) > 1.5 \\ y_{ab}(t+k) & y_{ab}(t+k) \geq -0.1 \quad \& \quad y_{ab}(t+k) \leq 1.5 \\ -0.1 & y_{ab}(t+k) < -0.1 \end{cases} \\ F_d(t+k) &= \begin{cases} G_2 y_{abx}(t+k-1) & G_2 y_{abx}(t+k-1) \geq F_{d \min} \\ F_{d \min} & G_2 y_{abx}(t+k-1) < F_{d \min} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.71)$$

para $k = 0, \dots, N-1$

Donde el vector de optimización está dado por:

$$X = [\bar{r}_1 \quad \bar{r}_2]^T \quad (5.72)$$

con

$$\bar{r}_1 = [r_1(t) \cdots r_1(t + N - 1)] \quad (5.73)$$

$$\bar{r}_2 = [r_2(t) \cdots r_2(t + N - 1)]$$

Por lo tanto este problema nuevamente corresponde a un problema NP Hard no lineal entera mixta. La variable de optimización que se aplicará al sistema de control supervisor son el set-point óptimo de temperatura de los gases de escape (r_1^*) y el set-point óptimo de la potencia de la turbina a gas (r_2^*).

Este problema de optimización se resolvió de cuatro maneras distintas obteniéndose tres controladores supervisores que a continuación se detallan.

5.4.2. Controlador supervisor predictivo multivariable convencional (MPC)

Para apreciar los beneficios de los controladores híbridos diseñados se comienza diseñando en primer lugar un controlador supervisor tradicional MPC.

En la Figura 5.21 se presenta el sistema regulatorio utilizado, el cual no considera el conmutador y la señal de control de la potencia mecánica se transfiere directamente.

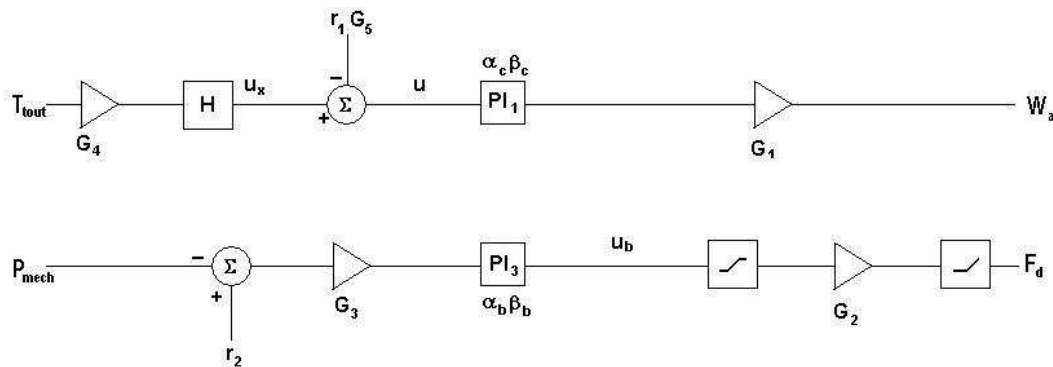


Figura 5.21. Sistema regulatorio para controlador supervisor MPC

El problema de optimización es el siguiente:

$$\underset{X}{Max} \quad J = J_C - \eta J_{Cr} \quad (5.74)$$

sujeto a:

- Las ecuaciones (5.67) que son las del modelo de la turbina a gas.
- Las ecuaciones (5.68) que son los incrementos de las variables manipuladas.

- Las fórmulas (5.69) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio.
- Las ecuaciones (5.71) que representan las restricciones de las variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio.
- La ecuación la ecuación del conmutador (5.70) se reemplaza por la ecuación (5.75).

$$y_{ab}(t+k) = u_b(t+k) \quad \text{para } k = 0, \dots, N-1. \quad (5.75)$$

esto significa que la señal de control de la potencia mecánica se transfiere directamente.

En este caso, el problema se convierte en uno con función objetivo cuadrática y restricciones lineales. La variable de optimización es $X = [\bar{r}_1 \ \bar{r}_2]^T$ y la ley de control aplicada son las primeras componentes de los vectores óptimos $\bar{r}_1^*(t) = [r_1^*(t) \cdots r_1^*(t+N-1)]$ y $\bar{r}_2^*(t) = [r_2^*(t) \cdots r_2^*(t+N-1)]$ es decir:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r_1^*(t) \\ r_2(t) &= r_2^*(t) \end{aligned} \quad (5.76)$$

Para resolver el problema de optimización, dado por una función objetivo cuadrática y restricciones lineales se utilizó programación cuadrática.

5.4.3. Controlador supervisor predictivo híbrido simple multivariable con elección de la variable manipulada (HPC-S).

En este caso se resuelven dos problemas de optimización paralelamente. En cada uno de estos problemas se considera que el conmutador selecciona sólo una de las señales $u_a(t)$ o $u_b(t)$. Posteriormente, se selecciona la señal que genera el mejor valor en la función objetivo.

Primer problema: en este caso se considera que se activan la rama que contiene a la señal $u_a(t)$ y se busca r_1 óptimo dinámico del problema de optimización anterior, además r_2 será el set-óptimo estático debido a que no hay ecuaciones relacionadas con r_2 . La estructura de este sistema se observa en la Figura 5.22.

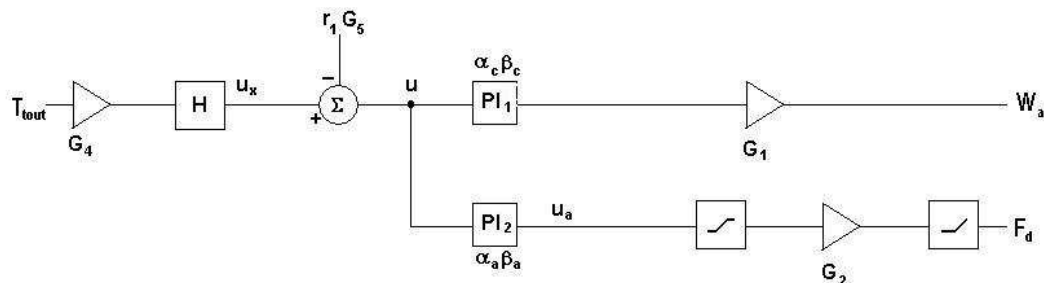


Figura 5.22. Sistema regulatorio para controlador supervisor HPC primer problema

El problema de optimización es el siguiente:

$$\underset{X}{Max} \quad J = J_c - \eta J_{cr} \quad (5.77)$$

sujeto a:

- Las ecuaciones (5.76) que son las del modelo de la turbina a gas.
- Las ecuaciones (5.77) que son los incrementos de las variables manipuladas.
- Las fórmulas (5.78) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio.
- Las ecuaciones (5.80) que representan las restricciones de las variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio.
- La ecuación la ecuación del conmutador (5.79) se reemplaza por la ecuación (5.87).

$$y_{abc}(t+k) = u_a(t+k) \quad \text{para } k = 0, \dots, N-1. \quad (5.78)$$

esto significa que la señal de control de la temperatura se transfiere directamente.

Por lo cual, para resolver el problema de optimización, dado por una función objetivo cuadrática y restricciones lineales se utilizó programación cuadrática

Ahora el vector de optimización es $X = [\bar{r}_1]^T$ y la ley de control aplicada es la primera componente del vector óptimo $\bar{r}_1^*(t) = [r_1^*(t) \cdots r_1^*(t+N-1)]$ y el set-point estático de potencia

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r_1^*(t) \\ r_2(t) &= 3.386 \cdot 10^7 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Segundo problema: en este caso se considera que se activan las ramas que contiene a $u_b(t)$ y la rama que modela al generador. Posteriormente, se busca el set-óptimo dinámico para r_1 y r_2

El problema de optimización en este caso es idéntico al problema de optimización del control MPC ya mencionado en la sección 5.4.2. El sistema de control se presenta en la Figura 5.23

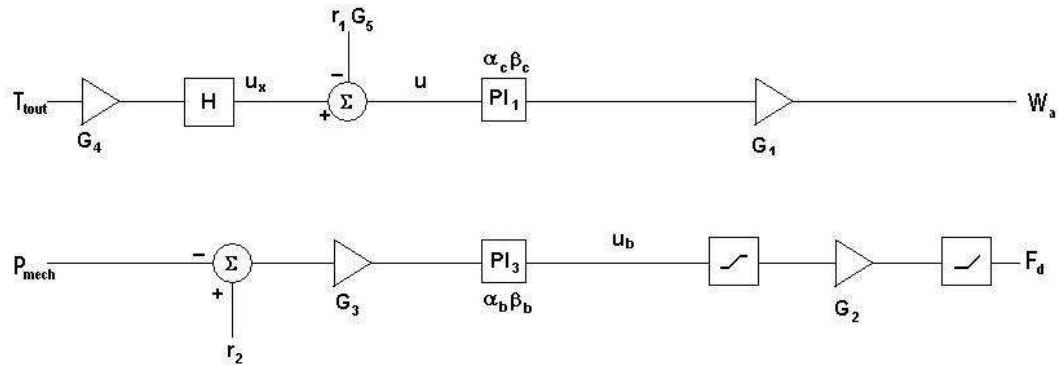


Figura 5.23. Sistema regulatorio para controlador supervisor HPC segundo problema

5.4.4. Controlador supervisor predictivo multivariable híbrido: Solución con enumeración explícita (HPC-EE)

En esta alternativa se utiliza el modelo completo del sistema regulatorio, el cual incluye el elemento híbrido, un conmutador que elige entre la menor señal de las salidas de los PI_2 y PI_3 (ver Figura 5.27).

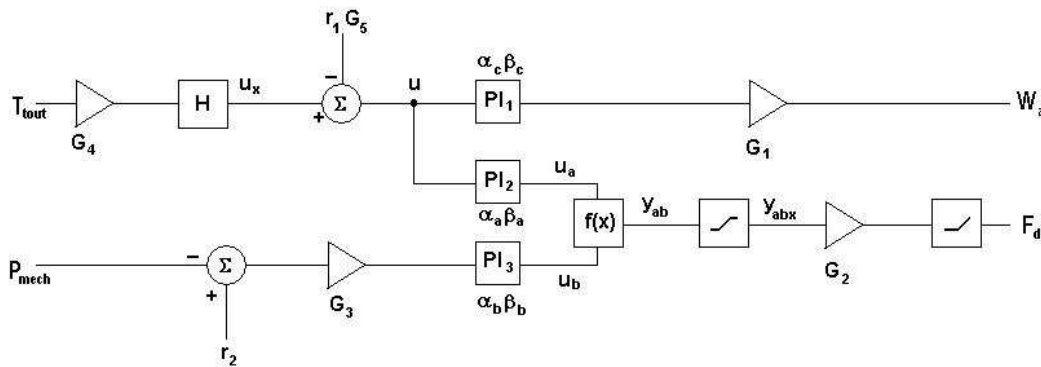


Figura 5.24. Sistema regulatorio para controlador supervisor HPC-AG

El problema de optimización es el siguiente:

$$\underset{X}{Max} \quad J = J_C - \eta J_{Cr} \quad (5.80)$$

sujeto a:

- Las ecuaciones (5.67) que son las del modelo de la turbina a gas.
- Las ecuaciones (5.68) que son los incrementos de las variables manipuladas.
- Las fórmulas (5.69) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio.
- Las ecuaciones (5.71) que representan las restricciones de las variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio.
- La ecuación la ecuación del conmutador (5.70) se reemplaza por la ecuación (5.81) que describe su formulación MLD (Mixed logical Dynamic).

$$y_{ab}(t+k) = u_a(t+k) + u_b(t+k) \cdot (1 - \delta_k(t)) \quad (5.81)$$

para $k = 0, \dots, N-1$

Donde N variables binarias adicionales $\delta_k(t)$ (con $k = 0, \dots, N-1$) son incluidas para representar el comportamiento del conmutador, es decir:

$$\begin{aligned} y_{ab}(t+k) = u_a(t+k) &\Leftrightarrow \delta_k(t) = 1 \\ y_{ab}(t+k) = u_b(t+k) &\Leftrightarrow \delta_k(t) = 0 \end{aligned} \quad (5.82)$$

Luego se define el vector $\bar{\delta} = [\delta_0(t) \ \dots \ \delta_{N-1}(t)]$, cuya realización transforma el conjunto de N ecuaciones no lineales MLD (5.90) del problema de optimización 5.93, en un conjunto de N ecuaciones lineales

La enumeración explícita de todas las realizaciones posibles del vector $\bar{\delta}$ definen 2^N diferentes problemas de optimización cuadrática. Dentro de estas realizaciones existe el vector que genera la mejor solución del problema 5.80. Es decir existe un vector $\bar{\delta}$ con mejor desempeño. Entonces el problema de optimización cuadrático correspondiente a este vector, genera la solución buscada, que en último término esta referida a los vectores óptimos $\bar{r}_1^*(t) = [r_1^*(t) \ \dots \ r_1^*(t+N-1)]$ y $\bar{r}_2^*(t) = [r_2^*(t) \ \dots \ r_2^*(t+N-1)]$.

Luego, la ley de control resultante es:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r_1^*(t) \\ r_2(t) &= r_2^*(t) \end{aligned} \quad (5.83)$$

5.4.5. Controlador supervisor predictivo multivariable híbrido: Solución con algoritmo genético (HPC-GA)

Como se menciona en el apartado 5.3.3 la solución del problema de optimización no lineal mencionado en el apartado 5.4.4 se puede realizar con dos niveles de optimización. Un nivel global de optimización con algoritmos genéticos donde los individuos serian string de N variables binarias $\delta_k(t)$ cuyo fitness corresponderá a valor óptimo de la función objetivo del problema de optimización cuadrático resultante.

El problema de optimización será:

$$\underset{\delta(X)}{\text{Max}} \quad J = J_C - \eta J_{Cr} \quad (5.84)$$

sujeto a:

- Las ecuaciones (5.67) que son las del modelo de la turbina a gas.
- Las ecuaciones (5.68) que son los incrementos de las variables manipuladas.

- Las fórmulas (5.69) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio.
- Las ecuaciones (5.71) que representan las restricciones de las variables manipuladas dadas por el sistema regulatorio.
- La ecuación MLD (5.81).

La solución se logra por optimización con respecto al vector $\vec{\delta} = [\delta_0(t) \cdots \delta_{N-1}(t)]$ utilizando algoritmos genéticos (ver apéndice C). Esto es debido a que cada realización del vector $\vec{\delta}$ transforma el conjunto de N ecuaciones no lineales MLD (5.90) del problema de optimización 5.93, en un conjunto de N ecuaciones lineales.

Además podemos ver que, cada una de las realizaciones del vector $\vec{\delta}$ se puede considerar como un gen de la población de individuos del algoritmo de optimización genético, cuyo *fitness* está determinado por la solución del problema correspondiente de programación cuadrática generado.

Por lo tanto, la solución general del problema de optimización no lineal mencionado se puede realizar con dos niveles de optimización. Un nivel global de optimización con algoritmos genéticos y los problemas de optimización cuadrática resultantes.

Así tenemos que el vector de optimización del algoritmo genético será $\vec{\delta}(X)$ con $X = [\bar{r}_1 \ \bar{r}_2]^T$. Luego la ley de control dependerá del vector óptimo $\vec{\delta}^*(X)$, es decir será la primera componente de los vectores asociado a $\vec{\delta}^*$, $\bar{r}_1^*(t) = [r_1^*(t) \cdots r_1^*(t+N-1)]$ y $\bar{r}_2^*(t) = [r_2^*(t) \cdots r_2^*(t+N-1)]$

$$r_1(t) = r_1^*(t) \quad (5.85)$$

$$r_2(t) = r_2^*(t)$$

5.4.6. Base de comparación: Control regulatorio con set-point óptimo estático

Esta alternativa es utilizada como base de comparación para controladores predictivos propuestos. Los set-point óptimos son constantes y calculados a partir de la optimización estática de la función objetivo definida en (5.63) usando el modelo estático del proceso que se detalla a continuación. Es decir:

$$J = C_{P_{mech}} P_{mech} - C_{F_d} F_d + \eta \{ C_{r_{T_{OUT}}} [(T_{TOUT} - T_{TOUT}^*)^2 + \lambda_{W_a} \Delta W_a^2] + C_{r_{P_{mech}}} [(P_{mech} - P_{mech}^*)^2 + \lambda_{F_d} \Delta F_d^2] \} \quad (5.86)$$

ya que $\lambda \Delta W_a \rightarrow 0$ y $\lambda \Delta F_d \rightarrow 0$ en régimen permanente.

Considerando el controlador PI se tiene en estado estacionario la siguiente relación:

$$P_{mech}^r = P_{mech}^* \quad (5.87)$$

El modelo estático es:

$$P_{mech}^r = k_{P_{mech}} F_d \quad (5.88)$$

Por lo tanto, la función objetivo está dada por:

$$J = C_{P_{mech}} P_{mech}^r - C_{F_d} \frac{P_{mech}^r}{K_{P_{mech}}} + \eta \left[C_{rT_{out}} (T_{T_{out}} - T_{T_{out}}^*)^2 + C_{rP_{mech}} (P_{mech}^r - P_{mech}^*)^2 \right] \quad (5.89)$$

Realizando la optimización estática, se tiene:

$$\frac{\partial J}{\partial P_{mech}^r} = 0 \quad \Rightarrow \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial J}{\partial P_{mech}^r} = C_{P_{mech}} - \frac{C_{F_d}}{k_{P_{mech}}} + 2C_{rP_{mech}} \eta (P_{mech}^r - P_{mech}^*) = 0 \quad (5.91)$$

Entonces, el set-point óptimo estático está dado por:

$$P_{mech}^r = P_{mech}^* - \frac{C_{P_{mech}}}{2C_{rP_{mech}} \eta} + \frac{C_{F_d}}{2k_{P_{mech}} C_{rP_{mech}} \eta} = r_2^r \quad (5.92)$$

Además , se tiene:

$$\frac{\partial J}{\partial T_{T_{out}}^r} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{T_{out}}^r = T_{T_{out}}^* = r_1^r \quad (5.93)$$

5.4.7. Implementación de los controladores predictivos supervisores diseñados con función objetivo con características sólo regulatorias y conmutador con selección de dos señales u_a y u_b

En la Figura 5.25 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la temperatura (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) de los gases de escape para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas: un controlador MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, un controlador híbrido HPC-EE con enumeración explícita y un controlador híbrido HPC-GA con algoritmos genéticos.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados realizan menor esfuerzo de control que el controlador con set-point constante. Además estos controladores logran una peor regulación que el regulador con set-point constante, esto es en compensación al control de potencia (ver Figura 5.26)

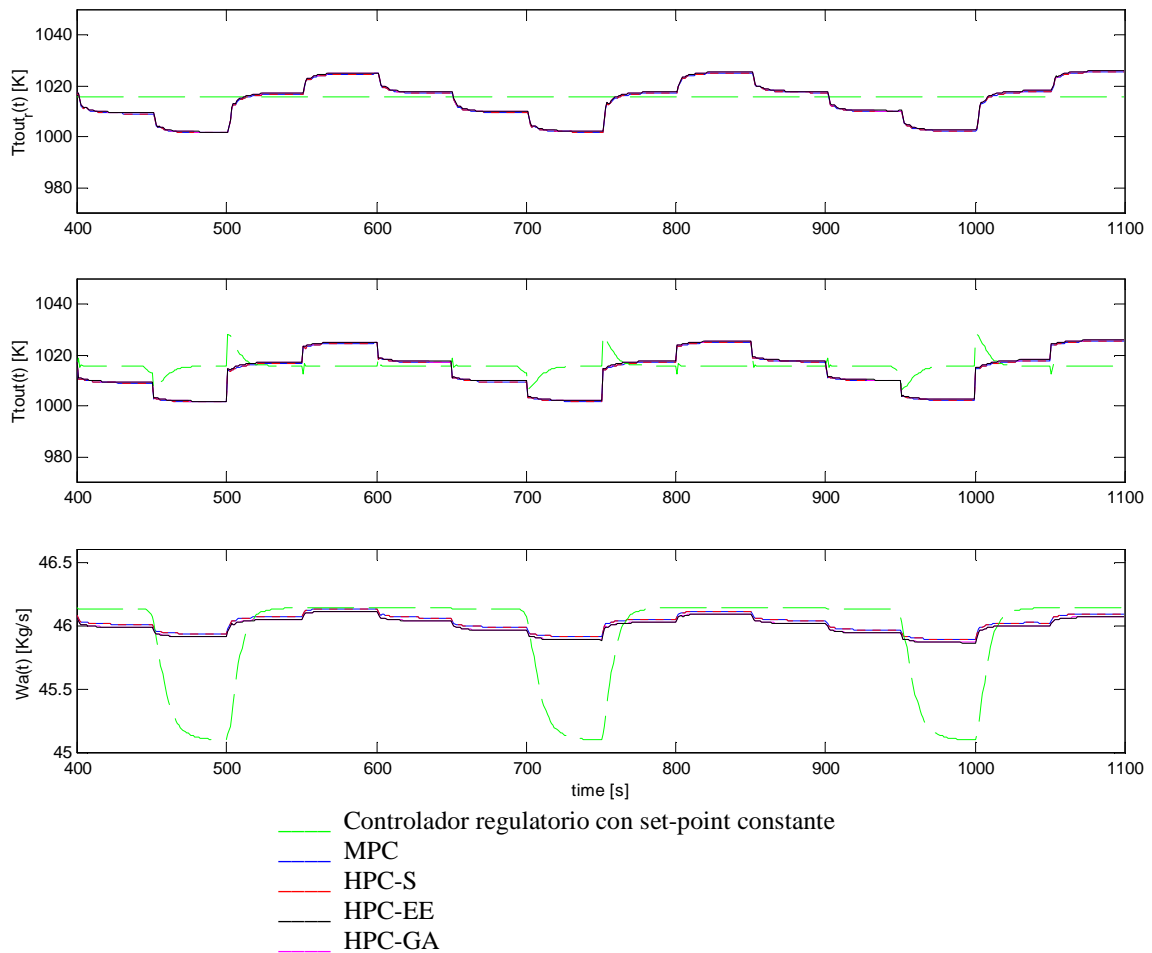


Figura 5.25. Respuesta de lazo cerrado de la temperatura con los controladores propuestos (Función objetivo regulatoria).

En la Figura 5.26 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia (gráfica superior set-point óptimo, gráfica central la variable controlada y gráfica inferior variable manipulada) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basado en algoritmos genéticos.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados logran una mejor regulación que el regulador con set-point constante, debido a que los controladores predictivos incluyen un esfuerzo de optimización en la obtención de su ley de control, lo que los controles PI tradicionales no contemplan.

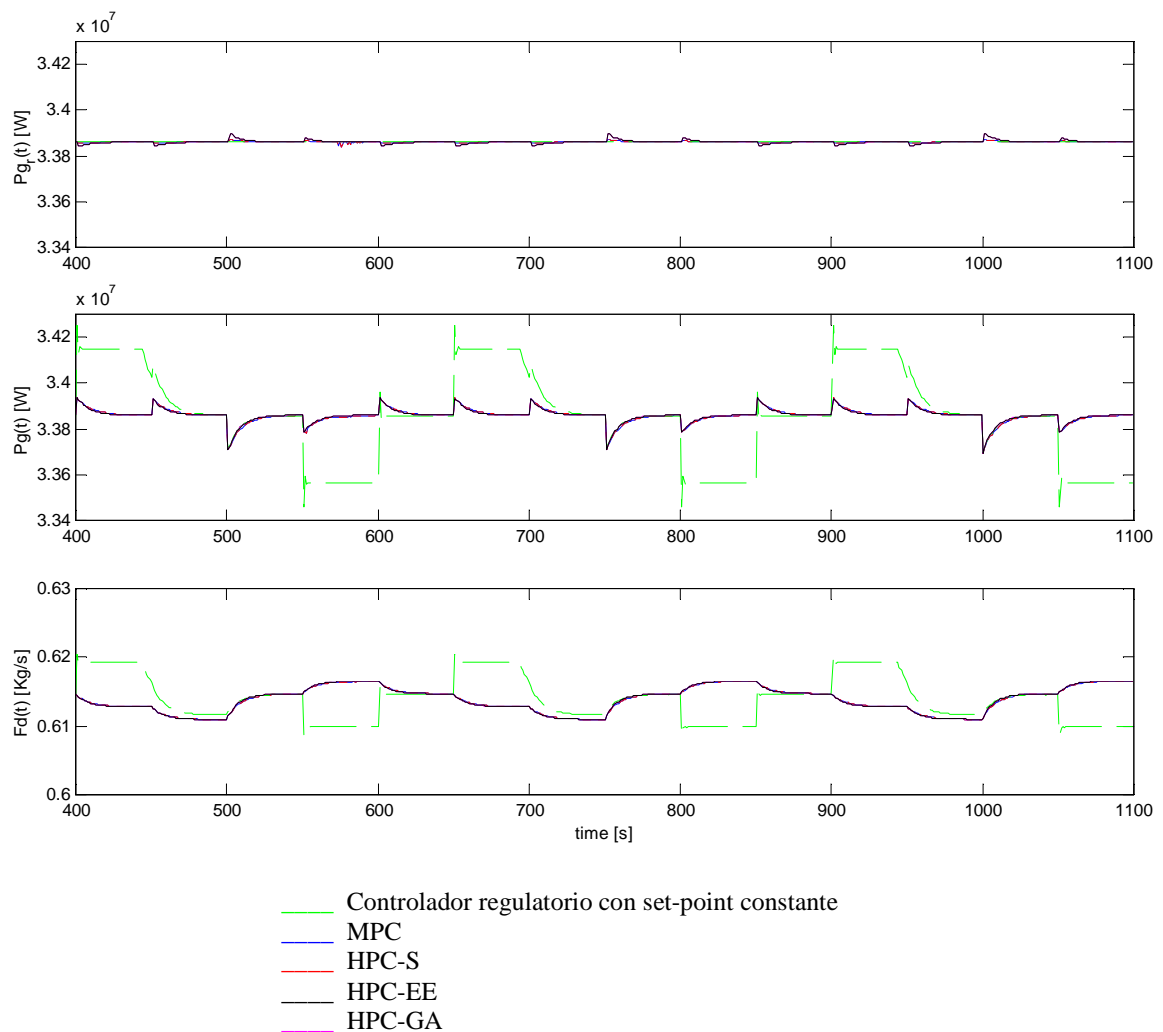


Figura 5.26. Respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos (Función objetivo regulatoria).

La figura 5.27 presenta la potencia entre los 746 y 880 segundos de simulación de la figura 5.26.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados logran una mejor regulación que el regulador con set-point constante. En especial el controlador logrado con enumeración explícita HPC-EE y el controlador logrado con optimización genética HPC-GA son los que presentan la mejor regulación de potencia dentro de los controladores utilizados. Es decir estos controladores son los que mejor reflejan las características híbridas del sistema regulatorio.

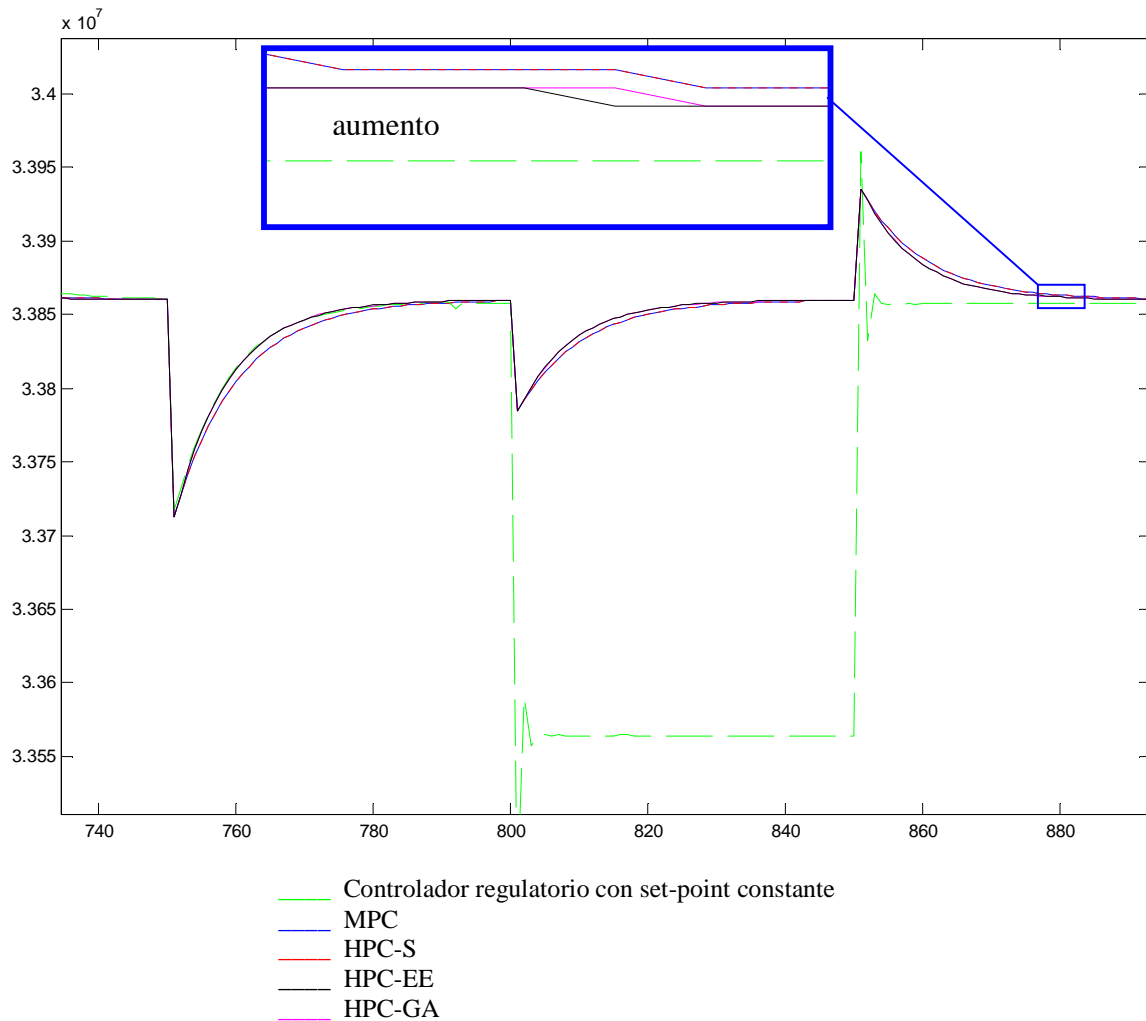


Figura 5.27. Detalle respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos. (Función objetivo regulatoria).

5.4.8. Implementación de los controladores predictivos supervisores diseñados con función objetivo con características económicas y regulatorias y conmutador con selección de dos señales u_a y u_b

En la Figura 5.29 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la temperatura con un factor de peso $\eta = 3$ (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) de los gases de escape considerando la función objetivo 5.66 para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas

De la Figura 5.29 se aprecia que los controladores predictivos diseñados realizan menor esfuerzo de control que el controlador con set-point constante.

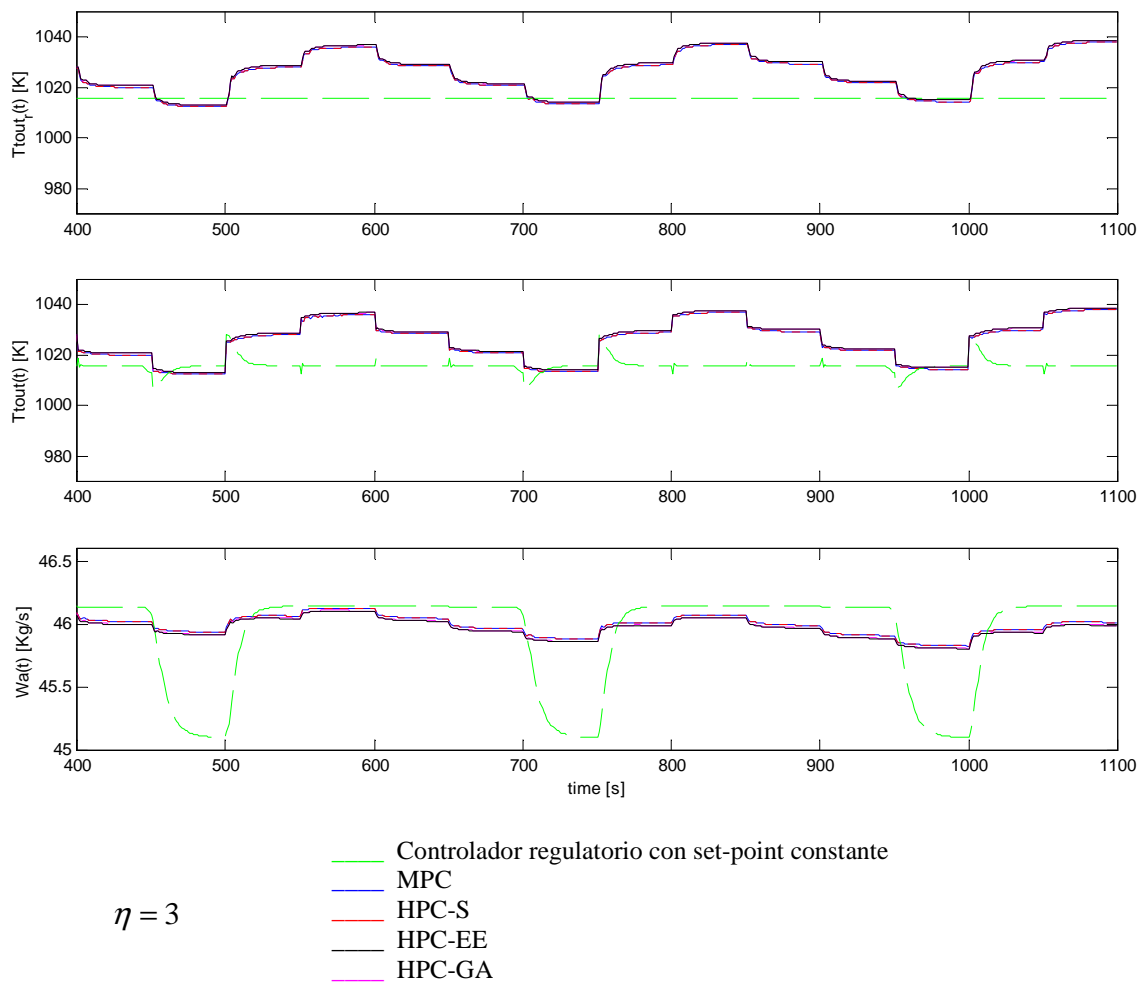


Figura 5.29. Respuesta de lazo cerrado de la temperatura con los controladores propuestos (Función objetivo económica y regulatoria).

En la Figura 5.30 se presenta un detalle para 600 hasta 800 segundos la respuesta en lazo cerrado para la temperatura de los gases de escape con $\eta = 3$.

Se observa que los controladores predictivos diseñados tienen peor regulación que el controlador con set-point constante. Esto es en compensación logro de metas económicas.

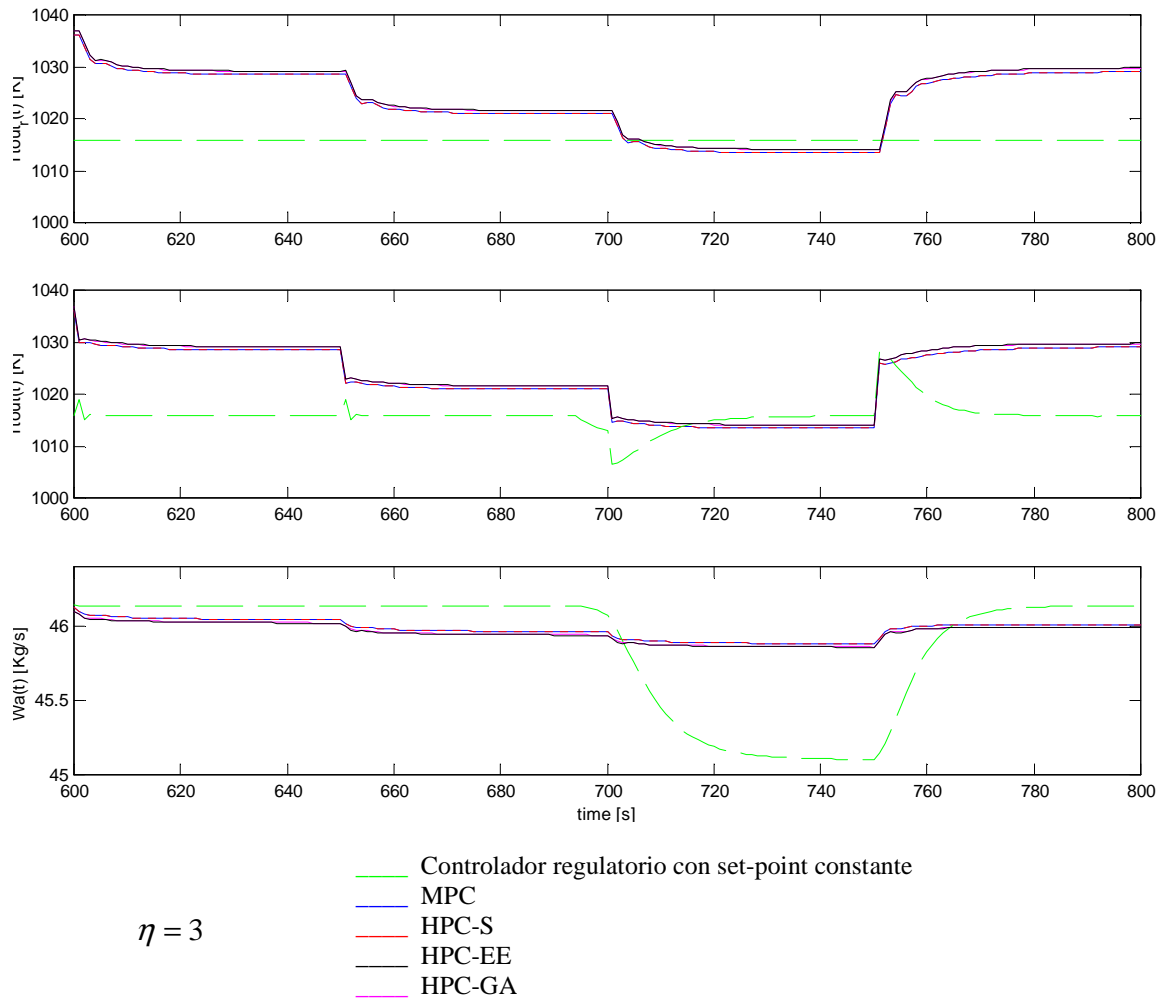


Figura 5.30. Detalle de respuesta de lazo cerrado de la temperatura con los controladores propuestos (Función objetivo económica y regulatoria).

En la Figura 5.31 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia con un factor de peso práctico $\eta = 3$ (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados generan más potencia que el controlador con set-point constante. Además los controladores diseñados generan una señal de potencia más estable. Esto es debido a que los controladores predictivos incluyen un esfuerzo de optimización para obtener la ley de control, este se expresa en una función objetivo que incluye maximizar el beneficio por concepto de potencia producida.

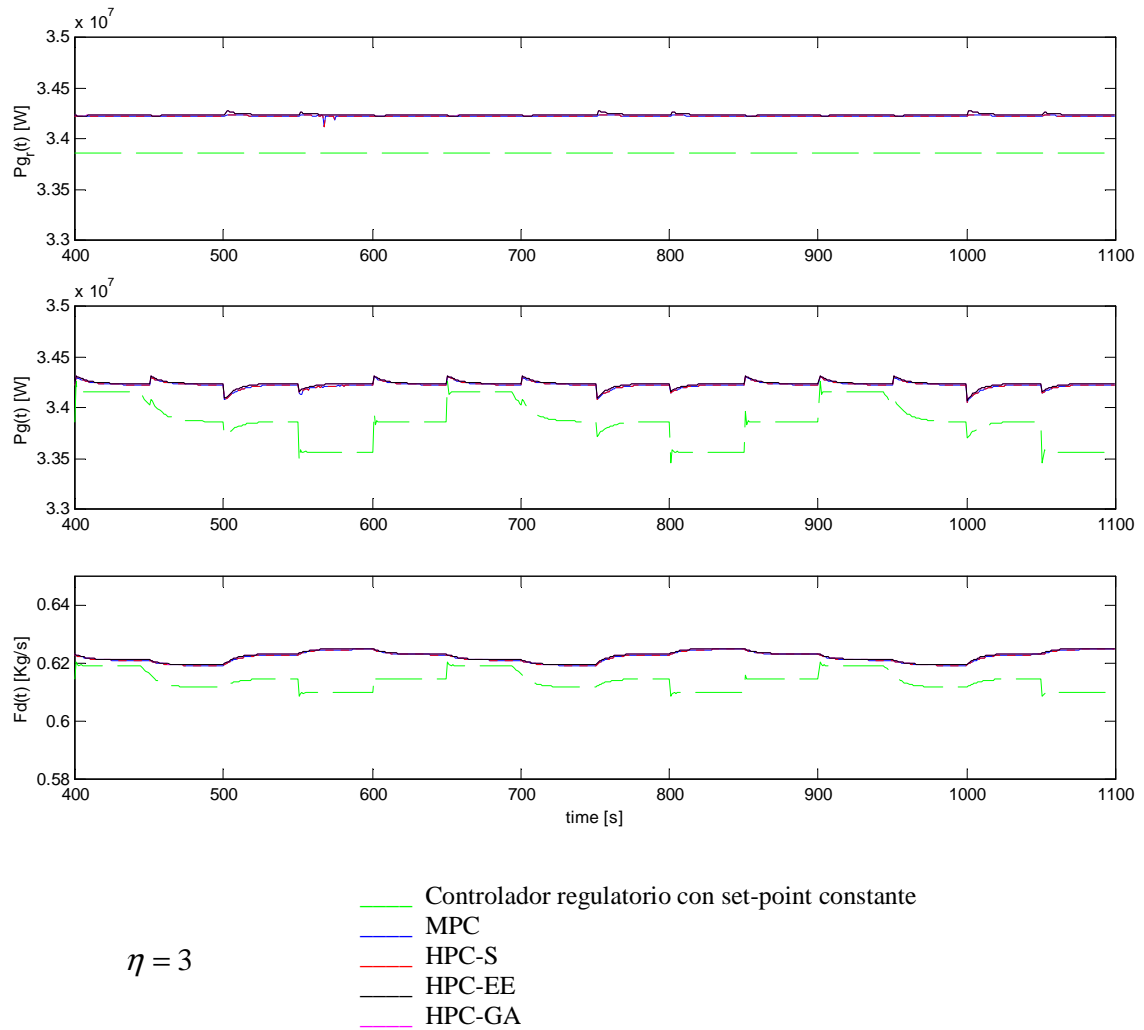


Figura 5.31. Respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos (Función objetivo económica y regulatoria).

En la Figura 5.32 se presenta un detalle la respuesta en lazo cerrado para la temperatura de los gases de escape con $\eta = 3$.

De la Figura 5.32 se aprecia que el controlador logrado con enumeración explícita HPC-EE y el controlador logrado con optimización genética HPC-GA son el que logran mayor potencia de salida dentro de los controladores utilizados. Esto por las razones explicadas en la figura 5.31.

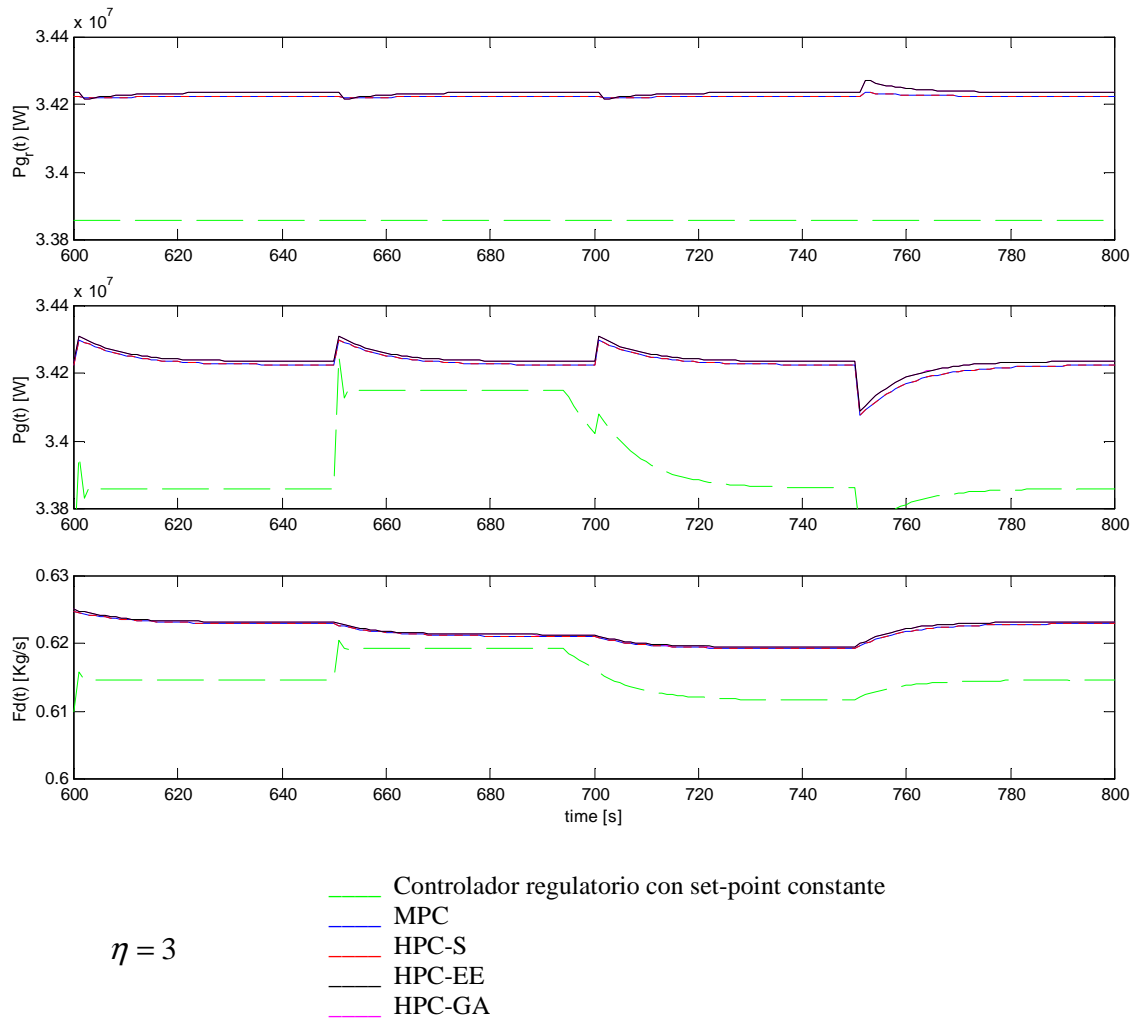


Figura 5.32. Detalle de respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos. (Función objetivo económica y regulatoria).

En la Figura 5.33 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la temperatura con $\eta = 1.5$ (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) de los gases de escape para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con solución con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basado en algoritmos genéticos.

En la Figura 5.33 se aprecia que los controladores predictivos diseñados realizan menor esfuerzo de control que el controlador con set-point constante.

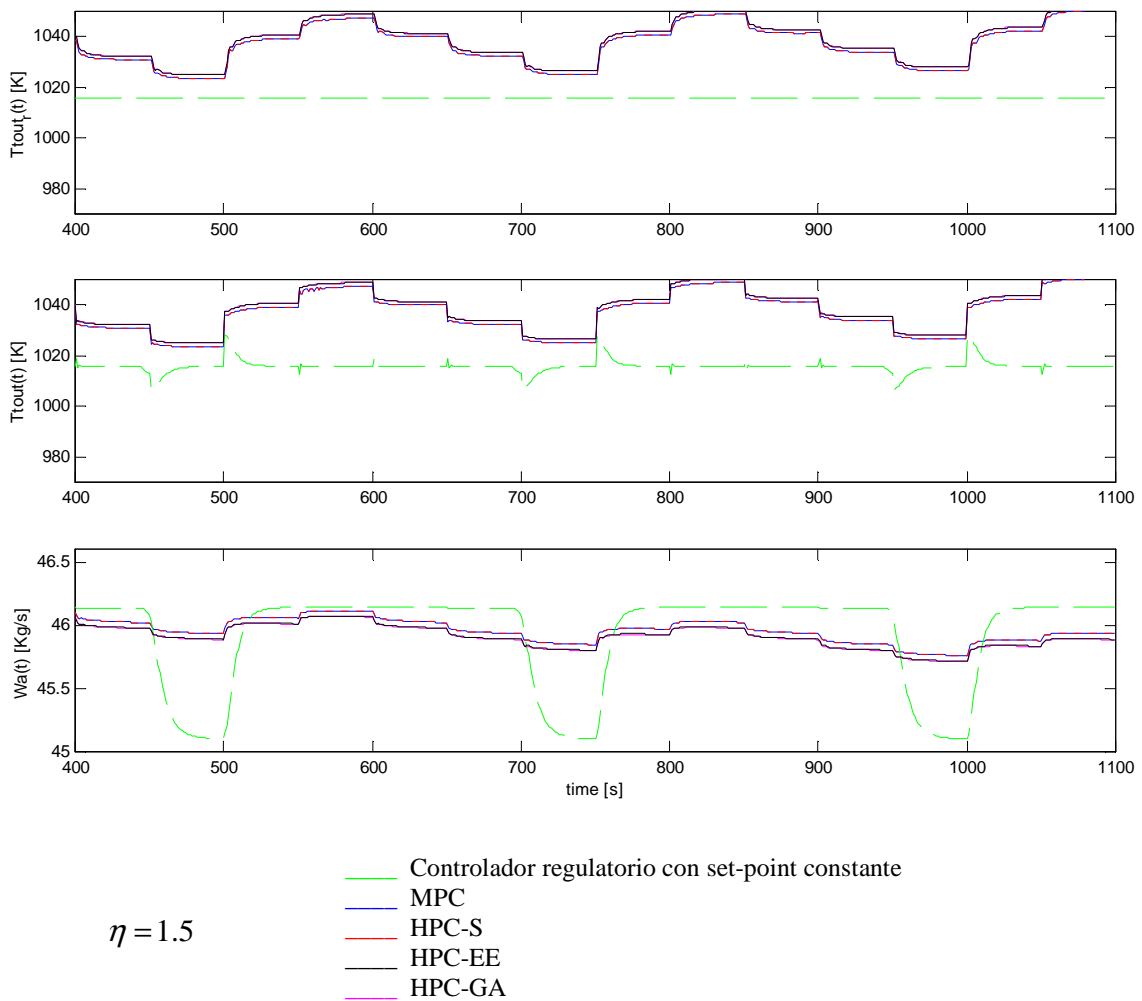


Figura 5.33. Respuesta de lazo cerrado de la temperatura con los controladores propuestos. (Función objetivo económica y regulatoria).

En la Figura 5.34 se presenta un detalle la respuesta en lazo cerrado para la temperatura con $\eta=1.5$ (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) de los gases de escape para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con solución con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basado en algoritmos genéticos.

En la Figura 5.34 se aprecia que los controladores predictivos diseñados tienen peor regulación que el controlador con set-point constante. Esto es en compensación logro de metas económicas.

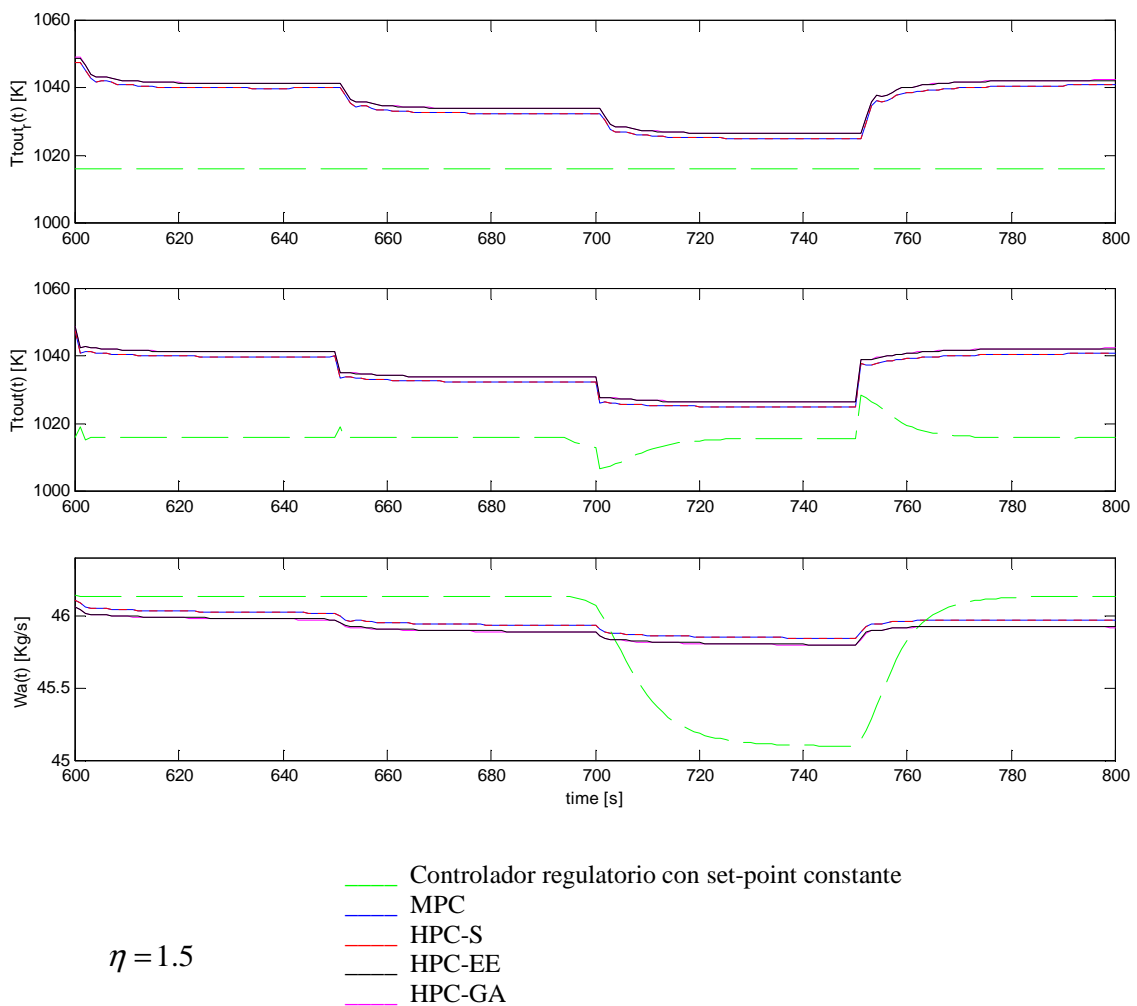


Figura 5.34. Detalle de respuesta de lazo cerrado de la temperatura con los controladores propuestos. (Función objetivo económica y regulatoria).

En la Figura 5.35 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia con $\eta = 1.5$ (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con solución con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basado en algoritmos genéticos.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados generan más potencia que el controlador con set-point constante y mayor potencia que en el caso de $\eta = 3$ (ver Figura 5.31). Además los controladores diseñados generan una señal de potencia más estable que el controlador con set-point constante.

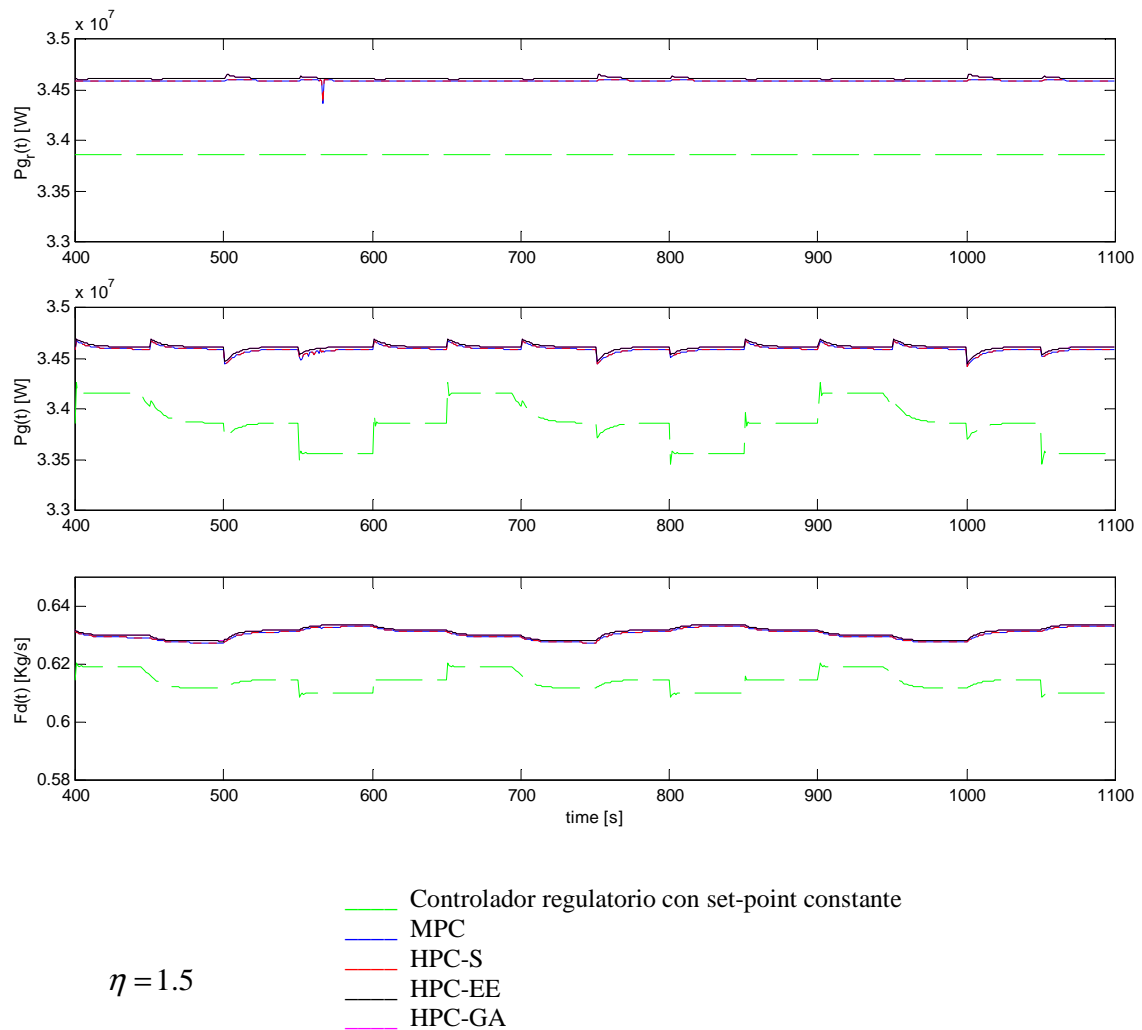


Figura 5.35. Respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos. (Función objetivo económica y regulatoria).

En la Figura 5.36 se presenta un detalle la respuesta en lazo cerrado para la temperatura con un factor de peso práctico $\eta = 1.5$ (Figura superior set-point óptimo, Figura central la variable controlada y Figura inferior variable manipulada) de los gases de escape para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con solución con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA con solución con algoritmos genéticos.

Se aprecia que el controlador logrado con enumeración explícita HPC-EE y el controlador logrado con optimización genética HPC-GA los que logran mayor potencia de salida.

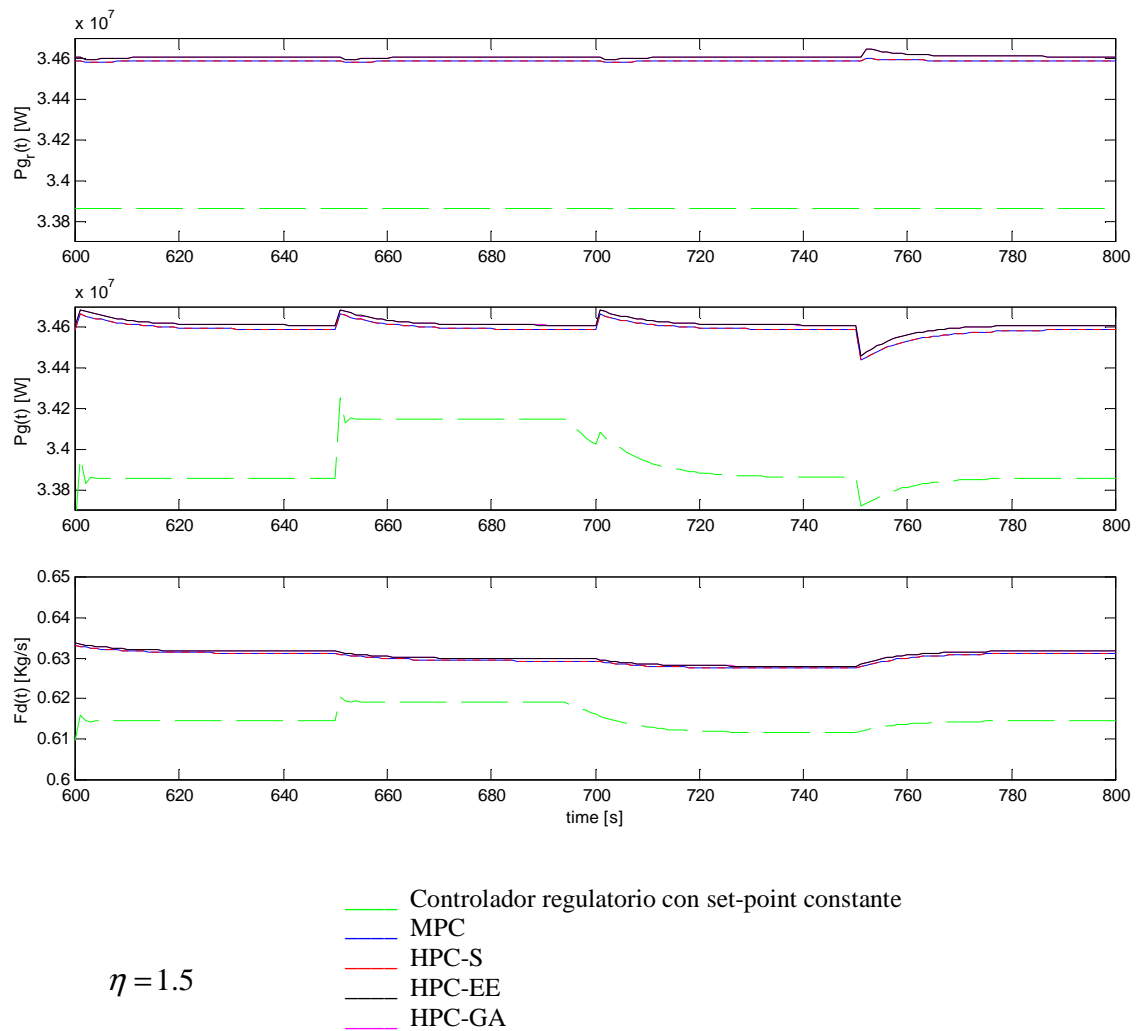


Figura 5.36. Detalle de respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos. (Función objetivo económica y regulatoria).

5.4.9. Análisis de datos

Función objetivo con características sólo regulatorias

En la Tabla 5.4 se describen los valores medios de los índices de error de set-point de trayectoria y esfuerzo de acción de control (función objetivo (5.63) con características sólo regulatorias) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con solución con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basados en algoritmos genéticos.

Tabla 5.4. Valores medios de los índices de error de set-point de trayectoria y esfuerzo de acción de control en la Turbina a Gas

Controlador	$J_{sp_{T_{out}}} = \sum_{j=1}^N (\hat{T}_{tout}(t+j) - T_{tout}^r)^2$	$J_{\Delta W_a} = \sum_{j=1}^N (\Delta W_a)^2$	$J_{sp_{P_{mech}}} = \sum_{j=1}^N (\hat{P}_{mech}(t+j) - P_{mech}^r)^2$	$J_{\Delta F_d} = \sum_{j=1}^N (\Delta F_d)^2$
MPC	$5.9220 \cdot 10^2$	$0.323 \cdot 10^{-3}$	$0.1707 \cdot 10^{11}$	$0.336 \cdot 10^{-6}$
HPC-S	$5.9220 \cdot 10^2$	$0.323 \cdot 10^{-3}$	$0.1707 \cdot 10^{11}$	$0.336 \cdot 10^{-6}$
HPC-EE	$6.1156 \cdot 10^2$	$0.327 \cdot 10^{-3}$	$0.0814 \cdot 10^{11}$	$0.070 \cdot 10^{-6}$
HPC-GA	$6.1176 \cdot 10^2$	$0.327 \cdot 10^{-3}$	$0.0815 \cdot 10^{11}$	$0.070 \cdot 10^{-6}$
PI	$0.5276 \cdot 10^2$	$4.193 \cdot 10^{-3}$	$3.8085 \cdot 10^{11}$	$4.652 \cdot 10^{-6}$

En la en la tabla 5.4 se aprecia que los controladores predictivos diseñados logran una mejor regulación por lo menos en un orden de magnitud que el regulador con set-point constante.

El controlador logrado con enumeración explícita HPC-EE y el controlador con optimización genética HPC-GA son el que presenta la mejor regulación de potencia por lo menos sobre el 50% superior que los demás controladores predictivos. Es decir, estos controladores son los que mejor utilizan las características híbridas del sistema regulatorio.

Función objetivo con características económicas y regulatorias

En la Tabla 5.5 se describen los valores medios de los índices J_C y J_{Cr} de la función objetivo con características económicas y regulatorias (5.63) con un factor de peso práctico $\eta = 3$ y $\eta = 1.5$ para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas, incluyendo el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con solución con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basados en algoritmos genéticos.

Tabla 5.5 .Valores medios de la función objetivo

	MPC	HPC-S	HPC-EE	HPC-GA	PI
$\eta = 3$					
J_C	2798.7	2798.7	2800.0	2800.1	2770.5
J_{Cr}	1.451×10^{15}	1.451×10^{15}	1.477×10^{15}	1.479×10^{15}	0.978×10^{15}
Beneficio económico	2.088 %	2.0883 %	2.1375 %	2.1388 %	
$\eta = 1.5$					
J_C	2828.3	2828.3	2830.0	2830.0	2770.5
J_{Cr}	5.321×10^{15}	5.321×10^{15}	5.657×10^{15}	5.657×10^{15}	0.928×10^{15}
Beneficio económico	3.1637 %	3.1638 %	3.2273 %	3.2274 %	

El controlador supervisor predictivo híbrido resuelto con enumeración explícita y el controlador basado en algoritmos genéticos tienen un beneficio económico entre el 2.1375% y 2.1388% para $\eta = 3$ respectivamente y para $\eta = 1.5$ entre 3.2273 % y 3.2274 % respectivamente, los cuales además presentan una pequeña mejora con respecto a los controladores predictivos más simplificados. Esto demuestra que los controladores híbridos (HPC-EE y HPC-GA) referidos logran una mejor representación de las características híbridas del sistema.

5.5. Discusión

Se puede lograr una mejora sustancial (sobre el 74%) en la regulación de la frecuencia utilizando un controlador predictivo en especial utilizando un controlador supervisor predictivo híbrido con optimización genética HPC-GA1.

Los controladores supervisores predictivos propuestos entregan un beneficio económico entre un 2% y 3% en comparación con la estrategia de control con set-point constante. El controlador logrado con enumeración explícita HPC-EE y el controlador con optimización genética HPC-GA son el que producen mayor beneficio económico.

Se destaca que el controlador supervisor predictivo HPC-S es un caso especial del controlador supervisor predictivo HPC-EE, donde sólo dos estados de la variable binaria δ_k son considerados. Es decir $\delta_k = 1 \quad k=1, \dots, N$ o $\delta_k = 0 \quad k=1, \dots, N$. Por lo tanto, como muestra las tablas 5.4 y 5.5 los controladores supervisores predictivos híbridos HPC-EE y HPC-GA presentan los mejores resultados debido a que el espacio de búsqueda considera todas las combinaciones de las posibles secuencias δ_j para el horizonte de predicción.

Además debido a que el controlador supervisor predictivo HPC-S es un caso especial del controlador supervisor predictivo HPC-EE vemos que, por la simplificación del modelo regulatorio, este controlador no refleja lo suficiente las características híbridas del sistema, por lo cual su resultado es semejante al resultado entregado por el controlador tradicional MPC.

VI. Efectos de la Estrategia de Control Supervisor Predictivo para la Planta Termoeléctrica Completa

En este apartado se realiza un análisis de los efectos producidos sobre una central termoeléctrica de ciclo combinado completa por los controladores supervisores diseñados para la turbina a gas, considerando su función objetivo con características económicas y regulatorias (ecuación 5.75). Por lo tanto se analizan las siguientes situaciones:

- Los efectos producidos sobre los parámetros de la central termoeléctrica al implementar todos los controladores supervisores predictivos híbridos diseñados para la Turbina a Gas.
- Los efectos producidos sobre los parámetros de la central termoeléctrica al implementar los controladores junto con un nuevo controlador supervisor predictivo lineal para la caldera.
- Finalmente se presentan los efectos sobre los parámetros de la central termoeléctrica al implementar los controladores anteriores junto con un controlador supervisor predictivo lineal para la turbina a vapor.

Para hacer el estudio mencionado, es necesario considerar los siguientes supuestos para relacionar los principales sistemas de la central termoeléctrica:

- El set-point de la central termoeléctrica de ciclo combinado (P_{CCC}^r), respetando el despacho económico, debe lograrse que la suma de la potencia de salida de la Turbina a Gas (P_{mech-G}) más el set-point la potencia de la Turbina a Vapor (P_{mech-S}^r), es decir:

$$P_{CCC}^r = P_{mech-G} + P_{mech-S}^r \quad (6.1)$$

- El set-point de la potencia mecánica de turbina a vapor (P_{mech-S}^r), es proporcional al set-point de la presión de vapor sobrecalentado en la caldera (P_S^r), con K constante de proporcionalidad.

$$P_{mech-S}^r = K \cdot P_S^r \quad (6.2)$$

Esto significa que si se requiere aumentar la potencia mecánica de la turbina a vapor P_{mech-S}^r en cierto porcentaje, en igual porcentaje se debe aumentar la presión P_S^r de vapor sobrecalentado (que quede claro que esta relación se define sólo para las referencias).

La estructura simplificada de la central termoeléctrica de ciclo combinando (CCC) se presenta en la Figura 6.1, donde se pueden apreciar los principales lazos de control, para la turbina a gas, la caldera y la turbina a vapor

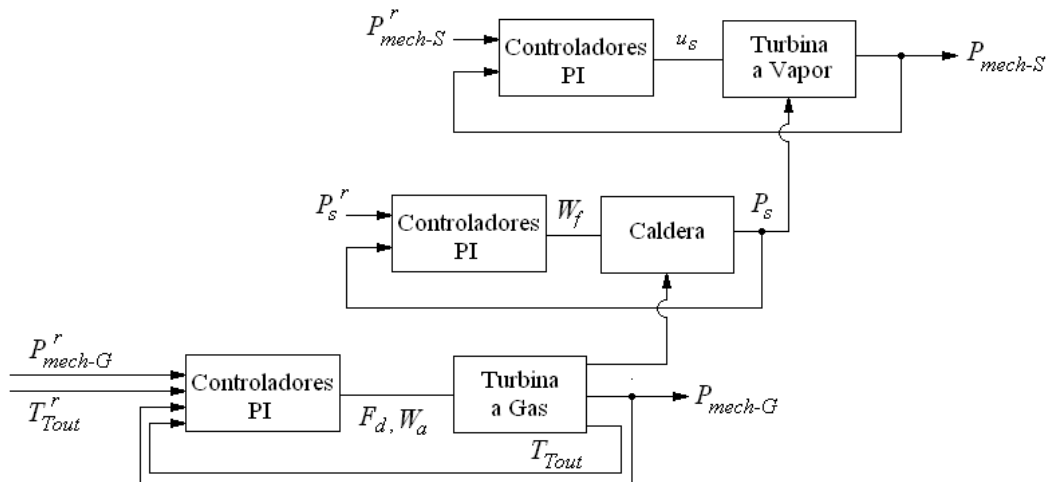


Figura 6.1. Central termoeléctrica de ciclo combinado y sus principales lazos de control

En la Figura 6.1 se observa que las variables manipuladas para la turbina a gas son el flujo de combustible (F_d) y el flujo de aire de salida (W_a) para controlar la potencia (P_{mech-G}) generada y la temperatura de los gases de salida (T_{tout}).

Para la caldera las variable manipulada es el flujo de combustible (W_f) y la variable controlada es la presión de vapor sobrecalentado (P_s).

Finalmente la variable manipulada para la turbina a vapor es (u_s) la señal de control de la válvula que controla el flujo de vapor, y la variable controlada es la potencia generada por esta turbina (P_{mech-S}).

6.1. Efectos de las estrategias de control supervisor predictivo híbridas diseñadas para la turbina gas sobre la CCC

En la Figura 6.2 se presenta el sistema simplificado de la central termoeléctrica y sus principales lazos de control junto con el controlador supervisor predictivo híbrido de la turbina a gas. El set-point de potencia de la central termoeléctrica (P_{CCC}^r) es el exigido por el despacho económico. Se puede apreciar que el controlador supervisor predictivo híbrido genera los set-point óptimos de la temperatura de salida de los gases (T_{tout}^{r*}) y la potencia (P_{mech-G}^{r*}) para la turbina a gas.

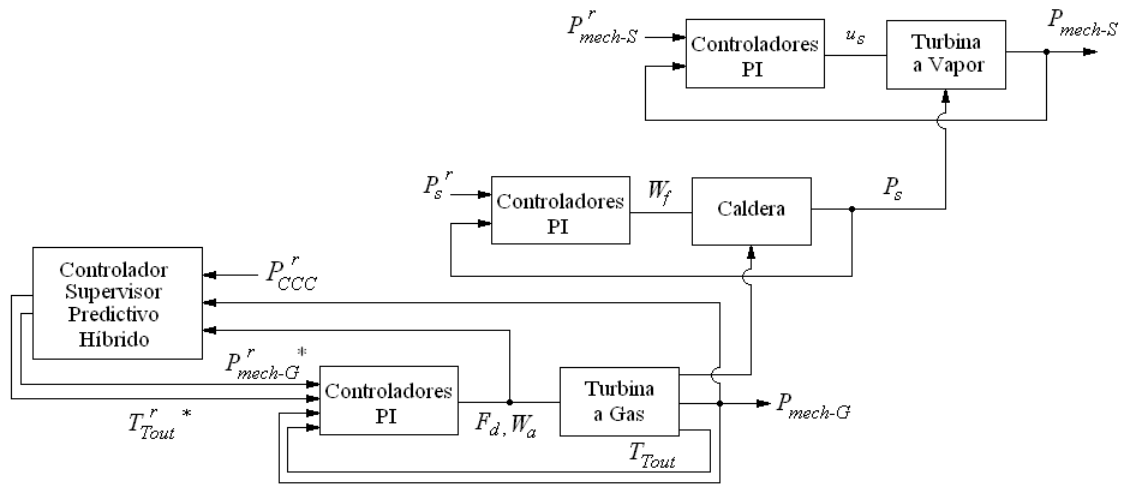


Figura 6.2. Central termoeléctrica de ciclo combinado, sus principales lazos de control y un controlador supervisor predictivo para turbina a gas

6.1.1. Implementación en MATLAB Simulink

Se observa en la Figura 6.3 la implementación de los controladores supervisores predictivos diseñados para la turbina a gas (capítulo V) en el simulador completo (en MATLAB Simulink) de Central Termoeléctrica de Ciclo Combinando.

En el bloque del controlador supervisor, la señal que sale de la turbina a gas (TG) incluye cuatro señales: potencia de salida (P_{mech-G}), temperatura de los gases de salida (T_{tout}), flujo de combustible (F_d) y flujo de aire de entrada (W_a). La señal de referencia óptima (r-opt TG) que entra a la turbina a gas, contiene el set-point óptimo de la temperatura de los gases de salida (T_{tout}^*) y el set-point óptimo la potencia (P_{mech-G}^*).

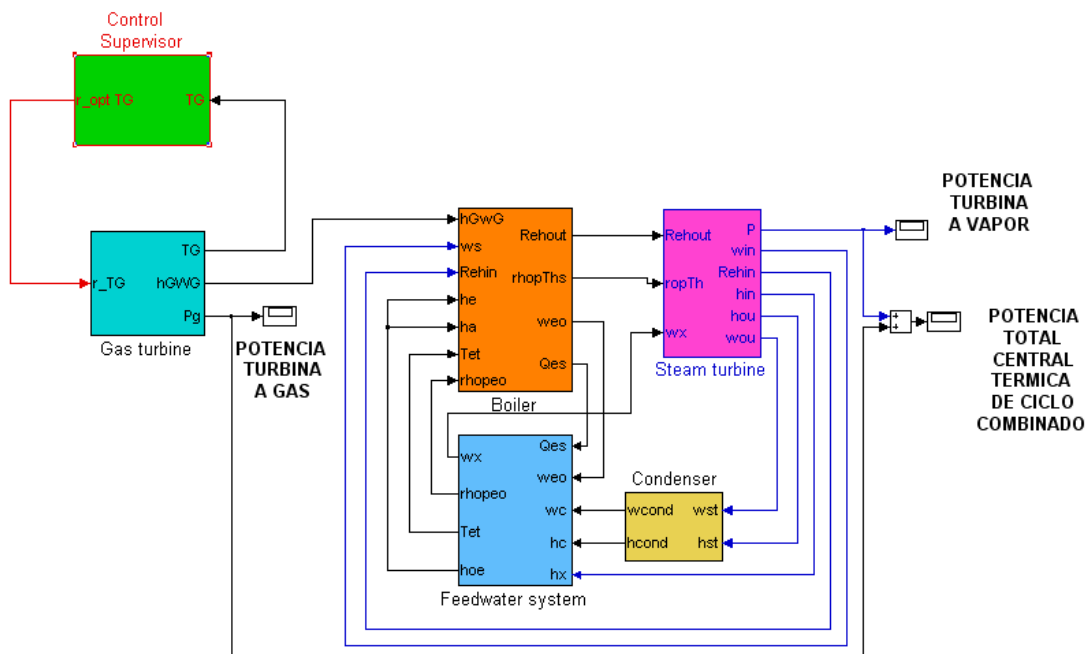


Figura 6.3. Implementación del controlador supervisor predictivo híbrido de la turbina a gas en una central termoeléctrica de ciclo combinado:

A continuación se presentan los resultados de los controladores predictivos diseñados analizando separadamente los efectos para la turbina a gas, caldera, turbina a vapor y finalmente los efectos en la salida de la CCC.

6.1.2. Efectos en la turbina a gas

En la Figura 6.4 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la temperatura de los gases de escape (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado. Se incluye el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basado en algoritmos genéticos.

En la Figura 6.4 se aprecia que los controladores predictivos diseñados realizan menor esfuerzo de control que el controlador con set-point constante. Además estos controladores entregan una peor regulación que el controlador con set-point constante, esto es en compensación al control de potencia mecánica (Figura 6.5).

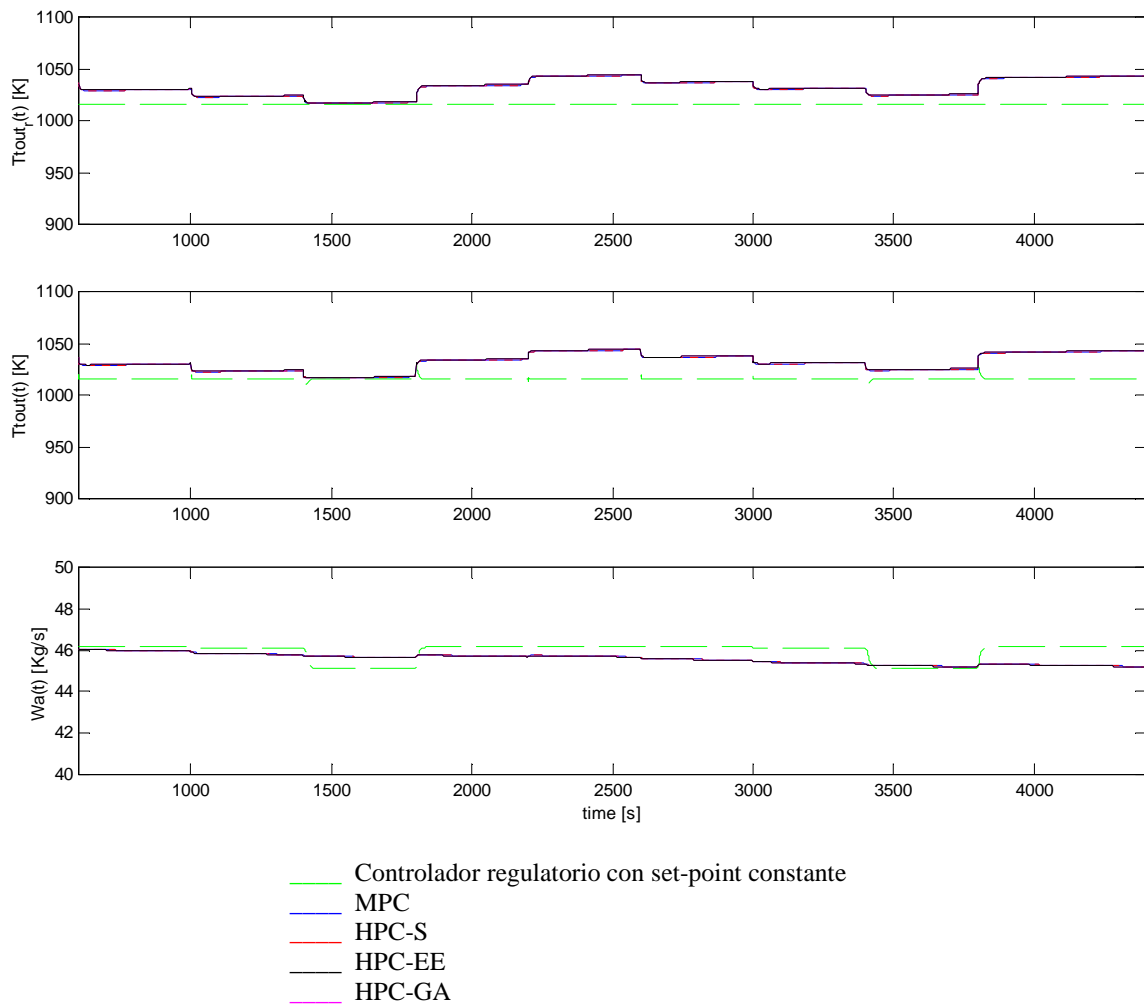


Figura 6.4. Respuesta de lazo cerrado de la temperatura de los gases de escape con los controladores propuestos (Función objetivo económica y regulatoria).

En la Figura 6.5 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas conectada al la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados logran una mejor regulación que el controlador con set-point constante.

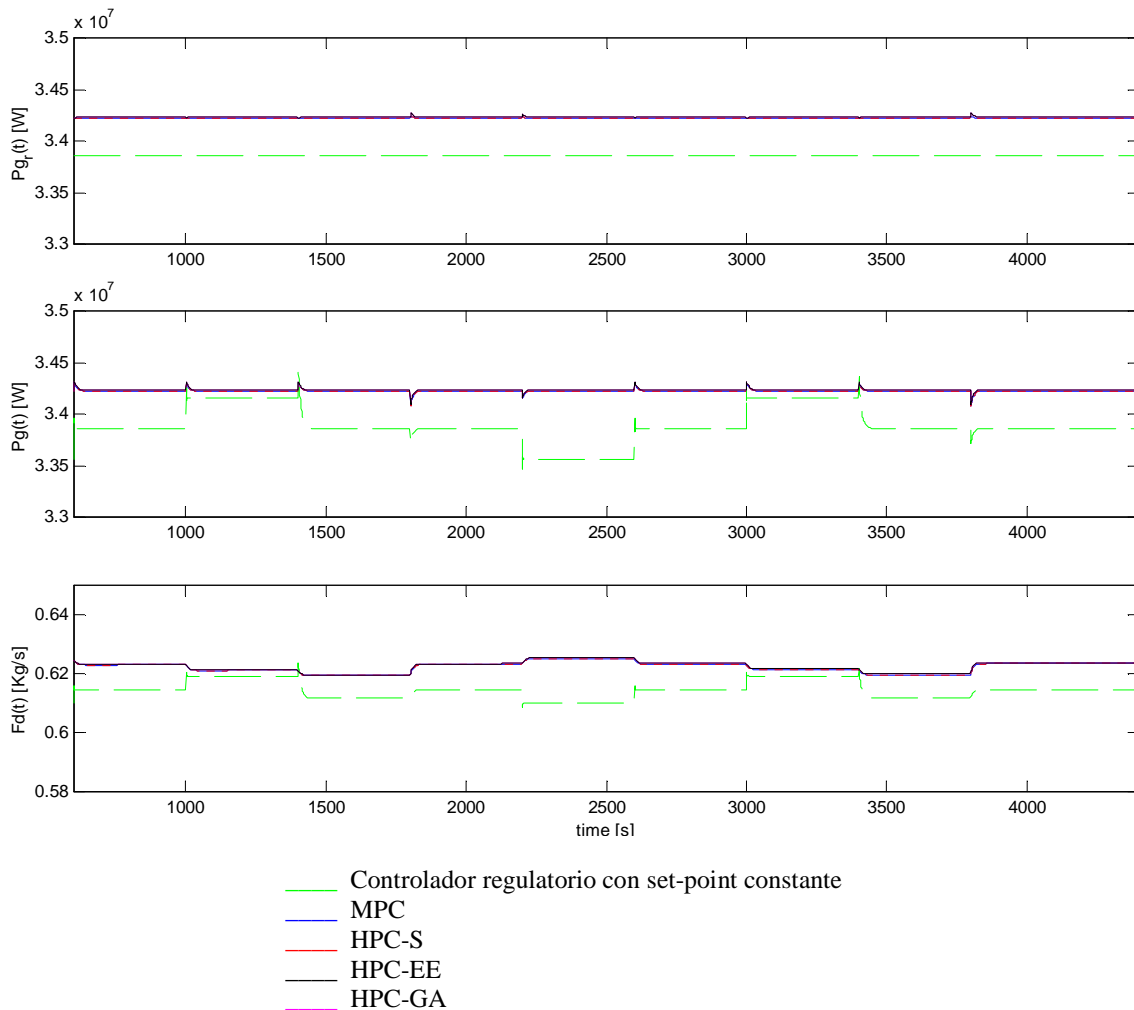


Figura 6.5. Respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos. La función para optimizar tiene características económicas y regulatorias.

6.1.3. Efectos en la caldera

En la Figura 6.6 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la presión de vapor sobrecalentado (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado. Se incluye el tradicional MPC.

De la Figura 6.6 se aprecia que la implementación de controladores predictivos en la Turbina a Gas producen el efecto de disminuir el flujo de combustible utilizado por la caldera no obstante el flujo de vapor es suficiente para (junto con la turbina a vapor) alcanzar el set-point de potencia de la CCC (P_{CCC}^r).

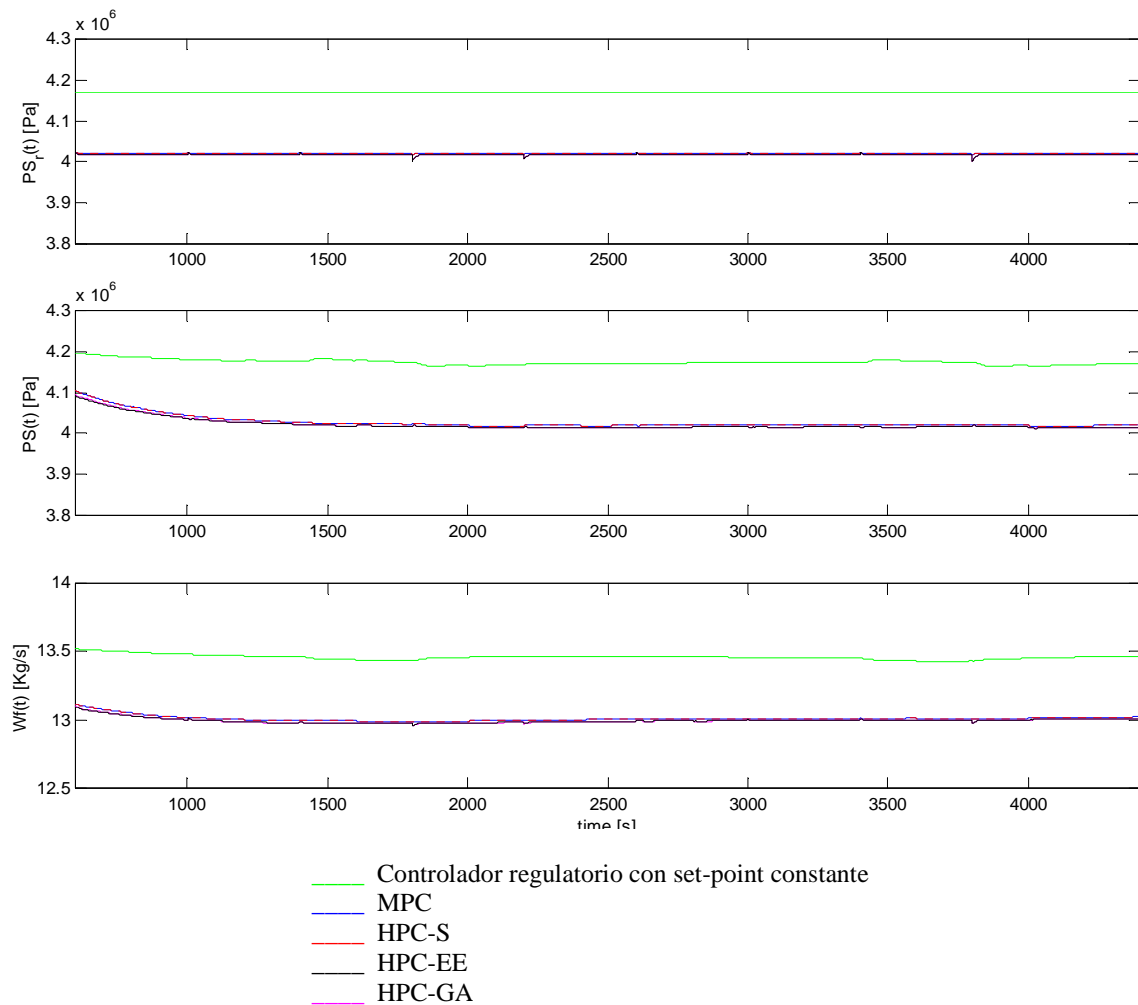


Figura 6.6. Set point y salida de presión de vapor sobrecalentado y flujo de combustible en la caldera

En la Figura 6.7 se presenta un detalle de la Figura 6.4.

Se aprecia que el controlador logrado con enumeración explícita HPC-EE y el controlador logrado con optimización genética HPC-GA sobre la turbina a gas son el que presentan el menor consumo de combustible utilizado por la caldera.

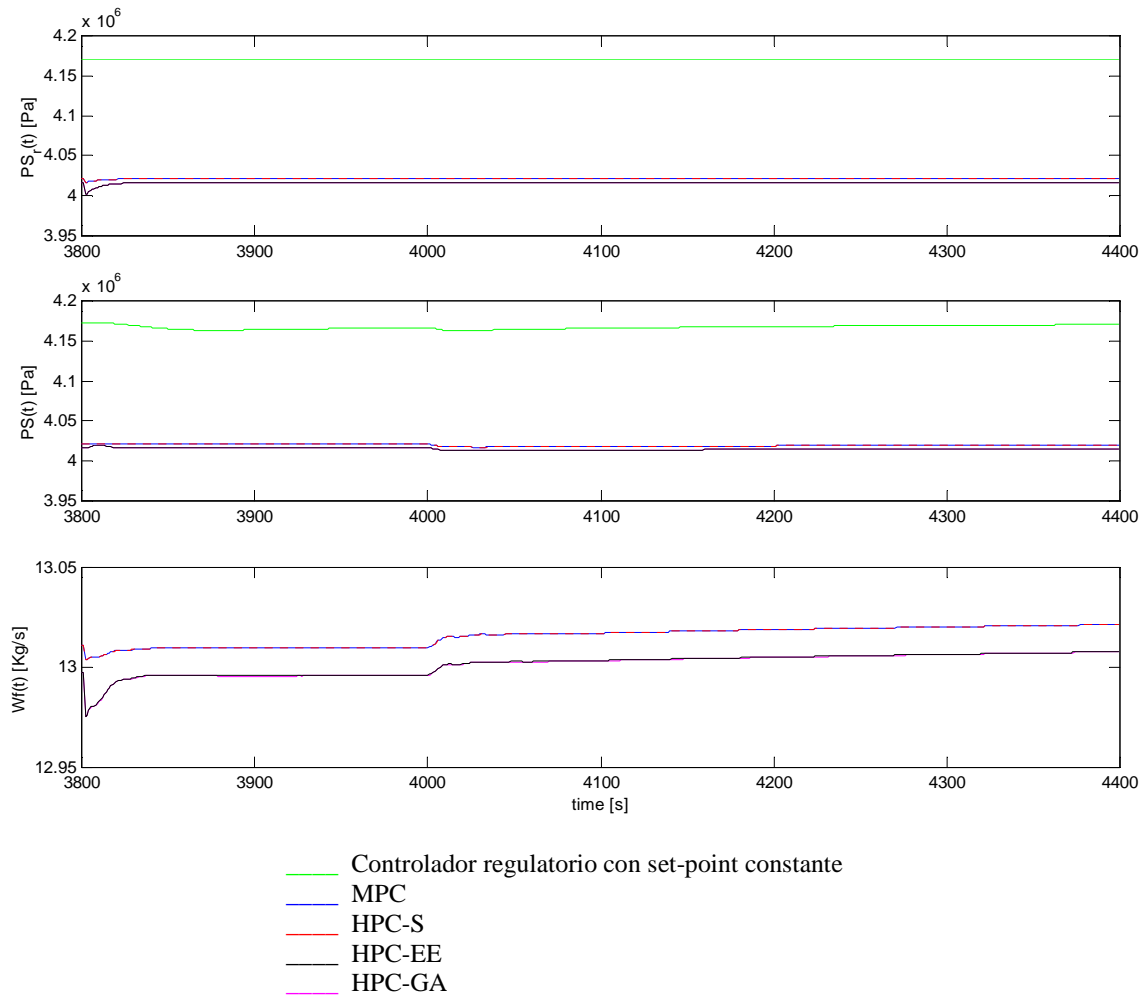


Figura 6.7. Detalle de presión de vapor saturado y flujo de combustible en la Caldera

6.1.4. Efectos en la Turbina a Vapor

En la Figura 6.8 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia en la Turbina a Vapor (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que la implementación de controladores predictivos en la turbina a gas produce el efecto de disminuir la potencia generada por la turbina a vapor no obstante se alcanza el set-point de potencia de la CCC (P_{CCC}^r).

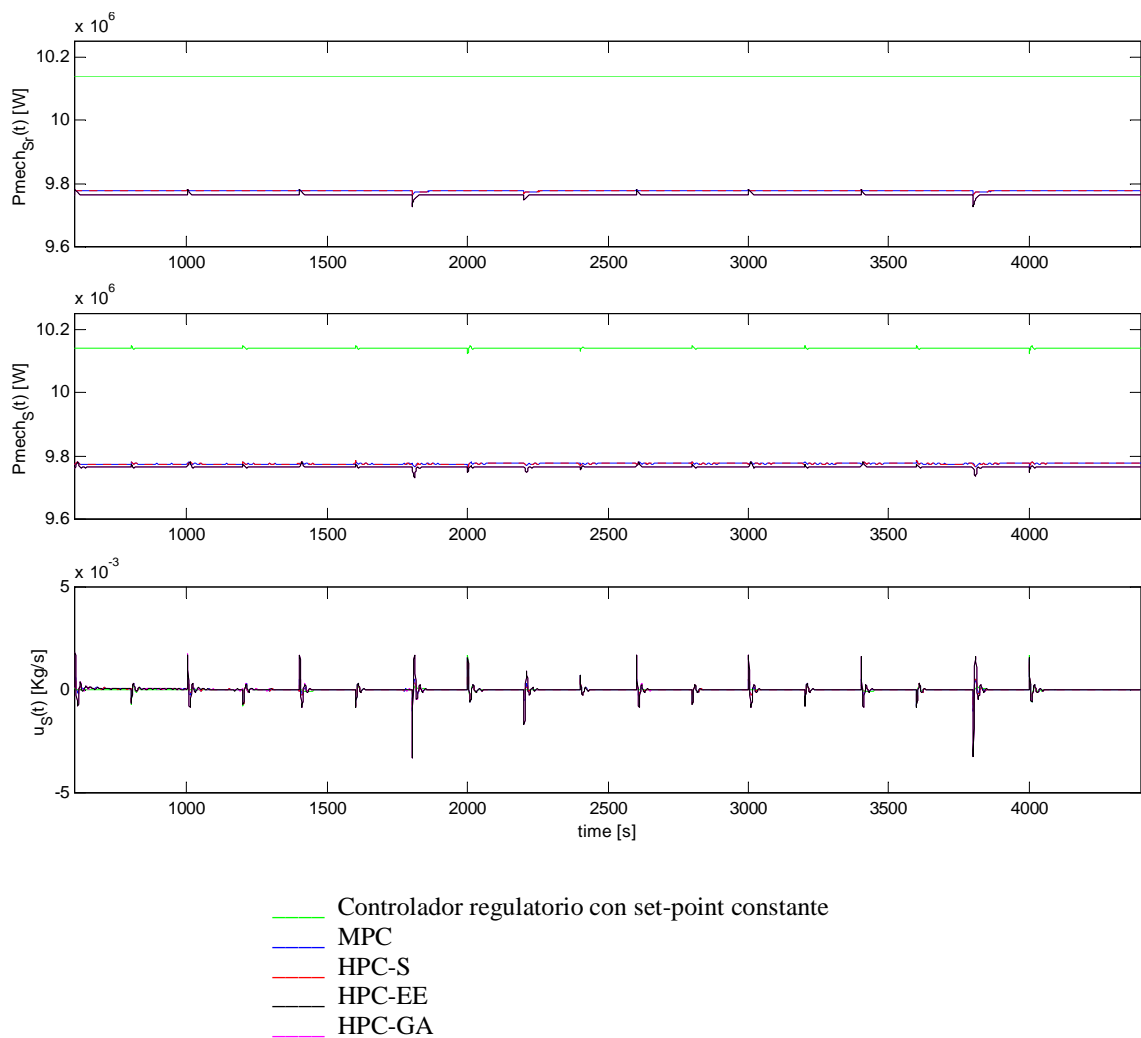


Figura 6.8. Set point y salida de la potencia y señal de control de válvula en la Turbina a Vapor

En la Figura 6.9 se presenta un detalle de la Figura 6.8.

Se observa que el controlador logrado con enumeración explícita HPC-EE y el controlador logrado con optimización genética HPC-GA sobre la turbina a gas disminuyen su potencia generada pero cumpliendo el set-point de potencia de la CCC, según se presenta a continuación.

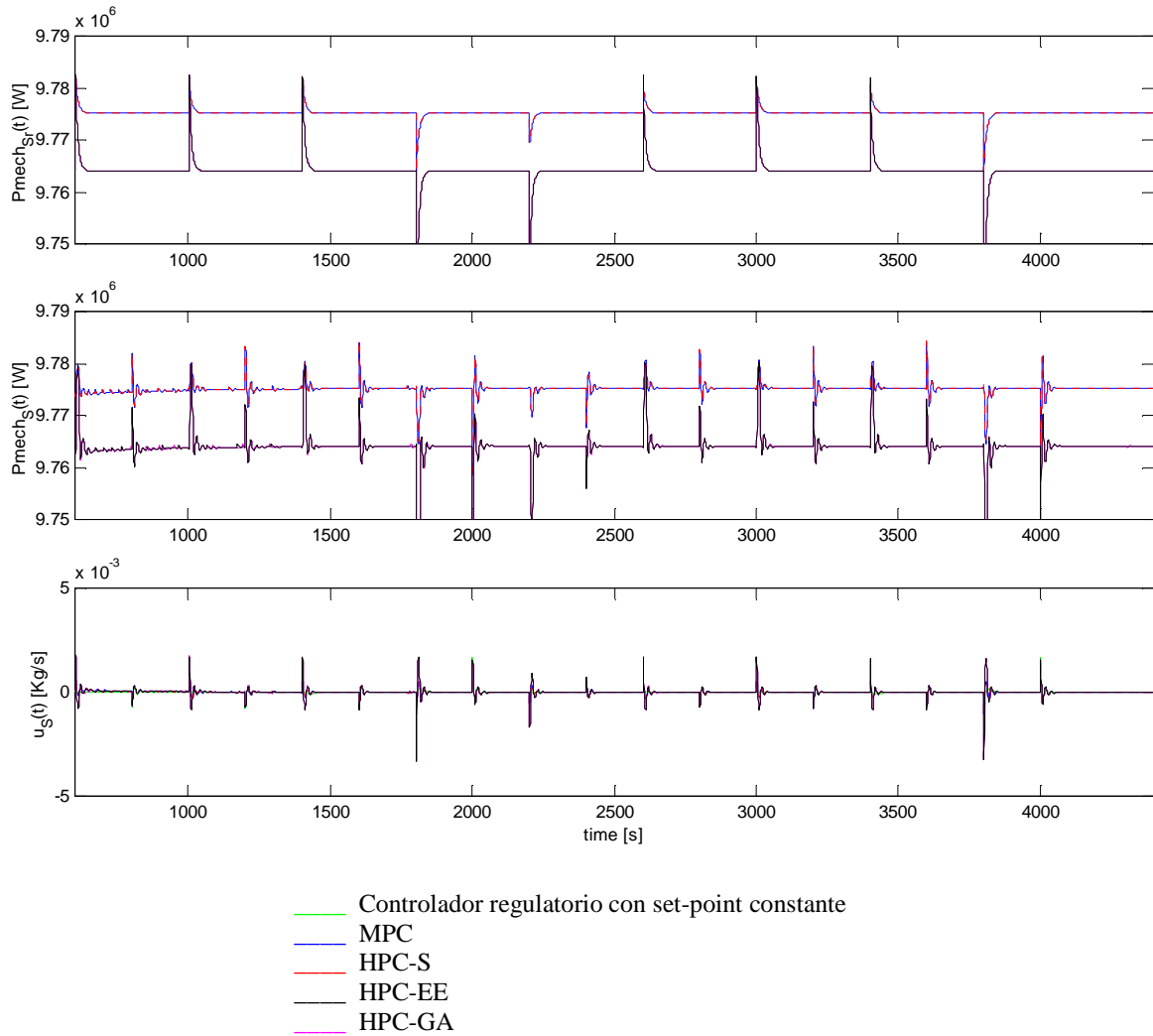


Figura 6.9. Detalle de la potencia y señal de control de válvula en la Turbina a Vapor

6.1.5. Efectos en la salida de la CCC

En la Figura 6.10 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia total en la CCC para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que la implementación de controladores predictivos en la turbina a gas produce el efecto de mejorar la regulación de potencia total de la CCC.

Notar que controlador con set-point constante para la turbina a gas ante la perturbación introducida (Figura 6.5) produce un sobrepaso en ciertos intervalos (por ejemplo entre los 1000 y 1500 segundos). Esto se refleja en el resultado de la potencia total en la CCC, la cual no cumple el despacho económico para idénticos intervalos. Tomar en cuenta que este sobrepaso en la potencia total de la CCC no sobrepasa el 1%.

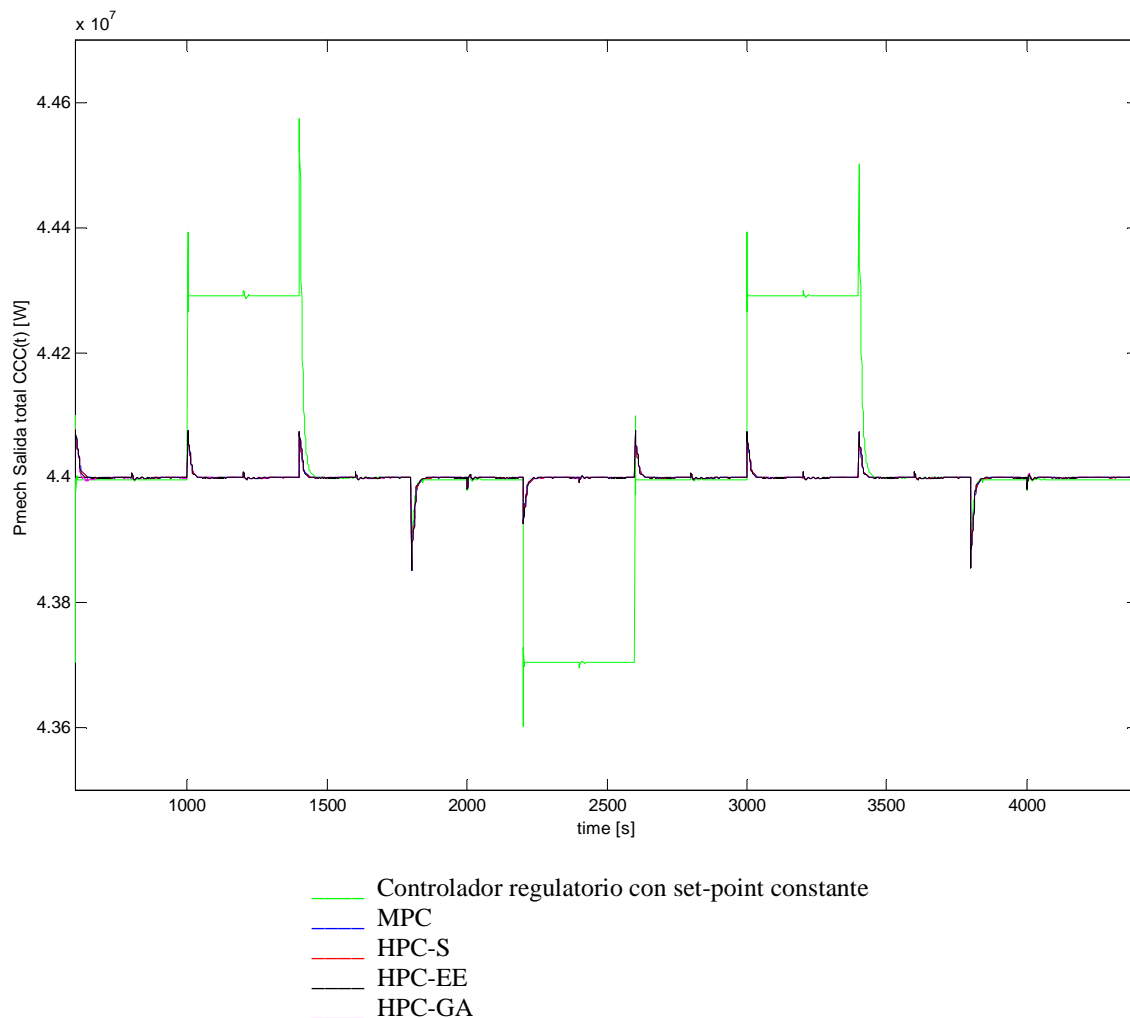


Figura 6.10. Potencia de salida de la Central termoeléctrica de Ciclo Combinado

En la Figura 6.11 se presenta un detalle de la Figura 6.12.

También se aprecia con más detalle como la implementación de controladores predictivos en la turbina a gas produce el efecto de mejorar la regulación de potencia total de la CCC.

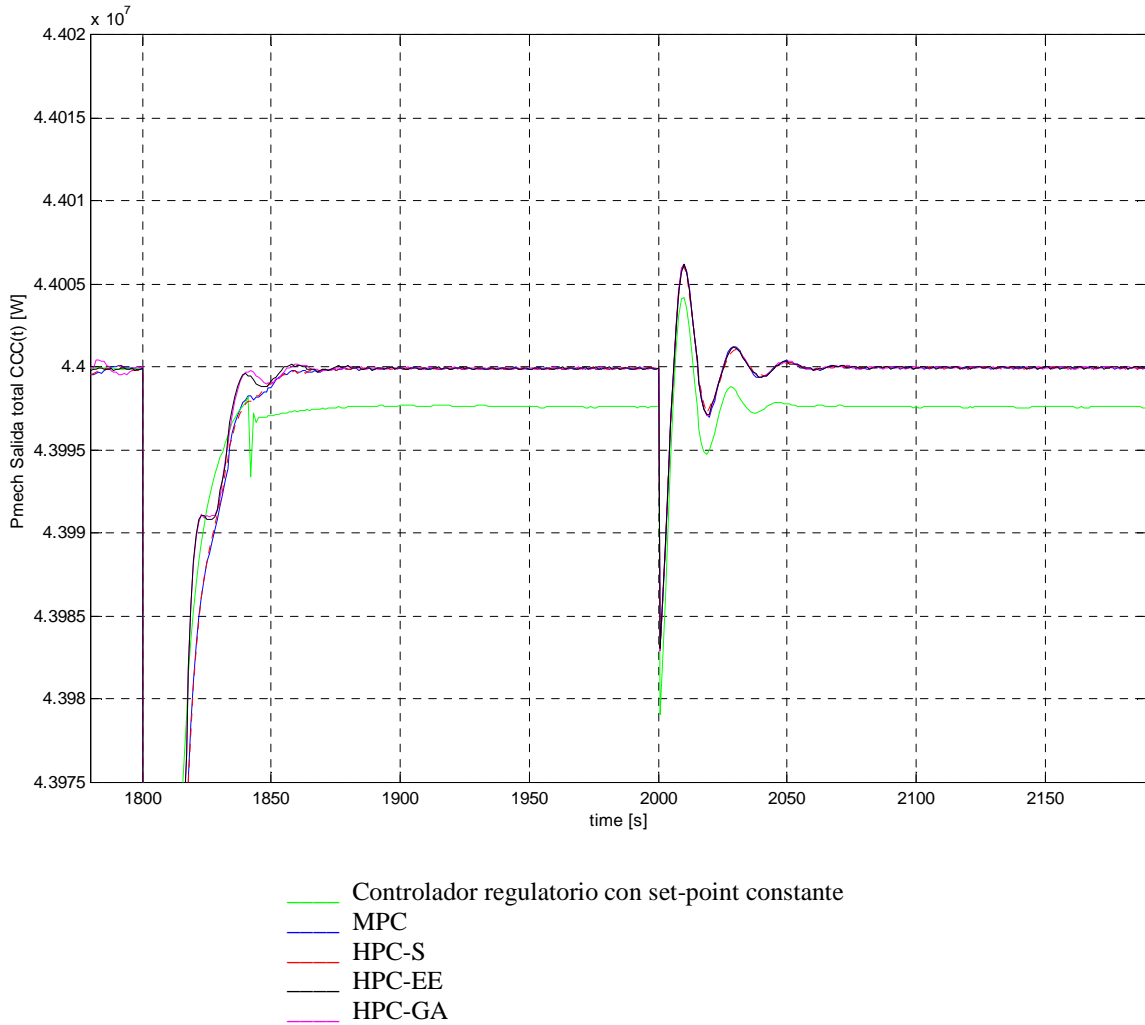


Figura 6.11. Detalle de la potencia de salida de la Central termoelectrica de Ciclo Combinado

6.1.6. Análisis de datos

Efectos sobre la caldera

En la Tabla 6.1 se presentan los valores medios de los costos del combustible en la caldera para la implementación de los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas. Se incluye el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basado en algoritmos genéticos.

Tabla 6.1. Valores medios de los costos del combustible en la caldera

Controladores sobre la Turbina a gas	Efectos sobre la Caldera		
	$J_{wf} = \sum_{k=1}^N C_{wf} \cdot W_f(t+k)$	% beneficio c/r PI	% beneficio c/r MPC
MPC	129.9748	3.4127	-
HPC-S	129.9746	3.4129	0.0001
HPC-GA	129.8388	3.5138	0.1047
EPC-EE	129.8386	3.5140	0.1048
PI	134.5673	-	-

con $C_{wf} = 10$ precio del combustible.

Existe un ahorro de combustible en la Caldera del 3.45 % al implementar los controladores supervisores en la turbina a gas de la CCC.

Efectos sobre la Turbina a Vapor

En la tabla 6.2 se presentan los valores medios del error de la trayectoria de la potencia de salida en la turbina a vapor para la implementación de los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas.

Tabla 6.2. Valores medios del error de trayectoria de la potencia de salida en la turbina a vapor

Controladores sobre la Turbina a Gas	Efectos sobre la Turbina a Vapor
	$J_{Ps} = \sum_{K=1}^N (Ps(t+k) - r_{Ps_set-point})^2$
MPC	$1.3315815 \cdot 10^{12}$
HPC-S	$1.3315639 \cdot 10^{12}$
HPC-GA	$1.4148611 \cdot 10^{12}$
HPC-EE	$1.4148632 \cdot 10^{12}$
PI	$0.0000114 \cdot 10^{12}$

donde la referencia de set-point para la Turbina a Vapor es $r_{Ps_set-point} = 10140000[W]$

El set point para los controladores supervisores híbridos es diferente al set point del controlador PI por lo cual no se pueden comparar en términos de regulación.

En estos resultados domina el efecto de la regulación, lo que explica el orden relativo entre los controladores híbridos. Es decir el control supervisor económico-regulatorio de mejor comportamiento en la Turbina a Gas es el peor regulador en la turbina a vapor como lo muestra la tabla 6.2.

Efectos sobre la CCC

En la tabla 6.2 se presentan valores medios del error de trayectoria de la potencia de salida de la Central termoelectrica de Ciclo Combinado para la implementación de los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas.

Tabla 6.3. Valores medios del error de trayectoria de la potencia de salida de la central termoelectrica de ciclo combinado.

	Efectos sobre la CCC
Controladores sobre la Turbina a Gas	$J_{Total_CCC} = \sum_{N=1}^{k=10} (P_{Total_CCC}(t+k) - r_{set-point_CCC})^2$
MPC	$0.013381 * 10^{11}$
HPC-S	$0.013373 * 10^{11}$
HPC-GA	$0.014494 * 10^{11}$
HPC-EE	$0.014504 * 10^{11}$
PI	$2.365505 * 10^{11}$

donde $P_{Total_CCC} = P_{Turbina_gas} + P_{Turbina_vapor}$ y $r_{set-point_CCC} = 44 * 10^6 [W]$

Todos los controladores predictivos supervisores aplicados a la Turbina a Gas producen una mejora de dos órdenes de magnitud en regulación con respecto al control con set-point constante.

Se observa la consistencia de los datos en el orden que quedan con respecto a la regulación los controladores económico-regulatorios. Es decir existe una compensación: el controlador que tenía la mejores características económico-regulatorio en la turbina a gas era el que también tenía la peor regulación. Ahora este efecto en el orden se reproduce en la regulación en la salida de potencia total de la Central termoelectrica de ciclo combinado.

6.2. Efectos de las estrategias de control supervisor predictivo híbridas diseñadas para la turbina gas y una estrategia de control supervisor predictivo lineal para la caldera

En la Figura 6.12 se presenta el sistema simplificado de la central termoeléctrica y sus principales lazos de control. El set-point de potencia de la central termoeléctrica (P_{CCC}^r) es el exigido por el despacho económico. Se puede apreciar que se aplicó sobre la Turbina a Gas un controlador supervisor predictivo híbrido que genera los set-point óptimos de la temperatura de salida de los gases (T_{tout}^{r*}) y la potencia (P_{mech-G}^{r*}). Además se aplicó sobre la Caldera un controlador supervisor predictivo lineal que genera el set-point óptimo de la presión de vapor sobrecalentado (P_S^{r*}). Existe una relación entre los controladores supervisores para relacionar los sistemas principales de la central, según las ecuaciones (6.1) y (6.2).

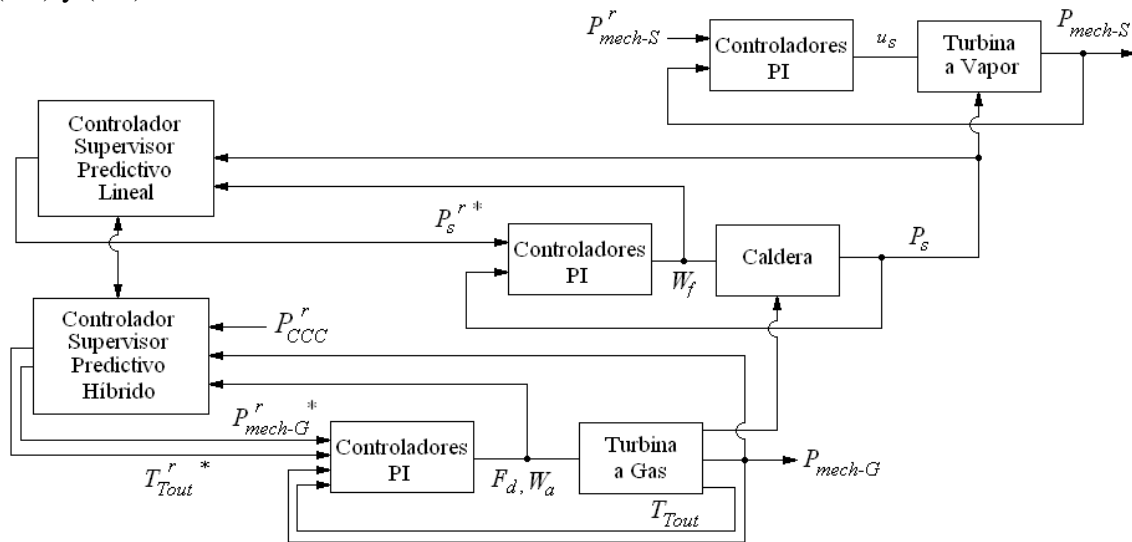


Figura 6.12. Central termoeléctrica de ciclo combinado con sus principales lazos de control y un controlador supervisor predictivo híbrido en la turbina a gas y un controlador supervisor predictivo lineal en la Caldera

6.2.1. Diseño de un control supervisor predictivo lineal con función objetivo económica y regulatoria para la caldera

Para el diseño del control supervisor predictivo lineal se consideró un modelo lineal (SISO) de la caldera (ecuación 6.3) obtenido por mínimos cuadrados con un tiempo de muestreo de 1 [seg]. Se utilizan 6000 muestras para el conjunto de entrada y 6000 para validación.

El modelo lineal ARIX para la turbina a vapor que relaciona la presión de vapor sobrecalentado (P_S) y el flujo de combustible (F_d) está dado por:

$$P_S(t) + 0.0297 \cdot P_S(t-1) = 10011 \cdot W_f(t-1) + \frac{e(t)}{\Delta} \quad (6.3)$$

como $e(t)$ es ruido blanco $E(e(t))=0$ y con $\Delta=1-q^{-1}$

En la Figura 6.13 se aprecia el comportamiento a 10 pasos del modelo lineal de la caldera.

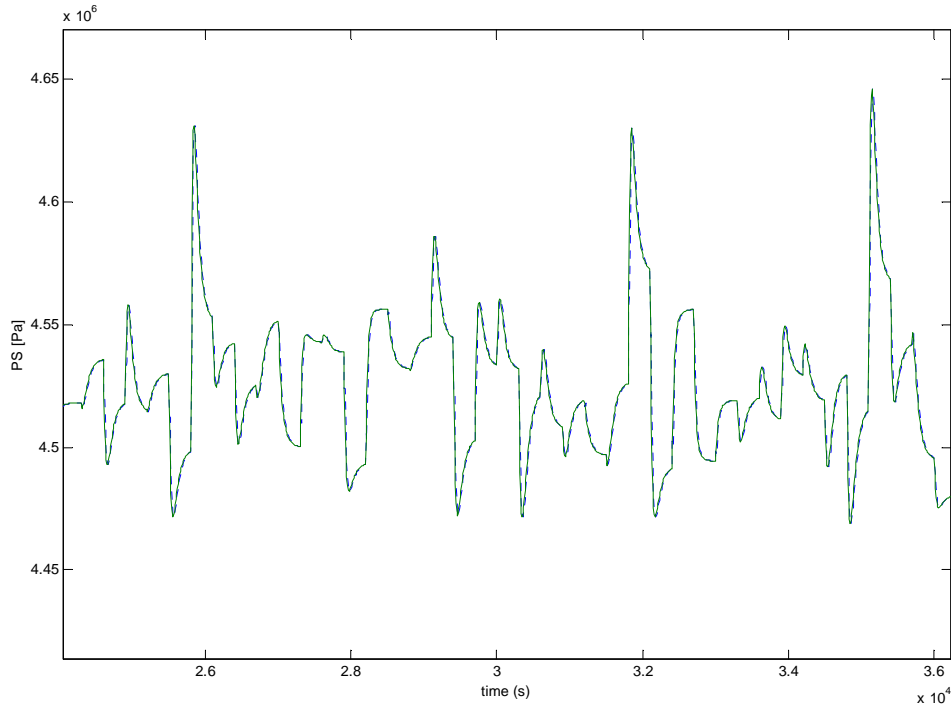


Figura 6.13. Modelo lineal de la Caldera con predicción a 10 pasos
 — Modelo ARIX - - - Datos de la planta

En la tabla 6.4 se muestran valores del error de validación porcentual con respecto del set-point de presión de vapor sobrecalentado, para la salida del modelo lineal de la Caldera.

Tabla 6.4. Error de validación porcentual.

Modelo lineal de la Caldera	Error validación e	Error validación porcentual c/r set point $e\% = 100 * e / \text{set-point}$
Predicción a 1 paso	101000	2.525
Predicción a 10 pasos	142680	3.567

El modelo discreto del sistema regulatorio de la caldera basado en un PI con un tiempo de muestreo de $T_s=1[s]$

$$A_c(z^{-1})W_f = B_{cr}(z^{-1})r_{Ps}(t) + B_{cy}(z^{-1})P_s(t) \quad (6.4)$$

donde W_f es el flujo de combustible en la caldera, P_s es la presión de vapor sobrecalentado y r_{Ps} la referencia de la presión del vapor sobrecalentado. Además:

$$A_c(q^{-1}) = 1 - q^{-1}, \quad B_{cr}(q^{-1}) = \alpha + \beta q^{-1}, \quad B_{cy}(q^{-1}) = -(\alpha + \beta q^{-1})$$

$$\beta = \frac{T_s k_i}{2} - k_p, \quad \alpha = \frac{T_s k_i}{2} + k_p$$

Por lo tanto, el problema de optimización económico y regulatorio a nivel supervisor considerando el modelo lineal (6.3), el nivel regulatorio (6.4) está dado por:

$$\text{Max } J = J_C - \eta J_{Cr} \quad (6.5)$$

$$J_C = \sum_{i=1}^N C_{Wf} W_f(t+i-1)$$

$$J_{Cr} = \sum_{j=1}^N \left(\hat{P}_s(t+j) - r_{set_point_Ps} \right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^N \Delta W_f^2(t+i-1)$$

con $C_{Wf} = 10$ $\eta = 1$ $r_{set_point_Ps} = 4.5251 \cdot 10^6$ y $\lambda = 10^{11}$

La Figura 6.14 se muestra la implementación del controlador supervisor predictivo lineal diseñado para la caldera.

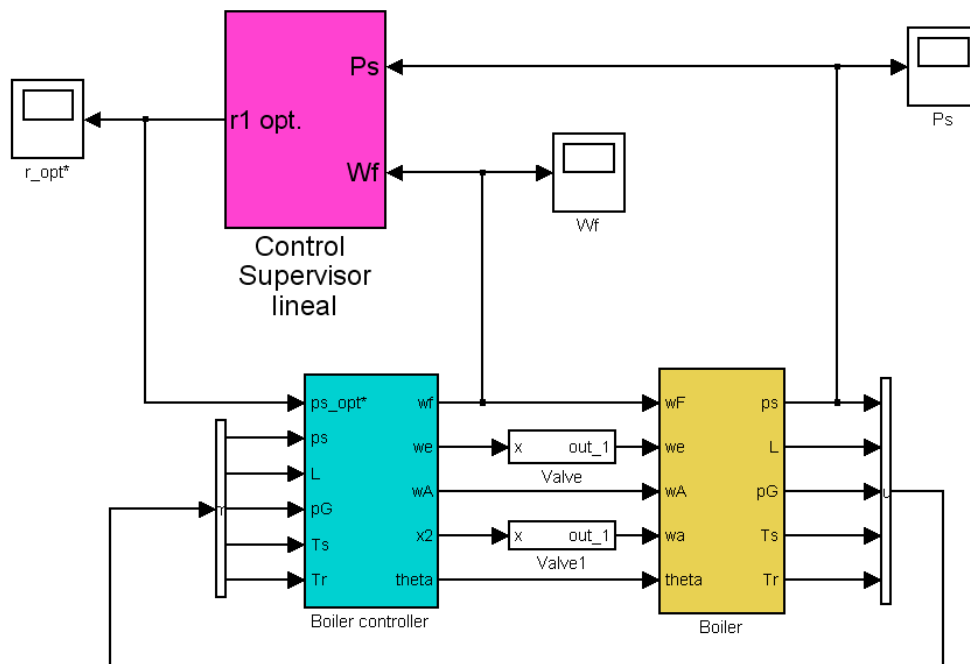


Figura 6.14. Implementación del controlador supervisor predictivo lineal en la caldera

En la Figura 6.15 se presenta los resultados del control supervisor para la caldera con características económicas y regulatorias ante una perturbación en la temperatura de entrada del vapor a la turbina de alta presión.

Se espera que el controlador predictivo gaste menos combustible que controlador PI

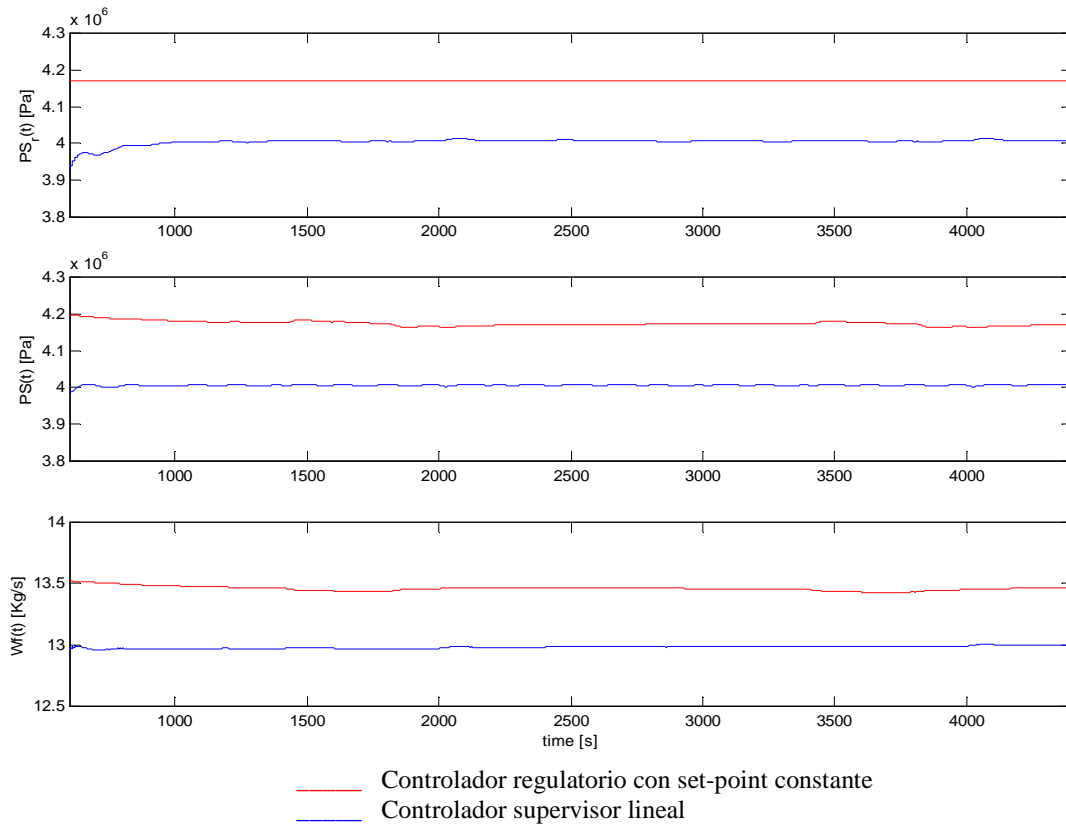


Figura 6.15. Respuesta de lazo cerrado de la presión de vapor sobrecalentado con control supervisor lineal con características económicas y regulatorias.

En la Tabla 6.5 se presentan los valores medios de los índices de comportamiento de la función objetivo para el controlador supervisor lineal para la Caldera.

Tabla 6.5. Valores medios de los índices de comportamiento

	$J_{Ps} = \sum_{j=1}^N (\hat{p}_s(t+j) - r_{set-point_{Ps}})^2$	$J_{\Delta U} = \sum_{i=1}^N \Delta u_{Ps}^2(t+i-1)$	$J_C = \sum_{i=1}^N C_{Wf} W_f(t+i-1)$
Control PI	$2.7247 \cdot 10^{11}$	$0.0911 \cdot 10^{-5}$	129.7974
Control Supervisor Lineal	$0.0017 \cdot 10^{11}$	$0.0074 \cdot 10^{-5}$	134.5674

con $r_{set-point_{Ps}} = 4.5251 \cdot 10^6$ set-point de la presión del vapor sobrecalentado $C_{Wf} = 10$ precio del combustible en la caldera.

El diseño de control supervisor predictivo lineal para la caldera tiene características regulatorias inferiores según se aprecia en la tabla 6.5. Del punto de vista económico el

comportamiento del controlador supervisor predictivo lineal en la caldera presenta un 3.5% de ahorro de combustible con respecto al nivel PI convencional.

6.2.2. Implementación en MATLAB Simulink

Se observa en la Figura 6.14 la implementación de los controladores predictivos híbridos diseñados para la turbina a gas (capítulo V) en el simulador completo de la central termoeléctrica de ciclo combinado, incluyendo un controlador supervisor predictivo lineal en la caldera.

En el bloque del controlador supervisor, la señal que sale de la turbina a gas (TG) incluye cuatro señales: potencia de salida (P_{mech-G}), temperatura de los gases de salida (T_{tout}), flujo de combustible (F_d) y flujo de aire de entrada (W_a). La señal de referencia óptima (r-opt TG) que entra a la turbina a gas, contiene el set-point óptimo de la temperatura de los gases de salida (T_{tout}^{r*}) y el set-point óptimo la potencia (P_{mech-G}^{r*}). Ahora la señal que sale de la Caldera (Bo) contiene dos señales: presión de vapor sobrecalentado (P_s) y flujo de combustible (W_f). La señal de referencia óptima (r-opt Bo) que entra a la caldera, contiene el set-point óptimo de la presión de vapor sobrecalentado (P_s^{r*}).

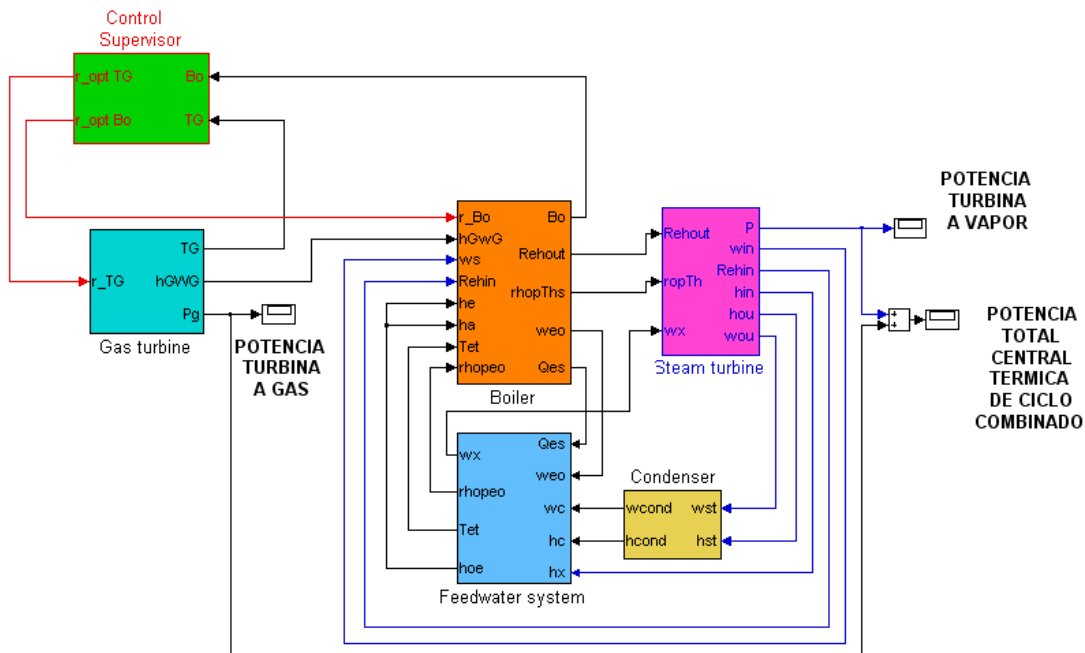


Figura 6.14. Implementación de un controlador supervisor predictivo híbrido para la turbina a gas y un controlador supervisor predictivo lineal para la caldera en una central termoeléctrica de ciclo combinado

A continuación, se presentan los resultados de los controladores predictivos diseñados analizando separadamente los efectos en la turbina a gas, caldera, turbina a vapor y finalmente los efectos en la salida de la planta completa.

6.2.3. Efectos en la turbina a gas

En la Figura 6.15 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la temperatura de los gases de escape (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado. Se incluye el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basado en algoritmos genéticos. Se incluye además un controlador supervisor predictivo lineal sobre para la caldera.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados realizan menor esfuerzo de control que el controlador con set-point constante. Sin embargo estos controladores logran una peor regulación que el regulador con set-point constante, esto es en compensación al control de potencia que resulta favorecido por la penalización de la trayectoria de la potencia en la función objetivo.

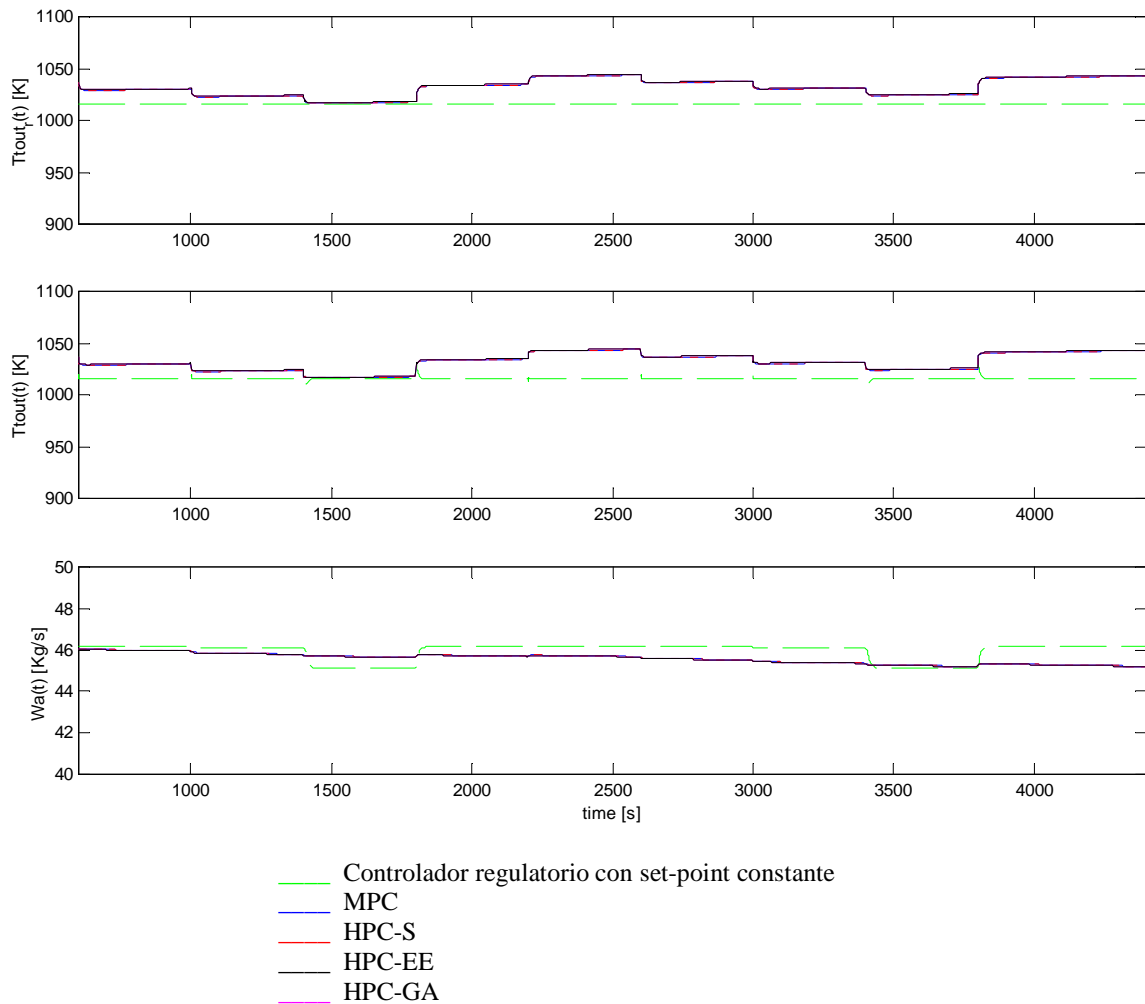


Figura 6.15. Respuesta de lazo cerrado de la temperatura de los gases de escape con los controladores propuestos (Función objetivo económica y regulatoria).

En la Figura 6.16 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable

manipulada) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados logran una mejor regulación que el regulador con set-point constante.

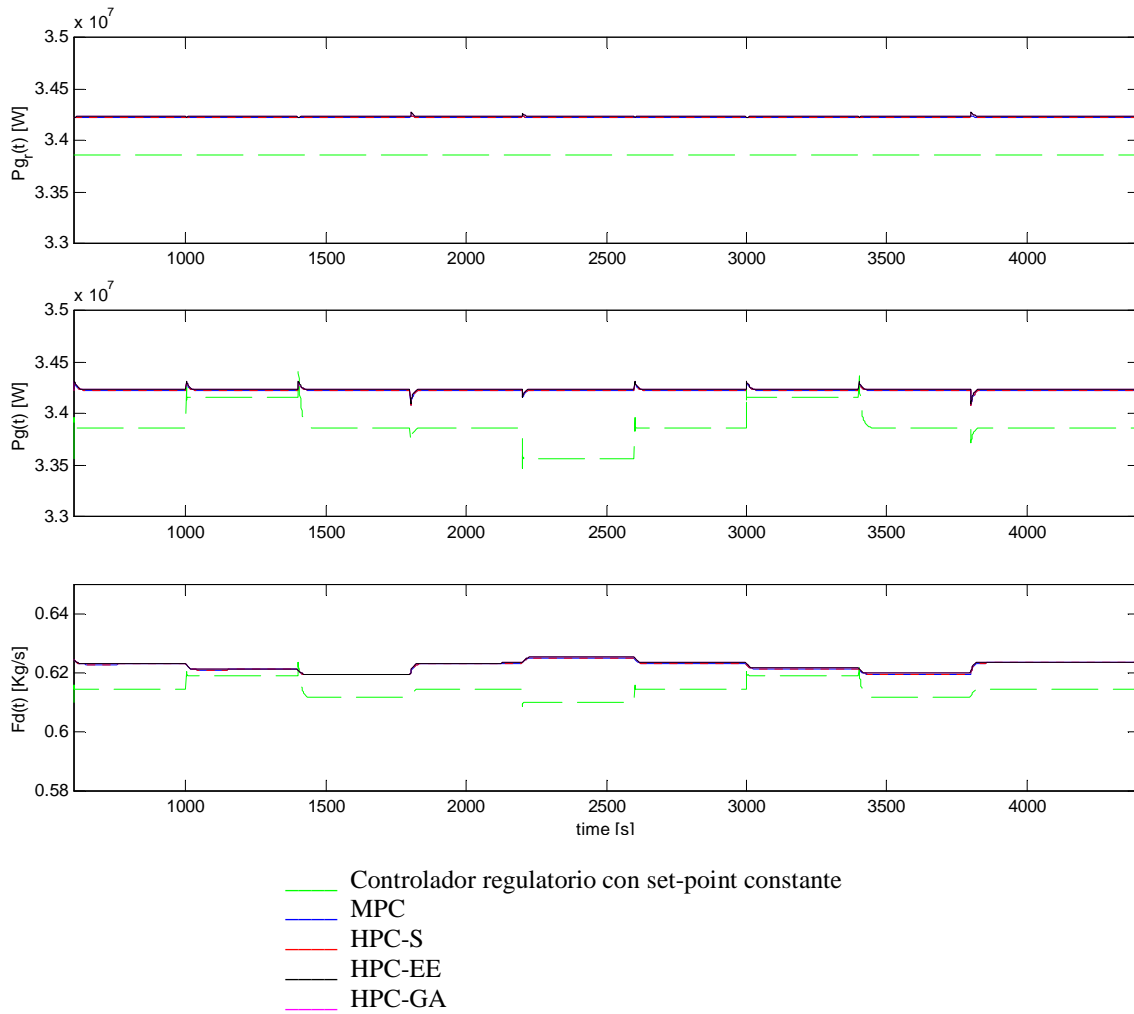


Figura 6.16. Respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos. La función para optimizar tiene características económicas y regulatorias.

6.2.4. Efectos en la Caldera

En la Figura 6.17 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la presión de vapor sobrecalentado (gráfica superior set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada (flujo de combustible)) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que la implementación de controladores predictivos en la Turbina a Gas producen el efecto de disminuir el flujo de combustible utilizado por la Caldera no obstante el flujo de vapor es suficiente, junto con la turbina a vapor, para alcanzar el set-point de potencia de la central completa (P'_{CCC}). El tiempo para llegar al set-point disminuye con la implementación del controlador supervisor predictivo en la Caldera (según se aprecia en la figura 6.17 al comparar con Figura 6.6).

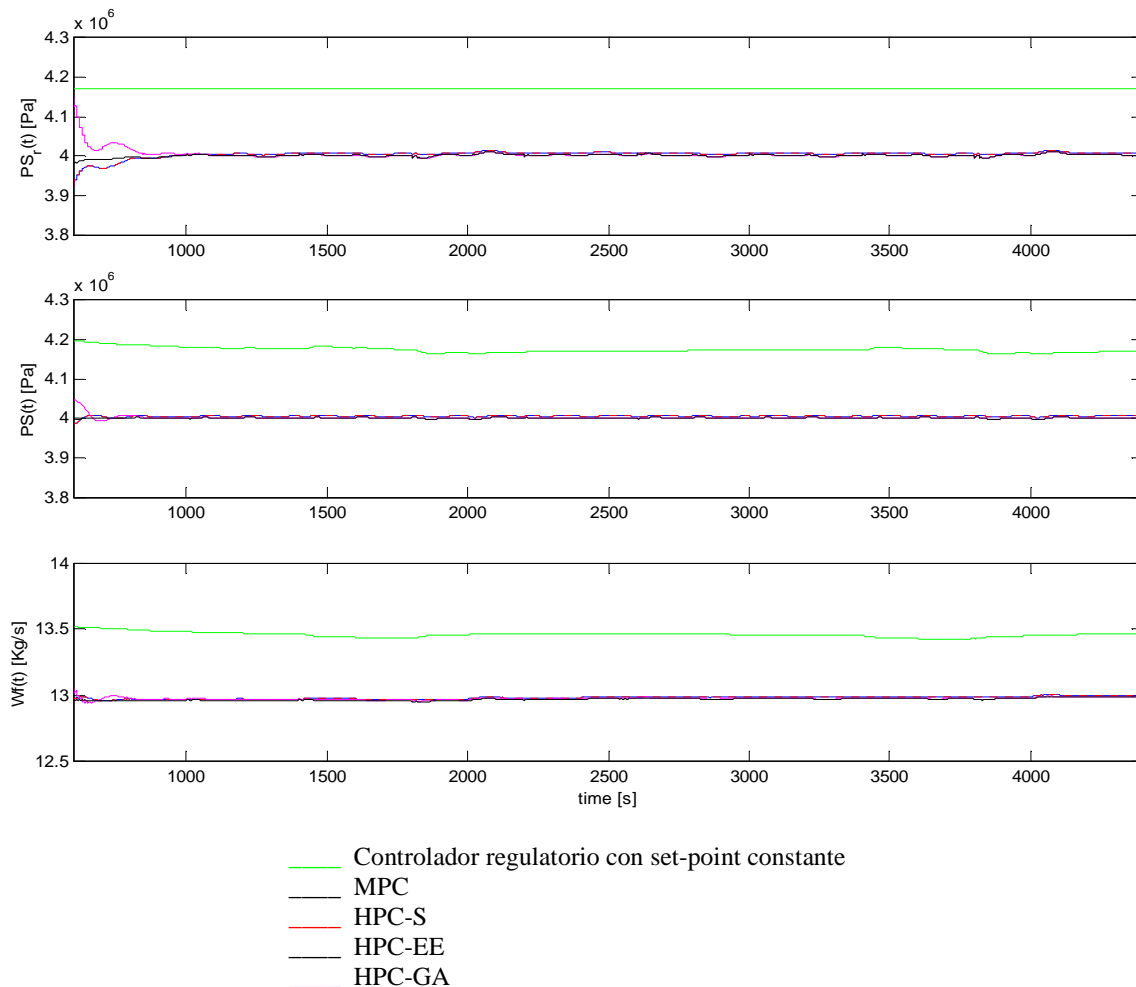


Figura 6.17. Respuesta de lazo cerrado de la presión de vapor saturado y flujo de combustible en la Caldera

En la Figura 6.18 se presenta el detalle de la Figura 6.17 con la respuesta en lazo cerrado para la presión de vapor sobrecalentado.

Se observa que el controlador con enumeración explícita HPC-EE y el controlador con optimización genética HPC-GA sobre la turbina a gas son las que presentan la mayor de disminución del flujo de combustible utilizado por la Caldera. La implementación del controlador supervisor predictivo en la caldera aumento este efecto al compararlo con Figura 6.7.

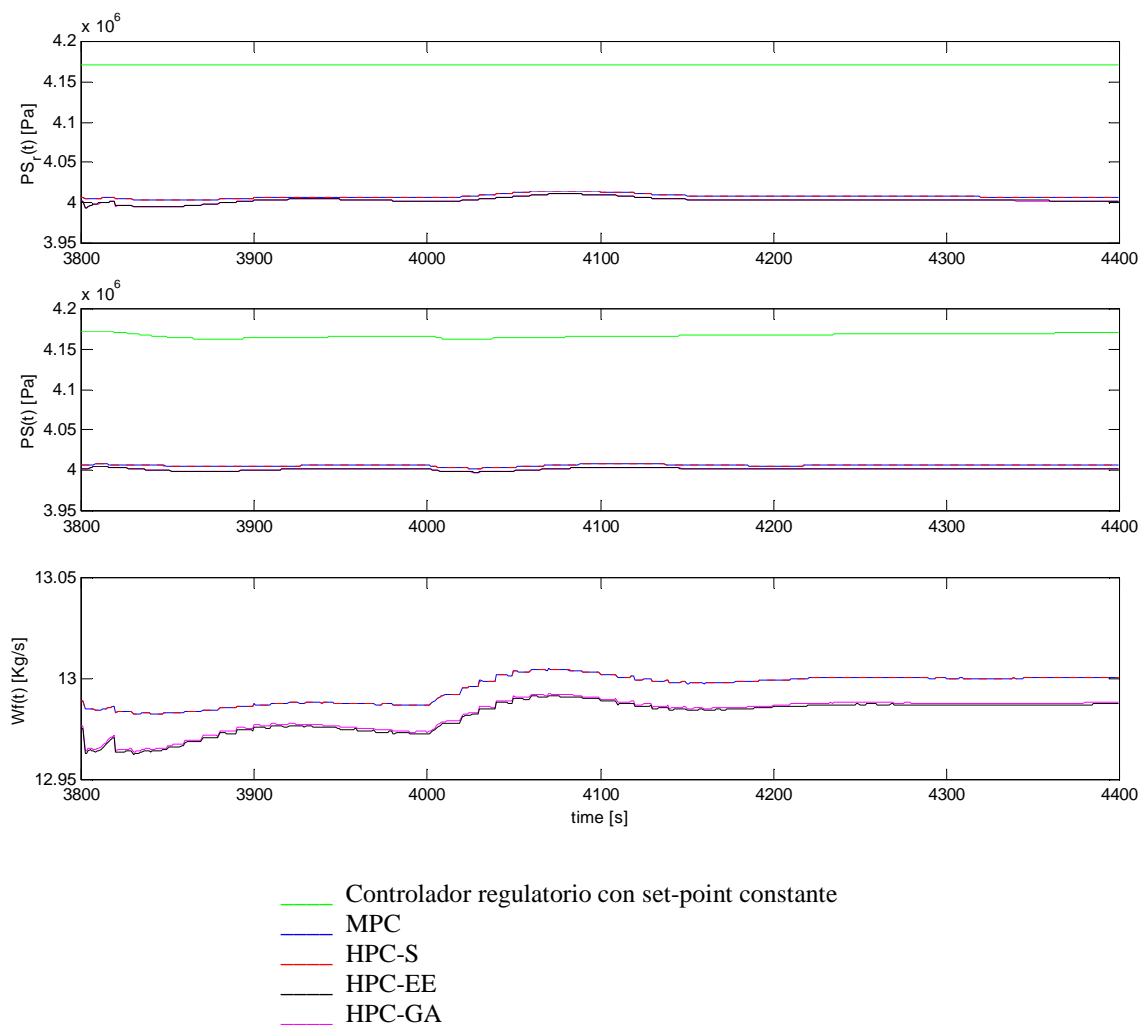


Figura 6.18. Detalle de presión de vapor saturado y flujo de combustible en la Caldera

6.2.5. Efectos en la Turbina a Vapor

En la Figura 6.19 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia en la Turbina a Vapor (gráfica superior set-point óptimo, gráfica central la variable controlada y gráfica inferior variable manipulada (señal de control del flujo de de vapor)) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que la implementación de controladores predictivos en la turbina a gas produce el efecto de disminuir la potencia generada por la turbina a vapor no obstante se alcanza el set-point de potencia de la CCC (P_{CCC}^r). La implementación del controlador supervisor predictivo en la caldera no produce efecto notorio al compararlo con la Figura 6.8.

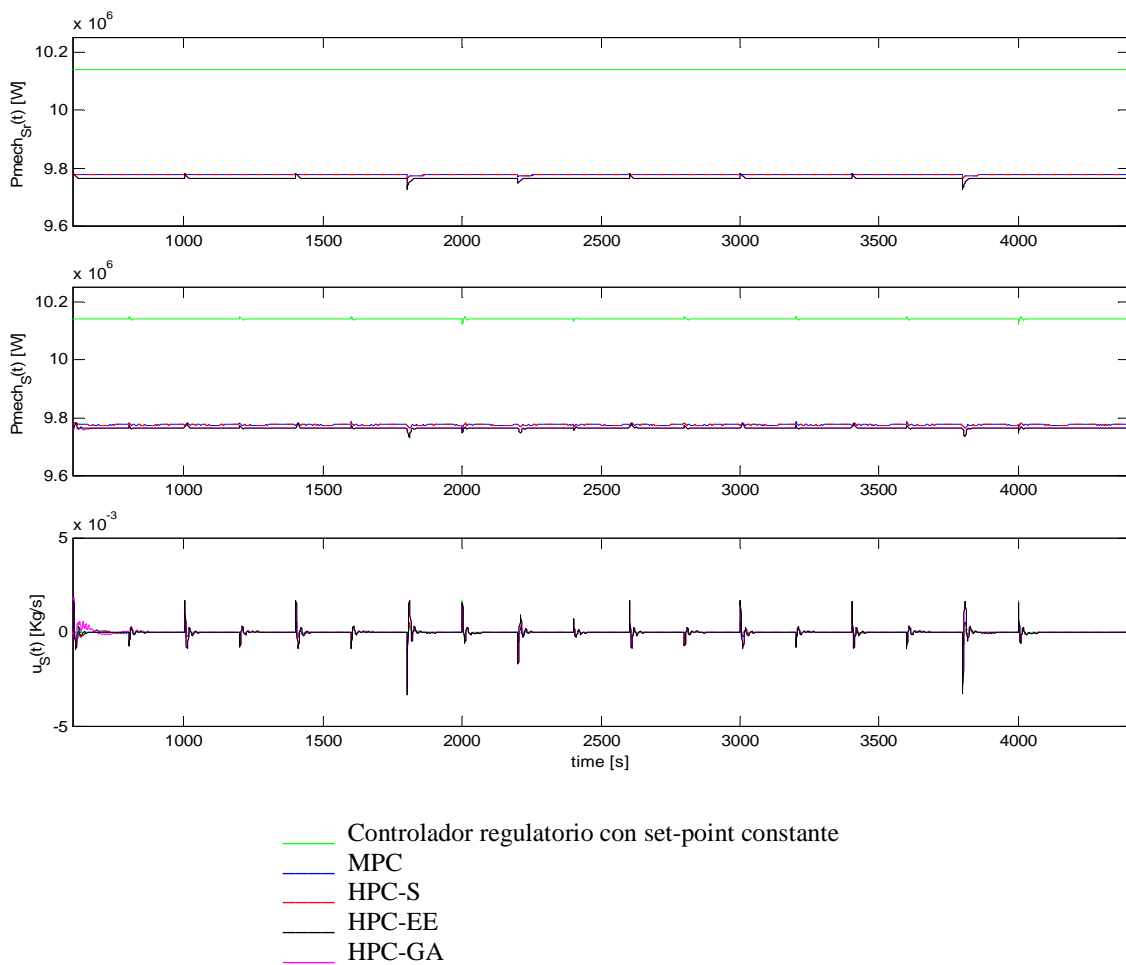


Figura 6.19. Respuesta de lazo cerrado de la potencia y señal de control de válvula en la turbina a vapor

En la Figura 6.20 se presenta el detalle de la Figura 6.19 la respuesta en lazo cerrado para la potencia en la Turbina a Vapor.

Se observa que el controlador con enumeración explícita HPC-EE y el controlador con optimización genética HPC-GA sobre la turbina a gas son los que presentan el mayor efecto sobre la turbina a vapor, al disminuir la potencia generada pero cumpliendo el set-point de potencia de la CCC. La implementación del controlador supervisor predictivo en la caldera no produce efecto notorio al compararlo con Figura 6.9.

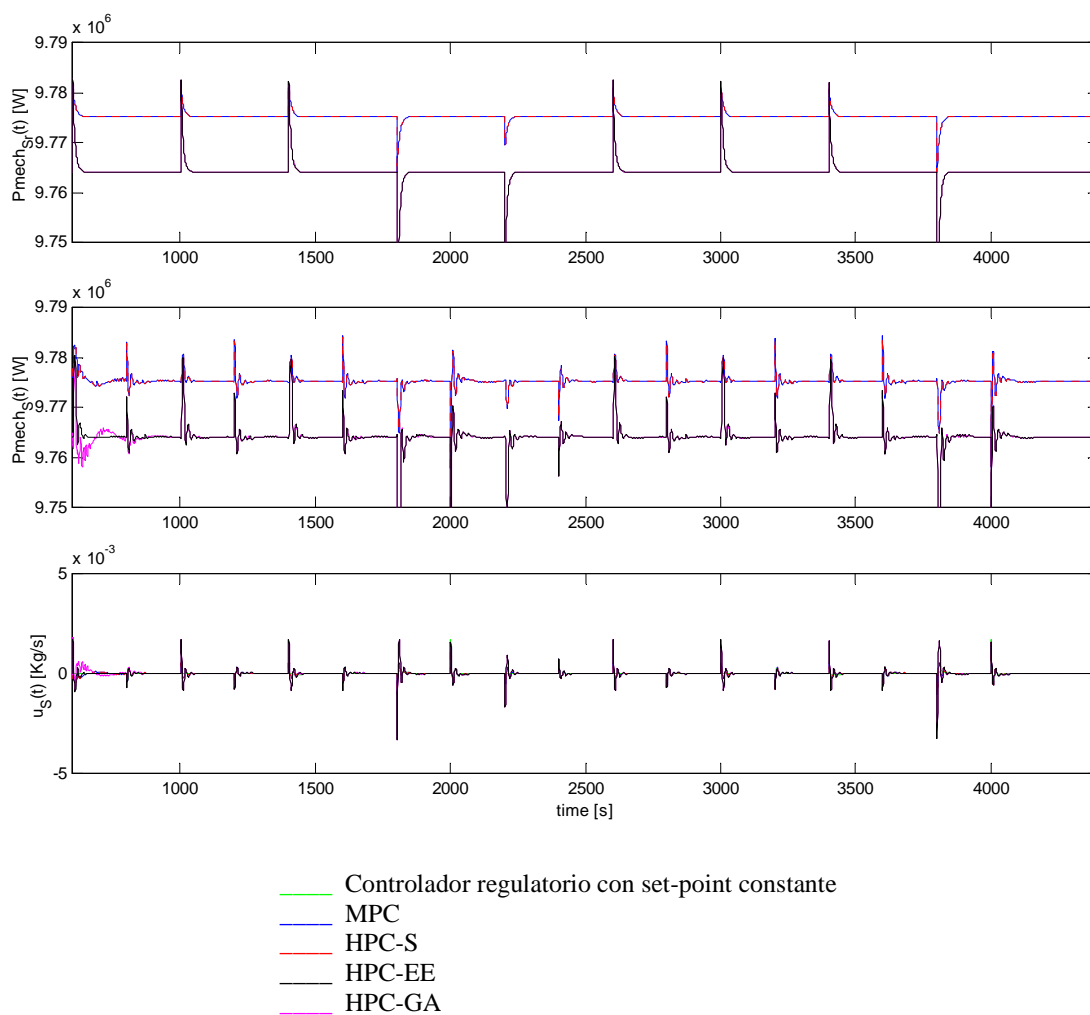


Figura 6.20. Detalle de la potencia y señal de control de válvula en la Turbina a Vapor

6.2.6. Efectos en la salida de la CCC

En la Figura 6.21 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia total en la CCC para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que la implementación de controladores predictivos en la turbina a gas produce el efecto de mejorar la regulación de potencia total de la CCC.

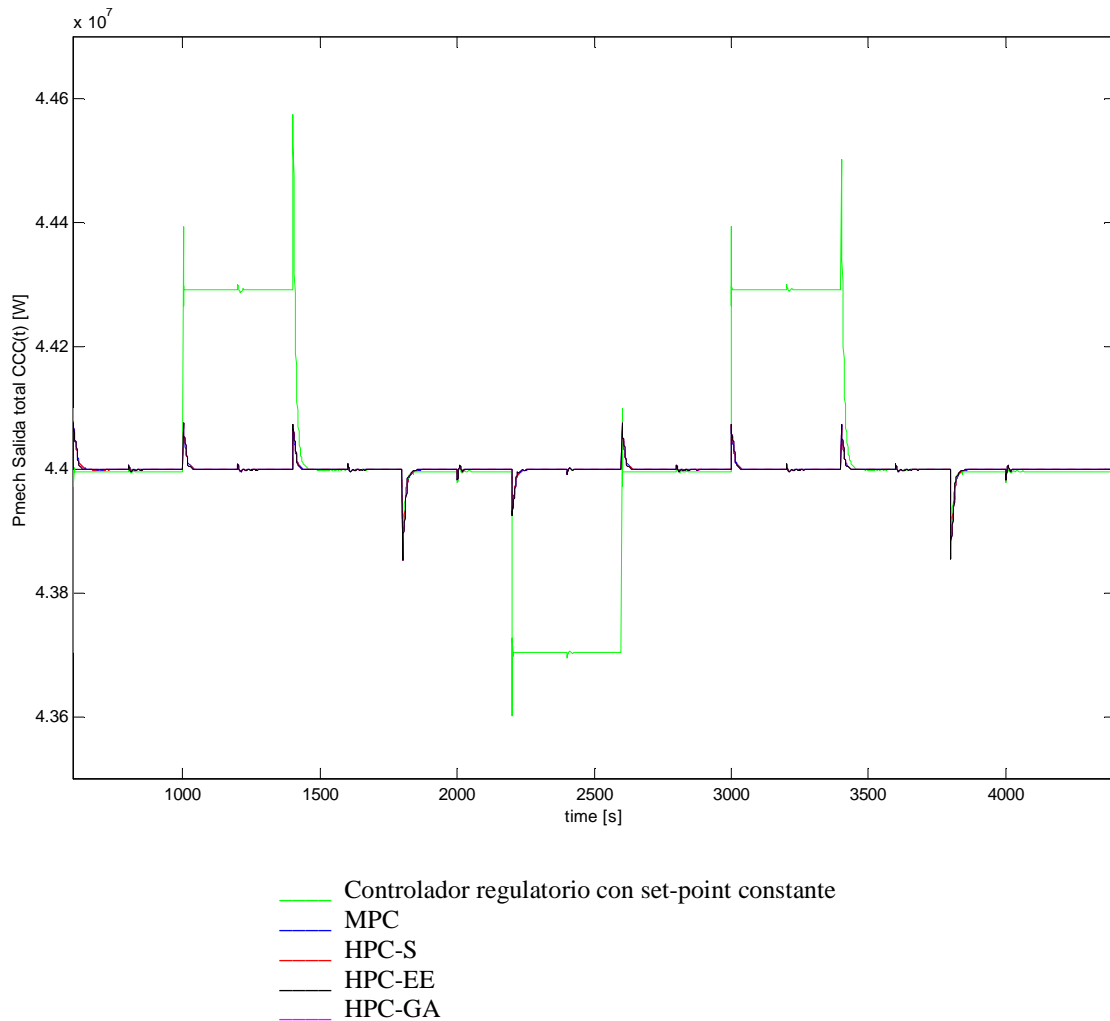


Figura 6.21. Potencia de salida de la central termoeléctrica de ciclo combinado

En la Figura 6.22 se presenta el detalle (de la Figura 6.20) de la respuesta en lazo cerrado para la potencia total en la CCC para los cuatro tipos de controladores supervisores

predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado. Se incluye el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con solución con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA con solución con algoritmos genéticos. Se incluye además un controlador supervisor predictivo lineal sobre para la Caldera.

Se aprecia con más detalle como la implementación de controladores predictivos en la turbina a gas produce el efecto de mejorar la regulación de potencia total de la CCC.

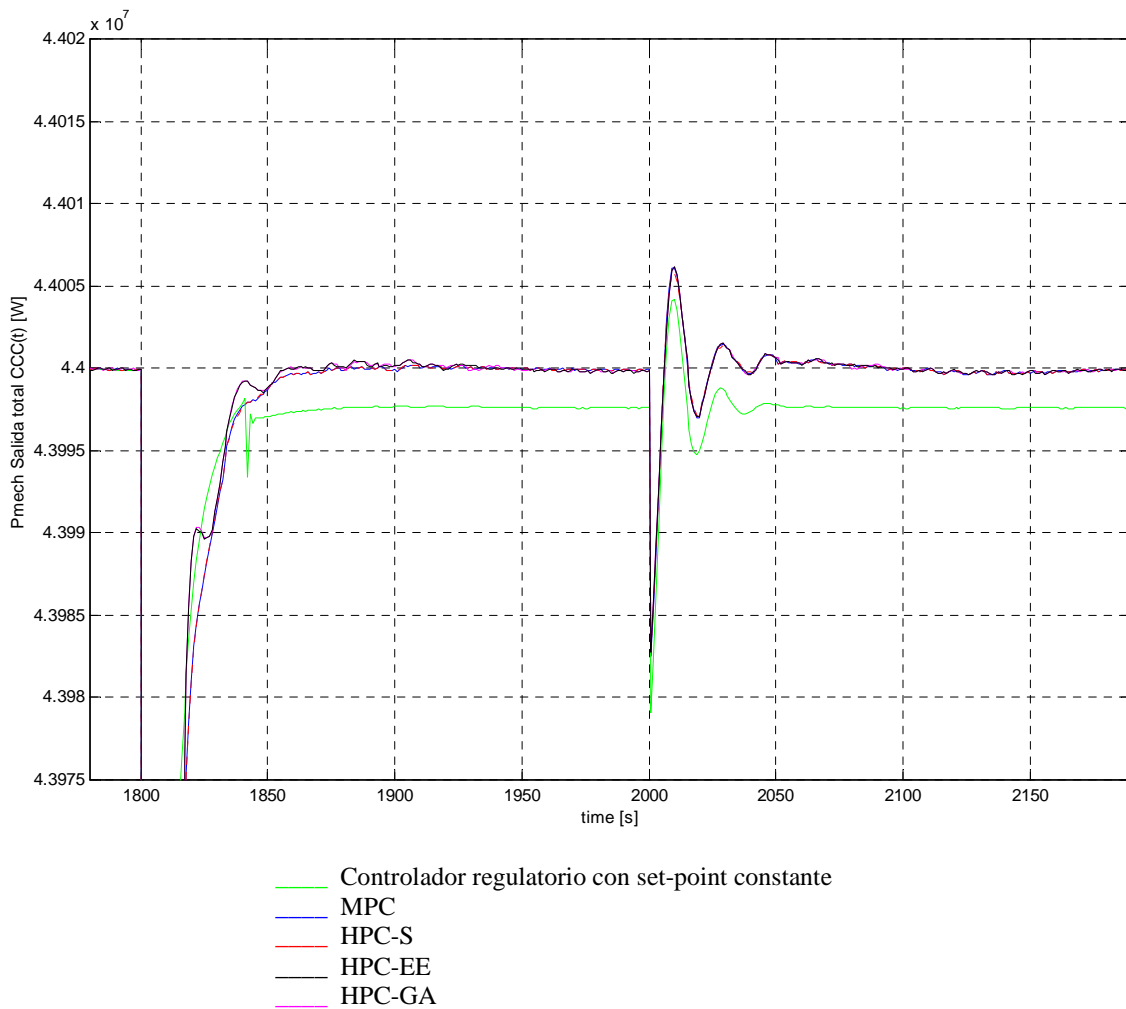


Figura 6.22. Detalle de la potencia de salida de la central termoeléctrica de ciclo combinado

6.2.7. Análisis de datos

Efectos sobre la Caldera

En la Tabla 6.6 se presentan los valores medios de los costos del combustible en la caldera ante la implementación para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas. Se incluye el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con solución con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA con solución con algoritmos genéticos. Se incluye además un controlador supervisor predictivo lineal sobre para la Caldera.

Tabla 6.6. Valores medios de los costos del combustible en la caldera

	Efectos sobre la Caldera					
				Con controlador supervisor predictivo lineal en la Caldera		
Controladores sobre la Turbina a Gas	J_{wf}	% beneficio c/r PI	% beneficio c/r MPC	J_{wf}	% beneficio c/r PI	% beneficio c/r MPC
MPC	129.9748	3.4127	-	129.7974	3.5446	-
HPC-S	129.9746	3.4129	0.0001	129.7974	3.5446	0.0000
HPC-GA	129.8388	3.5138	0.1047	129.7113	3.6400	0.0664
HPC-EE	129.8386	3.5140	0.1048	129.6661	3.6422	0.1012
PI	134.5673	-	-	134.5674	-	-

con $J_{wf} = \sum_{k=1}^N C_{wf} \cdot W_f(t+k)$ y $C_{wf} = 10$ es el precio del combustible de la Caldera.

El efecto al incluir un controlador supervisor lineal en la caldera produce un beneficio del 0.14 % sobre el control puramente híbrido de la turbina a gas de la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Efectos sobre la Turbina a Vapor

En la tabla 6.7 se presentan los valores medios del error de set-point de la trayectoria de la potencia de salida en la turbina a vapor ante la implementación para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas. Se incluye además un controlador supervisor predictivo lineal sobre para la caldera.

Tabla 6.7. Valores medios del error de set-point de la trayectoria de la potencia de salida en la turbina a vapor

	Efectos sobre la Turbina a Vapor	
		Con controlador supervisor predictivo lineal en la Caldera
Controladores sobre la Turbina a Gas	J_{Ps}	J_{Ps}
MPC	$1.3315815 \cdot 10^{12}$	$1.3314972 \cdot 10^{12}$
HPC-S	$1.3315639 \cdot 10^{12}$	$1.3314932 \cdot 10^{12}$
HPC-GA	$1.4148611 \cdot 10^{12}$	$1.4147945 \cdot 10^{12}$
HPC-EE	$1.4148632 \cdot 10^{12}$	$1.4148031 \cdot 10^{12}$
PI	$0.0000114 \cdot 10^{12}$	$0.0000114 \cdot 10^{12}$

donde $J_{Ps} = \sum_{K=1}^N (P_s(t+k) - r_{Ps_set-point})^2$ y la referencia de set-point es para la turbina a vapor es $r_{Ps_set-point} = 10140000[W]$

El efecto de incluir un controlador supervisor predictivo lineal en la Caldera no es importante en los resultados sobre la turbina a vapor.

Efectos sobre la CCC

En la Tabla 6.2 se presentan valores medios del error de set-point de la trayectoria de la potencia de salida de la central termoeléctrica de ciclo combinado ante la implementación para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas. Se incluye además un controlador supervisor predictivo lineal sobre para la Caldera.

Tabla 6.3. Valores medios del error de set-point de la trayectoria de la potencia de salida de la central termoeléctrica de ciclo combinado.

	Efectos sobre la CCC	
		Con controlador supervisor predictivo lineal en la Caldera
Controladores sobre la Turbina a Gas	J_{Total_CCC}	J_{Total_CCC} Con control supervisor lineal en Caldera
MPC	$0.013381 \cdot 10^{11}$	$0.013381 \cdot 10^{11}$
HPC-S	$0.013373 \cdot 10^{11}$	$0.013374 \cdot 10^{11}$
HPC-GA	$0.014494 \cdot 10^{11}$	$0.014495 \cdot 10^{11}$
HPC-EE	$0.014504 \cdot 10^{11}$	$0.014506 \cdot 10^{11}$
PI	$2.365505 \cdot 10^{11}$	$2.365506 \cdot 10^{11}$

donde $J_{Total_CCC} = \sum_{N=1}^{k=10} (P_{Total_CCC}(t+k) - r_{set-point_CCC})^2$

además $P_{Total_CCC} = P_{Turbina_gas} + P_{Turbina_vapor}$ y $r_{set-point_CCC} = 44 * 10^6 [W]$

De la Tabla 6.3, no se aprecia diferencias considerables entre las regulaciones en los casos mencionados. Todos los controladores predictivos supervisores aplicados a la turbina a gas producen una mejora de dos órdenes de magnitud en regulación con respecto al controlador PI

Se observa la consistencia de los datos en el orden que quedan con respecto a la regulación los controladores predictivos supervisores económico-regulatorios. Es decir existe una compensación, esto es el control que tenía la mejores características económico-regulatorio en la turbina a gas era el que también tenía la peor regulación. Ahora este orden se reproduce en la regulación en la salida de potencia total de la Central termoeléctrica de ciclo combinado.

6.3. Efectos de las estrategias de control supervisor predictivo híbridas diseñadas para la turbina gas y de los controladores predictivos supervisores lineales para la caldera y la turbina a vapor

En la Figura 6.23 se presenta el sistema simplificado de la central termoeléctrica y sus principales lazos de control. El set-point de potencia de la central termoeléctrica (P_{CCC}^r) es el exigido por el despacho económico. Se puede apreciar que se aplicó sobre la Turbina a gas un controlador supervisor predictivo híbrido que genera los set-point óptimos de la temperatura de salida de los gases (T_{tout}^r) y la potencia (P_{mech-G}^r). Además se aplicó dos controladores adicionales, un controlador supervisor predictivo lineal sobre la Caldera que genera el set-point óptimo de la presión de vapor sobrecalentado (P_s^{r*}) y un controlador supervisor predictivo lineal sobre la turbina a vapor que genera el set-point óptimo de la potencia (P_{mech-S}^r). Existe comunicación entre los controladores supervisores para relacionar los sistemas principales de la central según las ecuaciones (6.1) y (6.2).

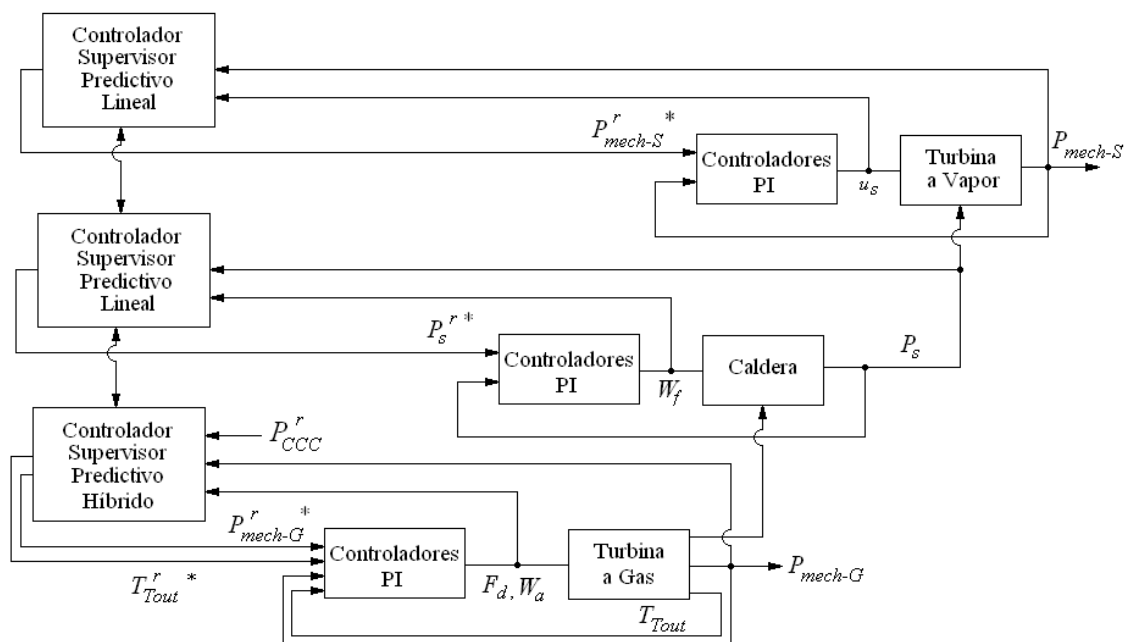


Figura 6.23. Central termoeléctrica de ciclo combinado con sus principales lazos de control y un controlador supervisor predictivo híbrido en la turbina a gas y controladores predictivos supervisores lineales en la caldera y turbina a vapor

6.3.1. Diseño de un controlador supervisor predictivo lineal con característica económicas y regulatorias para la Turbina a Vapor

Para implementar el controlador supervisor predictivo en la turbina a vapor se obtuvo un modelo lineal por mínimos cuadrados con tiempo de muestreo de 1[s]. Se consideran 3000 muestras para el conjunto de entrada y 3000 para validación.

El modelo lineal ARIX para la turbina a vapor que relaciona la potencia mecánica de la turbina a vapor (P_{mech-S}) y la señal de control de la válvula de acceso de vapor a la turbina (u_s), está dado por:

$$P_{mech-S}(t) - 0.0123P_{mech-S}(t-1) = -61941 \cdot u_s(t-1) + \frac{e(t)}{\Delta} \quad (6.6)$$

con $e(t)$ es ruido blanco $E(e(t))=0$ y $\Delta=1-q^{-1}$

En la Figura 6.24 se aprecia el comportamiento a 10 pasos de predicción del modelo lineal de la turbina a vapor.

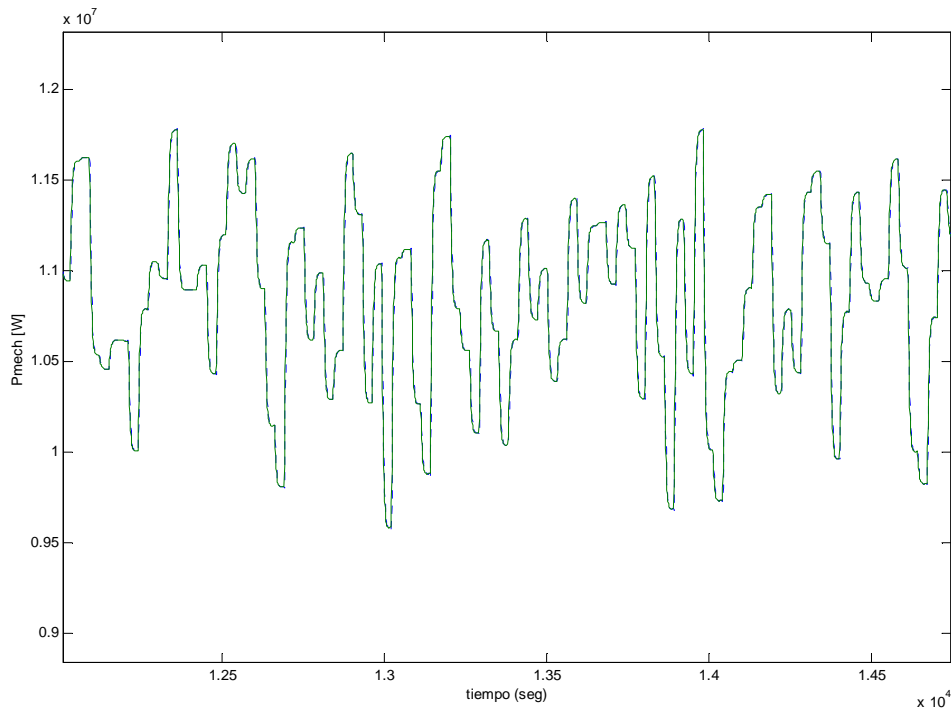


Figura 6.24. Modelo lineal de la Turbina Vapor con predicción a 10 pasos
— Modelo --- Datos

En la tabla 6.3 se muestran valores del error de validación, para la salida del modelo lineal de la turbina a vapor.

Tabla 6.9. Error de validación

Modelo lineal de la Turbina a vapor	Error validación e	Error validación porcentual c/r set point e%=100*e/set-point
Predicción a 1 paso	127963	1.1633
Predicción a 10 pasos	148005	1.3455

El modelo regulatorio para la turbina a vapor del PI usando un tiempo de muestreo de $T_s=1[s]$ está dado por:

$$A_c(z^{-1})u_{P_{mech}} = B_{cr}(z^{-1})r_{P_{mech}}(t) + B_{cy}(z^{-1})P_{mech}(t) \quad (6.7)$$

donde

$$A_c(q^{-1}) = 1 - q^{-1}, \quad B_{cr}(q^{-1}) = \alpha + \beta q^{-1}, \quad B_{cy}(q^{-1}) = -(\alpha + \beta q^{-1}), \quad \beta = \frac{T_s k_i}{2} - k_p \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{T_s k_i}{2} + k_p$$

El problema de optimización que incluye el modelo lineal 6.6 y el modelo del PI 6.7, está dado por

$$\text{Min } J_{Ps} = J_{P_{mech}} + \lambda \cdot J_{\Delta U} \quad (6.8)$$

$$J_{P_{mech}} = \sum_{j=1}^N (\hat{P}_{mech}(t+j) - r_{set-point_{P_{mech}}})^2 \quad \text{y} \quad J_{\Delta U} = \sum_{i=1}^N \Delta u_{P_{mech}}^2(t+i-1)$$

$$\text{con } r_{set-point_{P_{mech}}}^* = 1.1 \cdot 10^7 \quad \text{y} \quad \lambda = 10^5$$

La Figura 6.25 muestra la implementación del control supervisor lineal en la turbina a vapor.

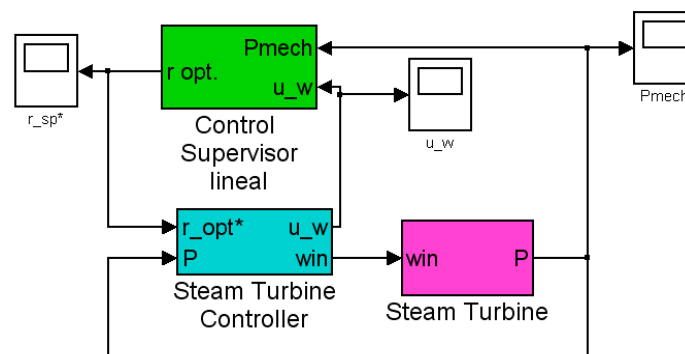


Figura 6.25. Implementación del control supervisor lineal en la Turbina a Vapor

En la Figura 6.26 se puede ver los resultados del Control Supervisor Turbina Vapor con características sólo regulatorias ante una perturbación en la temperatura de entrada del vapor a la turbina de alta presión.

Se aprecia una mejor regulación del controlador predictivo con respecto al control PI

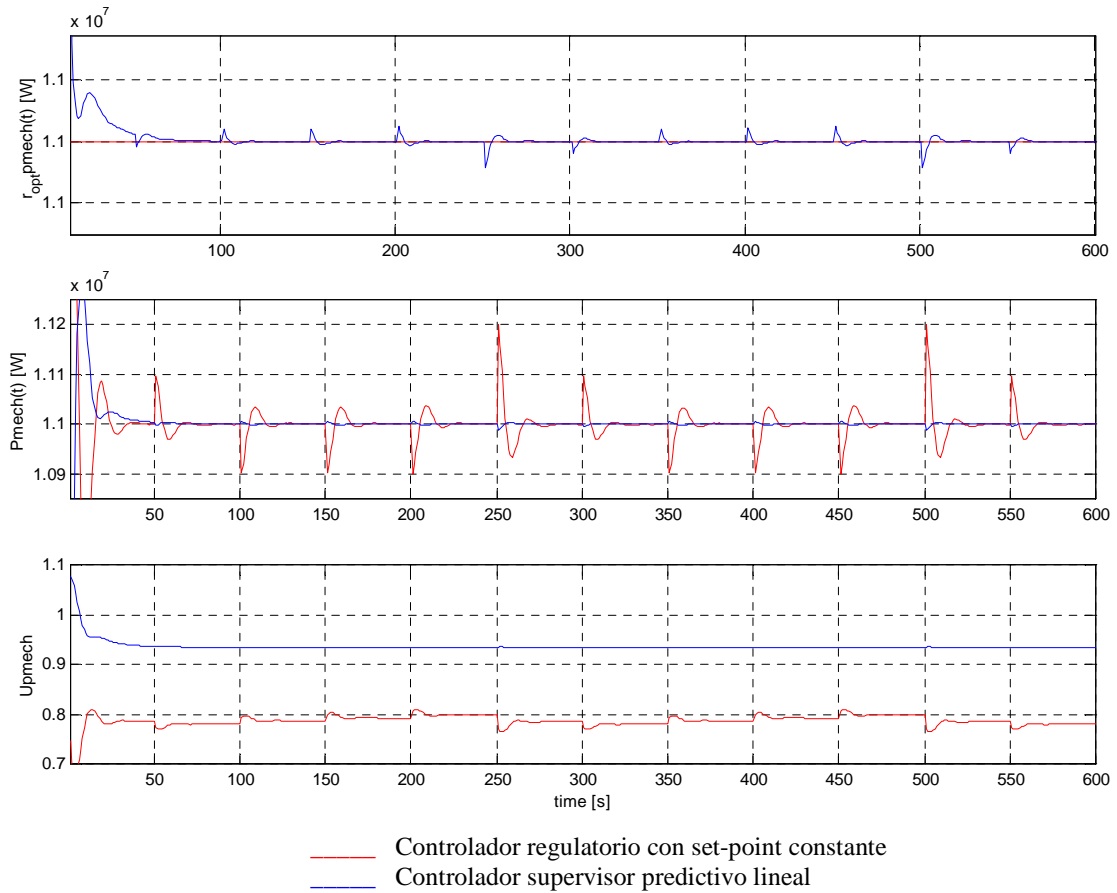


Figura 6.26. Respuesta de lazo cerrado de la presión de vapor sobrecalentado con controlador supervisor lineal con características económicas y regulatorias.

Análisis de datos:

En la Tabla 6.10 se presentan los valores medios de los índices de comportamiento de la función objetivo para el controlador supervisor lineal para la Turbina a Gas.

Tabla 6.10. Valores medios de los índices de comportamiento de la Turbina a vapor

	$J_{P_{mech}} = \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{mech}(t+j) - r_{set-poinP_{mech}})^2$	$J_{\Delta U} = \sum_{i=1}^N \Delta u_{p_{mech}}^2(t+i-1)$
Control PI	8.1199e+009	6.8824e-005
Control Supervisor Lineal	2.3341e+007	2.4859e-007

El control supervisor lineal de la Turbina a Vapor supera e 2 ordenes de magnitud al control PI, tanto en el seguimiento como en el esfuerzo de control.

6.3.2. Implementación en MATLAB Simulink

Se observa en la Figura 6.26 la implementación de los controladores predictivos supervisores híbridos diseñados para la turbina a gas (capítulo V) en el simulador completo de la central termoeléctrica de ciclo combinado, incluyendo controles supervisores lineales en la caldera y la turbina a vapor.

En el bloque del controlador supervisor, la señal que sale de la turbina a gas (TG) incluye cuatro señales: potencia de salida (P_{mech-G}), temperatura de los gases de salida (T_{out}), flujo de combustible (F_d) y flujo de aire de entrada (W_a). La señal de referencia óptima (r-opt TG) que entra a la turbina a gas, contiene el set-point óptimo de la temperatura de los gases de salida (T_{out}^*) y el set-point óptimo la potencia (P_{mech-G}^*). Ahora la señal que sale de la Caldera (Bo) contiene dos señales: presión de vapor sobrecalentado (P_s) y flujo de combustible (W_f). La señal de referencia óptima (r-opt Bo) que entra a la caldera, contiene el set-point óptimo de la presión de vapor sobrecalentado (P_s^*). Por último la señal de la Turbina a vapor (TS) contiene dos señales: la potencia (P_{mech-S}) y la señal de control del flujo de vapor (u_s). Y la señal de referencia óptima (r-opt TS) contiene el set-point óptimo de la potencia (P_{mech-S}^*).

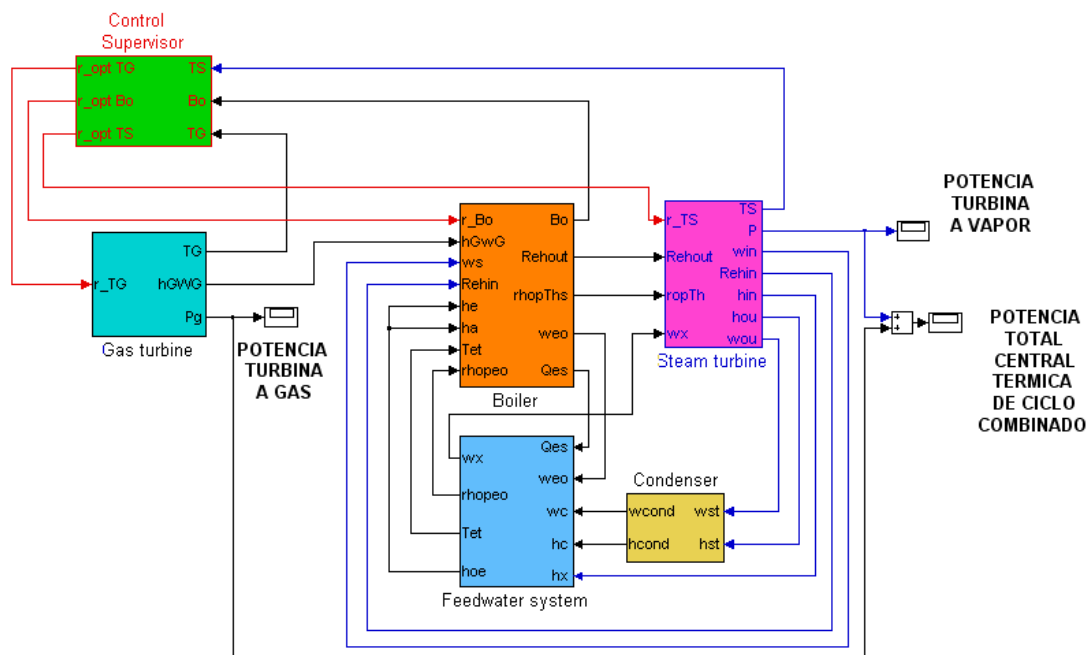


Figura 6.27. Implementación de un controlador supervisor híbrido de la turbina a gas, un controlador supervisor lineal en la caldera y un controlador supervisor lineal en la turbina a vapor para la central termoeléctrica de ciclo combinado.

A continuación se presentan los resultados de los controladores predictivos diseñados analizando separadamente los efectos en la turbina a gas, caldera, turbina a vapor y finalmente los efectos en la salida de la CCC.

6.3.3. Efectos en la Turbina a Gas

En la Figura 6.28 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la temperatura (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable manipulada) de los gases de escape para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas conectada a la central termoelectrica de ciclo combinado. Se incluye el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA basado en algoritmos genéticos. Se incluye además controladores predictivos supervisores lineales para la caldera y turbina a vapor.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados realizan menor esfuerzo de control que el controlador con set-point constante. Además estos controladores logran una peor regulación que el regulador con set-point constante, esto es en compensación al control de potencia.

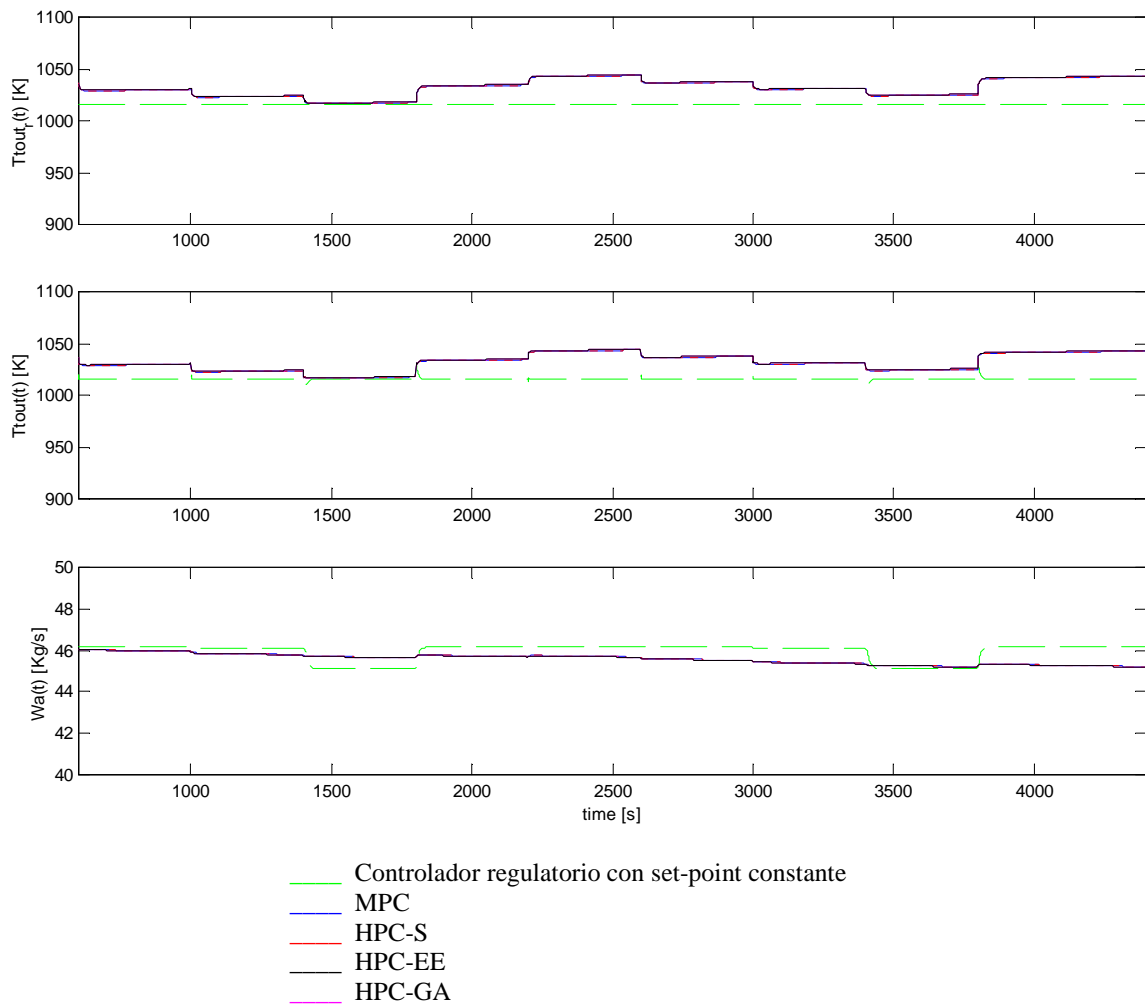


Figura 6.28. Respuesta de lazo cerrado de la temperatura con los controladores propuestos (Función objetivo económicas y regulatorias).

En la Figura 6.29 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central: la variable controlada y gráfica inferior: variable

manipulada) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas conectada al la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que los controladores predictivos diseñados logran una mejor regulación que el regulador con set-point constante.

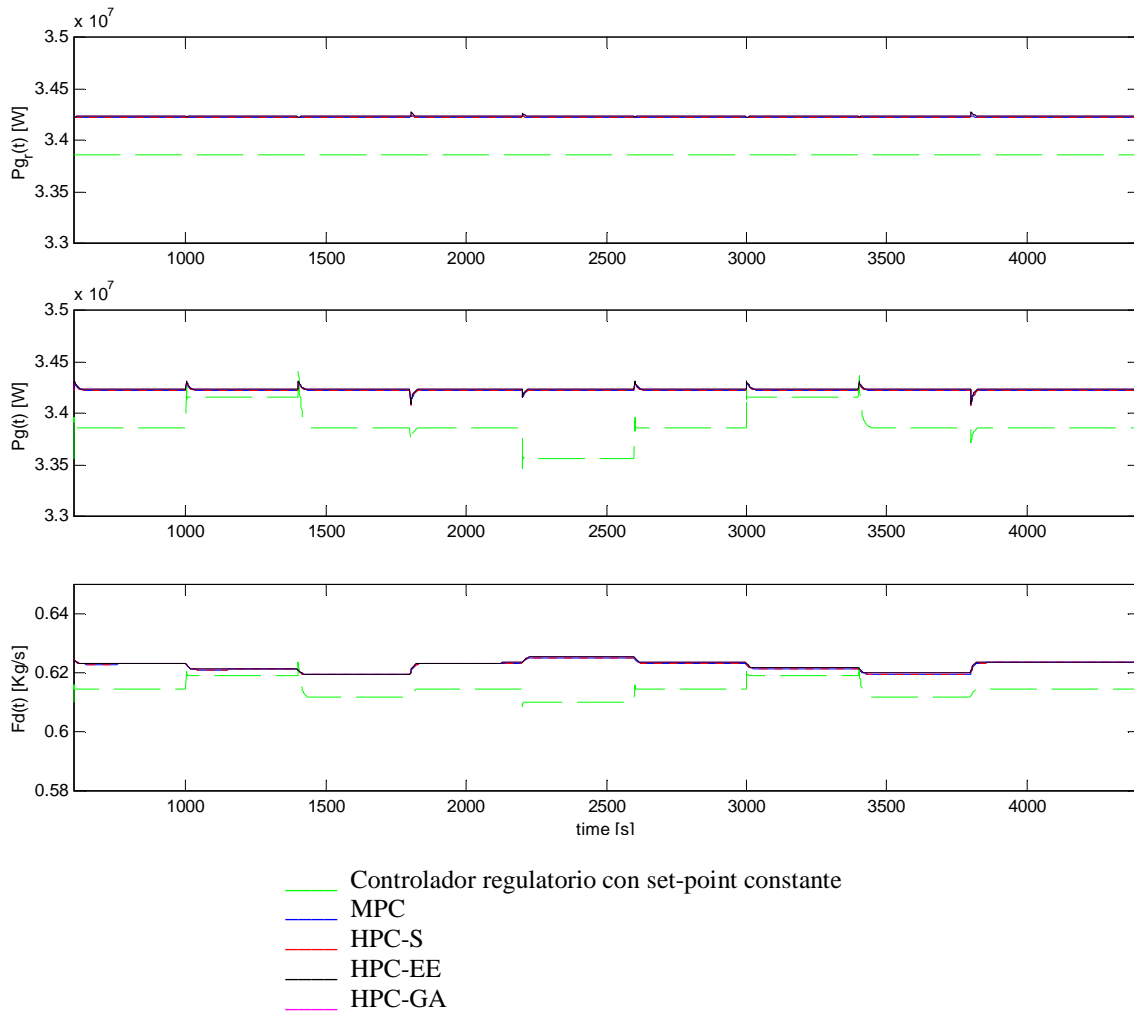


Figura 6.29. Respuesta de lazo cerrado de la potencia con los controladores propuestos (Función objetivo económica y regulatorias).

6.3.4. Efectos en la Caldera

En la Figura 6.30 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la presión de vapor sobrecalentado (gráfica superior: set-point óptimo, gráfica central la variable controlada y gráfica inferior variable manipulada (flujo de combustible)) para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la turbina a gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que la implementación de controladores predictivos en la turbina a gas producen el efecto de disminuir el flujo de combustible utilizado por la caldera no obstante el flujo de vapor es suficiente para junto con la turbina a vapor, alcanzar el set-point de potencia de la CCC (P_{CCC}^r). El tiempo para llegar al set_point disminuye con la implementación del controlador supervisor predictivo en la Caldera (comprar con Figura 6.6). El controlador de la turbina a vapor no afecta visiblemente.

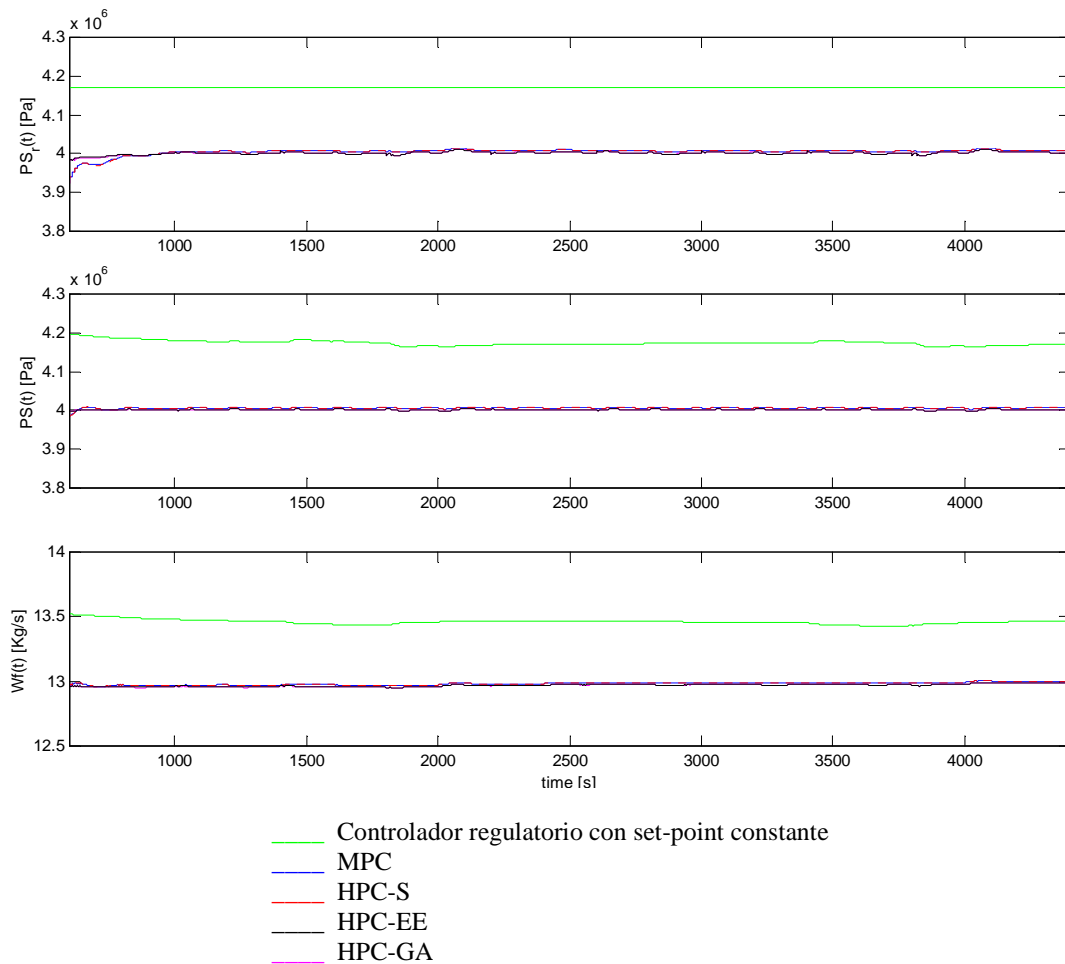


Figura 6.29. Presión de vapor saturado y flujo de combustible en la Caldera

En la Figura 6.30 se presenta el detalle de la Figura 6.29 con la respuesta en lazo cerrado para la presión de vapor sobrecalentado.

Se observa que el controlador con enumeración explícita HPC-EE y el controlador logrado con optimización genética HPC-GA sobre la turbina a gas son los que presentan la mayor de disminución del flujo de combustible utilizado por la Caldera. La implementación del controlador supervisor predictivo en la Caldera aumento este efecto al compararlo con Figura 6.7. No es notorio el efecto del controlador supervisor predictivo de la Turbina a Vapor.

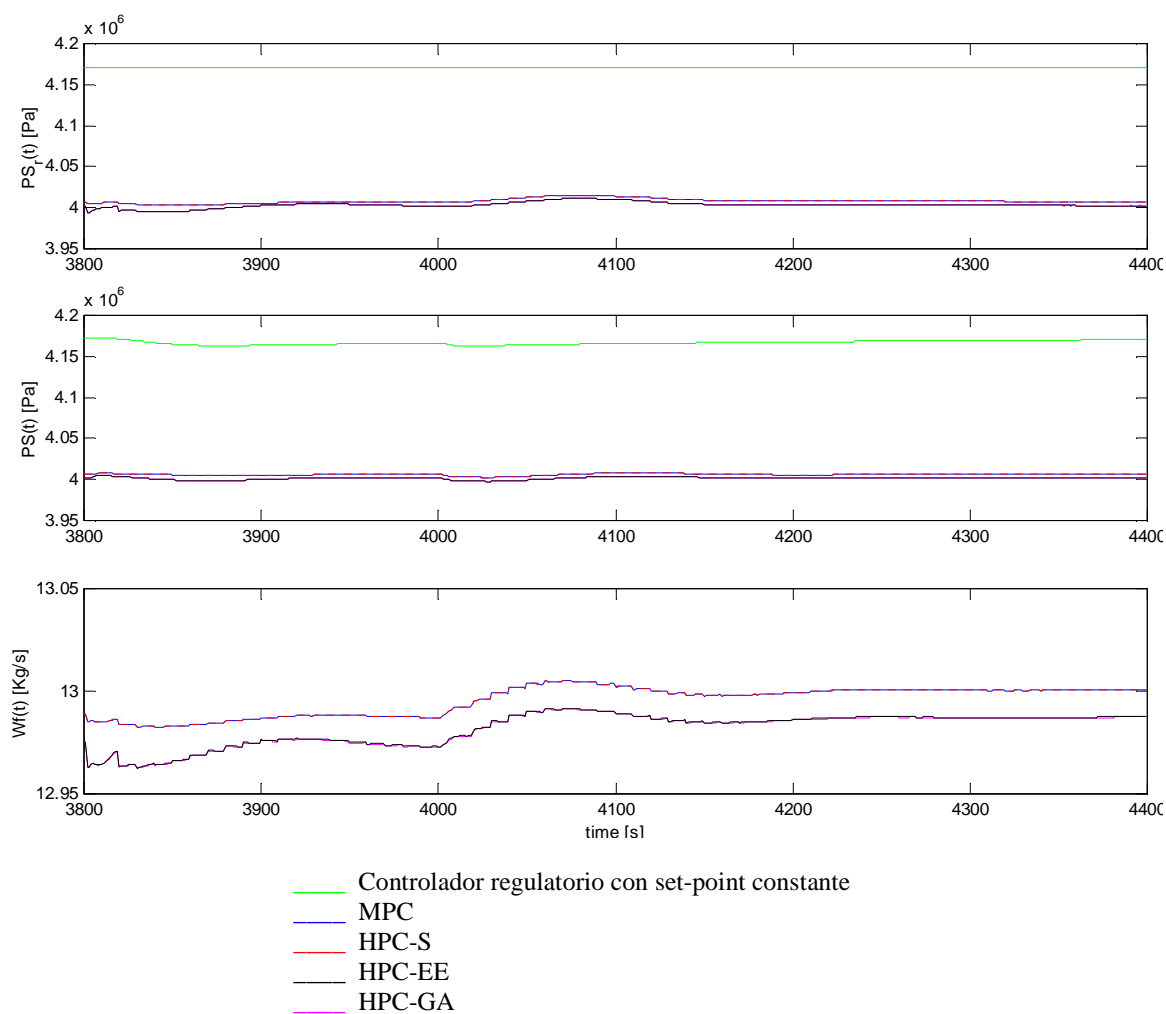


Figura 6.30. Detalle de presión de vapor saturado y flujo de combustible en la Caldera

6.3.5. Efectos en la turbina a vapor

En la Figura 6.32 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia en la turbina a vapor para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia observa que la implementación de controladores predictivos en la Turbina a Gas produce el efecto de disminuir la potencia generada por la Turbina a Vapor no obstante se alcanza el set-point de potencia de la CCC (P_{CCC}^r). La implementación de controladores predictivos supervisores en la Caldera y Turbina a Vapor no producen efecto notorio al compararlo con Figura 6.8.

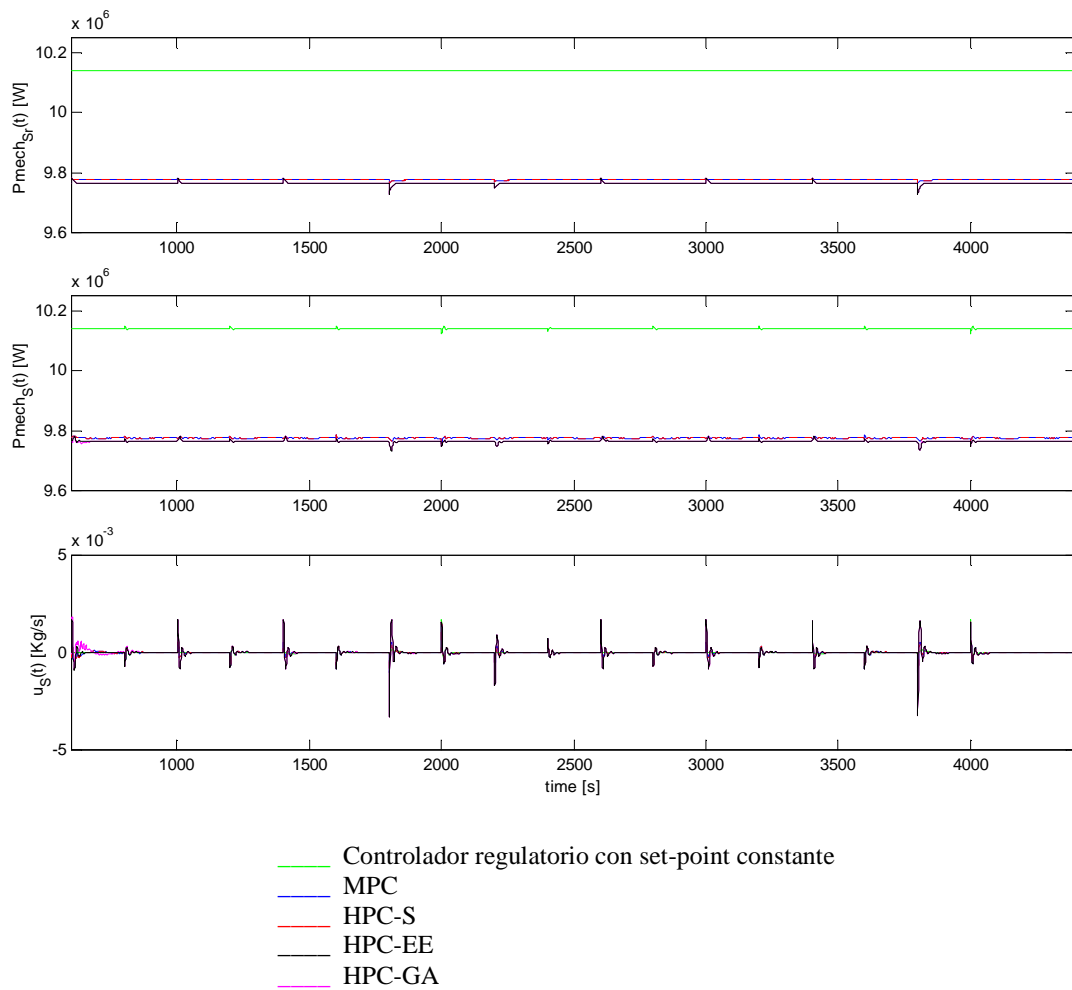


Figura 6.32. Potencia y señal de control de válvula en la Turbina a Vapor

En la Figura 6.33 se presenta el detalle de la Figura 6.31 con la respuesta en lazo cerrado para la potencia en la Turbina a Vapor.

Se aprecia que el controlador con enumeración explícita HPC-EE y el controlador logrado con optimización genética HPC-GA sobre la turbina a gas son los que presentan el mayor efecto sobre la turbina a vapor, al disminuir la potencia generada pero cumpliendo el set-point de potencia de la CCC. La implementación de controladores predictivos supervisores en la Caldera y Turbina a Gas no producen un efecto notorio comparado con Figura 6.9.

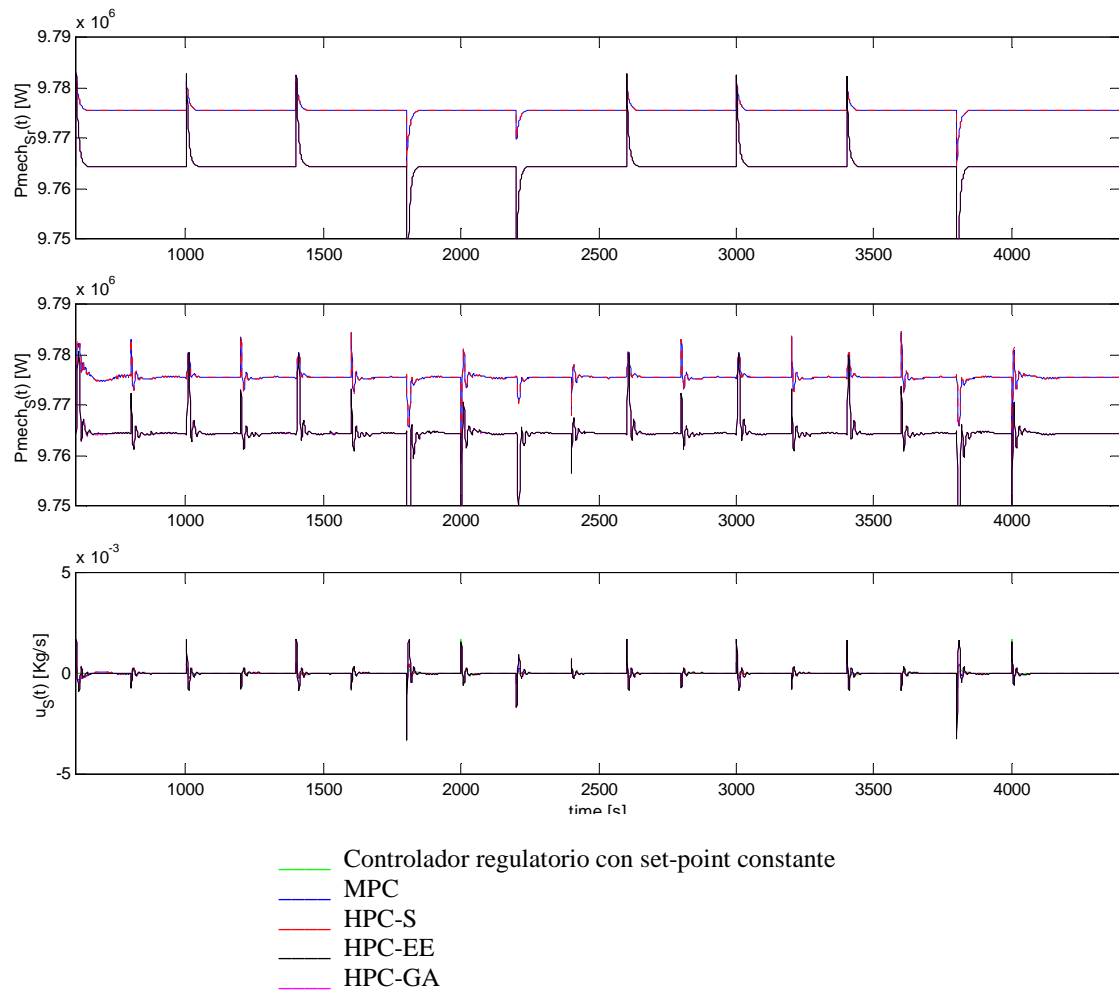


Figura 6.33. Detalle de la potencia y señal de control de válvula en la Turbina a Vapor

6.3.6. Efectos en la salida de la CCC

En la Figura 6.34 se presenta la respuesta en lazo cerrado para la potencia total en la CCC para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas conectada a la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Se aprecia que la implementación de controladores predictivos en la turbina a gas produce el efecto de mejorar la regulación de potencia total de la CCC. La implementación de controladores predictivos supervisores en la caldera y turbina a gas no producen efecto notorio al compararlo con Figura 6.10.

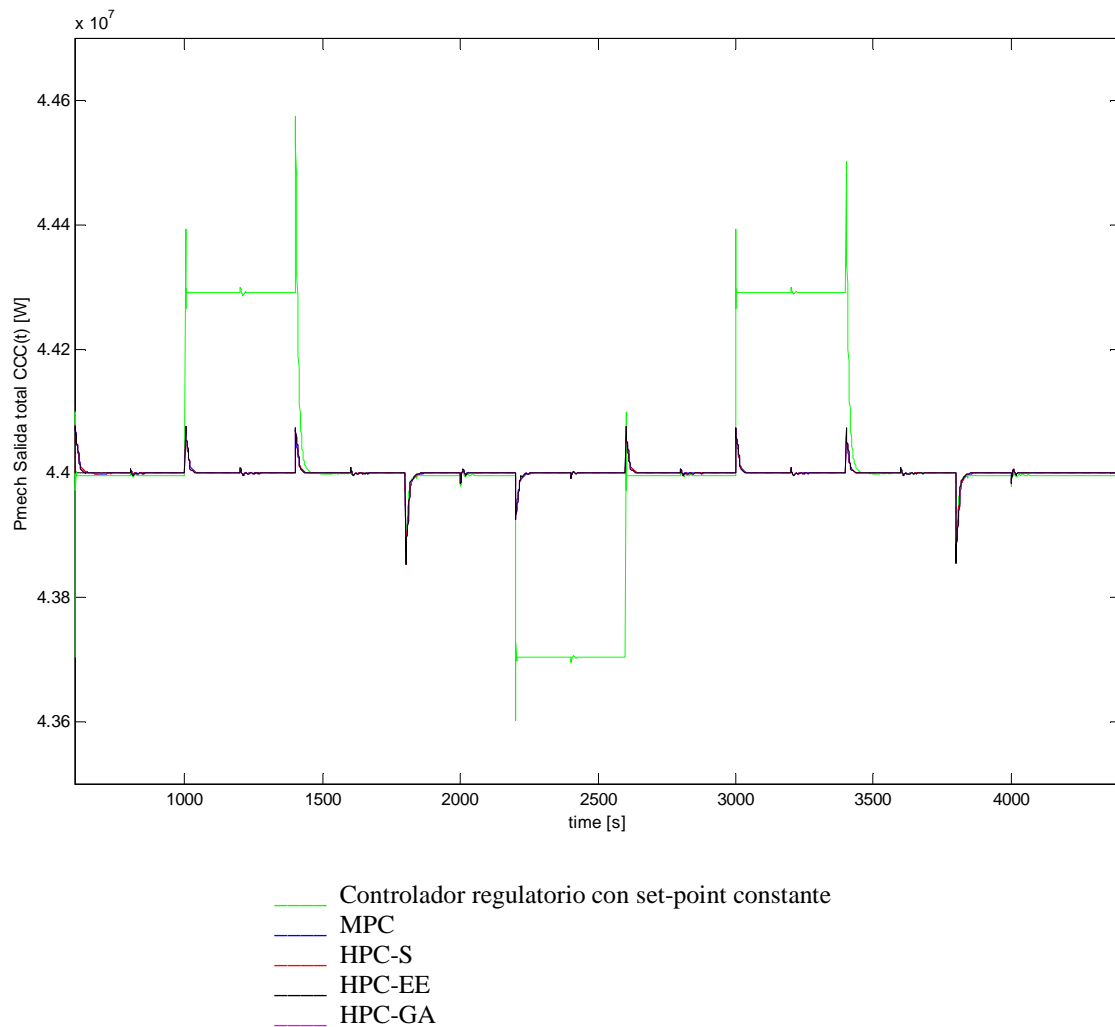


Figura 6.34. Potencia de salida de la central termoeléctrica de ciclo combinado

En la Figura 6.34 se presenta el detalle de la Figura 6.33 con la respuesta en lazo cerrado para la potencia total en la CCC.

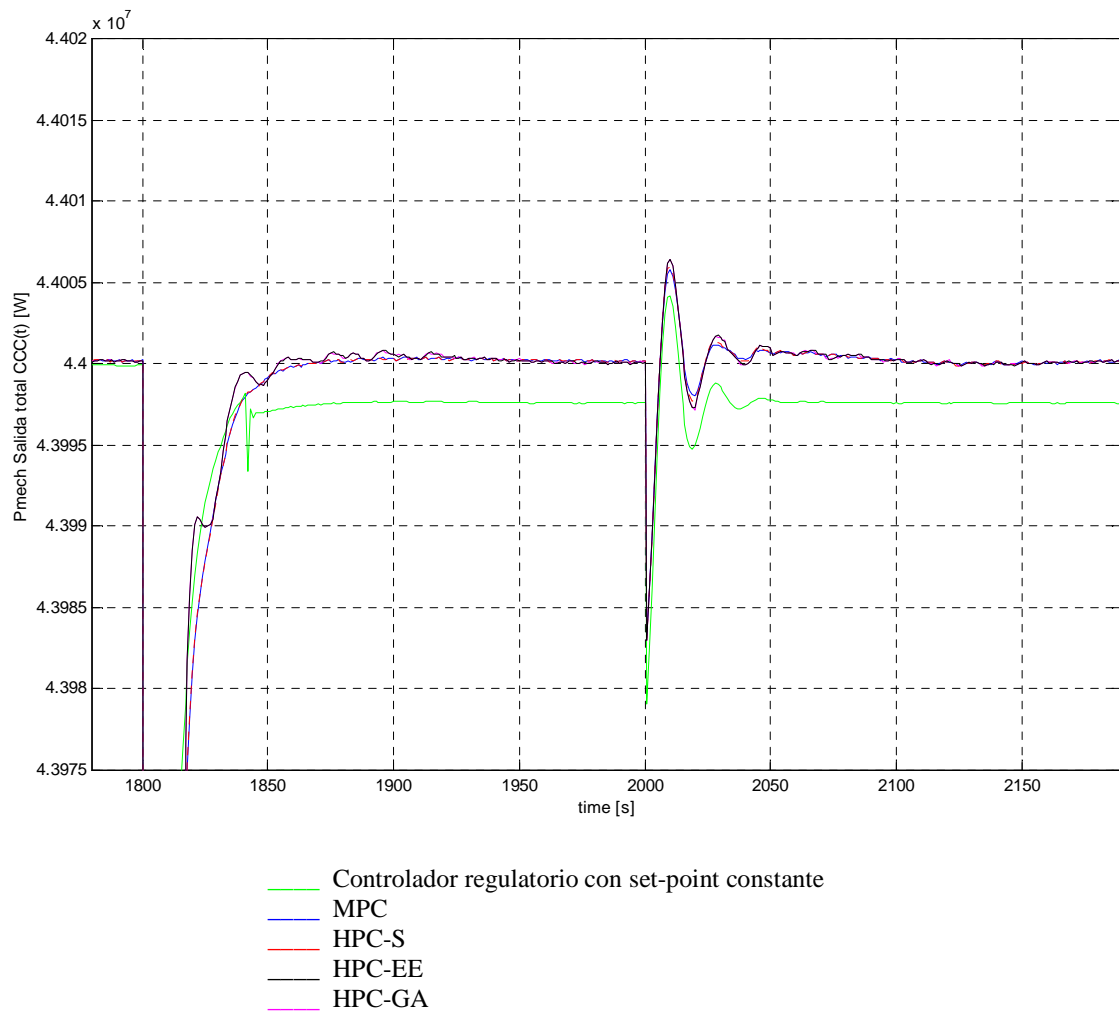


Figura 6.34. Detalle de la potencia de salida de la central termoeléctrica de ciclo combinado

Se aprecia con más detalle como la implementación de controladores predictivos en la turbina a gas produce el efecto de mejorar la regulación de potencia total de la CCC. La implementación de controladores predictivos supervisores en la caldera y turbina a gas no produce efecto notorio al compararse con Figura 6.11.

6.3.7. Análisis de datos

Efectos sobre la Caldera

En la Tabla 6.6 se presentan los valores medios de los costos del combustible en la caldera ante la implementación para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas. Se incluye el tradicional MPC, un controlador híbrido simple HPC-S, el controlador híbrido HPC-EE con solución con enumeración explícita y el controlador híbrido HPC-GA con solución con algoritmos genéticos. Se incluye además controladores predictivos supervisores lineales para la Caldera y Turbina a Vapor.

Tabla 6.11. Costo de combustible con controlador supervisor predictivo lineal en Caldera

Controladores sobre la Turbina a Gas	J_{wf}	% beneficio c/r PI	% beneficio c/r MPC
MPC	129.7974	3.5446	-
HPC-S	129.7974	3.5446	0.0000
HPC-GA	129.7113	3.6087	0.0664
HPC-EE	129.6661	3.6422	0.1012
PI	134.5674	-	-

Tabla 6.12. Combustible, con controladores predictivos supervisores lineales en caldera y turbina a gas.

Controladores sobre la Turbina a Gas	J_{wf}	% beneficio c/r PI	% beneficio c/r MPC
MPC	129.7998	3.5428	-
HPC-S	129.7994	3.5432	0.0003
HPC-GA	129.6644	3.6435	0.1043
HPC-EE	129.6677	3.6411	0.1018
PI	134.5674	-	-

con $J_{wf} = \sum_{k=1}^N C_{wf} \cdot W_f(t+k)$ y $C_{wf} = 10$ precio del combustible.

El efecto de incluir un controlador supervisor predictivo lineal en la turbina a vapor no es demasiado notorio en el comportamiento de los controles supervisores regulatorios y económicos en la caldera.

Efectos sobre la turbina a vapor

En la tabla 6.7 se presentan los valores medios del error de set-point de la trayectoria de la potencia de salida en la turbina a vapor ante la implementación para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas. Se incluye además controladores predictivos supervisores lineales para la Caldera y Turbina a Vapor.

Tabla 6.13. Valores medios del error de set-point de la trayectoria de la potencia de salida en la turbina a vapor

	Con controlador supervisor predictivo lineal sólo en Caldera	Con controladores predictivos supervisores lineales en Caldera y Turbina a Vapor
Controladores sobre la Turbina a Gas	J_{Ps}	J_{Ps}
MPC	$1.3314972 \cdot 10^{12}$	$1.3295589 \cdot 10^{12}$
HPC-S	$1.3314932 \cdot 10^{12}$	$1.3295636 \cdot 10^{12}$
HPC-GA	$1.4147945 \cdot 10^{12}$	$1.4128140 \cdot 10^{12}$
HPC-EE	$1.4148031 \cdot 10^{12}$	$1.4128183 \cdot 10^{12}$
PI	$0.0000114 \cdot 10^{12}$	$0.0000114 \cdot 10^{12}$

donde $J_{Ps} = \sum_{k=1}^N (Ps(t+k) - r_{Ps_set-point})^2$ y la referencia de set-point es para la turbina a vapor es $r_{Ps_set-point} = 10140000[W]$

Existe una mejora del 0.14% en la regulación de la Turbina a Vapor incluyendo además en la Turbina Gas un control supervisor lineal regulatorio.

Se observa la consistencia de los datos en el orden que quedan con respecto a la regulación los controladores predictivos supervisores económico-regulatorios. Es decir existe una compensación, el control que tenía la mejores características económico-regulatorio en la turbina a gas era el que también tenía la peor regulación. Ahora este orden se reproduce en la regulación en la salida de potencia total de la Central termoeléctrica de ciclo combinado.

Efectos sobre la CCC

En la tabla 6.2 se presentan valores medios del error de set-point de la trayectoria de la potencia de salida de la central termoeléctrica de ciclo combinado ante la implementación para los cuatro tipos de controladores supervisores predictivos diseñados sobre la Turbina a Gas. Se incluye además controladores predictivos supervisores lineales para la caldera y turbina a vapor.

Tabla 6.14. Valores medios del error de set-point de la trayectoria de la potencia de salida de la central termoeléctrica de ciclo combinado.

	Con controlador supervisor predictivo lineal sólo en Caldera	Con controladores predictivos supervisores lineales en Caldera y Turbina a Vapor
Controladores sobre la Turbina a Gas	J_{Total_CCC}	J_{Total_CCC}
MPC	$0.01338*10^{11}$	$0.01332*10^{11}$
HPC-S	$0.01337*10^{11}$	$0.01332*10^{11}$
HPC-GA	$0.01449*10^{11}$	$0.01445*10^{11}$
HPC-EE	$0.01450*10^{11}$	$0.01445*10^{11}$
PI	$2.36550*10^{11}$	$2.36550*10^{11}$

donde $J_{Total_CCC} = \sum_{N=1}^{k=10} (P_{Total_CCC}(t+k) - r_{set-point_CCC})^2$

además $P_{Total_CCC} = P_{Turbina_gas} + P_{Turbina_vapor}$ y $r_{set-point_CCC} = 44 * 10^6 [W]$

Existe una mejora del 0.3% en la regulación de planta de ciclo combinado cuando se incluye en la Turbina a Vapor un controlador supervisor predictivo lineal regulatorio.

Todos los controles supervisores aplicados a la Turbina a Gas producen una mejora de dos ordenes de magnitud en regulación con respecto a el controlador PI.

Se observa la consistencia de los datos en el orden que quedan con respecto a la regulación los controladores predictivos supervisores económico-regulatorios. Es decir existe una compensación, el control que tenia la mejores características económico-regulatorio en la turbina a gas era el que también tenía la peor regulación. Ahora este orden se reproduce en la regulación en la salida de potencia total de la Central termoeléctrica de ciclo combinado.

6.4. Discusión

Los principales efectos producidos en los parámetros de la central termoeléctrica de ciclo combinado por la implementación de los controladores supervisores predictivos híbridos diseñados para la turbina a gas y los controladores predictivos supervisores lineales para la Caldera y Turbina a Vapor son los siguientes:

- Un 3.4% de ahorro en el combustible de la caldera al implementar cualquiera de los controladores predictivos supervisores diseñados para la turbina a gas. Al incluir un control supervisor lineal en la caldera se logra un aumento el ahorro en un 0.14 % .
- Una mejora del 0.3% en la regulación de planta de ciclo combinado cuando se incluye en la turbina a vapor un controlador supervisor predictivo lineal regulatorio.
- Todos los controladores predictivos supervisores aplicados a la turbina a gas con función objetivo con característica económica y regulatoria, producen una mejora de dos órdenes de magnitud en regulación de la potencia total de la CCC con respecto al controlador con set-point constante. Claramente si se consideran controladores predictivos con funciones objetivo con características sólo regulatorias el controlador con enumeración explícita HPC-EE y el controlador con optimización genética HPC-GA para la turbina a gas son los que presentan la mejor regulación de potencia total de la CCC.

VII. Análisis de estabilidad del control predictivo con restricciones

La solución eficiente del problema del control óptimo es importante para cualquier aplicación a procesos reales, pero la estabilidad del bucle cerrado es también de crucial importancia. Para sistemas lineales sin restricciones, la estabilidad se puede analizar con herramientas convencionales de teoría de sistemas lineales, pero si aparecen restricciones o el sistema es no lineal, la ley de control se convierte en no lineal y deben usarse otras herramientas.

Incluso en el caso de que el algoritmo de optimización encuentre una solución, esto no garantiza la estabilidad del bucle cerrado. El uso de penalización o restricción terminal, funciones de Lyapunov o conjuntos invariantes son capaces de garantizar la estabilidad del sistema controlado. De hecho, el análisis de la estabilidad de los controladores predictivos se suele realizar mediante esta teoría (Mayne *et al.* 2000).

La estructura de este capítulo es la siguiente:

- Definición de las funciones K , función K_∞ , función KL y función definida positiva a partir de las funciones K .

- Con el uso de la definición de estabilidad y estabilidad asintótica en torno al origen de un sistema dinámico se demuestra el teorema de estabilidad y estabilidad asintótica de Lyapunov utilizando el concepto de conjunto invariante positivo.
- Análisis de la estabilidad de sistemas autónomos y no-autónomos con restricciones a partir del concepto de función de Lyapunov de control y conjunto invariante de control . Introducción de la teoría de conjuntos invariantes.
- Análisis de la estabilidad del controlador MPC con restricciones a partir de los conceptos de región terminal invariante y coste terminal como función de Lyapunov.
- Presentación método general para el cálculo de la región terminal de un sistema de control predictivo no-lineal con restricciones.
- Análisis caso particular de la búsqueda de condiciones de estabilización para la estrategia de control MPC con restricciones de un sistema híbrido.

7.1. Análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado de un controlador predictivo con restricciones

Se define un sistema dinámico autónomo en tiempo discreto dado por $x_{k+1} = F(x_k)$ siendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ el estado del sistema en el instante k y la función $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ una función continua. Un estado x^0 se dice que es un punto de equilibrio del sistema si $x^0 = F(x^0)$. Es decir, si el sistema, una vez que alcanza ese estado, permanece en éste.

Sin pérdida de generalidad, se considera que el origen es un punto de equilibrio del sistema, debido a que basta con hacer el cambio de variables $z = x - x^0$ para trasladar el punto de equilibrio al origen.

Se definen las siguientes funciones muy útiles en la teoría de estabilidad (Khalil 1996, Vidyasagar 1993).

Función K : Una función $\alpha: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$ se dice que es una función K si:

- Es una función continua.
- Es estrictamente creciente, es decir: si $a > b$, entonces $\alpha(a) > \alpha(b)$.
- $\alpha(0) = 0$.

Función K_∞ : Una función $\alpha: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$ se dice que es una función K_∞ si es una función K y además

- $\alpha(a) \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$.

Función KL : Una función $\beta: \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$ se dice que es una función KL si

- La función $\beta(a, k)$ es una función K en a para todo $k \geq 0$ fijo.
- La función $\beta(a, k)$ es decreciente en k para todo $a \geq 0$ fijo, de forma que $\beta(a, k) \rightarrow 0$ $\beta(a, k) \geq 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Función definida positiva: Una función $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ se dice que es (localmente) definida positiva si existe una función $K, \alpha(\cdot)$ tal que $\alpha(\|x\|) \leq V(x)$ para todo $x \in B_r = \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x\| \leq r\}$. Si esta condición se extiende a \mathfrak{R}^n , entonces se denomina globalmente definida positiva.

A continuación se definen los conceptos de estabilidad de un sistema en el origen

Estabilidad: Un sistema $x_{k+1} = F(x_k)$ se dice que es estable en el origen si para todo $\delta > 0$ existe una constante $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tal que $\forall x_0 : \|x_0\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|x_k\| \leq \delta \quad \forall k \geq 0$

En consecuencia un sistema es estable si para una cota del sistema dada δ existe una vecindad del origen tal que si el sistema parte de ella, éste evoluciona acotado por δ . Esta condición está relacionada con cierta robustez del sistema en torno al punto de equilibrio, pues garantiza que una variación pequeña de la cota del estado inicial, supone una variación pequeña de la cota en la evolución del sistema.

Estabilidad asintótica: Un sistema $x_{k+1} = F(x_k)$ se dice que es asintóticamente estable en el origen si es estable y además existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall x_0 : \|x_0\| \leq \varepsilon \Rightarrow x_k \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty \quad (7.1)$$

La teoría de Lyapunov establece condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de un sistema y está basada en:

- La existencia de una función del estado definida positiva asociada al sistema denominada función de Lyapunov.
- Bajo ciertas hipótesis sobre esta función se puede demostrar estabilidad, estabilidad asintótica.

Así, existe un teorema de estabilidad de Lyapunov asociado a cada tipo de estabilidad (Vidyasagar 1993). También resulta útil la siguiente definición:

Sea una función $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ asociada a un sistema dinámico $x_{k+1} = F(x_k)$ siendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ el estado del sistema en el instante k . Entonces se define $\Delta V(x) = V(F(x)) - V(x)$

7.1.1. Estabilidad de Lyapunov

(i) Sea un sistema dinámico en tiempo discreto dado por $x_{k+1} = F(x_k)$ siendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ el estado del sistema en el instante k y tal que el origen es un punto de equilibrio.

(ii) Sea una función $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ definida positiva tal que

- Existen dos funciones $K \alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ tales que $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$
- Satisface la condición $\Delta V(x) \leq 0$ para todo $x \in B_r = \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x\| \leq r\}$

Entonces el origen es un punto de equilibrio estable del sistema. Si estas condiciones se extienden a \mathfrak{R}^n entonces es globalmente estable.

A la función $V(x)$ definida positiva que satisface las condiciones de este teorema se denomina función de Lyapunov asociada al sistema $x_{k+1} = F(x_k)$.

Por el lema Khalil, la condición $V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$ se satisface si la función definida positiva $V(x)$ es continua.

Lema de Khalil: Sea una función $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ continua y definida positiva en B_r , entonces existe una función $K \gamma(\cdot)$ definida en $[0, r]$ tal que $V(x) \leq \gamma(\|x\|)$ para todo $x \in B_r = \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x\| \leq r\}$.

La estabilidad de Lyapunov está íntimamente ligada al concepto de invariancia positiva.

Conjunto invariante positivo: Un conjunto $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ se dice que es un conjunto invariante positivo, si para todo $x_0 \in \Omega$ la evolución del sistema es tal que $x_k \in \Omega$ para todo $k \geq 0$.

Por tanto, si un sistema en su evolución alcanza un invariante positivo, entonces la evolución del sistema permanecerá en dicho conjunto.

La estabilidad de Lyapunov se deriva del hecho que $\Delta V(x)$ es negativa, y por tanto la secuencia de valores $V(x_k)$ decrece en toda trayectoria que no salga de la vecindad B_r , ya que $V(x_k) \leq V(x_0)$ para todo k .

Ahora para avanzar en la demostración en tres pasos tenemos que $B_r = \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x\| \leq r\}$, $V(x)$ función de Lyapunov y $\alpha_1(\cdot)$ función tipo K .

i) Primero se demostrará que:

$$\forall \Omega = \{x \in \mathfrak{R}^n : V(x) \leq \mu\} \text{ con } \mu \leq \alpha_1(r) \Rightarrow \Omega \subseteq B_r.$$

Demostración de i) $\forall x \in \Omega$ se tiene que $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \mu \leq \alpha_1(r)$ y como $\alpha_1(\cdot)$ estrictamente creciente se tiene que $\|x\| \leq r$. En consecuencia, $\Omega \subseteq B_r$.

ii) Segundo se demostrará que el conjunto Ω definido anteriormente es invariante positivo del sistema.

Demostración de ii) $\forall x_0 \in \Omega$ tenemos que $V(x_0) \leq \mu \leq \alpha_1(r)$ luego, $V(x_k) \leq V(x_0) \leq \mu \leq \alpha_1(r)$ por lo que $x_k \in \Omega$. Por lo tanto Ω invariante positivo del sistema.

iii) Por último para demostrar la estabilidad hay que probar que para toda cota de la evolución del sistema $\delta \leq r$, existe un $\varepsilon(\delta)$ tal que para todo $x_0 \in B_\varepsilon$, resulta que $x_k \in B_\delta$.

Demostración de iii) Tomando $\varepsilon = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\delta))$ tenemos que, $\forall x_0 \in B_\varepsilon$ implica que $V(x_0) \leq \alpha_2(\|x_0\|) \leq \alpha_2(\varepsilon) = \alpha_1(\delta) \leq \alpha_1(r)$ y por (ii) Ω , con $\mu = \alpha_1(\delta)$, es un invariante positivo contenido en B_r y que contiene B_ε . En consecuencia $\alpha_1(\|x_k\|) \leq V(x_k) \leq V(x_0) \leq \alpha_1(\delta)$ y por lo tanto $x_k \in B_\delta$, lo que demuestra la estabilidad.

Es importante resaltar que si la condición $\Delta V(x) \leq 0$ se satisface en un conjunto Φ que es un invariante positivo del sistema, entonces $V(x_k) \leq V(x_0)$ para todo x_0 perteneciente al invariante, pues la trayectoria está contenida en Φ para todo k . Por tanto el sistema es estable en Φ .

7.1.2. Estabilidad asintótica de Lyapunov

(i) Sea un sistema dinámico en tiempo discreto dado por $x_{k+1} = F(x_k)$ siendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ el estado del sistema en el instante k y tal que el origen es un punto de equilibrio.

(ii) Sea una función $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ definida positiva tal que

- Existen dos funciones K , $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ tales que $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$
- Existe una función K , $\alpha_3(\cdot)$ tal que $\Delta V(x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$ para todo $x \in B_r$.

Entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema. Si estas condiciones se extienden a \mathfrak{R}^n y la función de Lyapunov es radialmente no acotada, entonces es globalmente asintóticamente estable.

El sistema es estable, pues se satisface el teorema de estabilidad. Por otro lado, la condición de que $\Delta V(x)$ sea estrictamente decreciente excepto en el origen, hace que la secuencia $V(x_k)$ (sea estrictamente decreciente en todo estado de la trayectoria, salvo en el

origen, para todo x_0 perteneciente al conjunto invariante positivo $\Omega = \{x \in \mathfrak{R}^n : V(x) \leq \alpha_1(r)\} \subseteq B_r$. Dado que la secuencia de valores $V(x_k)$ es definida positiva y estrictamente decreciente para todo $x \neq 0$, entonces, $V(x_k)$ tiende a 0, cuando $k \rightarrow \infty$ pues de lo contrario, $V(x) \rightarrow -\infty$ lo cual es una contradicción con el carácter definido positivo de $V(\cdot)$. Por lo tanto $x_k \rightarrow 0$.

Si la condición $\Delta V(x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$ se satisface en un conjunto invariante positivo Φ , entonces el sistema es asintóticamente estable para todo $x_0 \in \Phi$.

7.1.3. Estabilidad de sistemas autónomos con restricciones

Sea un sistema $x_{k+1} = F(x_k)$ cuyo estado está sujeto a las restricciones dadas por $x_k \in X$ para todo k . Dado que el punto de equilibrio debe ser admisible, por lo que $0 \in X$.

El concepto de invariancia es esencial en el análisis de sistemas con restricciones. En efecto, un sistema autónomo sujeto a restricciones evoluciona de una forma admisible (es decir cumpliendo las restricciones en todo k) si existe un conjunto invariante positivo Ω contenido en el conjunto de restricciones X . Por tanto, si $x_0 \in \Omega \subseteq X$, entonces, por ser Ω un conjunto invariante positivo, se tiene que $x_k \in \Omega \subseteq X$ para todo k y por lo tanto la evolución del sistema es admisible.

La teoría de Lyapunov demuestra que si existe una función de Lyapunov $V(x)$ tal que $\Delta V(x) \leq 0$ para todo $x \in X$, entonces todo conjunto $\Omega = \{x \in \mathfrak{R}^n : V(x) \leq \alpha\}$ contenido en X es un invariante positivo del sistema, y por lo tanto para todo estado inicial $x_0 \in \Omega$ el sistema satisface las restricciones.

7.1.4. Estabilidad de sistemas no autónomos: funciones de Lyapunov de control

Los resultados de la teoría de Lyapunov permiten el análisis de estabilidad de sistemas autónomos. Dada la generalidad de la teoría de Lyapunov resulta muy interesante trasladar todos estos resultados al análisis de sistemas no autónomos. Esto se consigue gracias al concepto de función de Lyapunov de control (FLC) introducido por primera vez en (Arstein 1983) para sistemas continuos. En esta sección se traslada el concepto de FLC a sistemas en tiempo discreto.

Sea un sistema no autónomo dado por $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ siendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ el estado del sistema y $u_k \in \mathfrak{R}^m$ las actuaciones aplicadas sobre el sistema.

Sea el origen un punto de equilibrio del sistema, por tanto $f(0, 0) = 0$.

Las entradas del sistema pueden estar restringidas a un conjunto compacto U que contiene el origen, de forma que $u_k \in U$ en todo instante k .

El concepto de sistema estable definido para sistemas autónomos, se transforma en *estabilizable* para un sistema no autónomo. Un sistema es estabilizable si existe una ley de control tal que estabilice el sistema en bucle cerrado. Así se generalizan las distintas nociones de estabilidad anteriormente definidas.

El concepto de conjunto invariante positivo asociado al caso autónomo se puede extender al caso de sistemas no autónomos introduciendo el concepto de conjunto invariante de control.

Conjunto invariante de control: *Un conjunto $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ se dice que es un conjunto invariante de control asociado a un sistema $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ siendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ y $u_k \in \mathfrak{R}^m$, si para todo $x_0 \in \Omega$, existe una ley de control $u_k = h(x_k)$ tal que $x_k \in \Omega$ para todo $k \geq 0$ y además las actuaciones son admisibles $u_k = h(x_k) \in U$.*

El concepto de función de Lyapunov asociado a un sistema autónomo, se puede extender para el caso de un sistema no autónomo en la denominada función de Lyapunov de control.

Función de Lyapunov de Control: *Una función $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ se dice que es una función de Lyapunov de control asociada al sistema $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ siendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$, $u_k \in U \subset \mathfrak{R}^m$, si es definida positiva y satisface que $\Delta V(x) = \min_{u \in U} \{V(f(x, u)) - V(x)\} \leq 0$ para todo $x \in B_r$.*

El problema de minimización implicado en una función de control de Lyapunov no es difícil de resolver, especialmente en el caso de sistemas afines en las actuaciones o sistemas sin restricciones en las actuaciones.

La principal diferencia es que la función $\Delta V(x)$ se define en términos de la actuación, de forma que si se satisface $\min_{u \in U} \{V(f(x, u)) - V(x)\} \leq 0$ entonces existe una actuación admisible asociada a cada estado x_k (es decir, una ley de control $u_k = h(x_k) \in U$) tal que la función $V(x_{k+1}) \leq V(x_k)$.

Por lo tanto si un sistema tiene una función de Lyapunov de control asociada, entonces, Ω el conjunto acotado $V(x) \leq \alpha$ contenido en B_r es un invariante de control del sistema y por lo tanto el sistema es estabilizable. Esto permite establecer el siguiente resultado:

- *Si un sistema no autónomo admite una función de Lyapunov de control asociada al sistema en B_r , entonces el sistema es estabilizable.*
- *Si un sistema no autónomo tiene asociada una función de Lyapunov de control tal que $\Delta V(x) = \min_{u \in U} \{V(f(x, u)) - V(x)\} \leq -\alpha(\|x\|)$ para todo $x \in B_r$, siendo $\alpha(\cdot)$ una función K, entonces el sistema es asintóticamente estabilizable.*

Si la condición anterior se satisface en el conjunto Φ , entonces el sistema sería asintóticamente estabilizable en una región $\Gamma \subseteq \Phi$ tal que para todo $x \in \Gamma$ excepto el origen, exista una actuación admisible $u \in U$ tal que satisfaga las dos condiciones siguientes:

1. $V(f(x, u)) - V(x) < 0$
 2. $f(x, u) \in \Gamma$
- (7.2)

es decir, en todos aquellos estados tales que la FLC garantiza convergencia, manteniendo la evolución del sistema en Γ . El conjunto Γ sería por tanto un conjunto invariante de control.

A partir de los conceptos anteriores y la teoría de conjuntos invariantes se puede resolver el problema de la estabilidad del control predictivo basado en modelo. Por lo cual primero se introducirá en la teoría de conjuntos invariantes.

7.1.5. Teoría de conjuntos invariantes

Los conceptos tales como conjunto invariante positivo o conjunto invariante de control son trascendentales en el análisis de la estabilidad de un sistema dinámico, especialmente cuando el sistema está sujeto a restricciones (Limón 2002).

En esta sección se sigue la línea y notación utilizada en (Kerrigan & Maciejowski 2000).

En lo que sigue, las definiciones se van a centrar en el caso de sistemas no autónomos. La traslación a sistemas autónomos, o bien a sistemas en bucle cerrado, es inmediata. Sea pues un sistema no autónomo dado por $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ siendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ el estado del sistema y $u_k \in \mathfrak{R}^m$ las actuaciones aplicadas sobre el mismo. Sea el origen un punto de equilibrio del sistema, $f(0,0) = 0$. Las entradas del sistema pueden estar restringidas a un conjunto compacto $U \in \mathfrak{R}^m$ y el estado del sistema a un conjunto compacto $X \in \mathfrak{R}^n$, ambos conteniendo el origen. Por tanto $u_k \in U$, $x_k \in X$ para todo k .

Si el sistema estuviese controlado por una ley de control $u = h(x)$, entonces las restricciones se transforman en $x_k \in X^h = \{x \in X : h(x) \in U\}$.

A continuación del concepto de conjunto invariante de control (e invariante positivo), se extienden éstos al análisis de la región en la que un sistema puede ser admisible o estabilizable. Para ello es necesaria la introducción de un conjunto básico: el conjunto a un paso.

Conjunto a un paso *El conjunto a un paso del conjunto Ω , $Q(\Omega)$ es el conjunto de estados x para los cuales existe una actuación admisible $u \in U$ (que dependerá del estado x) tal que el sistema alcanza el conjunto Ω en un sólo paso $f(x, u) \in \Omega$*

$$Q(\Omega) = \{x \in \mathfrak{R}^n : \exists u(x) \in U \text{ tal que } f(x, u) \in \Omega\}$$

Esta definición se puede extender a un sistema controlado por una ley de control $u = h(x)$ de la siguiente forma $Q^h(\Omega) = \{x \in \mathfrak{R}^n : h(x) \in U \text{ y } f(x, h(x)) \in \Omega\}$

A partir de la definición de conjunto a un paso se puede establecer una condición necesaria y suficiente para garantizar la invariancia de un conjunto.

Condición geométrica de invariancia: *Un conjunto Ω es un invariante de control si y sólo si $\Omega \subseteq Q(\Omega)$*

Por lo tanto, se satisface la propiedad de monotonía: *Sean dos conjuntos $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, entonces $Q(\Omega_1) \subseteq Q(\Omega_2)$*

A partir del conjunto a un paso, se pueden analizar propiedades del sistema, tales como la región en la que éste es controlable a una determinada región.

Conjunto controlable en i pasos: *El conjunto controlable en i pasos $K_i(X, \Omega)$ es el conjunto de estados para los cuales existe una secuencia de actuaciones admisibles tal que conduce el sistema hasta el conjunto $\Omega \subseteq X$ en i pasos con una trayectoria admisible.*

$$K_i(X, \Omega) = \{x_0 \in X : \text{para todo } k = 0, \dots, i-1, \exists u_k \in U \text{ tal que } x_k \in X, \text{ y } x_i \in \Omega\} \quad (7.3)$$

El conjunto controlable a i pasos, $K_i(X, \Omega)$, nos indica los estados que pueden alcanzar un determinado conjunto en i pasos con una evolución admisible mediante una secuencia de actuaciones admisibles. Este conjunto depende del número de pasos i y cuyo cálculo de la secuencia se puede obtener haciendo

$$K_{i+1}(X, \Omega) = Q(K_i(X, \Omega)) \cap X \text{ con } K_0(X, \Omega) = \Omega \quad (7.4)$$

Conjunto admisible en i pasos: *El conjunto admisible en i pasos $C_i(X)$ es el conjunto de estados para los cuales existe una secuencia de actuaciones admisibles tal que la evolución del sistema permanece en el conjunto X durante los i instantes siguientes.*

$$C_i(X) = \{x_0 \in X : \text{para todo } k = 0, \dots, i-1, \exists u_k \in U \text{ tal que } x_{k+1} \in X\} \quad (7.5)$$

Conjunto estabilizable en i pasos: *El conjunto estabilizable en i pasos al conjunto invariante (positivo o de control) $\Omega \subseteq X$ es el conjunto de estados $S_i(X, \Omega)$ para los cuales existe una secuencia de actuaciones admisibles tal que conduce el sistema hasta el conjunto - en i pasos con una trayectoria admisible.*

$$S_i(X, \Omega) = \{x_0 \in X : \text{para todo } k = 0, \dots, i-1, \exists u_k \in U \text{ tal que } x_k \in X \text{ y } x_i \in \Omega\} \quad (7.6)$$

Como se puede observar, la única diferencia entre el conjunto estabilizable $S_i(X, \Omega)$ y controlable $K_i(X, \Omega)$ es la condición de que el conjunto Ω debe ser un

conjunto invariante. Este hecho confiere una serie de propiedades adicionales a los conjuntos estabilizables, propiedades que se presentan a continuación.

La secuencia $S_i(X, \Omega)$ satisface las siguientes propiedades: El cálculo de la secuencia se puede obtener haciendo

- $S_{i+1}(X, \Omega) = Q(S_i(X, \Omega)) \cap X$ con $S_0(X, \Omega) = \Omega$.
- $S_i(X, \Omega) \subseteq S_{i+1}(X, \Omega)$
- *Todo conjunto $S_i(X, \Omega)$ es un conjunto invariante de control.*
- *Sean dos conjuntos invariantes de control Ω_1 y Ω_2 tales que $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, entonces $S_i(X, \Omega_1) \subseteq S_i(X, \Omega_2)$*
- $S_i(X, S_j(X, \Omega)) = S_{i+j}(X, \Omega)$

(7.7)

Los conjuntos anteriormente presentados caracterizan regiones en las que se verifican propiedades tan importantes como la posibilidad de que sea controlable o que sea asintóticamente estabilizable satisfaciendo las restricciones. La posibilidad del cálculo de estos conjuntos es muy interesante pues permite analizar fuera de línea todas estas propiedades. Además ofrece la posibilidad de utilizar estas regiones para el diseño de controladores. La determinación de estas regiones es un cálculo puramente geométrico pues basta con tener un algoritmo para determinar el conjunto a un paso $Q(\Omega)$ y otro para la intersección de dos conjuntos.

La determinación de estos conjuntos no es sencilla en general. Sin embargo, en el caso de sistemas lineales, existen algoritmos eficientes para su determinación exacta (Keerthi & Gilbert 1987, Blanchini 1994, Kerrigan 2000).

7.1.6. Estabilidad del MPC con restricciones

El control predictivo basado en modelo es una de las pocas técnicas de control que permite la incorporación de restricciones en su formulación. Además esta estrategia de control es válida para un amplio abanico de sistemas, tanto lineales como no lineales y ha tenido una importante repercusión en la industria.

Un aspecto primordial en el diseño de un controlador es la garantía de estabilidad del sistema en bucle cerrado. El estudio de la estabilidad en el MPC es un aspecto que ha ido evolucionando hasta llegar al estado actual, en el que se considera una materia madura. Esto se debe en gran parte al establecimiento de unas condiciones generales (válidas para la mayoría de sistemas) bajo las cuales se garantiza la estabilidad del controlador MPC (Mayne et al. 2000). Estas condiciones parten de una formulación del controlador que incluye el *coste terminal* así como la *restricción terminal*.

7.1.7. El problema de la estabilidad: optimalidad no implica estabilidad

La ley de control obtenida en un controlador predictivo surge de la optimización de un criterio relacionado con el comportamiento del sistema, en el que se penaliza tanto el error respecto al punto de equilibrio como el esfuerzo de control necesario para alcanzar dicho equilibrio. Contrariamente a lo que dicta el sentido común, el hecho de que la actuación aplicada sea óptima no garantiza que el sistema en bucle cerrado alcance el punto de equilibrio tal y como se desea. El problema de la estabilidad tiene su origen en el desarrollo propio de los controladores predictivos: la necesidad de utilizar un horizonte de predicción finito e invariante en el tiempo y la estrategia de horizonte deslizante.

El origen de los controladores predictivos está en el control óptimo en el cual se pretende calcular la ley de control $u = K_{\infty}(x)$ que minimiza el coste de regular el sistema al punto de equilibrio a lo largo de toda la evolución del mismo. Así, la función de coste a optimizar es:

$$J_{\infty}(x_k) = \sum_{i=0}^{\infty} L(x(k+i/k), K_{\infty}(x(k+i/k))) \quad (7.8)$$

y el problema de optimización a resolver viene dado por

$$\begin{aligned} \min_{K_{\infty}(x)} \quad & J_{\infty}(x_k) \\ \text{s.a.} \quad & \\ u(k+j/k) \in U \quad & \forall j \geq 0 \\ x(k+j/k) \in X \quad & \forall j \geq 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

siendo $x(k+j/k)$ la predicción del estado del sistema en el instante $k+j$ a partir del estado en x_k . Los conjuntos U y X definen las restricciones, de forma que X es un conjunto acotado, U compacto y ambos contienen el origen en su interior.

Este problema de control, bajo ciertas condiciones de observabilidad relacionada con la función de coste de etapa, estabiliza asintóticamente todo estado en cual exista una solución con un coste asociado acotado. De hecho, todo punto asintóticamente estabilizable, se puede estabilizar por esta estrategia de control. El problema del control óptimo se puede resolver utilizando la técnica que se deriva del principio de optimalidad de Bellman (Bellman 1957, Bryson & Ho 1969), según el cual

$$J_{\infty}^*(x) = \min_{u \in U} \{L(x, u) + J_{\infty}^*(f(x, u)) / f(x, u) \in X_{\infty}\} \quad (7.10)$$

siendo la ley de control la solución de este problema de optimización en cada estado $K_{\infty}(x) = u^*(x)$. El conjunto X_{∞} es el conjunto de estados asintóticamente estabilizables al origen de una forma admisible, y por lo tanto el conjunto estabilizable en

infinitos pasos al origen $X_\infty(x) = S_\infty(X, \{0\})$. Es en este conjunto en el que está definido $J_\infty^*(x)$.

La solución de este problema se puede obtener a partir de las ecuaciones de Hamilton Jacobi-Bellman, cuya resolución es muy compleja, si no imposible, salvo en casos especiales como el problema de regulación de un sistema lineal sin restricciones con una función de coste de etapa cuadrática, que da lugar al regulador lineal cuadrático o LQR (Bryson & Ho 1969).

La dificultad en la resolución de este problema llevó a adoptar soluciones prácticas que hiciesen más sencilla su realización. Estas ideas son básicamente las siguientes:

Horizonte finito y fijo:

Considerando un horizonte finito, el problema de optimización toma la forma habitual del control predictivo:

$$\begin{aligned} \min_{u_F(x)} \quad & J_N(x_k, u_F(k)) \\ \text{s.a.} \quad & u(k + j/k) \in U \quad j = 0, \dots, N-1 \\ & x(k + j/k) \in X \quad j = 0, \dots, N-1 \\ & x(k + N/k) \in \Omega \end{aligned} \quad (7.11)$$

donde el coste a optimizar

$$J_N(x_k, u_F(k)) = \sum_{i=0}^{N-1} L(x(k + i/k), u(k + i/k) + V(x(k + N/k))) \quad (7.12)$$

siendo $V(x)$ una función que penaliza el coste estado final de la predicción (estado terminal), denominada función de coste terminal. Al conjunto Ω al que se restringe dicho estado se denomina región terminal.

La principal ventaja de la adopción del horizonte finito reside en que el problema de optimización tiene la forma de un problema de programación matemática, el cual admite solución numérica gracias a los algoritmos existentes (Luenberger 1989). Nótese que el coste computacional de la resolución de este problema puede ser muy elevado si el modelo es no lineal.

Estrategia de horizonte deslizante

Según esta técnica, en cada periodo de muestreo se resuelve el problema de optimización y se aplica tan sólo la actuación obtenida para el siguiente periodo de muestreo. En el siguiente periodo de muestreo se toma un nuevo estado del sistema y se repite la operación. Esto dota de realimentación a la formulación basada en el problema de optimización en bucle abierto, lo cual le confiere cierto grado de robustez.

El problema de control óptimo con horizonte finito i se puede resolver mediante el problema de programación dinámica asociado:

$$J_i^*(x) = \min_u \{L(x, u) + J_{i-1}^*(f(x, u)) / f(x, u) \in X_{i-1}\} \quad (7.13)$$

siendo $J_0^*(x) = V(x)$ y $X_0 = \Omega$. De la solución de este problema se deriva la ley de control $K_i(x) = u^*$. El conjunto X_{i-1} es el conjunto de estados que pueden ser llevados por una ley de control admisible siguiendo una trayectoria admisible hasta el conjunto Ω en $i-1$ pasos. Por tanto este conjunto es el conjunto controlable en $i-1$ pasos, es decir, $X_{i-1} = K_{i-1}(X, \Omega)$. Este problema de optimización es factible en el conjunto $X_i = K_i(X, \Omega)$, siendo este el dominio de definición del controlador $K_i(x)$ y por lo tanto de $J_i^*(x)$.

Considérese un estado inicial tal que el problema de optimización con horizonte N es factible, es decir, $x_0 \in X_N$. Entonces, aplicando sobre el sistema la actuación óptima $u_0 = K_N(x_0)$, el estado evoluciona a x_1 . En ese instante, la actuación óptima viene dada por la ley de control óptima con un horizonte $N-1$, por tanto $u_1 = K_{N-1}(x_1)$. Esto se debe al principio de optimalidad de Bellman. Entonces, en el instante k , la actuación óptima vendrá dada por $u_k = K_{N-k}(x_k)$, que es el controlador óptimo para conducir al sistema en $N-k$ pasos al conjunto terminal Ω .

En consecuencia, el horizonte de predicción se va reduciendo en cada instante, hasta el instante N en el cual el sistema alcanza la región terminal Ω . En esta región, el problema de optimización dinámica no está definido, requiriéndose un controlador alternativo.

Sin embargo, en el control predictivo la estrategia de horizonte deslizante y horizonte finito e invariante hace que siempre se aplique el controlador con horizonte N . Por lo tanto, la ley de control del MPC es invariante en el tiempo y viene dada por

$$u_k = K_{MPC}(x_k) = K_N(x_k) \quad (7.14)$$

Esto hace que la convergencia del controlador óptimo con horizonte finito se pierda, pues no se reduce el horizonte y este controlador no garantiza que el sistema evolucione hacia el punto de equilibrio, ni siquiera que alcance la región terminal.

7.1.8. Formulación general del MPC: necesidad de la región terminal y el coste terminal

Como se ha mostrado anteriormente, las formulaciones del control predictivo con garantía de estabilidad han ido evolucionando hasta llegar a la necesidad de la región terminal y del coste terminal de una u otra forma.

Las condiciones suficientes sobre la función de coste terminal y la región terminal para garantizar la estabilidad son las siguientes:

- La región terminal Ω debe ser un conjunto invariante positivo admisible del sistema. Es decir, que debe existir una ley de control local $u = h(x)$ tal que estabiliza el sistema en Ω y además la evolución del sistema y las actuaciones en dicho conjunto son admisibles.
- El coste terminal $V(x)$ es una función de Lyapunov asociada al sistema regulado por el controlador local, tal que $V(f(x, h(x))) - V(x) \leq -L(x, h(x))$ para todo $x \in \Omega$. Por lo tanto, la ley de control local estabiliza asintóticamente el sistema.

Matemáticamente esto se expresa como sigue: *El sistema es tal que existe una vecindad del origen $\Omega \in X$ que es un conjunto invariante de control del sistema 2 y además tiene asociada una función de Lyapunov de control $V(x)$ tal que*

$$\min_{u \in U} \{V(f(x, u)) - V(x) + L(x, u)\} \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (7.15)$$

Necesidad de la región terminal invariante:

Si la región terminal es un invariante positivo, entonces el conjunto de estados factibles es el conjunto de estados estabilizables en N pasos $X_N = S_N(X, \Omega)$. Considérese $x_k \in X_N$. Dada la ausencia de discrepancias entre el modelo de predicción y el sistema, se tiene que el estado al que evoluciona el sistema es el predicho $x_{k+1} = x(k+1/k)$. Este estado puede alcanzar la región Ω en $N-1$ pasos, luego $x_{k+1} \in X_{N-1}$. Gracias a que Ω es un conjunto invariante, este conjunto tiene la propiedad que $X_{N-1} \subseteq X_N$ y por lo tanto X_N es un conjunto invariante positivo del sistema en bucle cerrado, lo que garantiza la factibilidad del controlador en todo instante.

Necesidad del coste terminal como función de Lyapunov:

Bajo esta condición se garantiza que el coste óptimo es estrictamente decreciente, y por lo tanto es una función de Lyapunov del sistema. Esto garantiza la estabilidad asintótica del sistema en bucle cerrado con restricciones. La monotonía de la función de coste óptimo se basa en la existencia de una secuencia de actuaciones factibles $\bar{u}_F(k+1)$ basada en la solución óptima obtenida en el instante anterior $u_F^*(k)$. Esta secuencia no es más que los $N-1$ términos que restan de la secuencia anterior más la actuación obtenida de la ley de control local. Así, la diferencia entre el coste de esta secuencia, $\bar{J}_N(x_{k+1})$, y el coste óptimo anterior, $J_N^*(x_k)$, es

$$\bar{J}_N(x_{k+1}) - J_N^*(x_k) = -L(x_k, u^*(k/k)) + \{ L(x^*(k+N/k), h(x^*(k+N/k))) + V(f(x^*(k+N/k), h(x^*(k+N/k)))) - V(x^*(k+N/k)) \} \quad (7.16)$$

La incorporación del coste terminal garantiza que el término entre llaves es negativo, y por lo tanto la secuencia factible tiene un coste menor que el óptimo anterior, por lo que la solución óptima también lo tendría. En consecuencia

$$J_N^*(x_{k+1}) - J_N^*(x_k) \leq -L(x_k, K_{MPC}(x_k)) \quad (7.17)$$

y por lo tanto el coste óptimo es una función de Lyapunov que decrece a lo largo de la evolución del sistema, lo que garantiza la estabilidad asintótica.

7.1.9. Cálculo general de la región terminal y una función de Lyapunov asociada.

El elemento esencial en la sintonización de un controlador MPC con estabilidad garantizada para un sistema es, sin duda, el cálculo de la región terminal y una función de Lyapunov asociada.

Con el fin de mostrar que el cálculo de la región y coste terminal es una tarea abordable, aunque costosa, se presenta aquí un procedimiento de cálculo para el caso de coste de etapa cuadrático $L(x, u) = \|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2$ siendo la matriz Q semidefinida positiva y R definida positiva.

En este procedimiento, similar al presentado en (Magni, De Nicolao, Magnani & Scattolini 2001), se supone que el modelo del sistema $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ es una función C^2 y además que el sistema linealizado en el origen es estabilizable. Para la determinación del coste terminal y de la región terminal deben seguirse los siguientes pasos:

1. Sea el sistema linealizado en el origen $x_{k+1} = A \cdot x_k + B \cdot u_k$ siendo $A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(0,0)}$ y $B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(0,0)}$. Calcular un controlador $u_k = K \cdot x_k$ por cualquier procedimiento habitual (LQR, PID, asignación de polos, etc.), tal que estabilice asintóticamente el sistema linealizado.
2. Sea $A_k = A + B \cdot K$ y sea $Q^* = Q + K^T \cdot R \cdot K$. Tómesese una matriz $\tilde{Q} > Q^*$ (por ejemplo para cierto $\tilde{Q} = \lambda \cdot Q^*$ para cierto $\lambda > 1$) y calcúlese la matriz P tal que $A_k^T \cdot P \cdot A_k - P = -\tilde{Q}$
3. Sea $V(x) = x^T \cdot P \cdot x$. Calcular la constante $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in \Omega_\alpha = \{x \in \mathfrak{R}^n : V(x) \leq \alpha\}$ se satisfaga $\Omega_\alpha \subseteq X^K = \{x \in X : u = K \cdot x \in U\}$ y $V(f(x, K \cdot x)) - V(x) \leq -x^T \cdot Q^* \cdot x$

El cálculo del paso 3 se puede realizar resolviendo el problema de optimización no Lineal

$$K = \min_x V(x) \quad (8.18)$$

$$s.a. \quad V(f(x, K \cdot x)) - V(x) \leq -x^T \cdot Q^* \cdot x$$

Para todo $x \in \Omega_K = \{x \in \mathfrak{R}^n : V(x) \leq K\}$, se satisface la condición $V(f(x, K \cdot x)) - V(x) \leq -x^T \cdot Q^* \cdot x$

7.2. Condiciones de estabilización para el control MPC de un sistema híbrido con restricciones

Como se plantea en (Lazar *et al.*, 2004) considere los sistemas autónomos en tiempo discreto e invariantes en el tiempo

(i) $x_{k+1} = f(x_k)$ e (ii) $x_{k+1} = f_j(x_k)$ con $j \in S$ conjunto finito de índices.

Definición I: Un conjunto $P \subset \mathfrak{R}^n$ es invariante positivo para el sistema (i) si para todo $x \in P$ se tiene que $f(x) \in P$.

Definición II: Un conjunto $P \subset \mathfrak{R}^n$ es invariante positivo para el sistema (ii) con conmutación arbitraria si para todo $x \in P$ y todo $j \in S$ se tiene que $f_j(x) \in P$

Considere el sistema discreto PWA invariante en el tiempo descrito por

$$x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k + f_j \quad \text{donde } x_k \in \Omega_j. \quad (7.19)$$

Aquí, $x_k \in X \subseteq \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado y $u_k \in U \subseteq \mathfrak{R}^m$ es el vector de control de entrada en el tiempo $k \geq 0$. Además $A_j \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_j \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $f_j \in \mathfrak{R}^n$, $j \in S$ con $S = \{1, 2, \dots, n_s\}$ y n_s el número de modos discretos. Los conjuntos poliédricos X y U especifican las restricciones de entrada y de estado. La colección $\{\Omega_j / j \in S\}$ define una partición de X , esto es $\cup_{j \in S} \Omega_j = X$ y $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Cada Ω_j se asume que es un poliedro convexo para todo $j \in S$. Dado $S_0 = \{j \in S / 0 \in cl(\Omega_j)\}$ y $S_1 = \{j \in S / 0 \notin cl(\Omega_j)\}$ tal que $S = S_0 \cup S_1$, donde $cl(\Omega_j)$ denota la clausura de Ω_j .

El propósito es regular el estado del sistema (8.19) hacia el origen y se asume que el origen es un estado de equilibrio para $u = 0$. Para lograr esto, se requiere que

$$f_j = 0 \quad \text{para todo } j \in S_0$$

Ahora la meta es desarrollar para el sistema PWA (ecuación (7.19)) un costo cuadrático estabilizante basado en un esquema MPC con restricciones que se pueda solucionar con el algoritmo de control MPC híbrido desarrollado en este trabajo.

Para un $N \in \mathbb{N}$ fijo, dado $\bar{x}_k(x_k, \bar{u}_k) = (x_{k+1}, \dots, x_{k+N-1}) \in X^N$ denota una secuencia de estados generada por el sistema (8.19) desde el estado inicial x_k y la aplicación de la secuencia de entrada $\bar{u}_k = (u_k, \dots, u_{k+N-1}) \in U^N$. Más aún, dado $\phi_N \subseteq \cup_{j \in S_0} \Omega_j$ será un conjunto objetivo que debemos determinar posteriormente y que contiene el origen.

Sea $\mu_N(x_k) = \{\bar{u}_k \in U^N / \bar{x}_k(x_k, \bar{u}_k) \in X^N, x_{k+N} \in \phi_N\}$ la clase de secuencias de entrada admisibles definidas con respecto a ϕ_N y el estado $x_k \in X$.

Expresado de otra forma, la secuencia de entrada $\bar{u}_k \in U^N$ está contenida en μ_N si las siguientes condiciones son satisfechas:

$$x_{k+1+i} = A_j x_{k+i} + B_j u_{k+i} + f_j \text{ cuando } x_{k+i} \in \Omega_j, \quad (7.20)$$

$$u_{k+i} \in U, \quad x_{k+i} \in X \text{ para } i = 0, \dots, N-1, \quad (7.21)$$

$$x_{k+N} \in \phi_N, \quad (7.22)$$

donde $x_k \in X$ es dado. Ahora considérese el siguiente problema.

Problema 1: En el tiempo $k \geq 0$ y dado $x_k \in X$. Minimizar el costo cuadrático

$$J(x_k, \bar{u}_k) = x_{k+N}^T P x_{k+N} + \sum_{i=0}^{N-1} (x_{k+i}^T Q x_{k+i} + u_{k+i}^T R u_{k+i}) \quad (7.23)$$

sobre toda la secuencia $\bar{u}_k \in \mu_N(x_k)$

donde, N denota el horizonte de predicción y P , Q y R son matrices simétricas definidas positivas. Se denomina un estado inicial $x_k \in X$ factible si $\mu_N(x_k) \neq \emptyset$. Similarmente, el problema 1 se dice ser factible (o soluble) para $x_k \in X$ si $\mu_N(x_k) \neq \emptyset$. Dado

$$V(x_k) = \min_{\bar{u}_k \in \mu_N(x_k)} J(x_k, \bar{u}_k) \quad (7.24)$$

denota el valor correspondiente para (7.23) y considerando una secuencia optima de control calculada para el estado x_k por medio de la solución del problema 1 es decir ,

$$\bar{u}_k^* = (u_k^*, u_{k+1}^*, \dots, u_{k+N-1}^*). \quad (7.25)$$

De acuerdo a la estrategia de horizonte deslizante, el control MPC es obtenida como

$$u_k = \bar{u}_k^*(1); \quad k \in \mathbb{N}_+. \quad (7.26)$$

Una formulación más precisa del problema puede ahora presentarse como sigue: Dados Q , R y el sistema (7.19) el objetivo es determinar P , N y ϕ_N tal que el sistema (7.19) en lazo cerrado con el control MPC (7.26) es isintóticamente estable.

7.2.1. Condiciones de estabilidad basadas en un sistema de inecuaciones lineales LMI

Para lograr la estabilidad, el objetivo es usar el valor de la función $V(x_k) = \min_{u_k \in \mu_N(x_k)} J(x_k, \bar{u}_k)$ como candidato a función de Lyapunov para el sistema de lazo cerrado $x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k + f_j$ donde $x_k \in \Omega_j$ con $u_k = \bar{u}_k^*(1)$ y se considera un controlador local PWL de la forma:

$$u_k = K_j x_k \text{ cuando } x_k \in \Omega_j, \quad K_j \in \mathfrak{R}^{m \times n}, \quad j \in S_0 \quad (7.27)$$

Dado $X_U = \cup_{j \in S_0} \{x \in \Omega_j / K_j x \in U\}$ denota el conjunto factible con respecto a las restricciones de entrada y estado para el controlador local. Ahora considérese verdadera la siguiente inecuación matricial no-lineal.

$$P - (A_j + B_j K_j)^T P (A_j + B_j K_j) - Q - K_j^T R K_j > 0 \quad (7.28)$$

con las matrices desconocidos (P, K_j) , $j \in S_0$, donde la matriz P es peso terminal empleado en la función de costo (7.23).

Teorema 7.1: Asumiendo que $\{(P, K_j) / j \in S_0\}$ con $P > 0$ satisface (7.28) y sea dado $\phi_N \subseteq X_U$ un conjunto invariante para el sistema $x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k + f_j$ donde $x_k \in \Omega_j$ en lazo cerrado con $u_k = K_j x_k$, es decir, para el sistema $x_{k+1} = (A_j + B_j K_j) x_k$ cuando $x_k \in \Omega_j$, $j \in S_0$. Entonces se sostiene que:

1. El problema 1 es factible en el tiempo $k \in \mathbb{N}_+$ para el estado $x_k \in \Omega_j$ implica que el problema 1 es factible en el tiempo $k+1$ para el estado $x_{k+1} = A_j x_k + B_j \bar{u}_k^*(1) + f_j$.
2. El control MPC, $u_k = \bar{u}_k^*(1)$; estabiliza asintóticamente al sistema PWA $x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k + f_j$ (con $x_k \in \Omega_j$) para todo estado factible inicial, mientras satisfacen las restricciones de estado entrada.
3. El origen del sistema PWA $x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k + f_j$ en lazo cerrado con realimentación $u_k = K_j x_k$ es localmente asintóticamente estable.

Demostración: Considere $\bar{u}_k^* = (u_k^*, u_{k+1}^*, \dots, u_{k+N-1}^*)$ y la nueva secuencia de control

$$\bar{u}_{k+1} = (u_{k+1}^*, u_{k+2}^*, \dots, u_{k+N-1}^*, u_{k+N}^*), \quad (7.29)$$

donde el control auxiliar u_{k+N} es la realimentación de estado PWL $u_{k+N} = K_j x_{k+N}$.

1) Si el problema 1 es factible en el tiempo $k \in Z_+$ para el estado $x_k \in \Omega_j$ entonces existe una secuencia de control admisible $\bar{u}_k^* \in \mu_N(x_k)$ que resuelve el problema 1. Puesto que $x_{k+N} \in \phi_N$. Entonces puesto que $\phi_N \subseteq X_U$ es invariante positivo para el sistema $x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k + f_j$ en lazo cerrado con $u_k = K_j x_k$ cuando $x_k \in \Omega_j$, $K_j \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $j \in S_0$, $\Rightarrow x_{k+N+1} \in \phi_N$ luego $\bar{u}_{k+1}^* \in \mu_N(x_{k+1}) = \{\bar{u}_{k+1}^* \in U^N / (x_{k+2}, \dots, x_{k+N}) \in X^N, x_{k+N+1} \in \phi_N\}$. Por lo tanto, el problema 1 es factible para el estado x_{k+1} . Claramente este estado se debe obtener como $x_{k+1} = A_j x_k + B_j \bar{u}_k^*(1) + f_j$.

2) Para lograr la estabilidad se requiere que para toda condición inicial $x_0 \in X - \{0\}$ (notar que todos los estados en el conjunto $\phi_N \subseteq X_U$ son factibles con respecto a el problema 8.1) se cumpla que

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0; \quad k \in Z_+, \quad (7.30)$$

lo que se puede escribir como

$V(x_{k+1}) - V(x_k) = J(x_{k+1}, \bar{u}_{k+1}^*) - J(x_k, \bar{u}_k^*) \leq J(x_{k+1}, \bar{u}_{k+1}^*) - J(x_k, \bar{u}_k^*)$ esto es debido a $J(x_{k+1}, \bar{u}_{k+1}^*) < J(x_k, \bar{u}_{k+1}^*)$ ya que \bar{u}_{k+1}^* sería una secuencia óptima, ahora como

$$\begin{aligned} J(x_k, u_k^*) &= (x_k^{*T} Q x_k^* + u_k^{*T} R u_k^*) + (x_{k+1}^{*T} Q x_{k+1}^* + u_{k+1}^{*T} R u_{k+1}^*) + \dots \\ &\quad + (x_{k+N-1}^{*T} Q x_{k+N-1}^* + u_{k+N-1}^{*T} R u_{k+N-1}^*) + x_{k+N}^{*T} P x_{k+N}^* \\ J(x_{k+1}, u_{k+1}^*) &= (x_{k+1}^{*T} Q x_{k+1}^* + u_{k+1}^{*T} R u_{k+1}^*) + \dots + (x_{k+N-1}^{*T} Q x_{k+N-1}^* + u_{k+N-1}^{*T} R u_{k+N-1}^*) \\ &\quad + (x_{k+N}^{*T} Q x_{k+N}^* + u_{k+N}^{*T} R u_{k+N}^*) + x_{k+N+1}^{*T} P x_{k+N+1}^* \end{aligned}$$

tenemos finalmente que

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) = (x_{k+N}^{*T} Q x_{k+N}^* + u_{k+N}^{*T} R u_{k+N}^*) + x_{k+N+1}^{*T} P x_{k+N+1}^* - (x_k^{*T} Q x_k^* + u_k^{*T} R u_k^*) - (x_{k+N}^{*T} P x_{k+N}^*) \quad (7.31)$$

$$= -x_k^{*T} Q x_k^* - u_k^{*T} R u_k^* + x_{k+N+1}^{*T} P x_{k+N+1}^* + u_{k+N}^{*T} R u_{k+N}^* - x_{k+N}^{*T} (P - Q) x_{k+N}^* < 0$$

$$\forall x_k \in X - \{0\}$$

Aquí $x_k^* = x_k \in \Omega_j$ es el estado medido en el instante k y $x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k^* + f_j$. Debido a que los primeros dos términos de la última inecuación en (8.31) son siempre negativos, basta determinar la matriz P tal que exista u_{k+N} con

$$x_{k+N+1}^T P x_{k+N+1} - x_{k+N}^* (P - Q) x_{k+N}^* + u_{k+N}^T R u_{k+N} \leq 0 \quad \forall x_k \in X - \{0\} \quad (7.32)$$

luego sustituyendo $x_{k+N+1} = A_j x_{k+N}^* + B_j u_{k+N}$ cuando $x_{k+N}^* \in \Omega_j$, $j \in S_0$ y $u_k = K_j x_k$ en (7.32) produciendo la ecuación equivalente

$$x_{k+N}^{*T} (P - (A_j + B_j K_j)^T P (A_j + B_j K_j) - Q - K_j^T R K_j) x_{k+N}^* > 0 \quad \forall j \in S_0. \quad \text{lo que demuestra} \quad (7.28)$$

Debido a que $\{(P, K_j) / j \in S_0\}$ satisface (7.28) para todo $j \in S_0$ se sigue que $V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0$ y entonces el valor de la función $V(x_k) = \min_{u_k \in \mu_N(x_k)} J(x_k, \bar{u}_k)$ es una función de Lyapunov estrictamente menor que 0 $\forall x_k \in X - \{0\}$ para el sistema de lazo cerrado $x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k + f_j$ con $u_k = \bar{u}_k^*(1)$; en consecuencia probamos estabilidad asintótica es decir el control MPC $u_k = \bar{u}_k^*(1)$; estabiliza asintóticamente al sistema PWA $x_{k+1} = A_j x_k + B_j u_k + f_j$ para todo estado factible inicial, mientras satisfacen las restricciones de estado entrada.

3) Ahora, ya que $\{(P, K_j) / j \in S_0\}$ satisface (7.28), $Q > 0$ y $K_j^T R K_j > 0$ se tiene que

$$\begin{cases} P > 0 \\ (A_j + B_j K_j)^T P (A_j + B_j K_j) - P < 0 \end{cases}, j \in S_0 \quad (7.33)$$

y se sigue directamente que la función $\tilde{V}(x) = x^T P x$ es una función de Lyapunov cuadrática común para los sistemas $x_{k+1} = (A_j + B_j K_j) x_k$ $j \in S_0$, es decir $\tilde{V}(x) > 0$ y $\Delta \tilde{V}(x) = x^T ((A_j + B_j K_j)^T P (A_j + B_j K_j) - P) x < 0$. Por lo tanto el origen del sistema PWA (8.19) con realimentación (7.27) es asintóticamente estable sobre alguna región de atracción, por ejemplo el conjunto de nivel dado por el mayor $\gamma > 0$ para el cual $\{x \in X / \tilde{V}(x) \leq \gamma\}$ es contenido en $\cup_{j \in S_0} \Omega_j$.

Ahora es mucho más útil transformar la inecuación matricial no-lineal (7.28) en un sistema de inecuaciones lineales de matrices (sistema LMI). Para transformar el sistema (8.28) en un sistema LMI, se puede emplear una técnica basada en el teorema de Schur (ver apéndice G).

Considere las variables

$$Z = P^{-1} \text{ y } Y_j = K_j P^{-1}, \quad j \in S_0 \quad (7.34)$$

y el sistema LMI

$$\Delta_j > 0, \quad j \in S_0 \quad (7.35)$$

Donde

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} Z & Z & Y_j^T & (A_j Z + B_j Y_j)^T \\ Z & Q^{-1} & 0 & 0 \\ Y_j & 0 & R^{-1} & 0 \\ (A_j Z + B_j Y_j) & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

ver demostración en el apéndice G

Si el sistema LMI (7.35) es factible entonces, por el teorema 1, el peso terminal y la ganancia de realimentación son calculadas de la siguiente forma

$$P = Z^{-1} \text{ y } K_j = Y_j Z^{-1} \text{ para } j \in S_0 \quad (7.37)$$

Conjunto invariante positivo para sistemas PWA

Para implementar las condiciones de estabilidad dadas por el teorema 7.1, es necesario determinar un conjunto invariante positivo (es decir $\phi_N \subseteq X_U$) para el sistema autónomo PWL

$$x_{k+1} = (A_j + B_j K_j) x_k \text{ cuando } x_k \in \Omega_j, \quad j \in S_0 \quad (7.38)$$

donde la ganancia de realimentación será K_j son calculadas como en (8.37).

Para obtener un conjunto poliédrico invariante positivo para el sistema PWL (7.38) se considera el sistema lineal híbrido autónomo correspondiente a (8.39)

$$x_{k+1} = A_j^{cl} x_k, \quad \text{con } A_j^{cl} = (A_j + B_j K_j) x_k, \quad j \in S_0 \quad (7.39)$$

y se deriva el siguiente resultado.

Teorema 8.2 Invarianza positiva para el sistema (7.37) en le sentido de la definición 7.2 implica invarianza positiva para el sistema (7.37) en el sentido de la definición 7.1

Demostración: Se deduce directamente del hecho que $f(x) = f_j(x)$ para al menos algún $j \in S_0$, donde $f_j(x) = \{A_j^{cl}x\}$ y $f(x) = \{A_j^{cl}x \text{ cuando } x \in \Omega_j\}$.

Dado X_T que es un arbitrario conjunto objetivo se define

$$Q_j^1(X_T) = \{x \in X / A_j^{cl}x \in X_T\} \text{ con } j \in S_0$$

Proposición V2 [4] Si X_T es compacto, entonces $Q_j^1(X_T)$ es cerrado. Si X_T es convexo, entonces $Q_j^1(X_T)$ es convexo. Si X_T es un poliedro, entonces $Q_j^1(X_T)$ es un poliedro.

Debido a que nosotros requerimos que $\phi_N \subseteq X_U$ y X_U no es convexo en general, se considera un nuevo conjunto objetivo, \tilde{X}_U , tomando un conjunto poliédrico razonablemente grande (que contenga el origen) dentro de X_U . Por ejemplo, si X_U es un poliedro se puede escoger $\tilde{X}_U = X_U$ o, si $\cup_{j \in S_0} \Omega_j$ es un poliedro se elige $\tilde{X}_U = \{x \in \cup_{j \in S_0} \Omega_j / K_j x \in U, \forall j \in S_0\}$.

Considerar ahora la siguiente secuencia de conjuntos:

$$\mathfrak{N}_0 = \tilde{X}_U, \quad \mathfrak{N}_i = \bigcap_{j \in S_0} \mathfrak{N}_{i-1}^j \quad i = 1, 2, \dots, \quad (7.40)$$

donde $\mathfrak{N}_{i-1}^j = Q_j^1(\mathfrak{N}_{i-1}) \cap \mathfrak{N}_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots,$

Teorema 7.3 El conjunto invariante positivo maximal contenido en el conjunto objetivo \tilde{X}_U , calculado por el sistema (7.38) con una conmutación arbitraria, es un conjunto convexo que contiene el origen y está dado por

$$P = \bigcap_{j \in S_0} \mathfrak{N}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathfrak{N}_i \quad (7.41)$$

Demostración: De la ecuación (7.40) se tiene que $\mathfrak{N}_i \subseteq \mathfrak{N}_{i-1}^j$ para todo $i > 0$. Si $x \in P$ entonces $x \in \mathfrak{N}_i$ para todo i . Por lo tanto $A_j^{cl}x \in \mathfrak{N}_{i-1}$ para todo $j \in S_0$ y para todo i . Entonces $A_j^{cl}x \in P$ para todo $j \in S_0$. De modo que, P es un conjunto invariante positivo para el sistema $x_{k+1} = (A_j + B_j K_j)x_k$ en el sentido de la definición II2

Para probar que el conjunto P es maximal sea $\tilde{P} \subset \tilde{X}_U = \mathfrak{N}_0$ un conjunto invariante positivo para el sistema $x_{k+1} = (A_j + B_j K_j)x_k$ con una conmutación arbitraria. Para usar

inducción se asume que $\tilde{P} \subset \mathfrak{X}_i$ para algún i . Para algún $x \in \tilde{P}$ se tiene que $A_j^{cl} x \in \tilde{P}$, $\forall j \in S_0$, obteniéndose $\cup_{j \in S_0} \{A_j^{cl} x\} \subset \tilde{P} \subset \mathfrak{X}_i$ y por lo tanto, $x \in \mathfrak{X}_{i+1}$. Por esto $\tilde{P} \subset \mathfrak{X}_{i+1}$ y por inducción $\tilde{P} \subset \mathfrak{X}_i$ para todo i , lo cual permite que $\tilde{P} \subset \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{X}_i = P$.

7.3. Ejemplos de análisis de estabilidad

En esta sección se presenta el análisis de estabilidad en lazos cerrados con diferentes controladores predictivos. En primer lugar, se analiza un controlador predictivo sobre una planta con modelo híbrido, segundo un controlador supervisor predictivo híbrido sobre una planta con modelo híbrido y finalmente un análisis de un controlador supervisor predictivo (con características sólo regulatorias) sobre la Turbina a Gas.

7.3.1. MPC sobre planta con modelo PWA

En este ejemplo se analiza un controlador predictivo sobre una planta modelada con PWA.

Consideremos el ejemplo expuesto en Lazar *et al.*, (2004) es decir:

$$x_{k+1} = \begin{cases} A_1 x_k + B u_k & \text{si } [1 \ 0] x_k \geq 0 \\ A_2 x_k + B u_k & \text{si } [1 \ 0] x_k < 0 \end{cases} \quad (7.42)$$

sujeto a las restricciones

$$x_k \in X = [-5, 5] \times [-5, 5], \quad u_k \in U = [-1, 1] \quad (7.43)$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.35 & -0.6062 \\ 0.6062 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.6062 \\ -0.6062 & 0.35 \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

$$\text{y } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se utilizó método heurístico para garantizar la estabilidad para el sistema (7.42) en lazo cerrado con optimización con algoritmos genéticos para un controlador MPC. El LMI (7.35) ha sido resuelto usando Matlab LMI Control Toolbox (ver programa en apéndice E) para sintonizar los parámetros $Q = I_2$, $R = 0.4$, obteniéndose la siguiente matriz de peso terminal:

$$P = \begin{bmatrix} 4.4103 & 0 \\ 0 & 2.6390 \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

y las ganancias de realimentación

$$K_1 = [-0.60223 \quad -0.34931] \quad (7.46)$$

$$K_2 = [0.60223 \quad -0.34931]$$

Para determinar los parámetros K_1 , K_2 y P se utiliza un conjunto seguro con respecto a las restricciones de estado y entradas como:

$$\tilde{X}_U = \{x \in X \mid |K_1 x| \leq 1, \quad |K_2 x| \leq 1\} \quad (7.47)$$

y el correspondiente poliedro invariante positivo es:

$$\phi_N = \left\{ x \in \tilde{X}_U / \begin{bmatrix} 0.20939 & -0.36531 \\ 0.20939 & 0.36531 \\ -0.60223 & -0.34931 \\ 0.60223 & -0.34931 \\ 0.20939 & -0.36531 \\ -0.20939 & 0.36531 \\ 0.60223 & 0.34931 \\ -0.60223 & 0.34931 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (7.48)$$

La Figura 7.1 se presenta el poliedro invariante positivo para garantizar la estabilidad del sistema (7.42) en lazo cerrado con optimización con algoritmos genéticos para un controlador MPC.

Para determinar el conjunto invariante positivo se utilizó el toolbox de conjunto poliédricos de (Kerrigan, 2000) (ver programa en apéndice E)

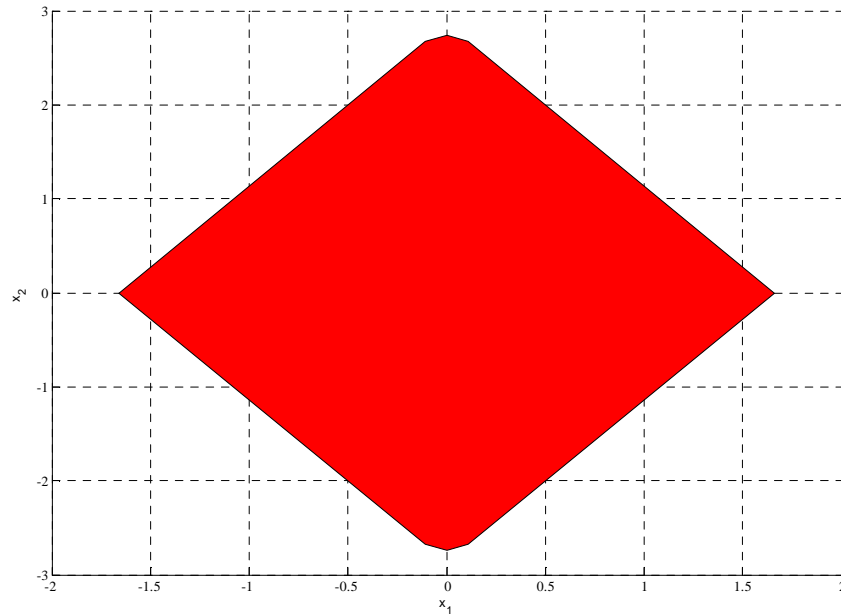


Figura 7.1. Poliedro invariante positivo

En la Figura 7.3 se presenta la trayectoria de los estados de sistema híbrido en lazo cerrado en el espacio de estados para distintas condiciones iniciales. Las trayectorias convergen al punto de equilibrio y se cruzan debido a que existen dos zonas del espacio de estado donde predominan dos leyes distintas de control afín.

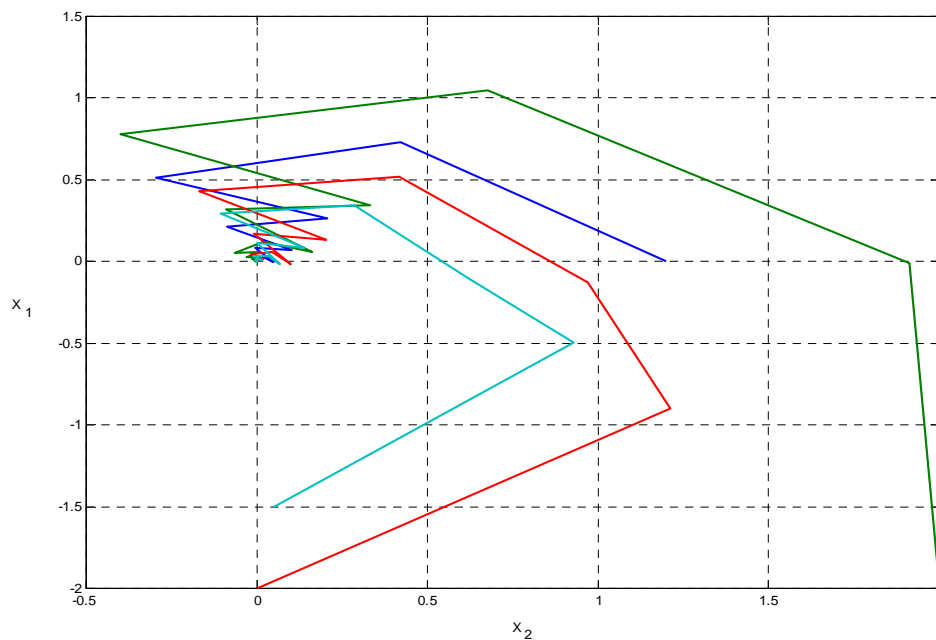


Figura 7.3. Trayectoria de los estados de sistema híbrido en lazo cerrado

En la Figura 7.4 se presenta la trayectoria de los estados en función del tiempo de sistema híbrido en lazo cerrado, convergiendo al punto de equilibrio. Con condición inicial $X_0 = (2, -2)$.

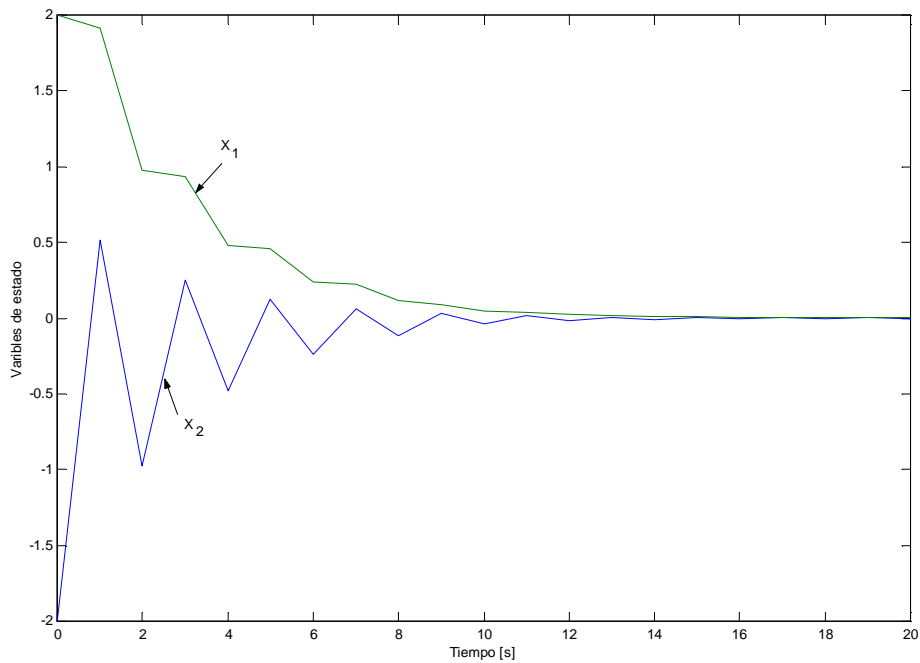


Figura 7.4. Trayectoria de los estados de sistema híbrido en lazo cerrado en función del tiempo.

En la Figura 7.5 se presenta la implementación en Matlab del control predictivo genético híbrido con restricciones y estabilidad con conjunto invariante terminal y su función de Lyapunov correspondiente.

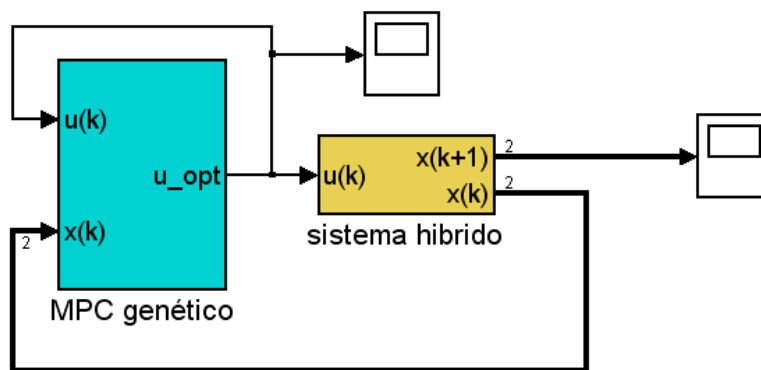


Figura 7.5. Ejemplo controlador predictivo genético híbrido con restricciones y estabilidad con conjunto invariante terminal y su función de Lyapunov correspondiente (la referencia =0)

7.3.1. Controlador supervisor predictivo híbrido

Se desarrollo e implementó un controlador supervisor predictivo híbrido sobre la planta con característica híbridas a nivel regulatorio descrita en la sección 8.2.2. Esto es, existe un conmutador en el sistema regulatorio que elige entre la menor de dos señales. Es decir el modelo es $y(t+1) + ay(t) = u(t)$ y la señal de control es $u(t) = \min(u_a(t), u_b(t))$, este sistema híbrido se puede representar por la composición de dos sistemas dependiendo si se selecciona una señal $u_a(t)$ o $u_b(t)$ respectivamente (ver en es el apartado 8.2.2)

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a+\alpha_a) & 1 & 0 \\ -\alpha_a & 1 & 0 \\ -\alpha_b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_a \\ \alpha_a \\ \alpha_b \end{bmatrix} r(t) \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a+\alpha_b) & 0 & 1 \\ -\alpha_a & 1 & 0 \\ -\alpha_b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_b \\ \alpha_a \\ \alpha_b \end{bmatrix} r(t) \quad \text{su}$$

implementación se presenta en Figura 7.9

Se utilizó método heurístico para garantizar la estabilidad para el sistema (8.69) y (8.70) en lazo cerrado con optimización con algoritmos genéticos para un controlador predictivo supervisor. El LMI (7.35) ha sido resuelto usando Matlab LMI Control Toolbox

para sintonizar los parámetros $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = 1$ obteniéndose la siguiente matriz de

peso terminal:

$$P = \begin{bmatrix} 5.3265*10^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 3.9165*10^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2.0787*10^{12} \end{bmatrix} \quad (7.49)$$

y las ganancias de realimentación

$$K_1 = [1.7469 \quad -1.7039 \quad -5.7893] \quad \text{y} \quad K_2 = [1.7105 \quad -1.2314 \quad -1.4998] \quad (7.50)$$

Para determinar los parámetros K_1 , K_2 y P se utiliza un conjunto seguro con respecto a las restricciones de estado y entradas como $\tilde{X}_U = \{x \in X / |K_1 x| \leq 1, |K_2 x| \leq 1\}$ y el correspondiente poliedro invariante positivo es:

$$\phi_N = \left\{ x \in \tilde{X}_U / \begin{bmatrix} 1.9701 & 1.0144 & -2.0078 \\ 1.9395 & 0.5380 & -1.0551 \\ -1.9395 & -0.5380 & 1.0551 \\ -1.7469 & 1.7039 & 0.5789 \\ -1.9701 & -1.0144 & 2.0078 \\ 1.7469 & -1.7039 & -0.5789 \\ 1.7105 & -1.2314 & -1.4998 \\ -1.7105 & 1.2314 & 1.4998 \\ -1.6406 & 0.7098 & -1.4214 \\ 1.6406 & -0.7098 & 1.4214 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (7.51)$$

La Figura 7.1 se presenta el poliedro invariante positivo para garantizar la estabilidad del sistema (8.69) y (8.70) en lazo cerrado con optimización con algoritmos genéticos para el controlador predictivo supervisor.

Para determinar el conjunto invariante positivo se utilizó el toolbox de conjunto poliédricos en (Kerrigan, 2000)

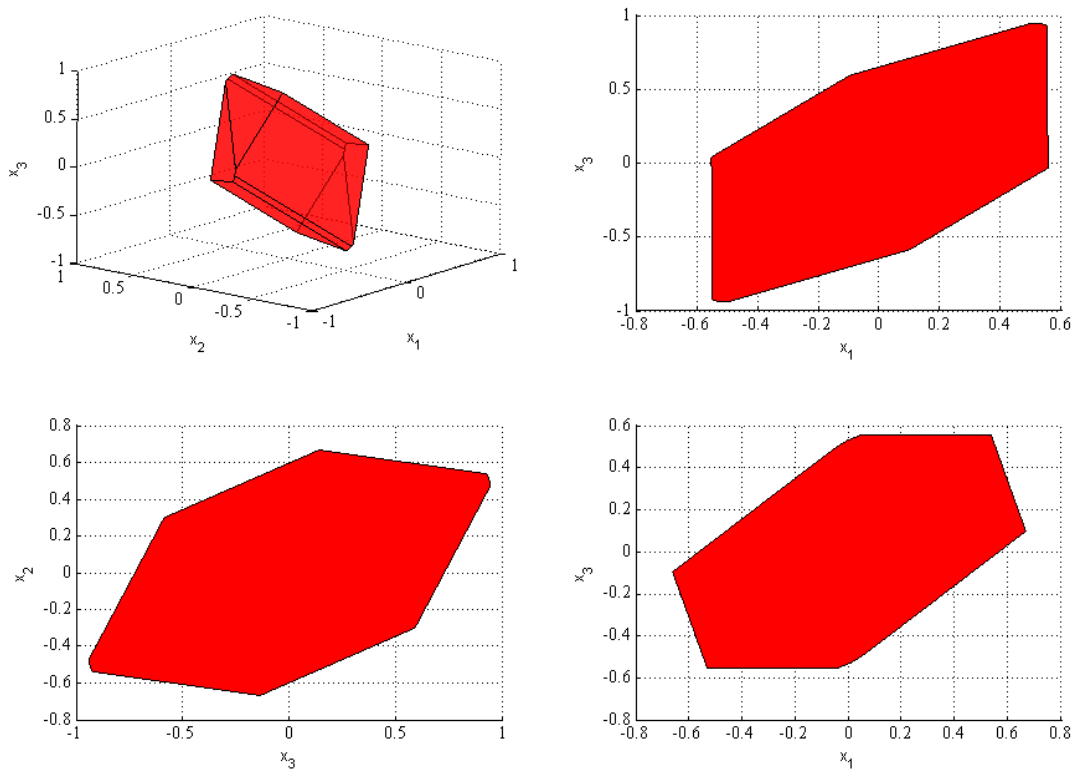


Figura 7.6. . Poliedro invariante positivo para el controlador supervisor predictivo y sus proyecciones

En la Figura 7.7 se presenta la trayectoria de los estados de sistema híbrido en lazo cerrado en el espacio de estados de tres dimensiones para distintas condiciones iniciales ($X_0=(1,1,1)$, $X_0=(-1,1,0)$, $X_0=(1,0,-1)$ y $X_0=(0,-2,-1)$). Como se puede ver en la Figura todas las trayectorias convergen al punto de equilibrio $(0,0,0)$.

En la Figura 7.8 se presenta la trayectoria de los estados de sistema híbrido en lazo cerrado en función del tiempo, convergiendo al punto de equilibrio. Con condición inicial $X_0 = (1,0,-1)$.

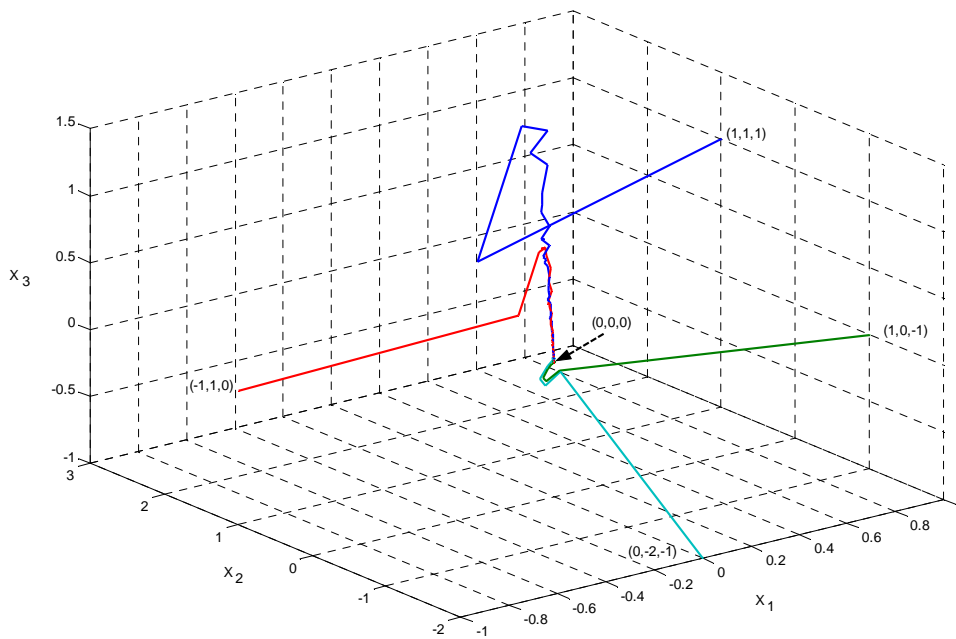


Figura 7.7. Trayectoria de los estados de sistema híbrido en lazo cerrado.

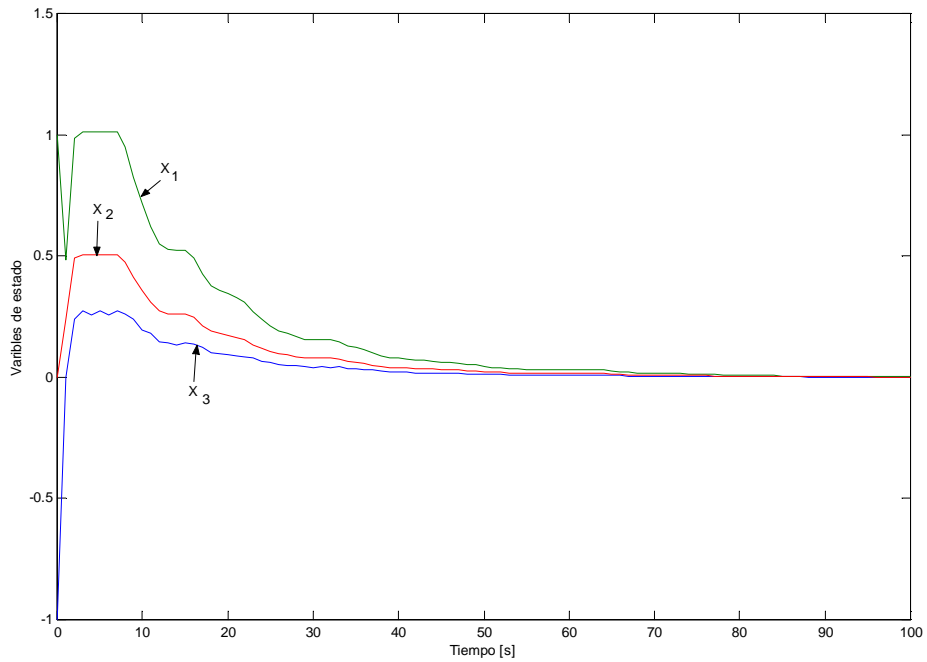


Figura 7.8. Trayectoria de los estados de sistema híbrido en lazo cerrado en función del tiempo. En la Figura 7.9 se presenta la implementación en Matlab del control predictivo genético híbrido con restricciones y estabilidad con conjunto invariante terminal y su función de Lyapunov correspondiente.

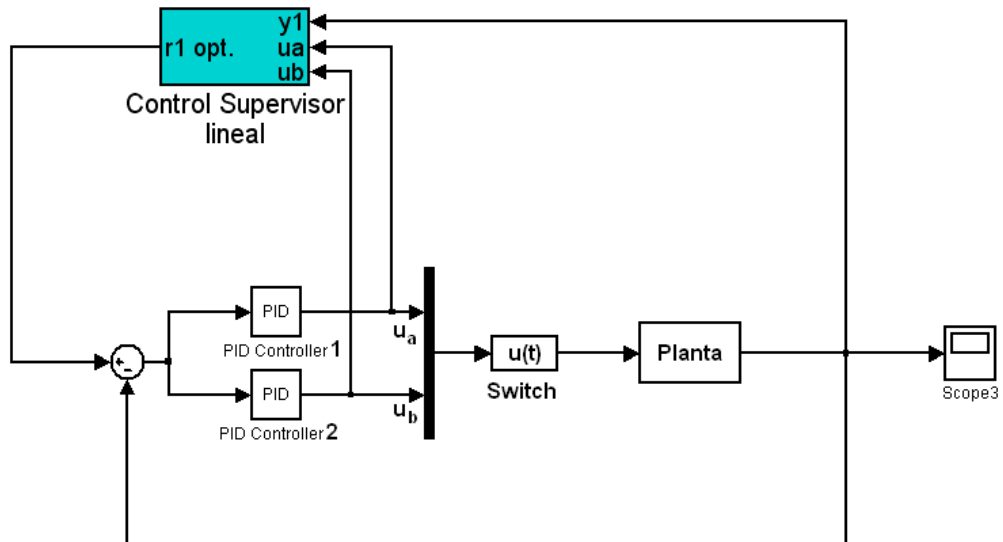


Figura 7.9. Control supervisor predictivo híbrido en planta con característica híbridas a nivel regulatorio

7.3.2. Análisis de estabilidad en el control supervisor predictivo híbrido (sólo con característica regulatorias) en la turbina a gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado.

Para realizar el análisis de estabilidad es necesario describir el sistema de lazo cerrado de la turbina a gas y su nivel regulatorio en términos de variables de estado.

Las ecuaciones (7.52) se obtienen de las ecuaciones del sistema regulatorio (5.78)

$$\begin{aligned}
 W_a(t+k) &= \gamma_{11}r_1(t+k) + \gamma_{12}r_1(t-k+1) + \gamma_{13}r_1(t-k+2) - \alpha_{11}\hat{T}_{tout}(t+k-1) \\
 &- \alpha_{12}\hat{T}_{tout}(t+k-2) - \beta_{12}W_a(t+k-1) - \beta_{13}W_a(t+k-2) \\
 u_a(t+k) &= \gamma_{21}r_1(t+k) + \gamma_{22}r_1(t+k-1) + \gamma_{23}r_1(t+k-2) - \alpha_{21}\hat{T}_{tout}(t+k-1) \\
 &- \alpha_{22}\hat{T}_{tout}(t+k-2) - \beta_{21}u_a(t+k) - \beta_{22}u_a(t+k-1) - \beta_{23}u_a(t+k-2) - \gamma_{21}r_1(t+k) \\
 &- \gamma_{22}r_1(t+k-1) - \gamma_{23}r_1(t+k-2) \\
 u_b(t+k) &= \gamma_{31}r_2(t+k) + \gamma_{32}r_2(t+k-1) - \alpha_{31}\hat{P}_{mech}(t+k) - \alpha_{32}\hat{P}_{mech}(t+k-1) \\
 &- \beta_{32}u_b(t+k-1)
 \end{aligned} \tag{7.52}$$

donde se definen:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \frac{\alpha'_{11}}{\beta_{11}} & \alpha_{12} &= \frac{\alpha'_{12}}{\beta_{11}} & \alpha_{21} &= \frac{\alpha'_{21}}{\beta_{21}} & \alpha_{22} &= \frac{\alpha'_{22}}{\beta_{21}} & \alpha_{31} &= \frac{\alpha'_{31}}{\beta_{31}} & \alpha_{32} &= \frac{\alpha'_{32}}{\beta_{31}} \\
 \beta_{12} &= \frac{\beta'_{12}}{\beta_{11}} & \beta_{13} &= \frac{\beta'_{13}}{\beta_{11}} & \beta_{22} &= \frac{\beta'_{22}}{\beta_{21}} & \beta_{23} &= \frac{\beta'_{23}}{\beta_{21}} & \beta_{32} &= \frac{\beta'_{32}}{\beta_{31}} \\
 \gamma_{11} &= \frac{\gamma'_{11}}{\beta_{11}} & \gamma_{12} &= \frac{\gamma'_{12}}{\beta_{11}} & \gamma_{13} &= \frac{\gamma'_{13}}{\beta_{11}} & \gamma_{21} &= \frac{\gamma'_{21}}{\beta_{21}} & \gamma_{22} &= \frac{\gamma'_{22}}{\beta_{21}} & \gamma_{23} &= \frac{\gamma'_{23}}{\beta_{21}} \\
 \gamma_{31} &= \frac{\gamma'_{31}}{\beta_{31}} & \gamma_{32} &= \frac{\gamma'_{32}}{\beta_{31}}
 \end{aligned} \tag{7.53}$$

A partir de la ecuación lineales del modelo de la turbina a gas (5.76) de la sección 5.4.1. y de las ecuaciones (8.52) y (8.53) se obtuvo la expresión en variables de estado para las ecuaciones del sistema de lazo cerrado turbina a gas y su control regulatorio quedan expresadas para el caso de que el conmutador elija la variable $u_a(k)$ es la siguiente

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= m_{1,1}x_1(k) + m_{1,2}x_2(k) + m_{1,6}x_6(k) + m_{1,7}x_7(k) + b_{11}r_1(k) + m_{1,10}x_{10} \\
&\quad + m_{1,11}x_{11} + m_{1,8}x_8(k) + m_{1,9}x_9(t) + m_{1,13}x_{13}(k) + m_{1,3}x_3(k) \\
x_2(k+1) &= x_1(k) \\
x_3(k+1) &= x_2(k) \\
x_4(k+1) &= m_{4,4}x_4(k) + m_{4,5}x_5(k) + m_{4,2}x_2(k) + m_{4,3}x_3(k) + m_{4,6}x_6(k) + m_{4,7}x_7(k) \\
&\quad + n_{4,1}r_1(k) + m_{4,11}x_{11}(x) + m_{4,8}x_8(k) + m_{4,9}x_9(k) + m_{4,13}x_{13}(k) + m_{4,10}x_{10} \\
x_5(k+1) &= x_4(k) \\
x_6(k+1) &= m_{6,2}x_2(k) + m_{6,3}x_3(k) + m_{6,6}x_6(k) + m_{6,7}x_7(k) + n_{6,1}r_1(k) + m_{6,10}x_{10}(k) \\
&\quad + m_{6,11}x_{11}(k) \\
x_7(k+1) &= x_6(k) \\
x_8(k+1) &= m_{8,2}x_2(k) + m_{8,3}x_3(k) + m_{8,8}x_8(k) + m_{8,9}x_9(k) + n_{8,1}r_1(k) + m_{8,10}x_{10}(k) \\
&\quad + m_{8,11}x_{11}(k) \\
x_9(k+1) &= x_8(k) \\
x_{10}(k+1) &= r_1(k) \\
x_{11}(k+1) &= x_{10}(k) \\
x_{12}(k+1) &= r_2(k) \\
x_{13}(k+1) &= m_{13,2}x_2(k) + m_{13,3}x_3(k) + m_{13,8}x_8(k) + m_{13,9}x_9(k) + n_{13,1}r_1(k) + m_{13,10}x_{10}(k) \\
&\quad + m_{13,11}x_{11}(k) \\
x_{14}(k+1) &= m_{13,4}x_4(k) + m_{13,5}x_5(k) + m_{13,14}x_{14}(k) + n_{13,2}r_2(k) + m_{13,12}x_{12}(k)
\end{aligned} \tag{7.54}$$

los parámetros m se pueden ver en el apéndice E

La expresión en variables de estado para las ecuaciones del sistema turbina a gas y su control regulatorio quedan expresadas para el caso de que el conmutador elija la variable $u_b(k)$ es la siguiente

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= m_{1,1}x_1(k) + m_{1,2}x_2(k) + m_{1,3}x_3(k) + m_{1,6}x_6(k) + m_{1,7}x_7(k) + n_{1,1}r_1(k) \\
&\quad + m_{1,10}x_{10} + m_{1,11}x_{11} + m_{1,4}x_4(k) + m_{1,5}x_5(t) + m_{1,14}x_{14}(k) + m_{1,12}x_{12}(k) \\
&\quad + m_{1,13}x_{13} + n_{1,2}r_2(k) \\
x_2(k+1) &= x_1(k) \\
x_3(k+1) &= x_2(k) \\
x_4(k+1) &= m_{4,4}x_4(k) + m_{4,5}x_5(k) + m_{4,2}x_2(k) + m_{4,3}x_3(k) + m_{4,6}x_6(k) + m_{4,7}x_7(k) \\
&\quad + m_{4,10}x_{10}(k) + m_{4,11}x_{11}(x) + m_{4,14}x_{14}(k) + n_{4,1}r_1(k) + m_{4,12}x_{12}(k) \\
&\quad + m_{4,13}x_{13}(k) + n_{4,2}r_2(k) \\
x_5(k+1) &= x_4(k) \\
x_6(k+1) &= m_{6,2}x_2(k) + m_{6,3}x_3(k) + m_{6,6}x_6(k) + m_{6,7}x_7(k) + n_{6,1}r_1(k) + m_{6,10}x_{10}(k)
\end{aligned} \tag{7.55}$$

$$\begin{aligned}
& + m_{6,11}x_{11}(k) \\
x_7(k+1) &= x_6(k) \\
x_8(k+1) &= m_{8,2}x_2(k) + m_{8,3}x_3(k) + m_{8,8}x_8(k) + m_{8,9}x_9(k) + n_{8,1}r_1(k) + m_{8,10}x_{10}(k) \\
& + m_{8,11}x_{11}(k) \\
x_9(k+1) &= x_8(k) \\
x_{10}(k+1) &= r_1(k) \\
x_{11}(k+1) &= x_{10}(k) \\
x_{12}(k+1) &= r_2(k) \\
x_{13}(k+1) &= m_{12,4}x_4(k) + m_{12,5}x_5(k) + m_{12,14}x_{14}(k) + n_{12,2}r_2(k) + m_{12,12}x_{12}(k) \\
x_{14}(k+1) &= m_{13,4}x_4(k) + m_{13,5}x_5(k) + m_{13,14}x_{14}(k) + n_{13,2}r_2(k) + m_{13,12}x_{12}(k)
\end{aligned}$$

los parámetros m se pueden ver en el apéndice E

Se utilizó método heurístico para garantizar la estabilidad para el sistema (7.54) y (7.55) en lazo cerrado con optimización con algoritmos genéticos para un controlador predictivo supervisor. El LMI (8.35) ha sido resuelto usando Matlab LMI Control Toolbox para sintonizar los parámetros $Q = I_{14}$, $R = \begin{bmatrix} 10^8 & 0 \\ 0 & 10^8 \end{bmatrix}$ obteniéndose la siguiente matriz de peso terminal:

$$P = I_{14} * \begin{bmatrix} 3.243 * 10^{11} \\ 9.117 * 10^{11} \\ 4.208 * 10^8 \\ 3.979 * 10^{11} \\ 1.502 * 10^9 \\ 3.444 * 10^{12} \\ 5.008 * 10^{12} \\ 1.299 * 10^9 \\ 8.864 * 10^7 \\ 1.824 * 10^{12} \\ 1.645 * 10^{12} \\ 1.270 * 10^0 \\ 1.486 * 10^{11} \\ 9.463 * 10^9 \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

y las ganancias de realimentación

$$K_1^T = \begin{bmatrix} -9.7002*10^4 & 2.1997*10^{-4} \\ 3.9094*10^{-2} & 1.7612*10^{-4} \\ -1.3040*10^{-2} & -2.6395*10^{-5} \\ -3.6354*10^{-3} & 8.4815*10^{-1} \\ -2.1215*10^{-4} & 1.1003*10^{-4} \\ 1.2294*10^{-3} & 1.2375*10^{-2} \\ 1.0401*10^{-3} & -5.0231*10^{-2} \\ -1.3313*10^{-2} & -6.1340*10^{-6} \\ 6.5228*10^{-3} & 4.7563*10^{-6} \\ 1.2936*10^0 & -3.8767*10^{-3} \\ -3.2113*10^{-1} & 2.4017*10^{-2} \\ 0 & 0 \\ 1.6566*10^{-3} & 1.7202*10^{-3} \\ -6.1825*10^{-16} & 2.8763*10^0 \end{bmatrix} \quad K_1^T = \begin{bmatrix} -9.7002*10^{-4} & 2.1997*10^{-4} \\ 3.9094*10^{-2} & 1.7612*10^{-4} \\ -1.3040*10^{-2} & -2.6395*10^{-6} \\ -3.6354*10^{-3} & 8.4815*10^{-1} \\ -2.1215*10^{-4} & 1.1003*10^{-4} \\ 1.2294*10^{-3} & 1.2375*10^{-2} \\ 1.0401*10^{-3} & -5.0231*10^{-2} \\ -1.3313*10^{-2} & -6.1340*10^{-6} \\ 6.5228*10^{-3} & 4.7563*10^{-6} \\ 1.2936*10^0 & -3.8767*10^{-3} \\ -3.2113*10^{-1} & 2.4017*10^{-2} \\ 0 & 0 \\ 1.6566*10^{-3} & 1.7202*10^{-3} \\ -6.1825*10^{-36} & 2.8763*10^0 \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

Para determinar los parámetros K_1 , K_2 y P se utiliza un conjunto seguro con respecto a las restricciones de estado y entradas como $\tilde{X}_U = \{x \in X \mid |K_1 x| \leq 1, |K_2 x| \leq 1\}$ y el correspondiente poliedro invariante positivo esta formado por 288 ecuaciones.

En la Figura 8.10 se presenta los resultados de la evolución del algoritmo para determinar la región terminal en el problema de estabilidad del control supervisor predictivo híbrido en la turbina a gas. Se puede ver como a partir de la iteración 5 el conjunto invariante converge a una forma fija. También es claro que a mayor número de iteraciones el tiempo de cómputo crece exponencialmente así como el número de ecuaciones que representan el poliedro.

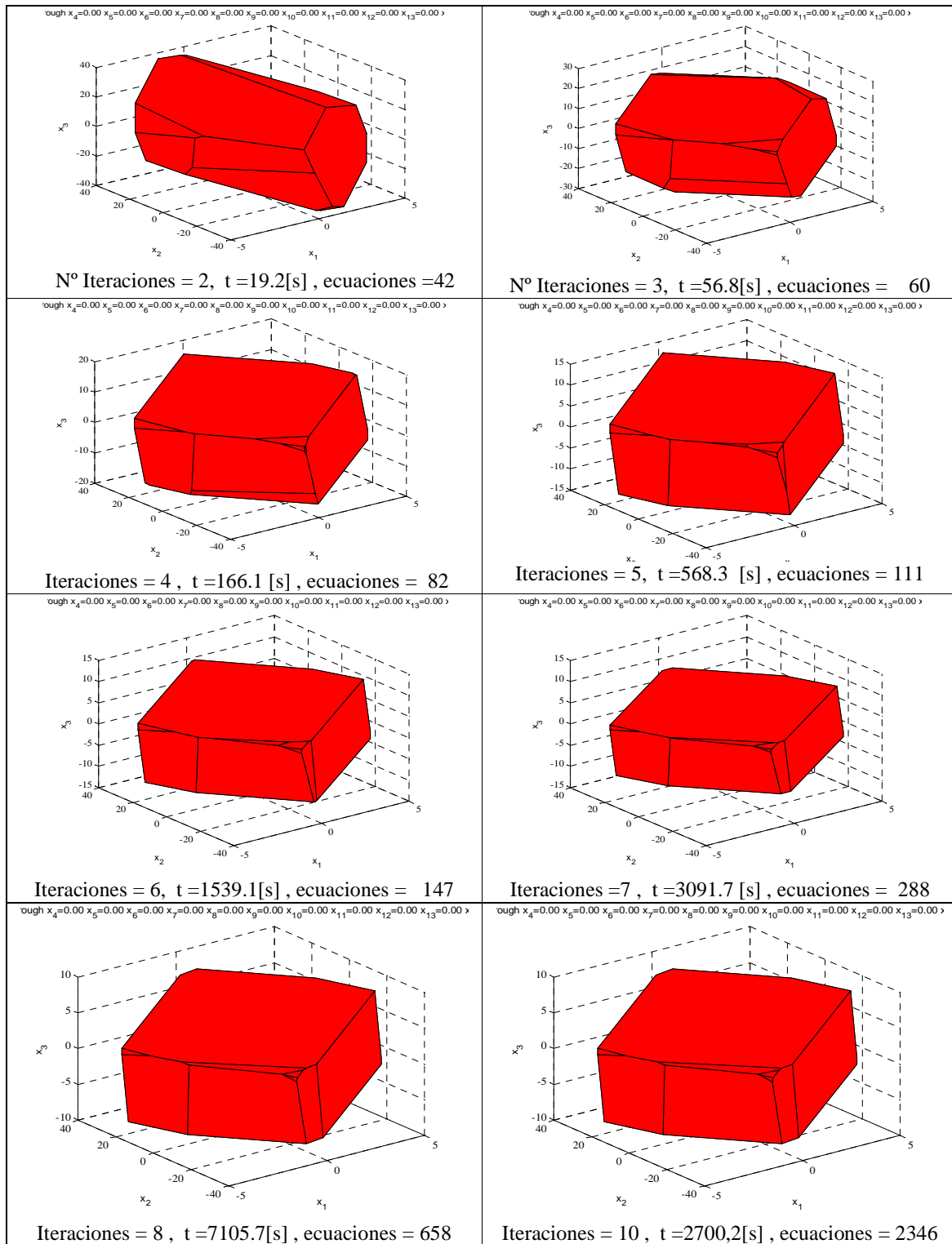


Figura 7.10. Evolución de la región terminal a medida que crece el número de iteraciones para el problema lograr la estabilidad del control supervisor predictivo híbrido en la turbina a gas

Se implemento el controlador supervisor predictivo con modelo de la sistema conjunto (Turbina a Gas y sistema regulatorio) en variables de estado. Para asegurar la estabilidad del controlador se agrego restricciones al último estado predicho. Esta restricciones son un conjunto invariante positivo presentado anteriormente (Figura 8.10), además se incluye en la función objetivo del problema de optimización un termino adicional que pondera el ultimo estado predicho por la matriz P (ecuación (7.53)).

En la Figura 7.11 se presenta la convergencia al punto de equilibrio de las variables de estado principales de la Turbina a Gas la referencia óptima de temperatura de los gases de escape $T_{\text{tout,r}}$, la temperatura de los gases de escape T_{tout} y el el flujo de aire al compresor W_a .

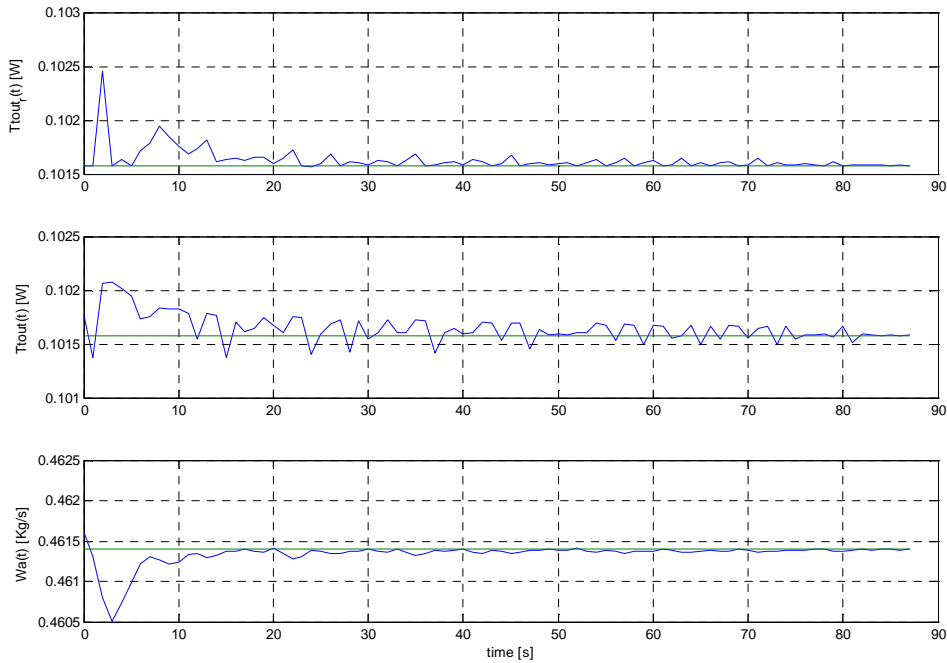


Figura 7.11. Convergencia al punto de equilibrio de la variables de estado principales (referencia optima de temperatura $T_{\text{tout,r}}$, temperatura T_{tout} , flujo de aire W_a) de la turbina a gas.

En la Figura 7.12 se presenta la convergencia al punto de equilibrio de las variables de estado principales de la turbina a gas la referencia óptima de potencia $P_{\text{mech,r}}$, la potencia mecánica P_{mech} y el flujo de combustible F_d .

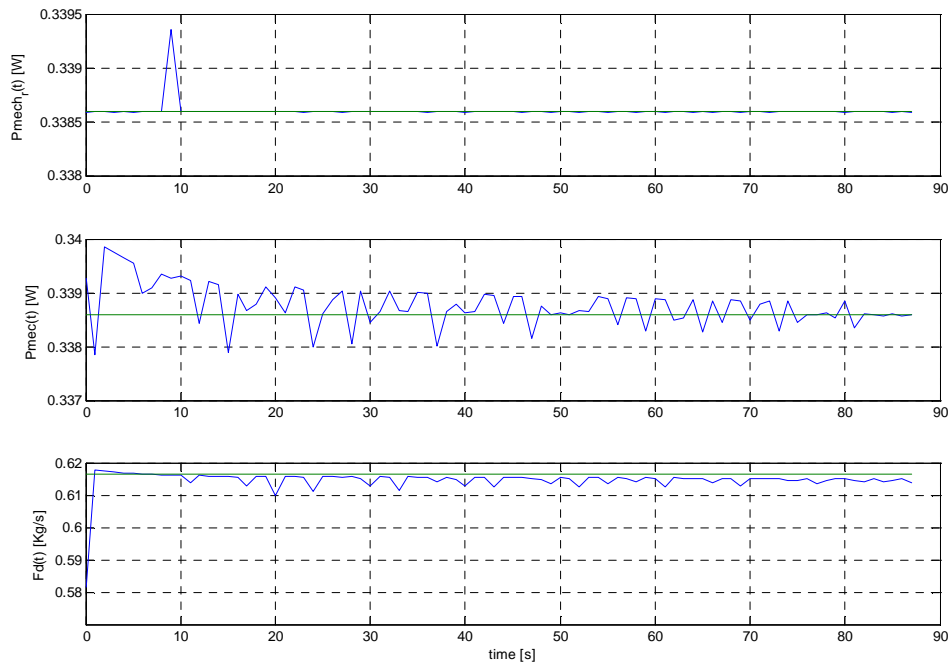


Figura 7.12. Convergencia al punto de equilibrio de las variables de estado principales (referencia optima de potencia mecánica P_{mech_r} , potencia mecánica P_{mech} , flujo de combustible F_d .) de la turbina a gas.

Análisis de resultados:

Es posible diseñar un controlador supervisor predictivo para la turbina a gas de manera de asegurar la estabilidad por lo menos a lo que se refiere a la regulación.

En controlador estable diseñado, por efecto de la mayor cantidad de restricciones necesarias (tanto las propias de un modelo en variables de estado como la restricciones de estabilidad propiamente tales) tiene un tiempo de computo mucho mayor que el controlador supervisor sin el mérito de la estabilidad, lo que por ahora hace impracticable su aplicación.

7.4. Discusión

La teoría de control óptimo con modelos lineales discretos expresados en variables de estado, más la teoría de conjuntos invariantes permite construir una rica estructura teórica para analizar el complejo problema de estabilidad de controladores predictivos con restricciones.

Se puede demostrar la estabilidad asintótica de controlador supervisor híbrido con función objetivo de carácter regulatorio utilizando conceptos como la región terminal invariante y coste terminal como función de Lyapunov.

Sin embargo la necesidad de lograr la estabilidad exige aumentar significativamente el número de ecuaciones en el optimizador con un gran costo de tiempo computacional asociado.

VIII. Análisis de factibilidad de diseño de control supervisor predictivo híbrido usando ley de control PWA

En este capítulo se realiza un análisis de factibilidad del diseño de control supervisor predictivo híbrido, utilizando, una ley de control realimentado afín a trozos (PWA) sobre una partición poliédrica del espacio de estados obtenida por programación multiparamétrica.

Para lograr estos objetivos se analizan o siguientes pasos:

- Teoría de programación lineal multiparamétrica utilizando el concepto de región crítica y derivación de un algoritmo para su solución.
- Teoría programación cuadrática multiparamétrica y generación de un algoritmo para su solución.
- Generación de una solución del problema de control óptimo en tiempo finito con programación multiparamétrica y su aplicación a sistemas variantes en el tiempo.
- Solución del problema de control óptimo para sistemas híbridos con restricciones.

8.1. Programación multiparamétrica

Una de las desventajas de los controladores predictivos es que requieren, en algunos casos, tiempos de cálculo demasiado grandes para aplicaciones de tiempo real. Esto ocurre en presencia de restricciones, cambios en los parámetros del proceso, control predictivo robusto o control predictivo no lineal.

Recientemente se ha demostrado (Bemporad et al., 2002) que un controlador predictivo se puede expresar como un programa multiparamétrico cuya solución resulta en un controlador que es afín a trozos en el espacio de estado. La idea es simple y fue sugerida por primera vez en (Zafiriou, 1990): el óptimo de un problema de programación cuadrática se alcanza en un conjunto de restricciones activas y para todos los puntos del espacio que tengan el mismo conjunto de restricciones activas, la solución es afín.

A continuación se presenta la solución del problema de control predictivo con restricciones utilizando programación Multiparamétrica. Para esto, en primer lugar se analiza el caso de programación lineal y posteriormente el caso de programación cuadrática.

8.1.1. Programación lineal multiparamétrica

El problema de programación lineal multiparamétrica es un problema de optimización donde la función objetivo incluye un parámetro x . Por lo cual la solución óptima del problema ya no es un valor único sino una función única del parámetro x . Este problema de optimización está dado por:

$$\begin{aligned} J^*(x) = \min_z \{J(z, x) = c^T z\}. & \quad (8.1) \\ \text{s.a} & \\ Gz \leq W + Sx & \end{aligned}$$

donde

- $z \in \mathfrak{R}^s$ son las variables de optimización.
- $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de parámetros.
- $J(x, z) \in \mathfrak{R}$ es la función objetivo.
- $Gz \leq W + Sx$ define un conjunto poliédrico $P \in \mathfrak{R}^{s+n}$, con $c \in \mathfrak{R}^s$, $G \in \mathfrak{R}^{m \times s}$, $W \in \mathfrak{R}^m$ y $S \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ constantes de las restricciones que relacionan las variables de optimización y el vector de parámetros.
- $J^*(x) \in \mathfrak{R}$ es la función paramétrica óptima que depende del parámetro x . Es decir, dado el parámetro x la función entrega el valor óptimo de la función objetivo.

Para la solución de problema de programación multiparamétrica lineal se utiliza el concepto de *región crítica*, la cual una vez encontrada, es utilizada para determinar una partición del espacio de estado tal que en cada una de las regiones de esta partición se puede definir una solución particular lineal afín.

Región crítica

Para determinar la región crítica es necesario definir los siguientes conjuntos: Dado un conjunto poliédrico cerrado de parámetros $K \subset \mathfrak{R}^n$,

$$K = \{x \in \mathfrak{R}^n : Ex \leq F\} \quad (8.2)$$

con $E \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ y $F \in \mathfrak{R}^m$ matrices constantes y sean

$$K^* = \{x \in K \text{ tal que el problema de programación lineal sea factible}\} : Tx \leq R.$$

Sea $I = \{1, \dots, m\}$ es el conjunto de índices de las restricciones del problema de programación lineal multiparamétrica, y

$$A(x) = \{j \in I : G_j z^*(x) - S_j x = W_j \quad \forall z^*(x) \text{ óptimo}\} \quad (8.3)$$

$$NA(x) = \{j \in I : G_j z^*(x) - S_j x < W_j \text{ para algún } z^*(x) \text{ óptimo}\} \quad (8.4)$$

Se define la partición óptima de I asociada con x : al par $(A(x), NA(x))$.

Es claro que el par $(A(x), NA(x))$ es disjunto y su reunión es I .

Para un parámetro factible $x^* \in K^*$ y su partición óptima $(A(x^*), NA(x^*))$ la región crítica asociada al conjunto de restricciones activas A es:

$$CR_A = \{x \in K : A(x) = A(x^*)\} \quad (8.5)$$

Es decir CR_A es el conjunto de todos los parámetros x tal que, los índices cuyas restricciones dados por A , son activas en el óptimo del problema de optimización de la ecuación (7.1). (Se puede demostrar que esta partición es única).

A continuación se describe algoritmo básico de programación lineal multiparamétrica (Borelli, 2003).

Algoritmo de programación lineal multiparamétrica

Paso 1: Determinar la dimensión $n' \leq n$ del menor subespacio afín \mathcal{K} contenido en el conjunto factible K^* . Si $n' < n$ encontrar la ecuación que defina a \mathcal{K} ,

Paso 2: Determinar la partición de K^* en i regiones críticas CR_{A_i} y encontrar la función óptima $J^*(\cdot)$ y una función paramétrica óptima lineal afín a tramos $z^*(\cdot)$.

Paso 1:

Como las restricciones del problema multiparamétrico definen un poliedro $P \in \mathfrak{R}^{s+n}$. La proyección $\Pi_{\mathfrak{R}^n}(P)$ de P sobre el espacio de parámetros \mathfrak{R}^n es el conjunto factible K^* . Un ejemplo de un poliedro tridimensional y su la proyección se presenta en la Figura 7.1.

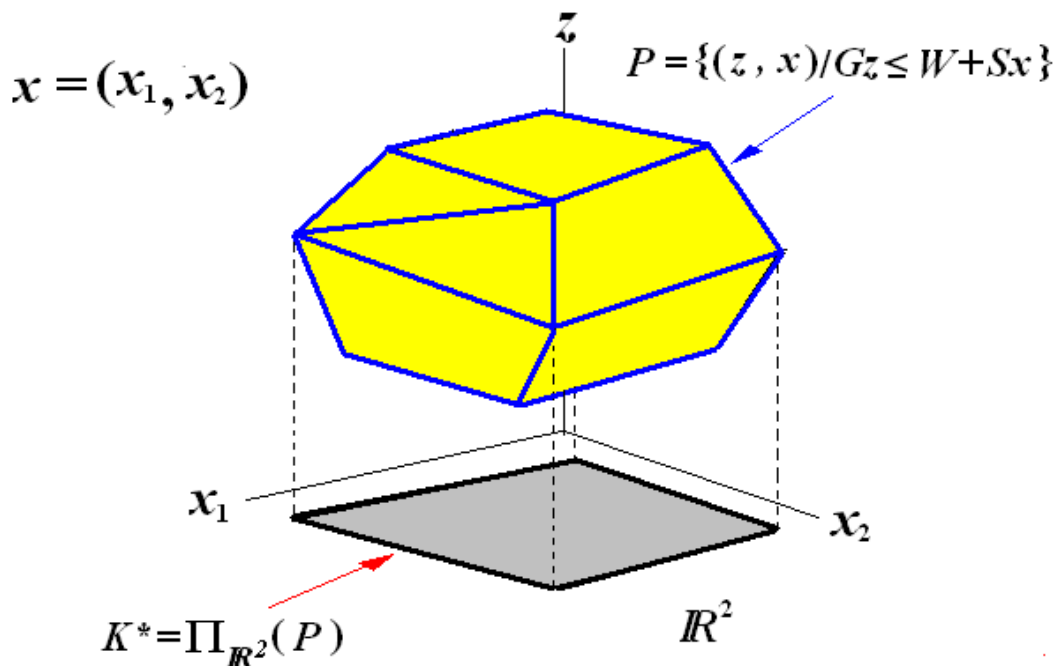


Figura 8.1. La proyección $\Pi_{\mathfrak{R}^n}(P)$ de P sobre el espacio de parámetros

Ahora, existe un algoritmo estándar para determinar la dimensión $n' \leq n$ del menor subespacio afín $\mathcal{K} = \{x / Tx = Z\}$ que contiene K^* y cuando $n' < n$ encontrar la ecuación que definen a \mathcal{K} . Este algoritmo utiliza el concepto de “verdadera inecuación de un poliedro”.

Definición: Una verdadera inecuación de un poliedro $C = \{\xi \in \mathfrak{R}^n : B\xi \leq v\}$ es una inecuación $B_i\xi \leq v_i$ tal que $\exists \bar{\xi} \in C : B_i\bar{\xi} < v_i$

Luego el algoritmo estándar incluye los siguientes pasos:

- Descartar las verdaderas desigualdades desde las restricciones lo que genera el siguiente conjunto $P_a = \{(z, x) / G_a z - S_a x = W_a\}$ que será el subespacio afín buscado (el conjunto remanente de las no-verdaderas desigualdades).
- Determinar el conjunto $\{u_1, \dots, u_k\}$ que será la base del kernel de G_a^T

- Obtener $\mathcal{K} = \{x / Tx = Z\}$ donde

$$T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} * S_a \quad Z = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} * W_a \quad (8.6)$$

Paso 2:

Ahora el problema *dual* de programación lineal multiparamétrica (8.1) es el siguiente

$$\begin{aligned} \max_y (W + Sx)' y & \quad (8.7) \\ \text{s.a. } G' y = c & \\ y \leq 0 & \end{aligned}$$

entonces la condición de factibilidad primal (FP), la condición de factibilidad dual (FD) y las condiciones relajadas (CR) de los problemas (8.1) y (8.7) son:

$$\text{FP} : Gz \leq W + Sx \quad (8.8)$$

$$\text{FD} : G' y = c \quad y \leq 0 \quad (8.9)$$

$$\text{CR} : (G_j z - S_j x) y_j = 0 \quad \forall j \in I \quad (8.10)$$

Se escoge un vector arbitrario $x_0 \in \mathcal{K}$ y se resuelven los problemas FP y FD para $x = x_0$. Por lo que se obtienen los óptimos z_0^* y y_0^* de FP y FD respectivamente.

Con z_0^* se define la siguiente partición óptima:

$$\begin{aligned} A(x_0) &= \{j \in I : G_j z_0^* - S_j x_0 - W_j = 0\} \\ NA(x_0) &= \{j \in I : G_j z_0^* - S_j x_0 - W_j < 0\} \end{aligned}$$

que también define la región crítica $CR_{A(x_0)}$. Entonces el valor de la función objetivo usando el problema dual es

$$J^*(x) = (W + Sx)' y_0^* \quad (8.11)$$

la cual es una función afín de x sobre la región crítica $CR_{A(x_0)}$.

Además la partición óptima se puede escribir como

$$G_A z^*(x) = W_A + S_A x \quad \Rightarrow \quad z^*(x) = G_A^{-1} (W_A + S_A x) \quad (8.12)$$

$$G_{NA} z^*(x) < S_{NA} x \quad (8.13)$$

en este caso se supone que en el óptimo $z^*(x)$ el número de restricciones activas es igual al número de variables s (es otras palabras, no existe *degeneración primal*) y se puede demostrar que el óptimo primal es único, luego se puede resolver (7.12) para obtener la solución de $z^*(x)$ ya que $G_A \in M^{s \times s}$ es invertible. Finalmente la región crítica $\overline{CR}_{A(x_0)}$ en función del parámetro x se obtiene reemplazando “<” por “≤” en la ecuación (7.13).

En la Figura 7.2 se presenta un ejemplo de la región crítica determinada por (7.13), la función objetivo correspondiente en esa región dada por (7.11) y el óptimo con respecto al parámetro dado por (7.12).

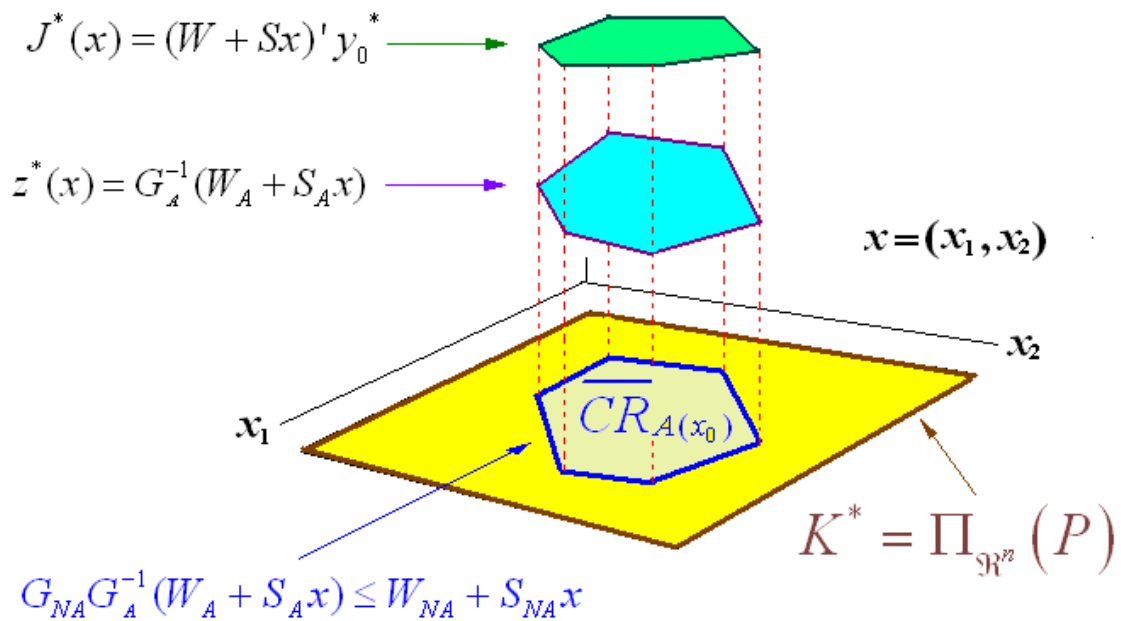


Figura 7.2. Ejemplo de la región crítica su la función objetivo y óptimo correspondiente.

Una vez que la región crítica $\overline{CR}_{A(x_0)}$ ha sido definida, el resto del espacio $R^{resto} = \mathcal{K} \setminus \overline{CR}_{A(x_0)}$ tiene que ser explorado y una nueva región crítica generada.

En lo que sigue se muestran el teorema que justifica el procedimiento para caracterizar el resto de la región R^{resto} y una eficiente partición del resto del espacio.

Teorema 1: Dado $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro, y $R_0 \equiv \{x \in Y : Ax \leq b\}$ un subconjunto poliédrico de Y , donde $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $\mathbb{R}_0 \neq \emptyset$. Y dado

$$R_i = \left\{ x \in Y : \begin{array}{l} A^i x > b^i \\ A^j x \leq b^j, \forall j < i \end{array} \right\} \quad i = 1, \dots, m \text{ donde } b \in \mathfrak{R}^{m \times 1} \text{ y dado } R^{resto} \equiv \bigcup_{i=1}^m R_i.$$

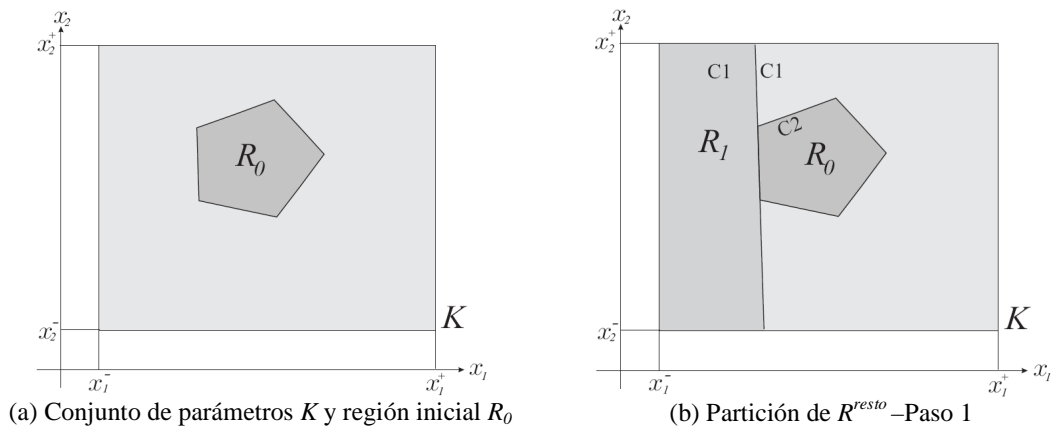
Entonces:

1. $R^{resto} \cup R_0 = Y$
2. $R_0 \cap R_i = \emptyset \quad R_i \cap R_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

es decir, $\{R_0, R_1, \dots, R_m\}$ es una partición de Y

Ejemplo de dos dimensiones

Para mostrar el procedimiento propuesto en el teorema 1, para la partición del conjunto de parámetros K , se considera el caso cuando hay sólo dos parámetros x_1 y x_2 . Como muestra la Figura 8.3(a), K está definida por las desigualdades $\{x_1^- \leq x_1 \leq x_1^+, x_2^- \leq x_2 \leq x_2^+\}$, y R_0 por las desigualdades $\{C1 \leq 0, \dots, C5 \leq 0\}$ donde $C1, \dots, C5$ son lineales en x . El procedimiento consiste en considerar una por una las desigualdades que definen R_0 . Considerando por ejemplo, la desigualdad $C1 \leq 0$, el primer conjunto del resto de la región $R^{resto} \equiv K - R_0$ esta dado por $R_1 = \{C1 \geq 0, x_1 \geq x_1^-, x_2^- \leq x_2 \leq x_2^+\}$, el cual se obtiene invirtiendo el signo de la desigualdad $C1 \leq 0$ y removiendo restricciones redundantes en K (ver Figura 8.3(b)). Por esto para considerar el resto de las desigualdades, el resto completo de la región es $R^{resto} = \bigcup_{i=1}^5 R_i$, donde R_1, \dots, R_5 son dados en la Tabla 7.1 y son gráficamente mostrados en la Figura 8.3(c).



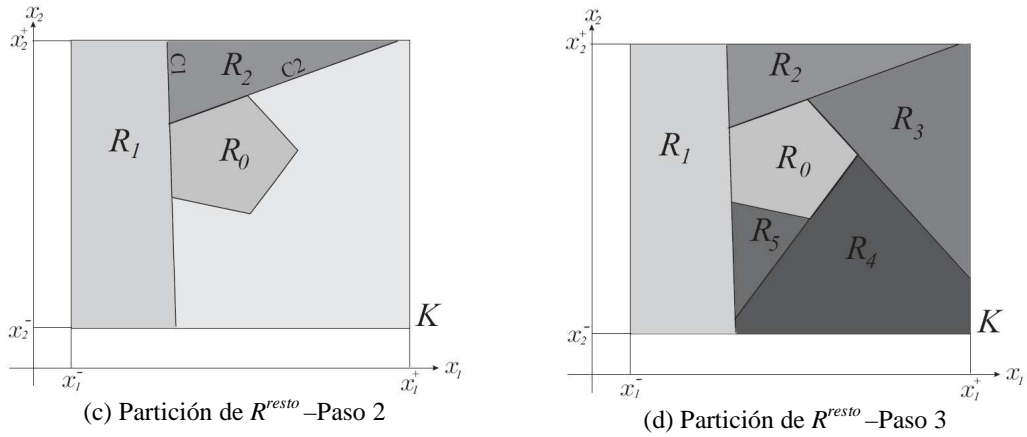


Figura 8.3. Ejemplo de dos dimensiones: partición del resto del espacio $R^{resto} = K - R_0$

Tabla 8.1. Definición de partición $R^{resto} \equiv K - R_0$

Región	Desigualdades
R_1	$C1 \geq 0, x \geq x_1^-, x_2^- \leq x_2 \leq x_2^-$
R_2	$C2 \geq 0, C1 \leq 0, x_2 \leq x_2^+$
R_3	$C3 \geq 0, C2 \leq 0, x_2 \leq x_2^+, x_1 \leq x_1^+$
R_4	$C4 \geq 0, C1 \leq 0, C3 \leq 0, x_1 \leq x_1^+, x_2 \geq x_2^-$
R_5	$C5 \geq 0, C1 \leq 0, C4 \leq 0$

En la Figura 8.4 se presenta la composición de la primeras dos regiones críticas. Notar como CR_1 debe formarse por la unión de la una región en R_1 y otra en R_2

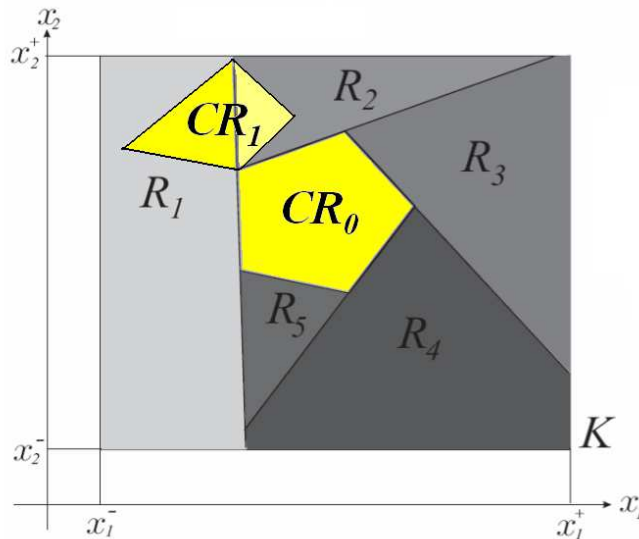


Figura 8.4. Ejemplo de regiones críticas.

8.1.2. Programación cuadrática multiparamétrica

El problema de programación cuadrática multiparamétrica es el siguiente

$$J^*(x) = \min_z \{J(z, x) = \frac{1}{2} z^T H z\} \quad (8.14)$$

s.a. $Gz \leq W + Sx$

donde

- $z \in \mathfrak{R}^s$ son las variables de optimización.
- $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de parámetros.
- $H \in \mathfrak{R}^{s \times s}$, $H > 0$ y $J(x, z) \in \mathfrak{R}$ es la función objetivo.
- $Gz \leq W + Sx$ definen un conjunto poliédrico $P \in \mathfrak{R}^{s+n}$ con $G \in \mathfrak{R}^{m \times s}$, $W \in \mathfrak{R}^m$, y $S \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ las restricciones que relacionan las variables de optimización y el vector de parámetros.

Dado un conjunto poliédrico cerrado de parámetros $K \subset \mathfrak{R}^n$, $K = \{x \in \mathfrak{R}^n : Ex \leq F\}$ con $E \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ y $F \in \mathfrak{R}^m$ matrices constantes y sea $K^* = \{x \in K \text{ tal que el problema de programación lineal sea factible}\}$.

Este caso es semejante al caso de programación lineal multiparamétrica pero con algunas diferencias.

Algoritmo de programación cuadrática multiparamétrica

Paso 1: Determinar la dimensión $n' > n$ del menor subespacio afín \mathcal{K} contenido en el conjunto factible K^ . Si $n' < n$ encontrar la ecuación que defina a \mathcal{K} .*

Paso 2: Determinar la partición de K^ en regiones críticas CR_{A_i} y encontrar la función $J^*(\cdot)$ y una función óptima lineal afín a tramos $z^*(\cdot)$.*

Para la solución del problema de programación cuadrática multiparamétrica debemos tener primero un punto inicial x_0 dentro del conjunto poliédrico K . Este se escoge en el centro de la mayor bola contenida en K , para la cual existe un punto z factible.

$$\begin{aligned} \max_{x, z, \varepsilon} \quad & \varepsilon \\ \text{s.a.} \quad & T_i x + \varepsilon \|T_i\| \leq R_i, \quad i = 1, \dots, n_T \\ & Gz - Sx \leq W \end{aligned} \quad (8.15)$$

donde n_E es el número de filas T_i de la matriz T de $K^* = \{x / Tx \leq R\}$. En la Figura 8.5 se presenta un ejemplo de la bola definida anteriormente.

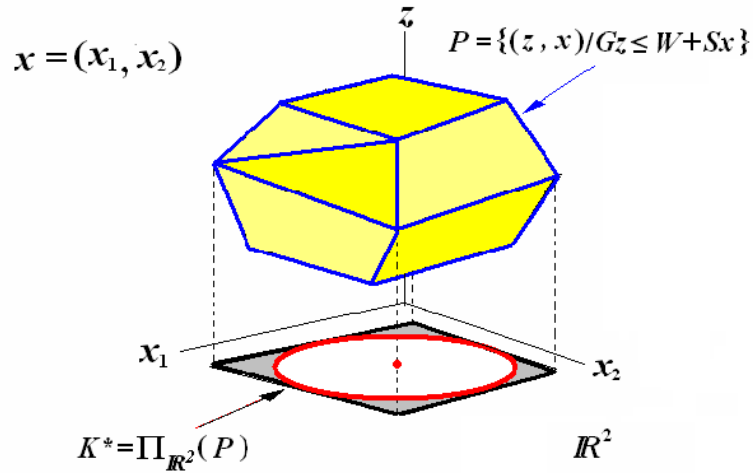


Figura 8.5. Mayor bola contenida en K

Ahora a partir de la condición de optimalidad de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker para el problema de programación cuadrática multiparamétrica dado por las ecuaciones:

$$Hz^* + G^T \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathfrak{R}^m \quad (8.16)$$

$$\lambda_i (G_i z^* - W_i - S_i x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (8.17)$$

$$\lambda^* \geq 0 \quad (8.18)$$

$$Gz^* \leq W + Sx \quad (8.19)$$

Resolviendo para z^*

$$z^* = -H^{-1} G^T \lambda^* \quad (8.20)$$

y sustituyendo en (8.17), obtenemos la condición relajada complementaria $\lambda(GH^{-1}G^T \lambda^* - Sx) = 0$.

Si $\lambda_{NA_0}^*$ y $\lambda_{A_0}^*$ denota el correspondiente multiplicador de Lagrange para restricciones activas e inactivas, respectivamente. Y para las restricciones inactivas $\lambda_{NA_0}^* = 0$. Para las restricciones activas $(-G_{A_0} H^{-1} G_{A_0}^T) \lambda_{A_0}^* - W_{A_0} - S_{A_0} x = 0$, y por lo tanto

$$\lambda_{A_0}^* = -(G_{A_0} G_{A_0}^T)^{-1} (W_{A_0} + S_{A_0} x) \quad (8.21)$$

donde $G_{A_0}, W_{A_0}, S_{A_0}$ corresponde al conjunto de restricciones activas A_0 , y $(G_{A_0} H^{-1} G_{A_0}^T)^{-1}$ existe porque las filas de G_{A_0} son linealmente independientes. Por eso $\lambda_{A_0}^*$ es una función afín de x .

Se puede sustituir $\lambda_{A_0}^*$ de (7.21) dentro de (8.20) para obtener

$$z^* = H^{-1} G_{A_0}^T (G_{A_0} G_{A_0}^T)^{-1} (W_{A_0} + S_{A_0} x) \quad (8.22)$$

y notar que z^* es también una función afín de x .

La variable z^* desde (8.20) debe satisfacer la restricción en (8.14)

$$GH^{-1} G_{A_0}^T (G_{A_0} G_{A_0}^T)^{-1} (W_{A_0} + S_{A_0} x) \leq W + Sx \quad (8.23)$$

y por (8.18) los multiplicadores de Lagrange (8.21) debe ser no-negativo cuando nosotros variamos x .

$$-(G_{A_0} G_{A_0}^T)^{-1} (W_{A_0} + S_{A_0} x) \geq 0 \quad (8.24)$$

Después de remover las desigualdades redundantes desde (8.23) y (8.24) obtenemos una representación compacta de CR_0 . Una vez que la región crítica CR_0 ha sido definida, es resto del espacio $CR^{resto} \equiv K - CR_0$ tiene que ser explorado y encontrar una nueva región crítica, como en el caso lineal multiparamétrico.

8.1.3. Solución del problema de control óptimo en tiempo finito con programación multiparamétrica

Para sistemas lineales de tiempo discreto se entregará la solución del problema del controlador óptimo de tiempo finito con restricciones, como solución de un problema de programación multiparamétrica con lo cual se obtiene una ley de control realimentado lineal afín a trozos.

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8.25)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (8.26)$$

sujeto a las restricciones

$$Dx(t) + Lu(t) \leq M \quad \forall t \geq 0 \quad (8.27)$$

En las ecuaciones (8.25) y (8.26), $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ y $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ son el estado, entrada, y vector de salida respectivamente. En (7.27), $Ex(t) + Lu(t) \leq M$ son las restricciones de entrada-estado.

Definiendo la siguiente función de costos:

$$J(U_N, x(0)) \equiv \|Px_N\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} (\|Qx_k\|_p + \|Ru_k\|_p) \quad (8.28)$$

Donde x_k denota el vector de estado en el tiempo k obtenido por comenzar desde el estado $x_0 = x(0)$ y aplicando en el sistema (8.25) la secuencia de entrada u_0, \dots, u_{k-1} .

Considerando el problema de control óptimo en tiempo finito con restricciones

$$\begin{aligned} J^*(x(0)) &= \min_{U_N} J(U_N, x(0)) & (8.29) \\ \text{sujeto a} & \\ Dx_k + Lu_k &\leq M, \quad k=0, \dots, N-1 \\ x_N &\in X_f \\ x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \quad k \geq 0 \\ x_0 &= x(0) \end{aligned}$$

donde N es el horizonte de tiempo y $X_f \subseteq \mathfrak{R}^n$ es una región terminal poliédrica (la región terminal es parte de las condiciones de estabilidad de controlador diseñado (ver en el capítulo 7)).

En las ecuaciones (8.28) y (8.29) se denota con $U_N = [u_0', \dots, u_{N-1}'] \in \mathfrak{R}^s$ al vector de optimización ($s = m \times N$), con $\|Qx\|_p$ la p -norma de el vector x ponderada por la matriz Q , ($p = 1, 2, \infty$). Además se denota con X_j el conjunto de estados x en el tiempo j para el cual (8.29) es factible, es decir:

$$\begin{aligned} X_j &= \{x \in \mathfrak{R}^n / \exists u \quad (Dx + Lu \leq M \quad \wedge \quad Ax + Bu \in X_{j+1})\} & (8.30) \\ j &= 0, \dots, N-1 \\ X_N &= X_f \end{aligned}$$

A continuación se asume, se asume que $Q = Q' \geq 0$ $R = R' > 0$, $P \geq 0$, para $p = 2$ y que Q , R y P son matrices de rango columna completo para $p = 1, \infty$.

Se denota con $X_0 \subseteq \mathfrak{R}^n$ el conjunto de estados iniciales $x(0)$ para el cual el problema de control óptimo (8.29) es factible.

8.1.4. Problema estándar de control óptimo

Si se eligen las siguientes condiciones:

$$p = 2, \quad \{(x, u) \in \mathfrak{R}^{n+m} / Dx + Lu \leq M\} = \mathfrak{R}^{n+m}, \quad X_f = \mathfrak{R}^n \quad (8.31)$$

el problema (8.29) se transforma en el problema estándar de control óptimo de tiempo finito sin restricciones, cuya solución puede ser expresada a través de la ley de control de estado variante en el tiempo

$$u^*(k) = K_k x(k) \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (8.32)$$

donde las matrices de ganancias son dadas por la ecuación

$$K_k = -(B^T P_{k+1} B + R)^{-1} B^T P_{k+1} A \quad (8.33)$$

y donde las matrices simétricas semidefinidas positivas P_k son dadas recursivamente por el algoritmo

$$P_N = P \quad (8.34)$$

$$P_k = A^T (P_{k+1} - P_{k+1} B (B^T P_{k+1} B + R)^{-1} B P_{k+1}) A + Q \quad (8.35)$$

Luego el costo óptimo está dado por $J^*(x(0)) = x(0)^T P_0 x(0)$

8.1.5. Problema del regulador lineal cuadrático de tiempo infinito

Si para la ecuación (7.29) se tiene que $N = +\infty$ y se asume que el par (A, B) es controlable y el par (D, A) es observable (donde $Q = D^T D$), entonces el problema (8.29) se transforma en el problema del regulador lineal cuadrático de tiempo infinito (LQR) cuya solución puede ser expresada como la ley de realimentación de estado

$$u^*(k) = Kx(k), \quad k = 0, \dots, +\infty \quad (8.36)$$

donde la matriz de ganancia K está dada por

$$K = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P_\infty A \quad (8.37)$$

y donde P_∞ es la solución única de la ecuación matricial algebraica

$$P_\infty = A^T (P_\infty - P_\infty (B^T P_\infty B + R)^{-1} P_\infty) A + Q \quad (8.38)$$

dentro de la clase de matrices positivas semidefinidas.

8.1.6. Problema de control óptimo resuelto con ley de control PWA

En este apartado se demostrará que la solución del problema (8.29) puede ser expresada como una ley de realimentación $u^*(k)$, la cual es una función continua lineal afín a trozos sobre un poliedro del espacio de estado de $x(k)$, es decir $u^*(k) = f_k(x(k))$ en que

$$f_k(x) = F_k^i x + g_k^i \quad \text{si} \quad H_k^i x \leq K_k^i \quad i = 1, \dots, N_k \quad (8.39)$$

donde H_k^i y K_k^i son matrices descritas por el i -ésimo poliedro $CR_k^i = \{x \in \mathfrak{R}^n / H_k^i x \leq K_k^i\}$ dentro del cual la ley de control de realimentación óptima $u^*(k)$ en el tiempo k tiene una forma lineal afín $F_k^i x + g_k^i$. Los poliedros CR_k^i , $i = 1, \dots, N_k$ son una partición del conjunto de estados factibles del problema (7.29) en el tiempo k .

A continuación se muestra como se obtiene la ley control óptima por medio de programación multiparamétrica.

Por sustitución

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{k-1-j} \quad (8.40)$$

en (7.29) lo anterior puede ser escrito de la forma

$$J^*(x(0)) = \frac{1}{2} x^T(0) Y x(0) + \min_{U_N} \left(\frac{1}{2} U_N^T H U_N + x^T(0) F U_N \right) \quad (8.41)$$

sujeto a $GU_N \leq W + Ex(0)$

donde $H = H^T > 0$, H , F , Y , G , W y E se pueden obtener a partir de P , Q y R de (8.28), ver solución en el apéndice G.

Vemos que $x(0)$ es un vector de parámetros y la meta es resolver (8.41) para valores de interés de $x(0)$ y hacer explícita la dependencia. Notar que el conjunto de estados iniciales X_0 para el cual el problema de control óptimo (8.29) es factible, es un poliedro y puede ser calculado por la proyección del poliedro

$$P_0 = \{(U_N, x(0)) \in \mathfrak{R}^{s+n} / GU_N \leq W + Ex(0)\} \quad (8.42)$$

sobre el espacio de $x(0)$.

Ahora, conveniente definir

$$z = U_N + H^{-1}F^T x(0) \quad (8.43)$$

con $z \in \mathfrak{R}^s$, para transformar (7.41) completando el cuadrado para el problema equivalente

$$J_z^*(x(0)) = \min_z \frac{1}{2} z^T H z \quad (8.44)$$

sujeto a

$$Gz \leq W + Sx(0)$$

donde $S = E + GH^{-1}F^T$, y $J_z^*(x(0)) = J^*(x(0)) - \frac{1}{2} x(0)^T (Y - FH^{-1}F^T)x(0)$. En el problema transformado el vector de parámetros $x(0)$ aparece solamente en las restricciones. Ver demostración apéndice G.

El problema (8.44) es un problema de programación cuadrática multiparamétrica que puede ser resuelto por el algoritmo mostrado en la sección 7.2.1. Una vez que el problema multiparamétrico (8.44) ha sido resuelto para un conjunto poliédrico $X \subset \mathfrak{R}^n$, la solución $U_N^* = U_N^*(x(0))$ del control óptimo con restricciones en tiempo finito (7.29) y por lo tanto $u^*(0) = u^*(x(0))$ está disponible explícitamente como una función del estado inicial $x(0)$. La solución $z^*(x(0))$ del problema de programación cuadrática multiparamétrico (8.44) es una función continua afín a trozos sobre un poliedro de x .

La solución del problema multiparamétrico (8.44) proporciona la ley de control de realimentación de estado $u^*(k) = u^*(k)(x(0))$. En la solución del control óptimo con ley de control PWA, las leyes $f_k : x(k) \rightarrow u^*(k)$ para $k = 1, \dots, N$ son calculadas de la siguiente manera:

Considere el mismo control óptimo con restricciones en tiempo finito (8.29) sobre el horizonte más corto que el problema original $[i, N]$

$$\min_{U_{N-i}} \left(\|Px_N\|_p + \sum_{k=i}^{N-1} (\|Qx_k\|_p + \|Ru_k\|_p) \right) \quad (8.45)$$

sujeto a

$$Dx_k + Lu_k \leq M, \quad k = i, \dots, N-1$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k \geq 0$$

$$x_N \in X_f$$

$$x_i = x(i)$$

Donde $U_{N-i} = [u'_i, \dots, u'_{N-1}]'$. Se denota con $X_i \subseteq \mathfrak{R}^n$ el conjunto de estados iniciales $x(i)$ para el cual el problema de control óptimo (8.45) puede ser transformado en un problema de programación cuadrática multiparamétrico.

$$\begin{aligned} \min_{U_{N-i}} \quad & \frac{1}{2} U_{N-i}^T H U_{N-i} + x^T(0) F U_{N-i} \\ \text{sujeto a} \quad & G U_{N-i} \leq W + E x(i) \end{aligned} \quad (8.46)$$

El primer componente de la solución multiparamétrica de (8.46) tiene la forma

$$u^*(i) = f_i(x(i)), \quad \forall x(i) \in X_i \quad (8.47)$$

donde la ley de control $f_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, es continua y lineal afín a trazos

$$f_i(x) = F_i^j x + g_i^j \text{ si } x \in CR_i^j, \quad j = 1, \dots, N_i \quad (8.48)$$

y donde los conjuntos poliédricos $CR_i^j = \{x \in \mathfrak{R}^n / H_i^j x \leq K_i^j\}$, $j = 1, \dots, N_i$ son particiones del poliedro factible X_i .

Por lo tanto la solución de realimentación $u^*(k) = f_k(x(k))$, $k = 0, \dots, N-1$ del control óptimo con restricciones en tiempo finito (8.29) es obtenida por la solución de N problemas de programación cuadrática multiparamétrica. Obviamente una vez determinado el vector óptimo U_N , para el control sólo necesitamos su primera componente. En la Figura 8.6 se presenta la partición del primer elemento de la serie factible (8.30) para el caso del horizonte corto de $[i, N]$ y su correspondiente funciones afín, donde se determina la señal de control $u(t+i)$.

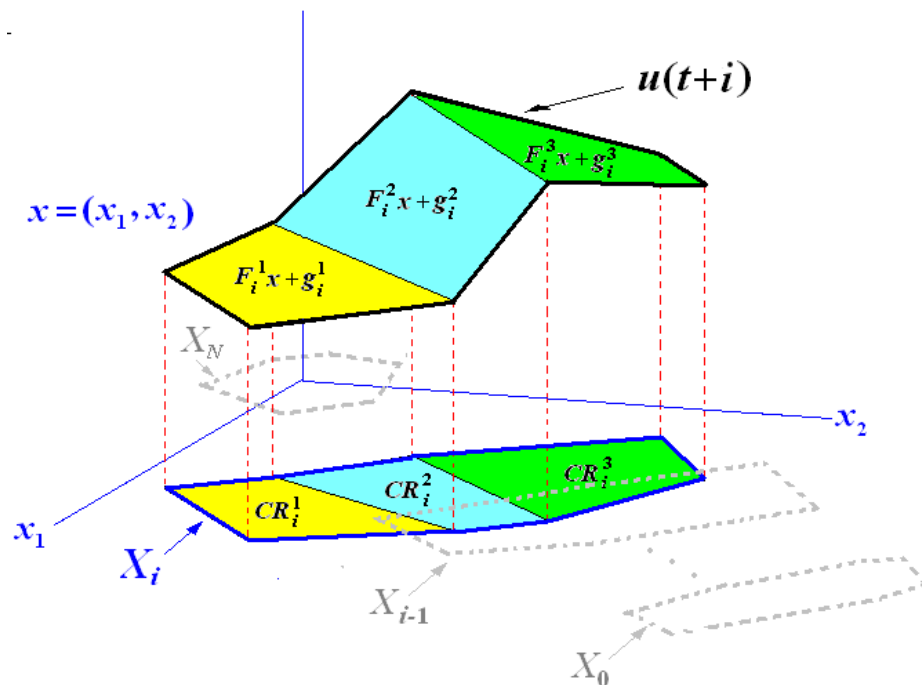


Figura 8.6. Partición del primer elemento de la serie factible para el caso del horizonte corto de $[i, N]$ y su correspondiente funciones afín.

8.1.7. Sistemas variantes en el tiempo

Los resultados de la sección previa 7.3.4. pueden ser aplicados a sistemas variantes en el tiempo, como el siguiente:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (8.49)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (8.50)$$

sujeto a las restricciones

$$D(t)x(t) + L(t)u(t) \leq M(t) \quad (8.51)$$

Por lo tanto el problema de control óptimo es:

$$J^*(x(0)) = \min_{U_{N-i}} J(U_N, x(0)) \quad (8.52)$$

$$\text{sujeto a } D(k)x_k + L(k)u_k \leq M(k), \quad k = i, \dots, N-1$$

$$x_{k+1} = A(k)x_k + B(k)u_k, \quad k \geq 0$$

$$x_N \in X_f$$

$$x_0 = x(0)$$

Este puede ser formulado y resuelto como un problema programación lineal o cuadrática multiparamétrico dependiendo de la norma p escogida.

8.1.8. Control óptimo para sistemas híbridos con restricciones

Consideremos un sistema afín a trozos

$$x(t+1) = A^i x(t) + B^i u(t) + f^i \quad \text{si } \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in C^i \quad (8.53)$$

sujeto a las restricciones entrada estado

$$Dx(t) + Lu(t) \leq M \quad (8.54)$$

para $t \geq 0$, donde $x \in \mathfrak{R}^{n_c} \times \{0,1\}^{n_i}$, $u \in \mathfrak{R}^{m_c} \times \{0,1\}^{m_i}$ y $\{C_i\}_{i=0}^{s-1}$ una partición poliédrica del espacio de entrada-estado \mathfrak{R}^{n+m} con $n = n_c + n_i$ y $m = m_c + m_i$.

Se denominarán restricciones del sistema PWA a las restricciones del sistema afín a trozos (7.53) sobre las restricciones (7.54)

$$x(t+1) = A^i x(t) + B^i u(t) + f^i \quad \text{si } \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \bar{C}^i \quad (8.55)$$

donde $\{\bar{C}^i\}_{i=0}^{s-1}$ es una nueva partición poliédrica del espacio de entrada-estado definido por la intersección del conjunto C^i en (8.53) y la restricción (8.54). En la Figura 8.7 se presenta un ejemplo de restricciones del sistema PWA como la unión de las regiones $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_6$

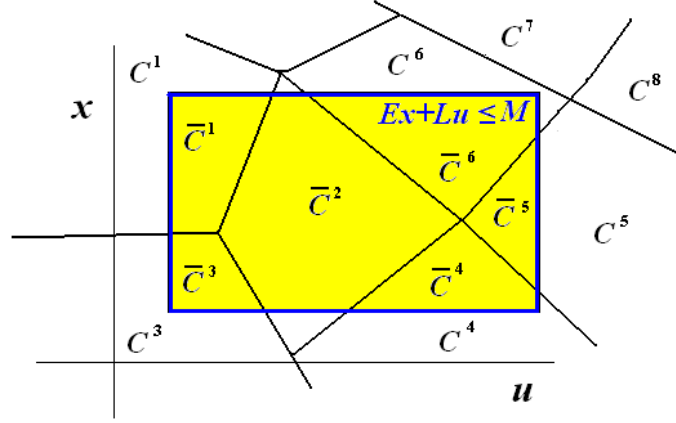


Figura 8.7. Restricciones del sistema PWA

Ahora definiendo la siguiente función costos

$$J(U_N, x(0)) \equiv \|Px_N\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} (\|Qx_k\|_p + \|Ru_k\|_p) \quad (8.56)$$

y considerando el problema de control óptimo con restricciones en tiempo finito

$$J^*(x(0)) = \min_{\{U_N\}} J(U_N, x(0))$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} x_{k+1} = A^i x_k + B^i u_k + f^i & \text{if } \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \in \bar{C}^i & k = 0, \dots, N-1 \\ x_N \in X_f \\ x_0 = x(0) \end{cases} \quad (8.57)$$

Donde el vector columna $U_N = [u_0, \dots, u_{N-1}] \in \mathfrak{R}^{m_c N} \times \{0,1\}^{m_i N}$, es el vector de optimización, N es el horizonte de tiempo y X_f es la región terminal. En (8.56), $\|Qx\|_p$ denota la p -norma del vector x ponderado por la matriz Q , $p = 1, 2, \infty$. Se asumirá que $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$, $P \geq 0$, para $p = 2$, y que Q, R, P son matrices de rango columna completo para $p = 1, \infty$.

Se notará por $X_i \subseteq \mathfrak{R}^{n_c} \times \{0,1\}^{m_i}$ el conjunto de estados iniciales $x(i)$ en el tiempo i para el cual el problema de control óptimo (8.57) es factible.

$$X_i = \left\{ \begin{array}{l} \exists u \in \mathfrak{R}^{m_c} \times \{0,1\}^{m_l} \text{ y } q \in \{0, \dots, s-1\} \\ x \in \mathfrak{R}^{n_c} \times \{0,1\}^{m_l} / \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \bar{C}^q \text{ y } A^i x + B^i u + f^i \in X_{i+1} \end{array} \right\} \quad (8.58)$$

$i = 0, \dots, N-1$
 $X_N = X_f$

La solución para el problema de control óptimo (7.56) es una ley de control realimentado afín a trozos de la forma $u^*(k) = f_k(x(k))$, donde

$$f_k(x(k)) = F_k^i x(k) + g_k^i \text{ si } x(k) \in \mathfrak{R}_k^i \quad (8.59)$$

donde R_k^i , $i = 1, \dots, N_k^r$ es una partición del conjunto X_k de estados factibles $x(k)$.

La linealidad de la solución PWA fue primero mencionada por (Sontag, 1984) y en (Mayne, 2001) esbozó una demostración. A continuación se encontrará la solución óptima $u^*(x(0))$ como ley de control y el mismo argumento se debe utilizar para las siguientes $u^*(x(1)), \dots, u^*(x(N-1))$.

Supongamos por el momento que no hay entradas binarias, $m_l = 0$. Luego el número de posibles lugares donde pueden pertenecer la secuencias de estado x_0, \dots, x_{N-1} es horizonte N , y por v_i^k el k -ésimo elemento de la secuencia v_i , es decir $v_i^k = j$ si $x_k \in \bar{C}^j$.

Fijando una cierta secuencia $v_i = [v_i^0, \dots, v_i^{N-1}]$ como se presenta en la Figura 7.8 (ejemplo para $N=4$, sobre partición del espacio de entrada estado)

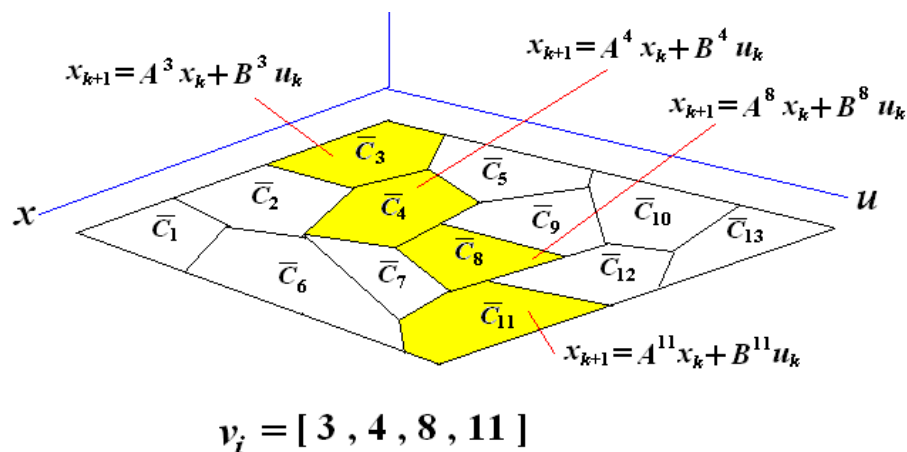


Figura 8.8. Ejemplo para $N=4$, de una secuencia fija sobre partición del espacio de entrada estado. y fijando la restricciones del estado de acuerdo a secuencia v_i el problema (8.56) se transforma en

$$J_{v_i}^*(x(0)) = \min_{\{U_N\}} J(U_N, x(0))$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} x_{k+1} = A^i x_k + B^i u_k + f^i & \text{if } \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \in \bar{C}^i & k = 0, \dots, N-1 \\ \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \in \bar{C}^{v_i^k} & k = 0, \dots, N-1 \\ x_N \in X_f \\ x_0 = x(0) \end{cases} \quad (8.60)$$

El problema (8.60) a un problema de control óptimo de tiempo finito para sistemas lineales variantes en el tiempo con restricciones variantes en el tiempo y pueden ser resueltos por el método descrito en la sección 7.3.4. La solución obtenida es una ley de control

$$u^i(x(0)) = \bar{F}^{i,j} x(0) + \bar{g}^{i,j} \quad \forall x(0) \in T^{i,j} \quad j = 1, \dots, Nr^i \quad (8.61)$$

donde $D_0^i = \bigcup_{j=1}^{Nr^i} T^{i,j}$ es una partición poliédrica del conjunto convexo D_0^i con

$$D_0^i = \left\{ x / \exists u \wedge q \in v^i / \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \bar{C}^{v_i^q} \wedge A^1 x + B^1 u + f^1 \in D_1 \right\} \text{ de los estados factibles } x(0)$$

para el problema (7.60). Nr^i es el número de regiones de la partición poliédrica de la solución y es función del número de restricciones en el problema (8.59). El superíndice i en (8.60) denota que la entrada $u^i(x(0))$ es óptima cuando la secuencia de conmutación v_i es fija.

La solución óptima $u^*(x(0))$ del problema original puede ser encontrada resolviendo el problema (8.60) para toda posible secuencia v_i .

El conjunto X_0 de todos los estados factibles en tiempo 0 es $X_0 = \bigcup_{i=1}^{s^N} D^i$.

8.2. Diseño de control supervisor predictivo híbrido utilizando PWA.

Para realizar un análisis de factibilidad de la solución del problema de control supervisor predictivo híbrido, utilizando como la solución del problema, una ley de control realimentado afín a trozos (PWA) sobre una partición poliédrica del espacio de estados y poder garantizar la estabilidad de control supervisor predictivo se utiliza la *Versión 2.5 de el Toolbox Multiparamétrico*.

El *Toolbox Multiparamétrico (Multi-Parametric Toolbox (MPT))* es una toolbox libre de Matlab para el diseño, análisis e implementación de controladores óptimos para sistemas lineales e híbridos. El toolbox ha sido desarrollado en el Automatic Control Laboratory del ETH en Zurich.

La eficiencia del código está garantizada por la extensa librería de algoritmos del campo de la geometría computacional y optimización paramétrica. El toolbox ofrece un amplio espectro de algoritmos compilados en un formato amigable y accesible: empezando de diferentes funciones objetivo (lineales, cuadráticas, tiempo mínimo) al manejo de sistemas con incertidumbres. Las leyes de control óptimo resultantes pueden ser, o bien incrustadas en las aplicaciones en forma de código C, o bien trasladadas a plataformas objetivo usando la Toolbox Real Time Workshop.

8.2.1. Ejemplo de solución de control supervisor utilizando MPT.

se utilizará el sistema controlado de forma estándar (con un PI) como ejemplo para integrarle un control supervisor predictivo, esto se observa en la Figura 7.9 Donde se incluye una perturbación aditiva a la salida para analizar los efectos del control en distintos puntos de operación.

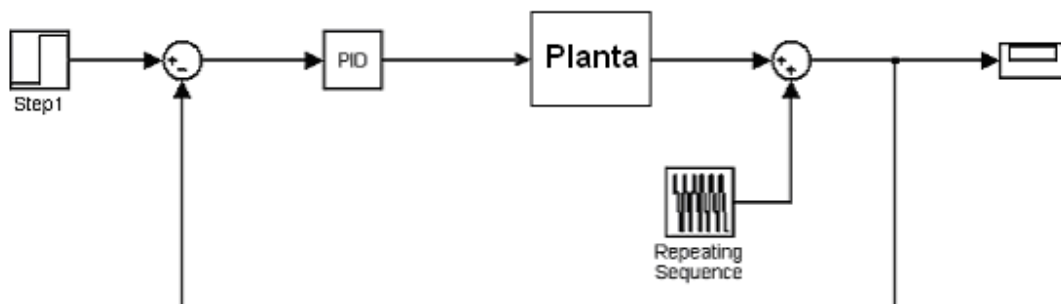


Figura 8.9. Control regulatorio estándar sobre sistema dinámico.

Nivel supervisor

El nivel supervisor estará dado por un controlador predictivo que entrega el set-point óptimo dinámico del nivel regulatorio del proceso.

En esta ejemplo se propuso una función objetivo que contiene un criterio regulatorio (J_{Cr}), el cual toma en cuenta el error de trayectoria, y el esfuerzo de la acción de control.

El criterio regulatorio asegura que la solución sea estable y satisfaga las restricciones técnicas.

$$\min J_{Cr} \quad (8.62)$$

La función objetivo para el nivel regulatorio propuesta (J_{Cr}) es

$$J_{Cr} = \sum_{i=1}^N (\hat{y}(t+i) - r)^2 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^N \Delta u(t+i-1)^2 \quad (8.63)$$

donde $\hat{y}(t+j)$ es la j-ésima predicción para la salida de la planta y λ es un factor de peso para la desviación de la variable manipulada. La trayectoria de referencia r para la salida del sistema, que en este caso es un valor constante.

Para resolver el problema de optimización en el nivel supervisor, el sistema será modelado como un modelo lineal. El nivel regulatorio es compuesto por controladores lineales PI.

Suponemos un sistema dinámico discreto para el proceso de primer orden de la forma:

$$y(t+1) + a \cdot y(t) = bu(t) \quad (8.64)$$

con $a = -0.9$ y $b = 1$

El modelo discreto del PI, considerado con un tiempo de muestreo de $T_s = 1[s]$ está dado por:

$$A_c(z^{-1})u_p = B_{cr}(z^{-1})r_{Ps}(t) + B_{cy}(z^{-1})P_s(t) \quad (8.65)$$

sabiendo que $A_c(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$, $B_{cr}(q^{-1}) = \alpha + \beta q^{-1}$ y $B_{cy}(q^{-1}) = -(\alpha + \beta q^{-1})$

con $\beta = \frac{T_s k_i}{2} - k_p = 0$ y $\alpha = \frac{T_s k_i}{2} + k_p = 0.25$

donde $k_i = 0.05$, $k_p = 0.25$

Por lo tanto el problema de optimización para control supervisor es:

$$\begin{aligned} \text{Min } & J_{Cr} \quad (8.66) \\ \text{sujeto a:} & \end{aligned}$$

$$\hat{y}(t+k+1) = -\alpha \hat{y}(t+k) + bu(t+k) \quad (8.67)$$

$$u(t+k) = u(t+k-1) + \alpha \cdot r(t+k) - \alpha \cdot y(t+k) \quad (8.68)$$

para $k = 0, \dots, N-1$

donde las ecuaciones (7.67) se obtienen del modelo lineal (7.64) y (7.68) las ecuaciones lineales del nivel regulatorio.

El problema anterior de control óptimo se soluciona como un problema de programación cuadrática multiparamétrica con las restricciones (7.67) y (7.68) del modelo regulatorio (7.65):

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(a+\alpha) & b \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} r(t) \quad (8.68)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

más las restricciones de salida y entrada $-1 < y(t) < 1$ $-1 < r(t) < 1$

Implementación y resultados

En la Figura 7.10 se presenta la implementación del controlador supervisor predictivo controlador por una ley de control PWA.

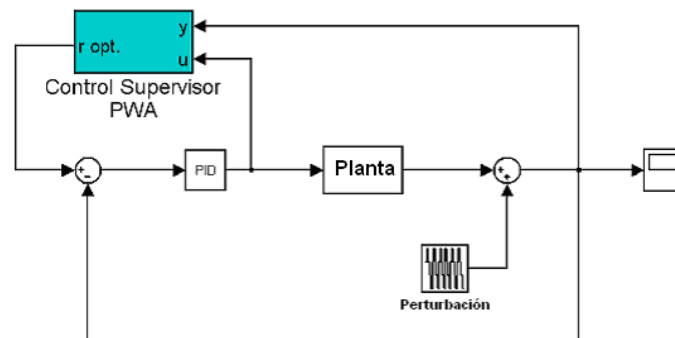


Figura 8.10. Implementación del control PWA sobre una planta con modelo lineal de primer orden

En la Figura 8.11 se presenta la partición poliédrica del subconjunto factible del espacio de estado del problema (8.66) y en donde en cada elemento de la partición se determina una ley de control afín.

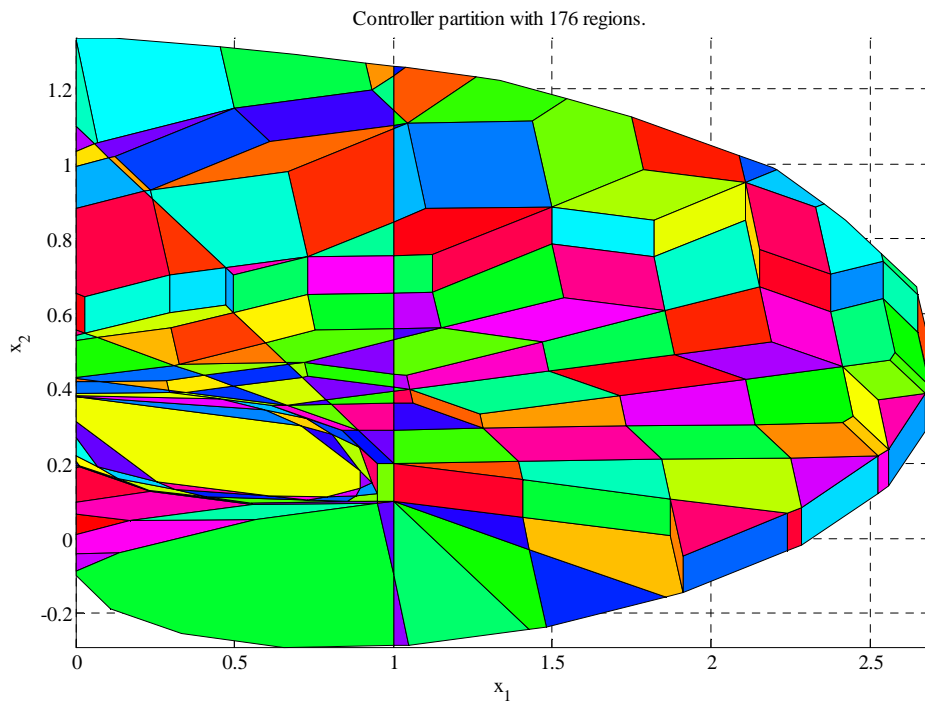


Figura 8.11. Partición poliédrica del subconjunto factible del espacio de estado del problema 7.66

En la Figura 8.12. se presenta la superficie tridimensional de la partición poliédrica del subconjunto factible del espacio de estado del problema (8.66) y las correspondientes funciones afines definidas sobre cada elemento de la partición.

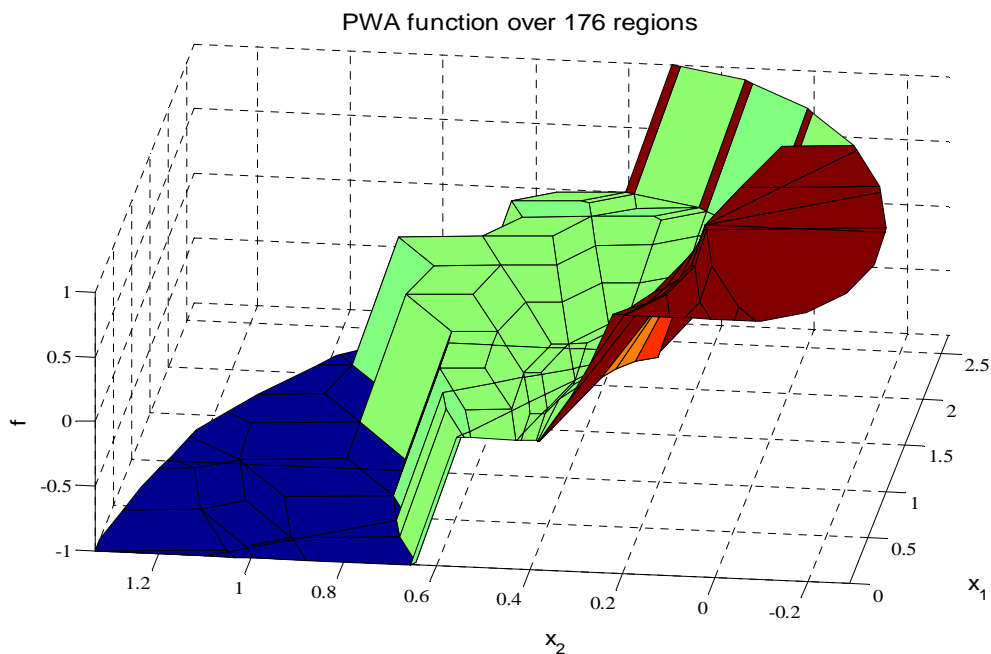


Figura 8.12. Representación tridimensional de la partición poliédrica del subconjunto factible del espacio de estado.

En la Figura 8.13. Se presenta la partición poliédrica del subconjunto factible del espacio de estado del problema 8.66. Sobre este conjunto se muestran distintas trayectorias con sus correspondientes condiciones iniciales de la evolución del sistema (ecuación (8.58)).

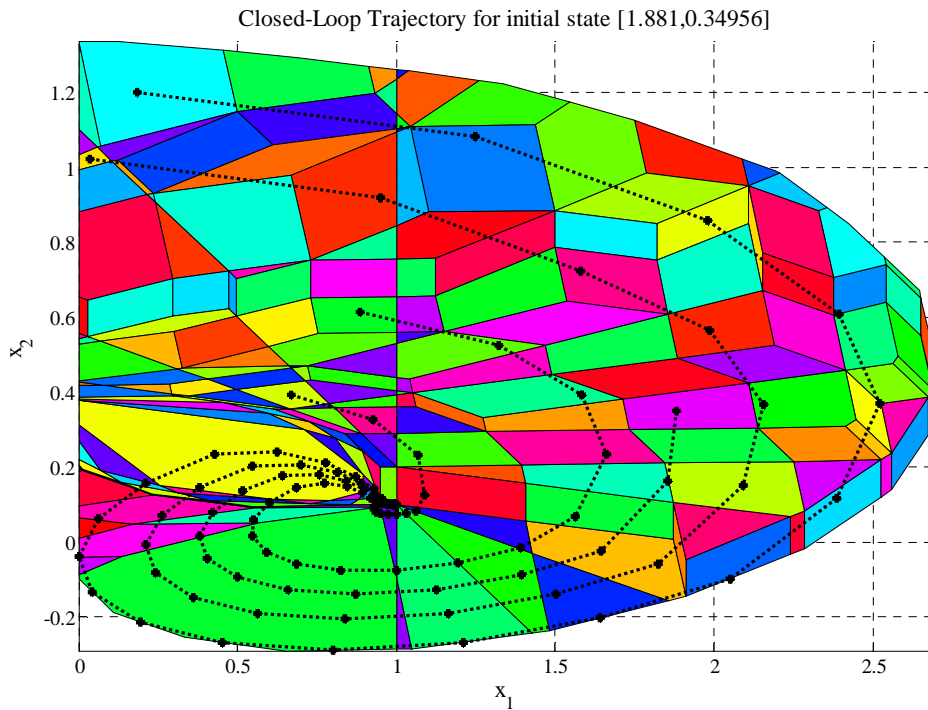
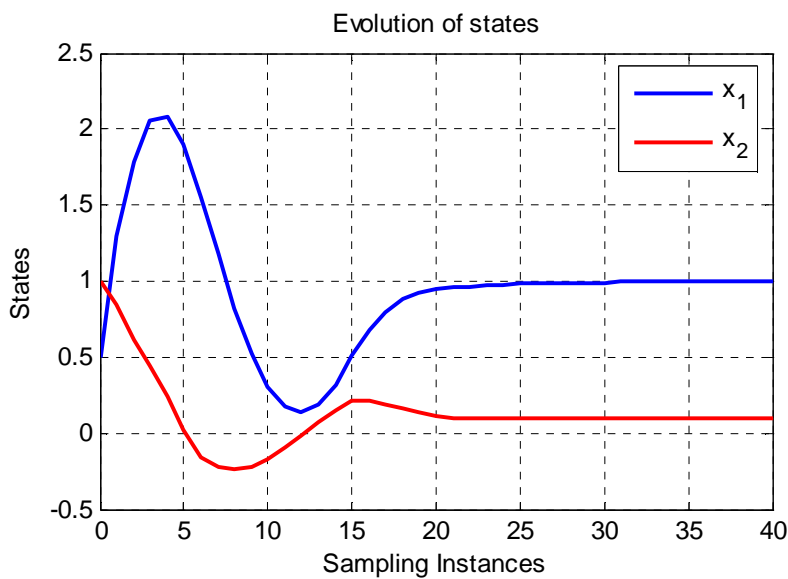
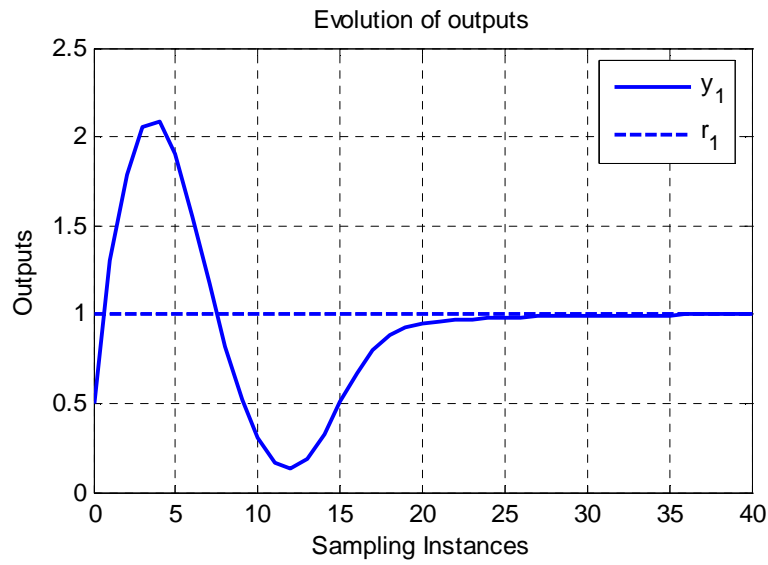


Figura 8.13. Representación bidimensional de la partición poliédrica del subconjunto factible del espacio de estado. Con distintas trayectorias de la evolución del sistema.

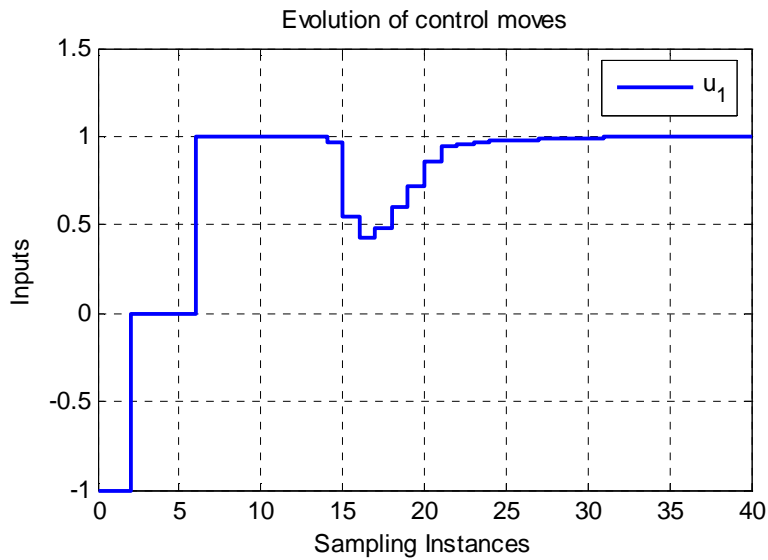
En la Figura 8.14 se presenta la evolución de variables de estados, de salida y de entrada del sistema controlado.



(a)



(b)



(c)

Figura 8.14. Evolución de variables de estados (a), de salida (b) y de entrada (c) del sistema controlado

Se observa como los estados convergen a los set-point correspondientes en la gráfica (a). La salida se estabiliza y converge a valor establecido en la gráfica (b). La señal de control se estabiliza pasado los 40 segundos en la grafica (c). El programa utilizado se puede ver en el apéndice F

8.2.2. Ejemplo de solución de control supervisor utilizando MPT para planta con características híbridas.

El siguiente ejemplo presenta el control supervisor predictivo de un sistema con característica híbridas a nivel regulatorio. Esto es, existe un conmutador en el sistema regulatorio que elige entre la menor dos señales. La ecuación (7.69) representa el modelo lineal de la planta, la ecuación (7.70) representa el modelo de un conmutador que posee el nivel regulatorio y la ecuación (7.71) los modelos de los controladores PI₁ y PI₂ que se ven en la Figura 7.12.

$$y(t+1) + ay(t) = u(t) \quad \text{con } a = 0.9 \quad (8.69)$$

$$u(t) = \min(u_a(t), u_b(t)) \quad (8.70)$$

donde

$$u_a(t) - u_a(t-1) = \alpha_a r(t) + \beta_a r(t-1) - \alpha_a y(t) - \beta_a y(t-1) \quad (8.71)$$

$$u_b(t) - u_b(t-1) = \alpha_b r(t) + \beta_b r(t-1) - \alpha_b y(t) - \beta_b y(t-1)$$

tenemos que $\beta_a = 0$ y $\alpha_a = 0.5$ si $k_i^1 = 0.5$ y $k_p^1 = 0.25$ para el PI₁

tenemos que $\beta_b = 0$ y $\alpha_b = 0.25$ si $k_i^2 = 0.25$ y $k_p^2 = 0.125$ para el PI₂

Ahora si se produce el evento discreto tal que la menor señal seleccionada es $u_a(t)$ tenemos las siguientes ecuaciones:

$$y(t+1) = -ay(t) + u_a(t-1) + \alpha_a r(t) - \alpha_a y(t) \quad (8.72)$$

definiendo

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = u_a(t)$$

$$x_3(t) = u_b(t)$$

tenemos que

$$x_1(t+1) = -(a + \alpha_a)x_1(t) + x_2(t) + \alpha_a r(t)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) - \alpha_a x_1(t) + \alpha_a r(t)$$

$$x_3(t+1) = x_3(t) - \alpha_b x_1(t) + \alpha_b r(t)$$

Finalmente el modelo en variables de estado de este evento discreto anterior es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a + \alpha_a) & 1 & 0 \\ -\alpha_a & 1 & 0 \\ -\alpha_b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_a \\ \alpha_a \\ \alpha_b \end{bmatrix} r(t) \quad (8.72)$$

del mismo modo si se produce el evento discreto tal que la menor señal seleccionada es $u_b(t)$ tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a + \alpha_b) & 0 & 1 \\ -\alpha_a & 1 & 0 \\ -\alpha_b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_b \\ \alpha_a \\ \alpha_b \end{bmatrix} r(t) \quad (8.73)$$

Implementación y resultados

Posteriormente se implemento el controlador supervisor híbrido con solución PWA que se observa en la Figura 8.15

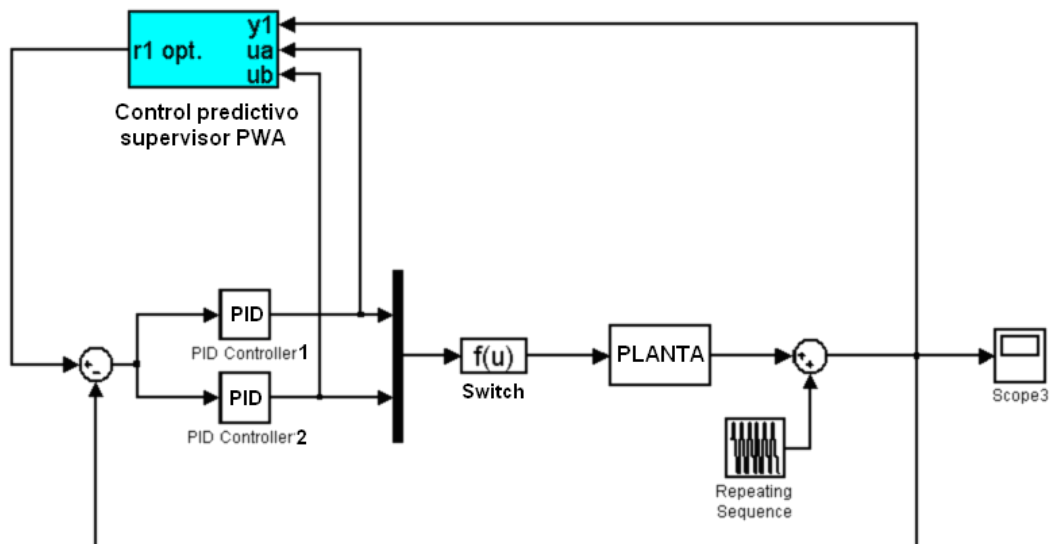


Figura 8.15. Implementación del control PWA sobre un planta con modelo tiene características híbridas

En este caso por ser un sistema de tres dimensiones no es posible dibujar la partición del espacio de estado como en el ejemplo anterior.

En la Figura 8.16 se presentan los resultados del controlador supervisor predictivo de la planta descrita. La gráfica superior presenta el set-point óptimo $r^*(t)$, la gráfica siguiente la variable de salida $y(t)$ y la gráfica inferior la variable manipulada $u(t)$, para el caso del controlador con set-point constante con línea azul y el controlador predictivo híbrido PWA. El programa utilizado se puede ver en el apéndice F

Se obtuvo una regla de control PWA sobre 1040 regiones.

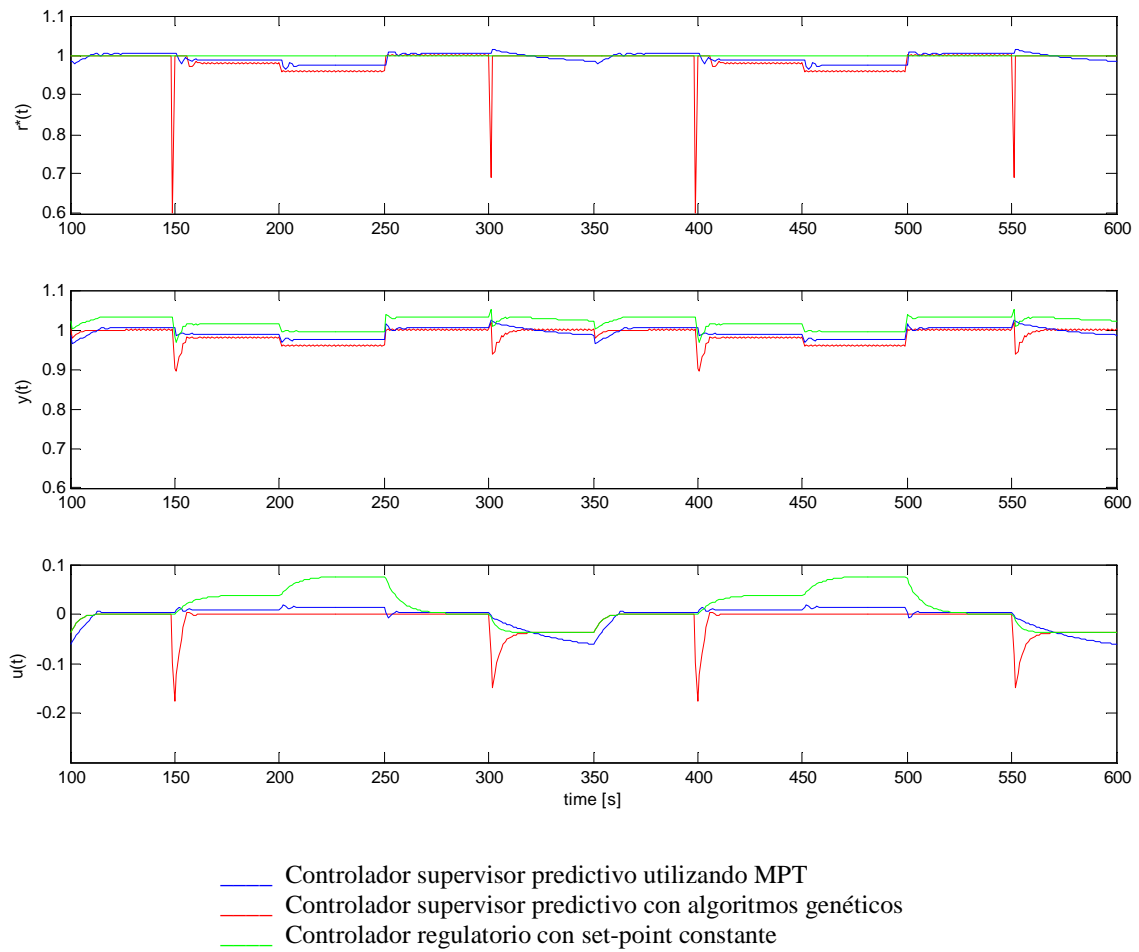


Figura 8.16. Controlador predictivo híbrido PWA con set-point óptimo $r^*(t)$, variable de salida $y(t)$ y $u(t)$ variable manipulada.

Análisis de resultados

En la Tabla 8.1 se presentan los valores medios de los índices de comportamiento de la función objetivo para los controladores supervisores de la Figura 8.16.

Tabla 8.1. Valores medios de los índices de comportamiento

	$J_{Pmech} = \sum_{j=1}^N (\hat{y}(t+j) - r_{set-point})^2$	$J_{\Delta U} = \sum_{i=1}^N \Delta u^2(t+i-1)$	J_{Cr}
Controlador supervisor predictivo con algoritmos genéticos	1.8061x10 ⁻³	4.2741x10 ⁻⁵	1.8488x10 ⁻³
Controlador supervisor predictivo utilizando programación multiparamétrica	5.4719x10 ⁻³	1.7488x10 ⁻³	7.2207x10 ⁻³
Control regulatorio con set-point constante	6.1686x10 ⁻³	3.7343x10 ⁻⁵	6.2059x10 ⁻³

La media de la función de penalización de set-point del controlador supervisor predictivo con algoritmos genéticos es por lo menos en un tercio de la función de penalización del controlador supervisor predictivo utilizando que utiliza programación multiparamétrica

Para este caso particular los controladores predictivos tienen tiempos de cómputo semejantes.

8.3. Discusión

Para lograr mejoras significativas en el resultado del control supervisor con MTP en especial en lo que se refiere a los ruidos generados en la señal de referencia óptima, es necesario aumentar su precisión lo que implica aumentar el número de regiones de la partición factible del espacio de estado, lo que conduce en un aumento significativo del tiempo de cómputo.

La aplicación de este sistema de control a la turbina a gas está lejos de lograrse debido a que este método es aplicable a sistemas de dimensiones menores es decir, con pocas variables de estado (no más de tres) y horizontes de predicción cortos ($N = 2$ o 3), condición que el modelo actual obtenido de la turbina a gas no cumple (el número de variables de estado para la turbina a gas es 17).

A pesar de lo mencionado el control óptimo con optimización multiparamétrica permitiría introducirse en relevantes temas tales como: el análisis de estabilidad de los controladores predictivos óptimos y el aumento del área de atracción, todo en un contexto de variables de estado. Lo cual, nos obliga a seguir profundizando en su conocimiento para superar las limitaciones encontradas y lograr controladores más robustos.

IX. Conclusiones

La principal contribución de esta tesis es el diseño e implementación de una estrategia de control supervisor predictivo híbrido en una central termoeléctrica de ciclo combinado

Los sistemas de control supervisor propuestos permitieron mejorar el funcionamiento del nivel regulatorio y optimización económica a través de la modificación dinámica de los set-points o referencias, manteniendo fijo todo su sistema regulatorio.

El trabajo aportó un diseño y desarrollo general de un controlador supervisor predictivo híbrido para sistemas multivariables con variables de estado cuantizadas. En particular, se consideró su aplicación a la optimización económica y regulatoria de una planta termoeléctrica de ciclo combinado.

Para la planta termoeléctrica, se logró una mejora sustancial (sobre el 74%) en la regulación de la frecuencia utilizando un controlador supervisor predictivo híbrido con optimización genética.

Los controladores supervisores predictivos propuestos entregaron un beneficio económico entre un 2% y 3% en comparación con la estrategia de control con set-point constante habitual para una central termoeléctrica. El controlador con enumeración explícita y el controlador basado en optimización genética son los que entregan el mayor beneficio económico.

Los principales efectos producidos en la central termoeléctrica de ciclo combinado por la implementación de los controladores supervisores híbridos diseñados para la Turbina a Gas y los controladores predictivos supervisores lineales para la Caldera y Turbina a Vapor son:

- Un 3.4% de ahorro en el combustible de la caldera al implementar cualquiera de los controladores predictivos supervisores diseñados para la turbina a gas. Al incluir un control supervisor lineal en la caldera se logra un ahorro de un 0.14 % adicional.
- Una mejora del 0.3% adicional en la regulación de planta de ciclo combinado cuando se incluye en la turbina a vapor un controlador supervisor predictivo lineal regulatorio.

Todos los controladores predictivos supervisores aplicados a la turbina a gas con función objetivo con característica económica y regulatoria, producen una mejora de dos órdenes de magnitud en regulación de la potencia total de la central completa con respecto al control con set-point constante. Claramente si se considera controladores predictivos con función objetivo con características sólo regulatorias, el controlador obtenido con enumeración explícita y el controlador logrado con optimización genética para la turbina a gas son los que presentan la mejor regulación de potencia total de la central completa.

Se demostró la estabilidad asintótica de controlador supervisor predictivo híbrido con función objetivo de carácter regulatorio utilizando conceptos como la región terminal invariante y coste terminal como función de Lyapunov. Sin embargo la necesidad de lograr la estabilidad exige aumentar significativamente el número de ecuaciones en optimizador con un gran costo de tiempo computacional asociado.

Por otra parte a pesar del potencial del control óptimo basado en optimización multiparamétrica con una solución directa para la turbina a gas está lejos de lograrse debido a que, este método es aplicable a sistemas de dimensiones mucho menores. Es decir, esta condición impide su aplicación al modelo actual obtenido de la turbina a gas.

Bibliografía

- A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E.N. Pistikopoulos. “The explicit linear quadratic regulator for constrained systems”. *Automática*, 38(1):3–20, 2002.
- Blanchini, F. (1994), “Ultimate boundedness control for discrete-time uncertain system via set-induced Lyapunov functions”, *IEEE Transactions on Automatic Control* 39, 428–433.
- Boissenin Y and A. castanier “Choosing the right combined cycle power plant”. *Alstom Gas Turbines Reference Library*, 1988.
- Borelli, F. “Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems ” , Berlin: Springer-Verlag, (2003).
- Branicky M., (1998) “Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):475-482
- Bryson, A. & Ho, Y. (1969), “Applied Optimal Control”, Blaisdell Publishing Company.
- Clarke, D.W. (1988). “Application of Generalized Predictive Control to Industrial Processes”. *IEEE Control Systems Magazine* 122, 49-55.
- Cori, R. y T. Busi (1977) “Parameter identification of a drum boiler power plant”. *Proceeding of the 3rd Power Plants Dynamics, Control and Testing Symposium*, Knoxville, Tennessee, Sept. 7-9.

- David R., Alla H., (1992) "Petri nets and Grafcet: Tools for modeling discrete event systems", Prentice Hall.
- David R., Alla H., (2001) "On Hybrid Petri Nets" Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, vol. 11, pp. 9-40.
- DeCarlo R., Branicky M., Pettersson S., Lennartson B., (2000) "Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems", Proceedings of IEEE, 88(7):1069-1082
- Dieck-Assad, G. y G. Masada (1987) "Optimal set-point scheduling in a boiler-turbine system". IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. EC-2, N° 3, September, 388-395.
- G. Ferrari-Trecate, M. Muselli, D. Liberati, and M. Morari. "Identification of piece-wise affine and hybrid systems". Technical report, ETH Zuerich, 2000. Tech. Rep. AUT00-21, <http://www.control.ethz.ch>.
- C. Filippi. "On the geometry of optimal partition sets in multiparametric linear programming". Technical Report 12, Department of Pure and Applied Mathematics, University of Padova, Italy, June 1997.
- Floudas, C.A. (1995). "Non-Linear and Mixed Integer Optimization". Oxford Academic Press.
- García E., Morant F., Mascarós V., Quiles E., Correcher A., (2003) "Petri net place associated to a continuous or discretized control algorithm", ADHS'03: IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, Saint- Malo Brittany (France).
- García E., Morant F., Mascarós V., Quiles E., Correcher A., (2003) "PNPACDA, Petri Nets with places associated to continuous or discretized control algorithms for hybrid systems modelling", ISIE'03: 2003 IEEE International Symposium on Industrial Electronics, Rio de Janeiro (Brazil).
- E. Gilbert, I. Kolmanovsky, (1999). "Fast reference governors for systems with state and control constraints and disturbance inputs". Int. J. Robust Nonlinear Control, vol. 9, no. 15, pp. 1117-1141.
- R. Garduno-Ramirez and K. Y. Lee, "Multiobjective Optimal Power Plant Operation Through Coordinate Control with Pressure Set Point Scheduling," IEEE Trans. Energy Conversion, vol. 16, no. 2, pp. 115-122, 2001.
- Gómez Ortega, J. y E.F. Camacho (1996). "Mobile Robot Navigation in a Partially Structured Environment using Neural Predictive Control". Control Engineering Practice 4, 1669-1679.
- Henzinger T.A. (1996) "The Theory of Hybrid Automata", Proceedings of the 11 Annual Symposium on Logic in Computer Science (LICS), IEEE Computer Society Press,

pp 278-292

- Heemels, W.P.M.H., B. De Schutter y A. Bemporad (2001). "Equivalence of Hybrid Dynamical Models". *Automatica* 37(7), 1085-1091.
- J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, "Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. Reading", MA: Addison-Wesley, 1979.
- Keerthi, S. S. & Gilbert, E. G. (1987), "Computation of minimum-time feedback control laws for discrete-time systems with state-control constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control* 32, 432-435.
- Kerrigan, E. C. (2000), "Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control", PhD thesis, University of Cambridge.
- Khalil, H. (1996), "Nonlinear Systems" , 2 edn, Prentice-Hall.
- Koutsoukos X., Antsaklis P., Stiver J., Lemmon M., (2000) "Supervisory control of hybrid systems", *Proceedings of IEEE*, 88(7):1026-1049
- P.Kundur, "Power System stability and Control", McGraw_Hill, 1994.
- Lazar M., Heemels W., Weiland S., Bemporad A (2004). "Stabilization for model predictive control of constrained PWA systems" 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
- Liberzon D., Morse A., (1999) "Basic problems in stability and design of switched systems", *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5):59-70
- Limón, D. "Control predictivo de sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez", Tesis de Doctorado, Universidad de Sevilla.
- Linkers, D.A. y M. Mahfonf (1994). "Advances in Model-Based Predictive Control" . Chap. Generalized Predictive Control in Clinical Anaesthesia. Oxford University Press.
- Luenberger, D. E. (1989), "Programación lineal y no lineal", Addison-Wesley Iberoamericana.
- Kerrigan, E. C. & Maciejowski, J. M. (2000), "Invariant sets for constrained discrete-time systems with application to feasibility in model predictive control", en 'Proceedings of the CDC'.
- Magni, L., De Nicolao, G., Magnani, L. & Scattolini, R. (2001), "A stabilizing modelbased predictive control algorithm for nonlinear systems", *Automatica* 37, 1351- 1362.
- D.Q. Mayne. "Constrained optimal control". European Control Conference, Plenary Lecture, September 2001.

- Michel A., (1999) "Recent trends in the stability analysis of hybrid dynamical systems", IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 46(1):120-134.
- Michel A., Hu B., (1999) "Towards a stability theory of general hybrid dynamical systems", Automatica, 35(3):371-384
- Ordys, A., A. Pike, M. Johnson, R. Katebi, y M. Grimble (1994) "Modelling and simulation of power generation plants". Springer-Verlag, Londres.
- Pettersson S., Lennartson B., (1995) "Hybrid Modelling focused on Hybrid Petri Nets", 2nd European Workshop on Hybrid Systems", pp. 303-309, Grenoble.
- R. David and H. Alla, "Petri Nets and Grafcet", Prentice Hall Int. 1992.
- Raisch J., O'Young S., (1998) "Discrete approximation and supervisory control of continuous systems", IEEE Transactions on Automatic Control, 43(4):568-573
- Richalet, J. (1993). "Industrial Applications of Model Based Predictive Control". Automatica 29(5), 1251-1274.
- Richalet, J., A. Rault, J.L. Testud y J. Papon (1978). "Model Predictive Heuristic Control: Application to Industrial Processes". Automatica 14(2), 413-428.
- Shobeiri, T. (1987) "Digital computer simulation of the dynamic operating behaviour of gas turbines". Brown Boveri Review, 3-87.
- E.D. Sontag. "Nonlinear regulation: The piecewise linear approach". IEEE Trans. Automatic Control, 26(2):346-358, April 1981.
- Stiver J., Antsaklis P., Lemmon M., (1996) "A logical DES approach to the design of hybrid control systems", Mathl.Comput.Modeling, 23 (11/12):55-76
- Thevenon L., Flaus J.-M., (2000) "Modular Representation of Complex Hybrid Systems: Application to the Simulation of Batch Processes", Simulation Practice and Theory (SIMPRA)
- F. Tadeo, T. Alvarez, M. Grimble, R. Vilanova, (2002). "Implementation of constrained predictive outer-loop controllers: Application to a boiler control system". Proceedings of the IFAC 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain.
- Vidyasagar, M. (1993), "Nonlinear Systems Theory", 2 edn, Prentice-Hall.
- A.J.Wood, B.F.Wollenberg, "Power Generation, Operation, an Control" , John Wiley & Sons, 1996
- Ye H., Michel A., Hou L., (1998) "Stability theory for hybrid dynamical systems", IEEE Transactions on Automatic Control, 43(4):461-474.

Zafiriou, E. (1990). "Robust Model Predictive Control of Processes with Hard Constraints".
Computers and Chemical Engineering 14(4/5), 359-371.

Apéndice A1

En este apartado se entregan las ecuaciones de los componentes principales de la central termoeléctrica.

A.1. Caldera

Los balances termodinámicos que se satisfacen son:

Balance de calor

$$Q_{in} + w_{in}h_{in} = w_{ou}h_{ou} + V \frac{d}{dt}(\rho_{ou}h_{ou}) \quad (A1.1)$$

donde Q_{in} es el flujo de calor de entrada, w_{in} es el flujo másico de entrada, h_{in} es la entalpía específica de entrada, w_{ou} es el flujo másico de salida, h_{ou} es la entalpía específica de salida, V es el volumen y ρ_{ou} es la densidad específica de salida.

Balance de masa

$$w_{in} - w_{ou} = \frac{d}{dt}(\rho_{ou}V) \quad (A1.2)$$

Balance de momentum (pérdidas de fricción)

$$p_{in} - p_{ou} = \gamma \frac{w_{in}^2}{\rho_{in}} \quad (A1.3)$$

donde p_{in} es la presión de entrada, p_{ou} es la presión de salida, γ es el coeficiente de fricción y ρ_{in} es la densidad específica de entrada.

– Además, los calores transferidos debido a la radiación y convección son modelados por las siguientes ecuaciones:

Ley de Stefan-Boltzman para la radiación

$$Q_r = K_r \theta w_g T_g^4 \frac{1}{\rho_g} \quad (A1.4)$$

donde Q_r es el flujo de calor por radiación, K_r es un coeficiente experimental de radiación, θ es el ángulo esférico, w_g es el flujo de sustancias a la combustión, T_g es la temperatura de los gases de la combustión y ρ_g es la densidad de los gases de la combustión.

Calor transferido gas-metal por convección

$$Q_{cgm} = K_{cgm} w_g^{0.6} (T_g - T_m) \quad (A1.5)$$

donde Q_{cgm} es el flujo de calor por convección del gas al metal, K_{cgm} es un coeficiente experimental de convección gas-metal, T_g es la temperatura del gas y T_m es la temperatura del metal.

Calor transferido metal-vapor por convección

$$Q_{cmv} = K_{cmv} w_s^{0.8} (T_m - T_s) \quad (A1.6)$$

donde Q_{cmv} es el flujo de calor por convección del metal al vapor, K_{cmv} es un coeficiente experimental de convección metal-vapor, w_s es el flujo másico de vapor y T_s es la temperatura del vapor.

A.2. Turbina a gas

Los flujos a través del compresor y turbina son descritos por un proceso politrópico uniforme adiabático y se describen a continuación:

Ecuación de flujo unidimensional para una compresión politrópica uniforme

$$w_a = A_o \left[\left(\frac{2m_a}{\eta_\infty(m_a - 1)} \right) \rho_i p_{cin} \left(r_c^{\frac{2}{m_a}} - r_c^{\frac{(m_a+1)}{m_a}} \right) \right]^{1/2} \quad (A1.7)$$

donde w_a es el flujo másico de aire al compresor, A_o es el área del flujo de salida del compresor, m_a es un índice, η_∞ es la eficiencia politrópica, ρ_i es la densidad del aire de entrada, p_{cin} es la presión del aire de entrada y r_c es el radio de presión salida/entrada.

Flujo másico de gas a través de la turbina

$$w_G = A_{To} \left[\left(\frac{2\eta_{\infty T} m_{cg}}{m_{cg} - 1} \right) \rho_{Tin} p_{Tin} \left(r_T^{\frac{2}{m_{cg}}} - r_T^{\frac{(m_{cg}+1)}{m_{cg}}} \right) \right]^{1/2} \quad (A1.8)$$

donde w_G es el flujo másico de gas de la turbina, A_{To} es el área del flujo de salida de la turbina, $\eta_{\infty T}$ es la eficiencia politrópica, m_{cg} es el índice politrópico de los gases de la combustión, ρ_{Tin} es la densidad del gas de entrada, p_{Tin} es la presión del gas de entrada y r_T es el radio de presión en la turbina.

A.3. Turbina a vapor

Las principales ecuaciones para la turbina a vapor están dadas por:

Balance de masa para el vapor

$$w_i - w_o = V \frac{d}{dt} (\rho_o) \quad (A1.9)$$

donde w_i es el flujo de vapor de entrada, w_o es el flujo de vapor de salida, V es el volumen de almacenamiento y ρ_o es la densidad del vapor de salida.

Dinámica del flujo másico

$$\frac{d}{dt} (w_o) = \frac{1}{\tau} (w_i - w_o) \quad (A1.10)$$

donde τ es la constante de tiempo para una etapa o sección de la turbina.

Balance de calor

$$w_i h_i - w_o h_o = V \frac{d}{dt} (\rho_o h_o) \quad (A1.11)$$

donde h_i es la entalpía específica del vapor de entrada y h_o es la entalpía específica del vapor de salida.

Ecuación de tobera

$$r^{\left(\frac{2}{m}\right)} - r^{\left(\frac{m+1}{m}\right)} = \frac{w_o^2}{A^2 \rho_o p_o} \left(\frac{m-1}{2\eta_\infty m} \right) \quad (\text{A1.12})$$

donde r es el radio de presión, m es un índice, A es el área de salida de la sección, p_o es la presión de salida y η_∞ es la eficiencia politrópica de la sección.

Apéndice A2

En este apartado se presentan los modelos implementados en MATLAB Simulink para la central termoeléctrica de ciclo combinado.

Las pruebas por simulación muestran que los controladores responden apropiadamente. Además, las respuestas obtenidas son similares al comportamiento de una planta termoeléctrica real.

Por otro lado, 100 seg. de simulación de la estrategia de control para la caldera equivalen aprox. a 208 seg. de tiempo real. Para la turbina a gas, 100 seg. son aprox. 327 seg. de tiempo real y para la turbina a vapor 100 seg. equivalen a 369 seg. de tiempo real. El tiempo de simulación para las turbinas es mayor pues se deben resolver bucles algebraicos.

Finalmente, se debe mencionar que los controladores fueron construidos en base a bloques de SIMULINK, lo cual permite modificar sus parámetros fácilmente.

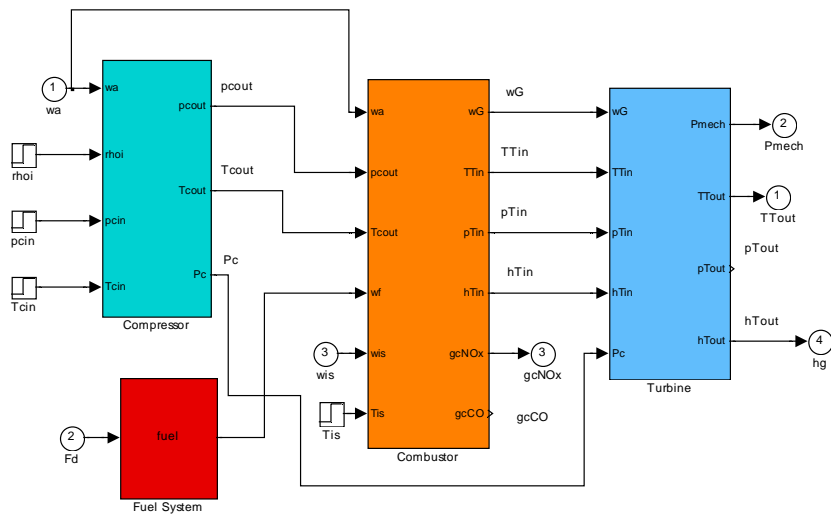


Figura A2.1. Simulador de la turbina a gas.

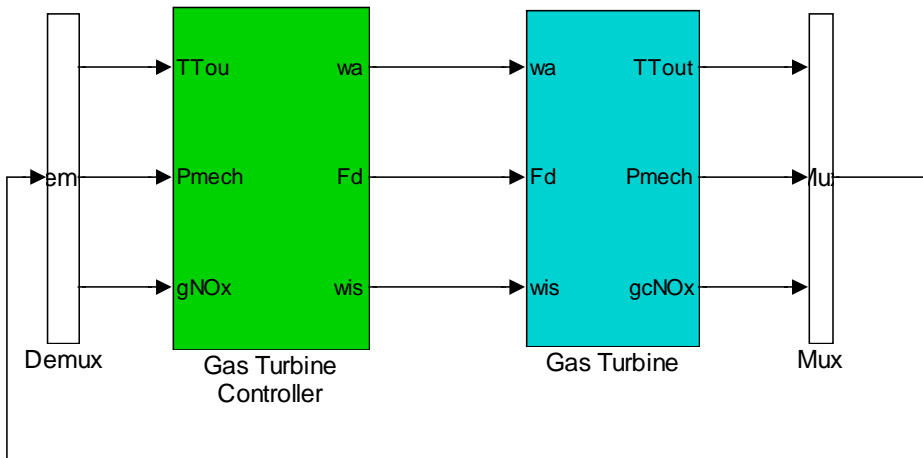


Figura A2.2. Detalle Estrategia de control para la turbina a gas.

En la Figura A2.2 se presenta la estrategia de control para la turbina a gas. Las variables controladas son la temperatura de los gases de escape ($T_{T_{out}}$), la potencia de la turbina a gas (P_g) y la concentración de NO_x en los gases de escapes (g_{cNO_x}). Las variables manipuladas son el flujo de aire al compresor (w_a), el flujo de combustible (F_d) y el flujo de vapor de inyección a la cámara de combustión (w_{is}).

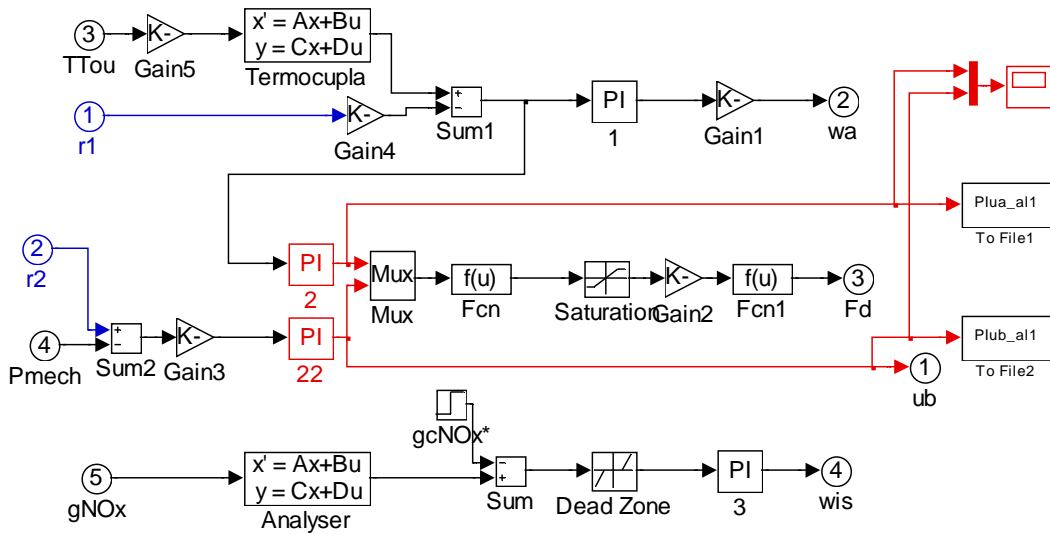


Figura A2.3. Detalle Estrategia de control para la turbina a gas.

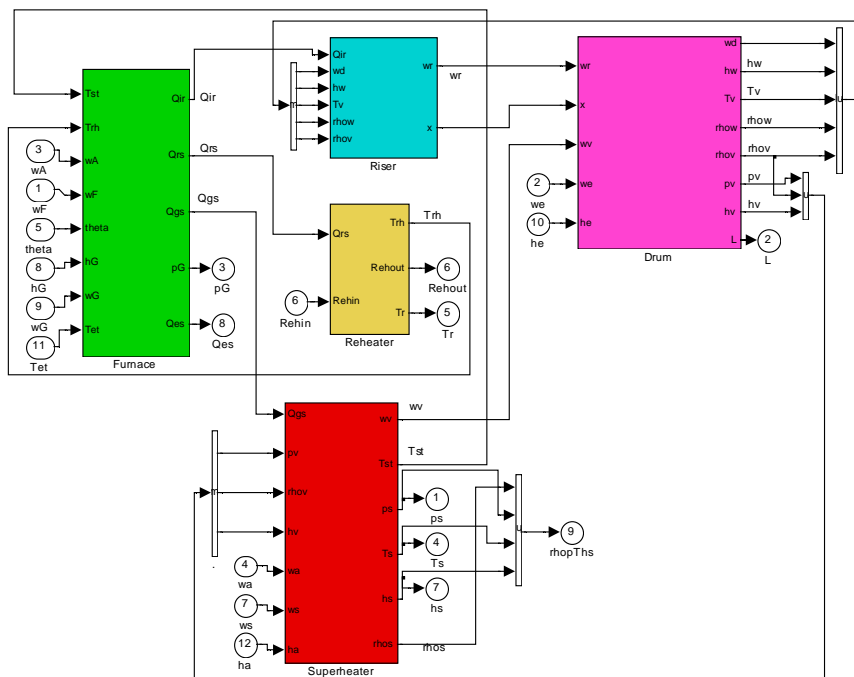


Figura A2.4. Simulador de caldera.

En la Figura A2.4, se muestra una estrategia de control basada en controladores PI para la caldera. En este caso, las variables controladas son la presión del vapor sobrecalentado (p_s), el nivel de agua del tambor (L), la presión de los gases en el horno (p_G) y la temperatura del vapor sobrecalentado (T_s); y las variables manipuladas son el flujo de combustible (w_f), el flujo de agua de alimentación (w_e), flujo de aire (w_A) y el flujo de agua del atempORIZADOR (w_{at}) respectivamente.

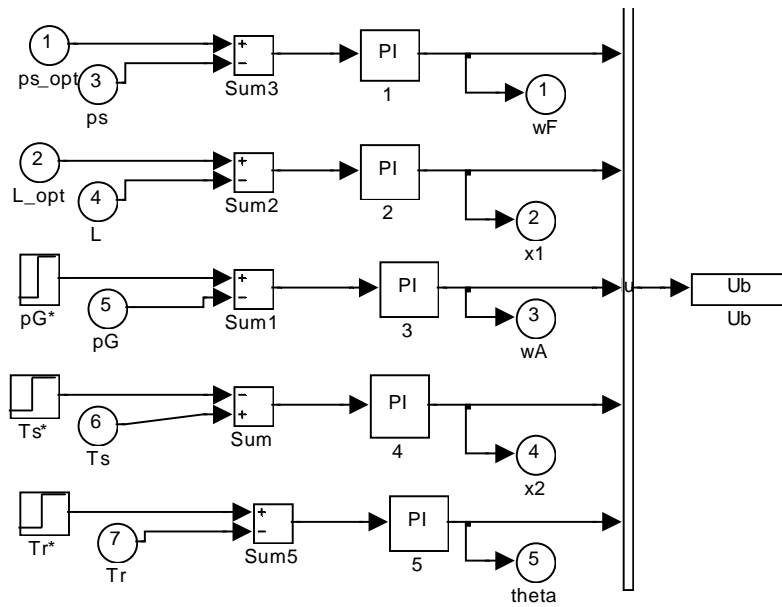


Figura A2.5. Estrategia de control para la caldera.

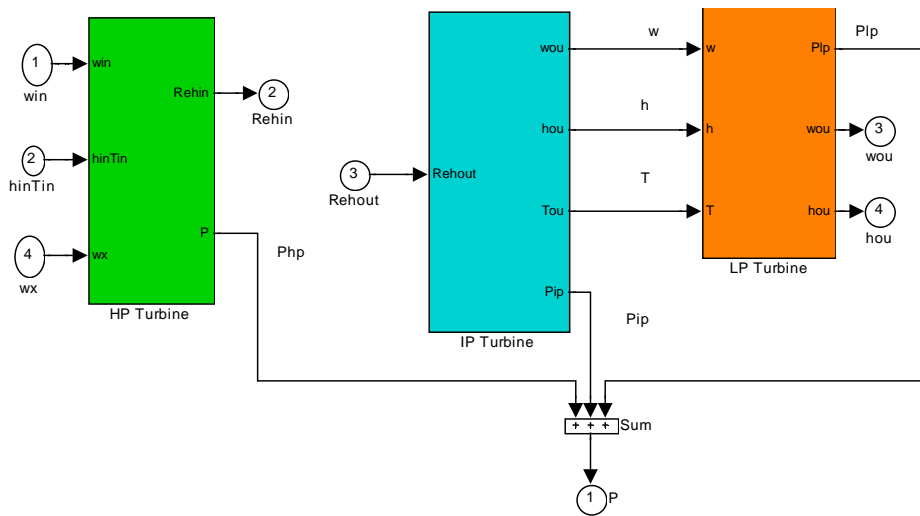


Figura A2.6. Turbina a vapor.

En la Figura A2.6, se muestra la estrategia de control para la turbina a vapor. La potencia de la turbina a vapor (P_s) es controlada manipulando el flujo de agua a la turbina de alta presión (w_{in}).

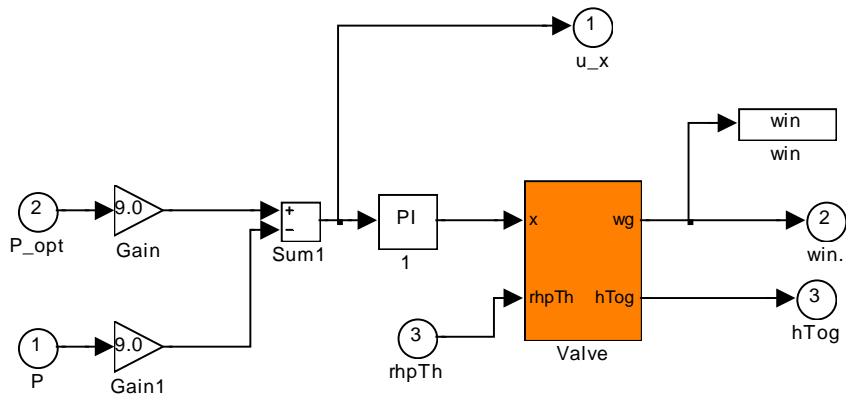


Figura A2.7. Estrategia de control para la turbina a vapor.

Apéndice B1 (Modelación difusa)

A continuación se describen los modelos de Takagi & Sugeno que se consideran en este apartado.

B1.1. Modelo difuso de Takagi & Sugeno

El modelo difuso de Takagi & Sugeno está compuesto por un conjunto de reglas en cuyas premisas las variables de entrada (x_1, \dots, x_n) son relacionadas entre sí utilizando el operador lógico “and”, mientras que en las consecuencias, la salida del modelo “y” es calculada como una combinación lineal de las entradas más una constante. Es decir, el modelo difuso es un conjunto de N_r reglas del tipo:

$$\text{Si } x_1 \text{ es } R_{r1} \text{ y } \dots \text{ y } x_n \text{ es } R_{rn} \quad \text{then} \quad y = \gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_i \quad (r=1, \dots, N_r) \quad (\text{B1.1})$$

con R_{ri} conjunto difuso i .

Método de identificación de Takagi & Sugeno

Dado un conjunto de datos de entrada-salida, el algoritmo determina los parámetros de las consecuencias, γ_{ri} ($r=1, \dots, N_r$; $i=0, \dots, n$), que minimizan el error medio cuadrático entre salida real y la salida del modelo difuso.

Para todos los datos de las variables de entrada (x_{k1}, \dots, x_{kn}) se calcula los grados de pertenencia a sus respectivos conjuntos difusos, y evaluando los conectivos “and” de las premisas se calcula el grado de validez de la regla r , $W_r^{(k)}$, con $r=1, \dots, N_r$.

La salida del modelo correspondiente a los k -ésimos valores de las entradas es:

$$y_k = \frac{\sum_{r=1}^{N_r} \left[W_r^{(k)} \left(\gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_{ki} \right) \right]}{\sum_{r=1}^{N_r} W_r^{(k)}} = \sum_{r=1}^{N_r} \left[\hat{W}_r^{(k)} \left(\gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_{ki} \right) \right] \quad (\text{B1.2})$$

$$\text{con} \quad \hat{W}_r^{(k)} = \frac{W_r^{(k)}}{\sum_{r=1}^{N_r} W_r^{(k)}} \quad (\text{B1.3})$$

En forma vectorial se tiene:

$$\hat{y}_k = \left[\hat{W}_1^{(k)} \quad \dots \quad \hat{W}_{N_r}^{(k)} \quad \hat{W}_1^{(k)} x_{k1} \quad \dots \quad \hat{W}_{N_r}^{(k)} x_{k1} \quad \dots \quad \hat{W}_1^{(k)} x_{kn} \quad \dots \quad \hat{W}_{N_r}^{(k)} x_{kn} \right] \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{Nr0} \\ \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{Nr1} \\ \vdots \\ \gamma_{1n} \\ \vdots \\ \gamma_{N,n} \end{bmatrix} \quad (\text{B1.4})$$

Agrupando expresiones para todas las muestras se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A\Gamma = y \quad (\text{B1.5})$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} \hat{W}_1^{(1)} & \dots & \hat{W}_{N_r}^{(1)} & \hat{W}_1^{(1)} x_{11} & \dots & \hat{W}_{N_r}^{(1)} x_{11} & \dots & \hat{W}_1^{(1)} x_{1n} & \dots & \hat{W}_{N_r}^{(1)} x_{1n} \\ \hat{W}_1^{(2)} & \dots & \hat{W}_{N_r}^{(2)} & \hat{W}_1^{(2)} x_{21} & \dots & \hat{W}_{N_r}^{(2)} x_{21} & \dots & \hat{W}_1^{(2)} x_{2n} & \dots & \hat{W}_{N_r}^{(2)} x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{W}_1^{(N)} & \dots & \hat{W}_{N_r}^{(N)} & \hat{W}_1^{(N)} x_{N1} & \dots & \hat{W}_{N_r}^{(N)} x_{N1} & \dots & \hat{W}_1^{(N)} x_{Nn} & \dots & \hat{W}_{N_r}^{(N)} x_{Nn} \end{bmatrix} \quad (\text{B1.6})$$

$$\Gamma = \left[\gamma_{10} \quad \dots \quad \gamma_{Nr0} \quad \gamma_{11} \quad \dots \quad \gamma_{Nr1} \quad \dots \quad \gamma_{1n} \quad \dots \quad \gamma_{N,n} \right] \quad (\text{B1.7})$$

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]^T \quad (\text{B1.8})$$

Los parámetros de las consecuencias del modelo estarán dados por:

$$\Gamma = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (\text{B1.9})$$

Para que sea factible determinar los parámetros de las consecuencias, γ_{ri} ($r=1, \dots, Nr$; $i=0, \dots, n$), se debe cumplir que el número de éstos sea menor o igual que el número de datos, Nr es decir:

$$(n+1)Nr \leq N \quad (\text{B1.10})$$

donde

n : número de variables de entrada.

Nr : número de reglas.

N : número de datos.

B1.2. Método de identificación general

En esta sección se muestra el método de identificación utilizado para lograr la estructura óptima de las premisas y parámetros del modelo difuso y las variables de entrada relevantes.

Este algoritmo determina los parámetros del modelo que minimizan el error medio cuadrático. La forma de determinar el error depende de como se calcula la salida del modelo.

Una propiedad importante del algoritmo es que se determina en forma automática la estructura y el número de reglas, mediante algoritmos de clustering difuso y optimización estructural. Obtenemos de este algoritmo valores iniciales para los parámetros de las premisas los cuales se estiman posteriormente con un método de optimización.

El modelo utilizado, es una relación no lineal entre las variables de la siguiente forma:

$$\hat{y} = f(X) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{B1.11})$$

donde

$X = x_1, \dots, x_n$: Variables de entrada.

$$\begin{aligned} \text{con } x_i &= y_{k-i} & i=1, \dots, na & \text{ regresores de } y \\ x_j &= u_{k-j} & j=na+1, \dots, n & \text{ regresores de } u \text{ y su correspondiente retardo} \end{aligned} \quad (\text{B1.12})$$

\hat{y} : Salida del modelo.

Además se define:

$$X_k = x_{k1}, \dots, x_{kn} : \text{Muestras k-ésima de las variables de entrada.} \quad (\text{B1.13})$$

- y : Variable de salida real.
 \hat{y} : Muestra k-ésima de la salida.
 \hat{y}_k : Valor de la salida del modelo para la k-ésima muestra.

Cada una de las N_r reglas del modelo se asocia a cada entrada i un conjunto difuso R_{ri} . De este modo, la regla r del modelo, para $r = 1, \dots, N_r$, tiene la siguiente forma:

$$\text{Si } x_1 \text{ es } R_{r1} \text{ y ... y } x_n \text{ is } R_{rn} \text{ entonces } \hat{y} = f_r(X) \quad (\text{B1.14})$$

con

$$f_r(X) = \gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_i \quad f_r^{(k)} = f_r(X_k) \quad (\text{B1.15})$$

Los coeficientes γ_{ri} ($r=1, \dots, N_r$; $i=0, \dots, n$) son parámetros de las consecuencias.

El grado de pertenencia del valor k-ésimo de la entrada al conjunto difuso asociado a ella en la regla r se calcula a través de una función de pertenencia que contiene dos parámetros α y β cuya expresión es :

$$\mu_{ri}^{(k)} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{ri}(x_{ki} - \beta_{ri}))^2} \quad (\text{B1.16})$$

El grado de validez de la regla r para el valor k-ésimo de las variables de entrada se calcula utilizando la regla del producto, es decir:

$$W_r^{(k)} = \prod_{i=1}^n \mu_{ri}^{(k)} \quad (\text{B1.17})$$

Normalizando las reglas para que los grados de validez sumen uno, se tiene:

$$\hat{W}_r^{(k)} = \frac{W_r^{(k)}}{\sum_{u=1}^{N_r} W_u^{(k)}} \quad (\text{B1.18})$$

La salida del modelo difuso para la muestra k-ésima de la entrada está dada por:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_k &= \sum_{r=1}^{Nr} \hat{W}_r^{(k)} f_r^{(k)} = \sum_{r=1}^{Nr} \left[\hat{W}_r^{(k)} \left(\gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_{ki} \right) \right] \\
&= \left(\sum_{r=1}^{Nr} \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r1} \right) x_{k1} + \dots + \left(\sum_{r=1}^{Nr} \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{rn} \right) x_{kn} + \left(\sum_{r=1}^{Nr} \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r0} \right) \\
&= d_{k1} x_{k1} + \dots + d_{kn} x_{kn} + d_{k0}
\end{aligned} \tag{B1.19}$$

con

$$d_{ki} = \sum_{r=1}^{Nr} \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{ri} \quad i = 0, \dots, n$$

B1.3. Identificación de la estructura de premisas e inicialización de parámetros.

Se considera el algoritmo de clustering difuso para determinar el número óptimo de reglas y también los valores iniciales de los parámetros de las funciones de pertenencia.

El algoritmo que determina los puntos del espacio más representativo, conocidos como centros de los clusters, y los grados de pertenencia de las muestras a dichos conjuntos, se conoce como FCM (Fuzzy Clustering Means) [Hathaway 1993].

De acuerdo a la estructura de las consecuencias, esta se puede interpretar geoméricamente como que el espacio entrada-salida se divide en conjuntos con forma de plano (n+1)-dimensional. Luego se puede obtener una estimación de las funciones de pertenencia utilizando un algoritmo de clustering difuso que divida al espacio de las variables en conjuntos con formas de hiperplanos. En un espacio n-dimensional la distancia entre un punto $[x_{k1} \dots x_{kn} y_k]$ y el hiperplano $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$ en la dirección del eje y es:

$$d_{kr} = \left| y_k - \sum_{i=1}^n a_i x_{ki} - b \right| \tag{B1.20}$$

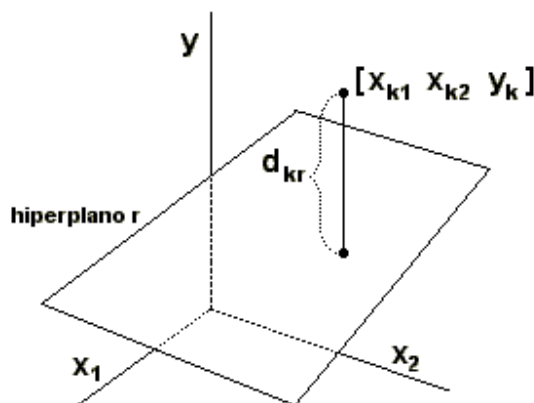


Figura 3.3 Distancia de un punto a un plano en la dirección y

Dado el número de cluster N_c y los datos de entrada-salida, el algoritmo de clustering determina los coeficientes de las ecuaciones de los hiperplanos que mejor representa a cada conjunto de datos, y los grados de pertenencia que asocian a cada muestra a los hiperplanos. La idea es que los grados de pertenencia de los puntos cercanos a los hiperplanos sean grandes comparados con los grados de pertenencia de los puntos lejanos.

$$\min z_{\rho}(u,a,b) = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr}^{\rho} d_{kr}^2 \quad (\text{B1.21})$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr} = 1 \quad k = 1 \dots N \quad (\text{B1.22})$$

- u_{kr} : grado de pertenencia de la k-ésima muestra al r-ésimo cluster.
- d_{kr} : distancia de la muestra k-ésima al r-ésimo hiperplano.
- x_{ki} : vector con la k-ésima muestra de las entradas.
- y_k : muestra k-ésima de la salida.
- a_{ri}, b_r : coeficiente del hiperplano r.
- ρ : fuzzificador de conjuntos difusos. Se usará $\rho = 2$.
- N_c : número de cluster.
- N : número de muestras.
- C_i : el prototipo del i-ésimo cluster

Para minimizar la función (B1.21) se utiliza una versión adaptada del método del gradiente. Los coeficientes a_{ri} y b_r se desplazarán según la dirección de máximo descenso, mientras que los grados de pertenencia se actualizarán de modo de satisfacer las restricciones.

La solución se obtiene a partir del siguiente Lagrangiano:

$$\ell = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr}^{\rho} d_{kr}^2 + \sum_{k=1}^N \lambda_k \left(1 - \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr} \right) \quad (\text{B1.23})$$

Por lo tanto las condiciones de Kun-Tucker son:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a_{rj}} = \frac{\partial z_{\rho}}{\partial a_{rj}} = \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr}^{\rho} \frac{\partial (d_{kr}^2)}{\partial a_{rj}} = -2 \sum_{k=1}^N \left[u_{kr}^{\rho} \left(y_k - \sum_{i=1}^n a_{ri} x_{ki} - b_r \right) x_{kj} \right] \quad (\text{B1.24})$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b_r} = \frac{\partial z_\rho}{\partial b_r} = \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr}^\rho \frac{\partial (d_{kr}^2)}{\partial b_r} = -2 \sum_{k=1}^N \left[u_{kr}^\rho \left(y_k - \sum_{i=1}^n a_{ri} x_{ki} - b_r \right) \right] \quad (\text{B1.25})$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial u_{kr}} = \rho u_{kr}^{\rho-1} d_{kr}^2 - \lambda_k = 0 \quad (\text{B1.26})$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_k} = 1 - \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr} = 0 \quad (\text{B1.27})$$

para $r = 1, \dots, N_c$, $k = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n$.

De las ecuaciones B1.21 a B1.25 se obtienen los centros de los cluster y las funciones de pertenencia.

$$C_i = \frac{\sum_{k=1}^N (u_{ik})^\rho \cdot X_k}{\sum_{j=1}^{N_c} (u_{ij})^\rho} \quad \forall i = 1, \dots, N_c \quad (\text{B1.28})$$

$$u_{kr} = \frac{1}{\sum_{s=1}^{N_c} \left(\frac{d_{kr}}{d_{ks}} \right)^{\frac{2}{\rho-1}}} \quad \forall i = 1, \dots, N_c \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (\text{B1.29})$$

El algoritmo incluye los siguientes pasos:

- a. Iniciar los u_{kr} con valores aleatorios.
- b. Calcular los centros de los cluster. Ecuación (B1.28)
- c. Calcular la distancia de la muestra k-ésima al r-ésimo hiperplano. Ecuación (B1.20)
- d. Actualizar los grados de pertenencia. Ecuación (B1.29)
- e. Inicialización de los coeficientes a y b por regresión lineal
- f. En cada iteración:
 - o Calcular las derivadas con respecto a los coeficientes de los planos usando (B1.24) y (B1.25)
 - o Desplazar los a_{ri} y b_r en la dirección de máximo descenso.
 - o Calcular las distancias de las muestras a los planos definidos por los coeficientes desplazados, utilizando (B1.20)
 - o Actualizar los grados de pertenencia actualizando la expresión (B1.29)
 - o Calcular la función objetivo a partir de (B1.21). Si disminuyó, continuar. Si no, reducir la tasa en un factor, reconsiderar los valores anteriores de los coeficientes y repetir el paso.
- g. Si la función objetivo varía menos que un umbral, terminar. Si no, volver al paso f

El número óptimo de clusters, se obtiene al aplicar el algoritmo iterativamente para $N_c = 2, 3, \dots$, evaluando en cada caso la función decreciente dada por:

$$S(N_c) = \sum_r \sum_{kr} u_{kr} \rho(d_{kr}^2 - \bar{d}_r^2) \quad (\text{B1.30})$$

donde d_r es la distancia del valor promedio de las muestras al hiperplano r . La función se sustenta en que la partición del espacio debe ser tal que cada cluster debe ser lo más distinto posible a los otros, pero sus elementos deben ser lo más parecidos entre sí. Determinados los clusters se identifica los valores iniciales de los parámetros de las funciones de pertenencia de las entradas, que son utilizados en el algoritmo de optimización del error. El valor inicial del parámetro β_{ri} es el promedio ponderado de las coordenadas i -ésimas de las muestras por los grados de pertenencia al hiperplano r , es decir:

$$\beta_{ri}^{(0)} = \frac{\sum_{k=1}^N u_{kr} x_{ki}}{\sum_{k=1}^N u_{kr}} \quad (\text{B1.31})$$

Esto debido a que el vector $[\beta_{r1} \beta_{r2} \dots \beta_{rn}]$ debe ser el centro del cluster r . A su vez, los valores iniciales de los parámetros α_{ri} tendrán relación directa con el recíproco de la desviación estándar de los datos al interior de cada cluster:

$$\alpha_{ri}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N u_{kr} (x_{ki} - \beta_{ri}^{(0)})^2}{\sum_{k=1}^N u_{kr}}}} \quad (\text{B1.32})$$

B1.4. Identificación de variables de entrada relevantes

Para determinar la estructura óptima del modelo difuso a utilizar se hace necesario identificar las variables de entrada más significativas.

Dado el siguiente modelo no lineal:

$$y(k) = f(X(k)) \quad (\text{B1.33})$$

con

$$X(k) = \begin{bmatrix} y(k-1) \\ \vdots \\ u(k-na) \\ u(k-nk-1) \\ \vdots \\ u(k-nk-nb) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{na} \\ x_{na+1} \\ \vdots \\ x_{na+nb} \end{bmatrix} \quad (\text{B1.34})$$

La relevancia de una variable se calcula con la sensibilidad dada por la derivada de la salida con respecto a las entradas:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \quad (\text{B1.35})$$

Para el modelo difuso Takagi & Sugeno se tiene:

$$\text{Si } y(k-1) \text{ es } R_1^r \text{ y ... y } y(k-na) \text{ es } R_{na}^r \text{ y} \\ u(k-nk-1) \text{ es } R_{na+1}^r \text{ y ... y } u(k-nb-nk) \text{ es } R_{na+nb}^r \quad (\text{B1.36})$$

entonces

$$y_r(k) = \gamma_0^r + \gamma_1^r y(k-1) + \dots + \gamma_{na}^r y(k-na) + \gamma_{na+1}^r u(k-nk-1) + \dots + \gamma_{na+nb}^r u(k-nb-nk) \quad (\text{B1.37})$$

La salida del modelo difuso es:

$$y(k) = \frac{\sum_{r=1}^{N_r} W_r y_r(k)}{\sum_{r=1}^{N_r} W_r} \quad (\text{B1.38})$$

donde el grado de activación de las reglas está dado por:

$$W_r = \mu_1^r \cdots \mu_i^r \cdots \mu_{na+nb}^r \quad (\text{B1.39})$$

La función de pertenencia para el conjunto difuso R_i^r se calcula como:

$$\mu_i^r = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_i^r(x_i - \beta_i^r))^2} \quad (\text{B1.40})$$

Luego la sensibilidad con respecto a las variables de entrada es [Sáez 2000]:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = \frac{\sum_{r=1}^{Nr} \left(\frac{\partial W_r}{\partial x_i} y_r + \frac{\partial y_r}{\partial x_i} W_r \right) \sum_{r=1}^{Nr} W_r - \sum_{r=1}^{Nr} \left(\frac{\partial W_r}{\partial x_i} \right) \sum_{r=1}^{Nr} (W_r y_r)}{\sum_{r=1}^{Nr} W_r} \quad (\text{B1.41})$$

con:

$$\frac{\partial W_r}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu_i^r}{\partial x_i} \times \mu_1^r \times \dots \times \mu_{i-1}^r \times \mu_{i+1}^r \times \dots \times \mu_{na+nb}^r \quad (\text{B1.42})$$

$$\frac{\partial \mu_i^r}{\partial x_i} = \mu_i^r \times c_i^r \quad (\text{B1.43})$$

$$c_i^r = -(\alpha_i^r \times (x_i - \beta_i^r)) \times \alpha_i^r \quad (\text{B1.44})$$

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_i} = \gamma_i^r \quad (\text{B1.45})$$

Reemplazando las ecuaciones (B1.42) hasta (B1.45) en (B1.41) se tiene:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = \frac{\sum_{r=1}^{Nr} (W_r c_i^r y_r + \gamma_i^r W_r) \sum_{r=1}^{Nr} W_r - \sum_{r=1}^{Nr} (W_r c_i^r) \sum_{r=1}^{Nr} (W_r y_r)}{\sum_{r=1}^{Nr} W_r} \quad (\text{B1.46})$$

Evaluando en el conjunto de entrenamiento obtenemos la media μ_i y la desviación estándar de las sensibilidades σ_i con lo que se construye el siguiente índice de sensibilidad.

$$I_i = \mu_i^2 + \sigma_i^2 \quad (\text{B1.47})$$

Es necesario normalizar los datos usados en este procedimiento para evitar las influencias de las magnitudes de éstos.

Apéndice B2 (Control supervisor predictivo basado en algoritmos genéticos para la turbina gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado)

En esta sección se presenta el diseño de un control supervisor predictivo SISO (una entrada y una salida), basado en algoritmos genéticos, para la turbina gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado. El diseño del control esta basado en una función que representa un índice de comportamiento económico y regulatorio de la turbina a gas por el uso de un set-point dinámico para el nivel regulador.

Un modelo difuso es considerado para caracterizar el comportamiento no lineal de la turbina a gas el cual es usado para dos sistemas de control supervisor:

- El primer control supervisor difuso diseñado incluye un modelo difuso, cuyos parámetros se mantienen constantes para las sucesivas predicciones.

- El segundo control supervisor difuso diseñado incluye un modelo difuso, cuyos parámetros son actualizados en cada predicción y el problema de optimización es resuelto por algoritmos genéticos.

Los controles supervisores difusos propuestos son comparados con respecto a controlador supervisor basado en un modelo lineal y nivel regulatorio con set-point optimo constante.

B2.1. Diseño de control supervisor predictivo de la turbina gas

El nivel del control supervisor está dado por un controlador predictivo que entrega el set-point óptimo dinámico del nivel regulatorio (sistema de control) del proceso. El nivel supervisor permite mejorar la eficiencia de la potencia de la planta sin modificar la estrategia de control en el nivel regulatorio.

Particularmente, como muestra la Figura 1, el nivel supervisor entrega el set-point óptimo en la potencia de la turbina a gas (P_{mech-G}^r) para optimizar una función objetivo. En esta aplicación se propuso una función objetivo que contiene dos términos:

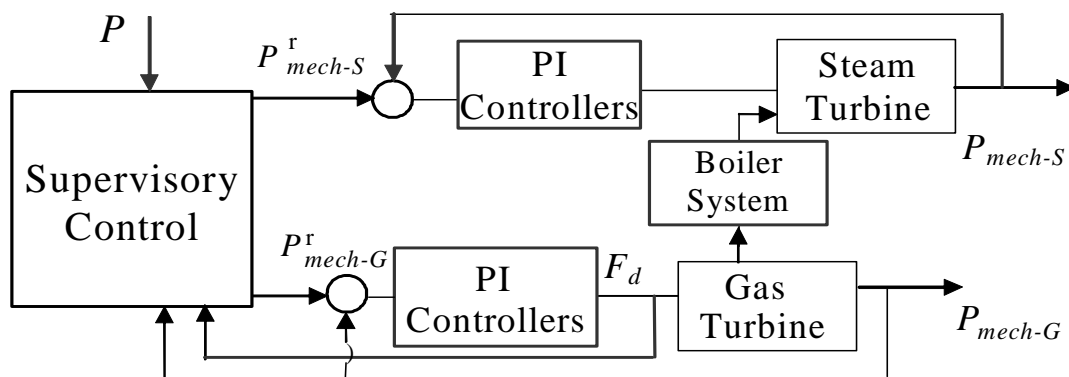


Figura B2.1. Diagrama del control supervisor para una planta de ciclo combinado.

El primer término está relacionado con el funcionamiento económico (J_{Cp}).

El segundo término es un criterio regulatorio (J_{Cr}), el cual toma en cuenta el error del set-point de trayectoria, y el esfuerzo de la acción de control.

El criterio regulatorio asegura que la solución sea estable y satisfaga las restricciones técnicas. Entonces la función objetivo total para ser optimizada en un nivel supervisor esta dada por:

$$\min J = J_{Cp} + \eta J_{Cr} \quad (B2.1)$$

donde η es un facto de peso práctico.

La función objetivo con características económicas propuesta es (J_{Cp}) es:

$$J_{Cp} = \sum_{i=1}^N C_f F_d(t+i-1) - \sum_{i=1}^N C_p P_{mech-G}(t+i) + C_F \quad (B2.2)$$

donde C_f es el precio del combustible, C_p es el factor de precio de la potencia, C_F costo fijo y N es el numero de intervalos del horizonte de predicción (típicamente menos de un minuto).

La función objetivo para el nivel regulatorio propuesta (J_{Cr}) es

$$J_{Cr} = \sum_{i=1}^N \left(\hat{P}_{mech-G}(t+j) - P_{mech-G}^r \right)^2 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^N \Delta F_d(t+i-1)^2 \quad (B2.3)$$

donde $\hat{P}_{mech-G}(t+j)$ es la j-ésima predicción para la potencia de la turbina a gas y λ es un factor de peso para la desviación del flujo de combustible. La trayectoria de referencia P_{mech-G}^r para la potencia de la turbina a gas es un valor constante para asegurar que la potencia de la turbina a gas esté dentro del espacio de las restricciones técnicas de los procesos termodinámicos.

En este caso el set-point g_{cNOx}^* y el T_{tout}^* para las variables de control g_{cNOx} y el T_{tout} , respectivamente, serán constantes, debido a que no tienen efecto en la función objetivo económica J_{Cp} (ecuación 2).

Para resolver el problema de optimización en el nivel supervisor, la turbina a gas puede ser modelada como un modelo lineal o como un modelo no lineal difuso. El nivel regulatorio es compuesto típicamente por controladores lineales PI.

B2.1.1. Modelo Lineal

La dinámica de la potencia de la turbina a gas fue identificada usando un modelo discreto ARIX.

El modelo discreto ARIX de la turbina a gas (P_{mech-G} [MW]), fue obtenido con datos generados por una señal de excitación del flujo de combustible (F_d [kg/s]) aplicada al simulador de la turbina a gas. El tiempo de muestro fue de $T_s = 1$ [s]. Por esto, el modelo ARIX está dado por la siguiente expresión:

$$A(z^{-1})P_{mech-G}(t) = B(z^{-1})F_d(t) + \frac{e(t)}{\Delta} \quad (B2.4)$$

donde $e(t)$ es ruido blanco, $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$ y $B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$

B2.1.2. Modelo difuso Takagi & Sugeno

Los modelos difusos han sido usados eficientemente para la identificación de sistemas no lineales [23]. En este trabajo se considera el uso del modelo difuso Takagi & Sugeno. En este caso las premisas son basadas en conjuntos difusos y las consecuencias son modelos lineales para diferentes puntos de operación.

El Modelo Difuso Takagi & Sugeno para la potencia de la turbina a gas (P_{mech-G} [MW]) usa el mismo conjunto de datos para el modelo lineal, generado por la señal de excitación del flujo de combustible (F_d [kg/s]) aplicado al simulador de la turbina a gas. Por lo tanto el modelo difuso está dado por las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} R^1: \text{ Si } P_{mech-G}(t-1) \text{ es } A_1^1 \text{ y } P_{mech-G}(t-2) \text{ es } A_2^1 \\ \text{ y } F_d(t-1) \text{ es } A_3^1 \text{ y } F_d(t-2) \text{ es } A_4^1 \\ \text{ entonces} \\ P_{mech-G}(t) = \gamma_{11} P_{mech-G}(t-1) + \gamma_{12} P_{mech-G}(t-2) \\ + \gamma_{13} F_d(t-1) + \gamma_{14} F_d(t-2) + \gamma_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2: \text{ Si } P_{mech-G}(t-1) \text{ es } A_1^2 \text{ y } P_{mech-G}(t-2) \text{ es } A_2^2 \\ \text{ y } F_d(t-1) \text{ es } A_3^2 \text{ y } F_d(t-2) \text{ es } A_4^2 \\ \text{ entonces} \\ P_{mech-G}(t) = \gamma_{21} P_{mech-G}(t-1) + \gamma_{22} P_{mech-G}(t-2) \\ + \gamma_{23} F_d(t-1) + \gamma_{24} F_d(t-2) + \gamma_{20} \end{aligned}$$

En la Figura 4 se presentan las correspondientes funciones de pertenencia para las entradas del modelo difuso $P_{mech-G}(t-1)$, $P_{mech-G}(t-2)$, $F_d(t-1)$ y $F_d(t-2)$. En este trabajo, los parámetros de la premisa (A_i^r in Figure 4) para el modelo difuso son obtenidos por el uso de *clustering* difusos, y los parámetros de las consecuencias (γ_{ri} en la ecuación 5) son obtenidos por el método Takagi & Sugeno basado en los mínimos cuadrados.

La salida del modelo difuso presentado en la ecuación 5 es:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{mech-G}(t) = & \left(\sum_{r=1}^2 w_r(t) \gamma_{r1} \right) P_{mech-G}(t-1) \\ & + \left(\sum_{r=1}^2 w_r(t) \gamma_{r2} \right) P_{mech-G}(t-2) + \left(\sum_{r=1}^2 w_r(t) \gamma_{r3} \right) F_d(t-1) \\ & + \left(\sum_{r=1}^2 w_r(t) \gamma_{r4} \right) F_d(t-2) + \left(\sum_{r=1}^2 w_r(t) \gamma_{r0} \right) \end{aligned} \quad (B2.6)$$

donde $w_r(t)$ es grado de activación normalizado para la regla r . La ecuación 6 puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{mech-G}(t) = & d_1(t)P_{mech-G}(t-1) + d_2(t)P_{mech-G}(t-2) \\ & + d_3(t)F_d(t-1) + d_4(t)F_d(t-2) + d_0(t) \end{aligned} \quad (B2.7)$$

donde todos los d_i son función del grado de activación $w_r(t)$ y corresponden a los factores del modelo difuso de la ecuación 6.

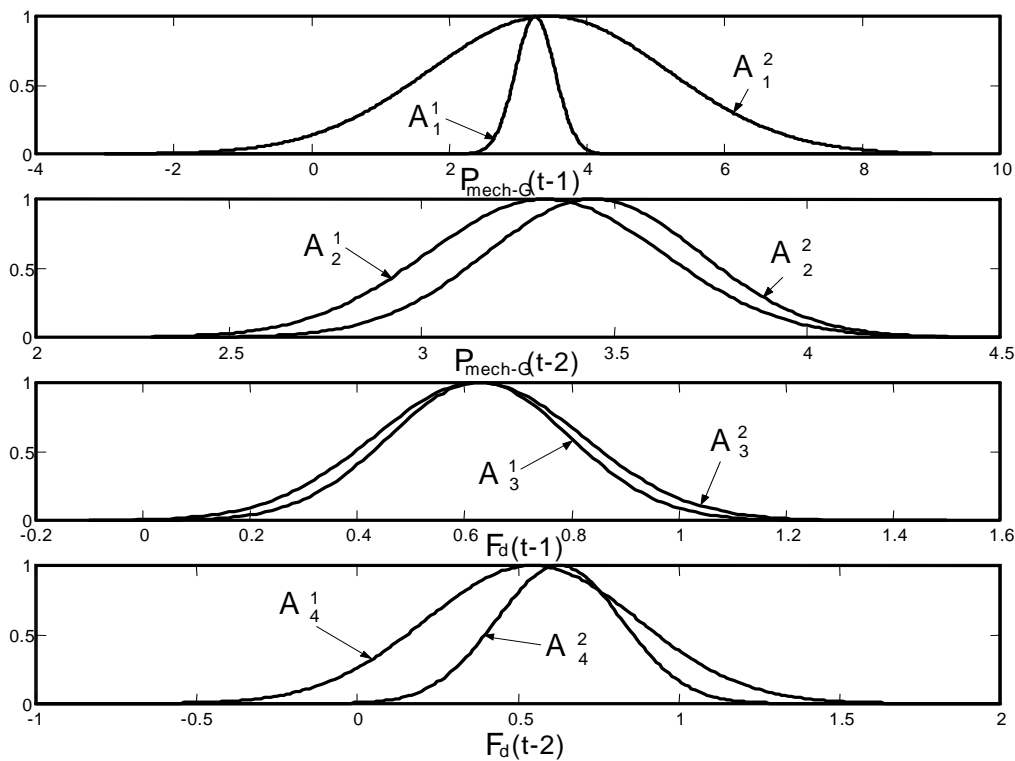


Figura B2.2. Funciones de pertenencia

B2.1.3. Modelo de Análisis

Para la turbina a gas, la tabla B2.1 presenta el error de la predicción a un paso y a 10 pasos, usando el modelo lineal, obtenido en la sección A, y el modelo difuso obtenido en la sección B. El error de predicción correspondiente para los valores medios del error instantáneo está de acuerdo a

$$\bar{E} = Avg[E(t)] = Avg \left[100 \cdot \frac{\hat{P}_{mech-G}(t) - P_{mech-G}(t)}{P_{mech-G}(t)} \% \right] \quad (B2.8)$$

Desde la tabla 1, el modelo difuso muestra mejores resultados que el modelo lineal.

Tabla B2.1. Error de predicción \bar{E}

Error de predicción	modelo Lineal	Modelo difuso
Predicción a 1 paso	1.40 %	0.64 %
Predicción a 10 pasos	3.86 %	1.78 %

La estrategia de control propuesta en este trabajo usa predicciones a 10 pasos. Para esta estrategia, la tabla 1 muestra que el error del modelo difuso de la turbina a gas es menos que la mitad del error del modelo lineal. Por esto el modelo difuso Takagi & Sugeno fue escogido para representar las no-linealidades de la turbina a gas

B2.1.4. Nivel Regulatorio

En la Figura 3, el control PI_3 tiene de entrada a la potencia de la turbina a gas (P_{mech-G}), el cual se asume en estado de conexión para evitar la necesidad del conmutador del sistema de control. Esta suposición está basada en la experiencia práctica de la operación real de las unidades de ciclo combinado.

Los controladores PI_3 para el flujo de combustible, como función de la potencia de la turbina a gas están dados por:

$$F_d(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s} \right) (P_{mech-G}^r(s) - P_{mech-G}(s)) \quad (B2.9)$$

donde k_p es la ganancia proporcional y k_i es la ganancia integral. El correspondiente modelo discreto del PI_3 usando tiempos de muestreo $T_s = 1$ [s], es:

$$(1 - z^{-1}) F_d(t) = (\alpha + \beta z^{-1}) (P_{mech-G}^r(t) - P_{mech-G}(t)) \quad (B2.10)$$

donde $\alpha = \frac{T_s k_i}{2} + k_p$ y $\beta = \frac{T_s k_i}{2} - k_p$

B2.1.5. Control Supervisor Lineal

El controlador supervisor lineal para la turbina a gas está basado en la minimización de la función (ecuación B2.1) para el uso de sistemas lineales (ecuación 4) y nivel regulatorio (ecuación B2.9).

Las restricciones asociadas a las predicciones para la potencia de la turbina a gas usando el Modelo ARIX (ecuaciones 4), son :

$$\begin{aligned} & \hat{P}_{mech-G}(t+j) + (a_1 - 1)\hat{P}_{mech-G}(t+j-1) \\ & + (a_2 - a_1)\hat{P}_{mech-G}(t+j-2) - a_2\hat{P}_{mech-G}(t+j-3) \\ & - b_1\Delta F_d(t+j-1) - b_2\Delta F_d(t+j-2) = 0 \\ & \text{for } j = 1, \dots, 10 \end{aligned} \quad (B2.11)$$

donde $\Delta \equiv 1 - z^{-1}$.

De la ecuación 10, la predicción de los incrementos del flujo de combustible para el horizonte (N) satisface las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} & \Delta F_d(t+i-1) - \alpha P_{mech-G}^r(t+i-1) \\ & - \beta P_{mech-G}^r(t+i-2) + \alpha \hat{P}_{mech-G}(t+i-1) \\ & + \beta \hat{P}_{mech-G}(t+i-2) = 0 \\ & \text{for } i = 1, \dots, 10 \end{aligned} \quad (B2.12)$$

Finalmente, el problema de optimización del controlador supervisor lineal tienen una función objetivo cuadrática (ecuación B2.1) y restricciones lineales, dadas por el modelo del proceso (ecuación B2.11) y el modelo del controlador discreto PI 3 (ecuación B2.12). El problema de optimización resultante es resuelto usando programación cuadrática.

B2.2. Control Predictivo Difuso Basado en Algoritmo Genético

Para las estrategias del controlador supervisor difuso se utiliza la misma ecuación objetivo de la ecuación B2.1 y el mismo modelo de controlador PI 3 (ecuación B2.9). Sin embargo para la turbina a gas se utiliza un modelo difuso dado por la ecuación B2.7.

B2.2.1. Controlador Supervisor Difuso

Para resolver este problema dos formas son consideradas, en el primer caso, los factores del modelo difuso (ecuación 7) se consideran constantes para las próximas

predicciones, es decir, el modelo difuso está linealizado para el instante actual. En la segunda alternativa, la predicción de la potencia de la turbina a gas se obtiene usando el modelo difuso completo, es decir, los factores del modelo difuso son actualizados en cada predicción. Las correspondientes ecuaciones son las siguientes:

Para el modelo difuso linealizado, las predicciones del modelo difuso de la ecuación 7 son:

$$\begin{aligned} & \widehat{P}_{mech-G}(t+j) - (d_1(t) - 1)\widehat{P}_{mech-G}(t+j-1) \\ & + (d_1(t) - d_2(t))\widehat{P}_{mech-G}(t+j-2) + d_2(t)\widehat{P}_{mech-G}(t+j-3) \\ & - d_3(t)\Delta F_d(t+j-1) - d_4(t)\Delta F_d(t+j-2) = 0 \end{aligned} \quad (B2.13)$$

para $j = 1, \dots, 10$

Notar que el grado de activación $w_r(t)$ será constante para el horizonte de predicción, esto es $d_i(t) = d_i(t+j)$.

La solución del problema de optimización es resuelto nuevamente por programación cuadrática.

En la segunda alternativa las predicciones de la potencia de la turbina a gas están dadas por la ecuación B2.7, es decir

$$\begin{aligned} & \widehat{P}_{mech-G}(t+j) - (d_1(t+j-1) - 1)\widehat{P}_{mech-G}(t+j-1) + (d_1(t+j-2) \\ & - d_2(t+j-2))\widehat{P}_{mech-G}(t+j-2) + d_2(t+j-3)\widehat{P}_{mech-G}(t+j-3) \\ & - d_3(t+j-1)\Delta F_d(t+j-1) - d_4(t+j-2)\Delta F_d(t+j-2) = 0 \end{aligned} \quad (B2.14)$$

para $j = 1, \dots, 10$

Notar que el grado de activación $w_r(t)$ son actualizados en cada predicción, esto es:

$$d_i(t+j) = d_i(\widehat{P}_{mech-G}(t+j-1), \widehat{P}_{mech-G}(t+j-2), F_d(t+j-1), F_d(t+j-2)) \quad (B2.15)$$

para $j = 1, \dots, 10$ y $i = 1, 2, 3, 4$

y para resolver el problema de optimización no lineal se utilizó algoritmo genético

B2.2.2. Datos de simulación

El controlador supervisor propuesto en las secciones anteriores es comparado con una estrategia de control estándar con set-point óptimo constante. El correspondiente set-point es obtenido por la optimización estática de la función objetivo definida en la ecuación 1, entonces el set-point estático es:

$$P_{mech-G}^r = P_{mech-G}^* - \frac{C_p K_{Pg} - C_f}{2\eta K_{Pg}} \quad (B2.16)$$

donde K_{Pg} es la ganancia estática para la potencia de turbina a gas como función del flujo de combustible.

Para el análisis, una perturbación en la temperatura del flujo másico del aire dentro del compresor es introducida para producir diferentes condiciones de operación. Los valores de la perturbación se mueven entre 276 y 294 (K) por 7,5 minutos (450 segundos). Esto es un evento muy común las fluctuaciones de temperatura en el ambiente experimental de las plantas.

Para determinar la mejora obtenida por las estrategias propuestas, un indicador de beneficio, basado en la comparación de la estrategia de control con set-point constante, es utilizada [9]. [27]

$$\text{Ganacia} = \left(100 - 100 \cdot \frac{J_{C_p} \text{ con nivel supervisor}}{J_{C_p} \text{ set - point constante}} \right) \% \quad (B2.17)$$

donde J_{C_p} esta dado por la función objetivo económica en la ecuación 2

B2.2.3. Controladores Supervisores

La Figura B2.3 muestra la respuesta de lazo cerrado para el sistema de la turbina a gas, con el controlador regulatorio y set-point constante, controlador supervisor lineal, controlador supervisor difuso linealizado y controlador supervisor difuso con solución con algoritmo genético para $\eta=1$.

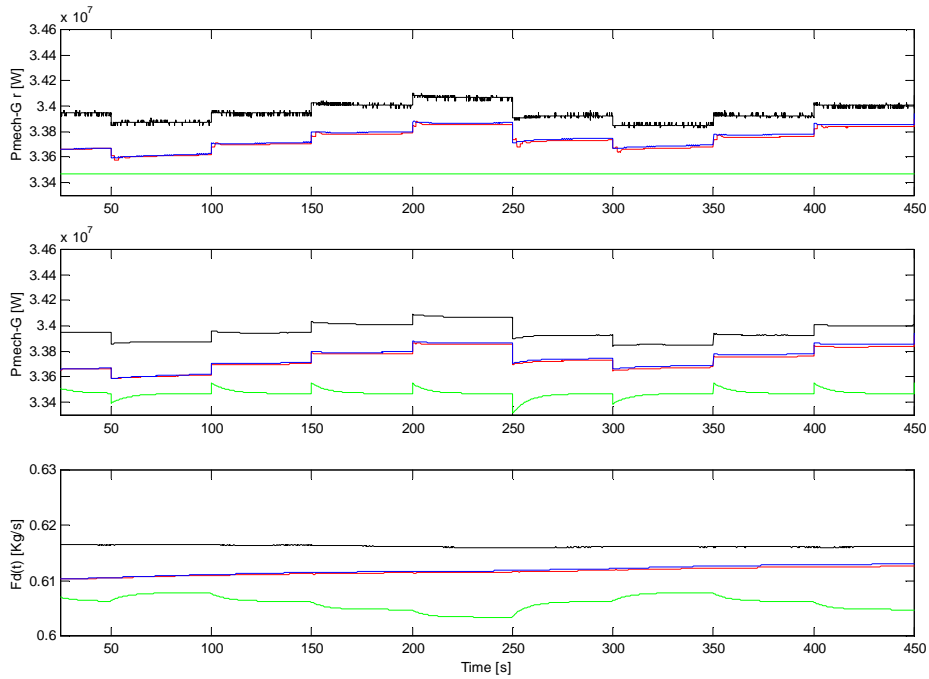


Figura B2.3. Respuesta de lazo cerrado de la potencia con el controlador supervisor propuesto. ($\eta = 1$)

- Controlador regulatorio con set-point constante
- Controlador supervisor lineal
- Controlador supervisor difuso linealizado
- Controlador supervisor difuso con algoritmo genético

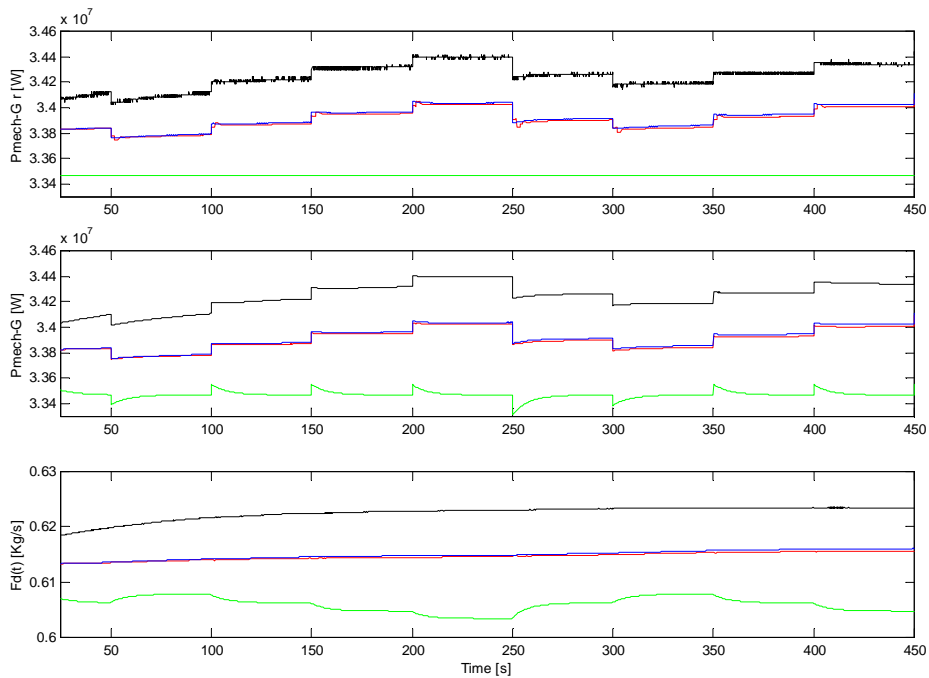


Figura B2.4. Respuesta de lazo cerrado de la potencia con el controlador supervisor propuesto. ($\eta = 0.5$)

- Controlador regulatorio con set-point constante
- Controlador supervisor lineal
- Controlador supervisor difuso linealizado
- Controlador supervisor difuso con algoritmo genético

Notar que no hay diferencias significativas entre los resultados con el controlador supervisor lineal y el controlador supervisor difuso linealizado, debido a que la linealización difusa disminuye las características no lineales de predicción.

También de la Figura B2.3 es claro que el flujo de combustible para los tres controladores supervisores es casi constante, pero la potencia de la turbina a gas cambia para optimizar el comportamiento de la planta. Esto es debido principalmente a cambios en el flujo del aire (W_a). Por eso el sistema regulatorio alcanza el objetivo de minimización del esfuerzo de control en el flujo de combustible.

El tercer elemento de la Figura B2.3 es de hecho que con los tres controladores supervisores la potencia de la turbina a gas supera ligeramente a la estrategia de control estándar. De hecho de acuerdo a la Figura B2.3, la diferencia es alrededor del 1% para el control supervisor lineal y difuso linealizado, y de 2% para el control supervisor difuso con solución con algoritmos genéticos. Por esto el control supervisor maximiza la potencia de salida mientras que al mismo tiempo minimiza el uso de combustible dado por la ecuación B2.2.

Notar que el controlador difuso con solución con algoritmos genéticos tiene más potencia que las otras estrategias de control. Esto es debido a que el método presentado tiene menor error de comportamiento de la turbina a gas, como se ve en la tabla B2.1.

B2.2.4. Análisis comparativo.

En la tabla B2.2, se muestran los valores medios de la función objetivo (ecuaciones 2 y 3) y el porcentaje de mejora (ecuación 17), para $\eta = 1$ y $\eta = 0.5$.

Tabla B2.2. Resultados de simulación

	Controles predictivos supervisores			Nivel regulatorio con set-point constante
	Lineal	Difuso linealizado	Difuso con solución con algoritmos genéticos	
$\eta = 1$				
J_{Cp}	3314.2	3315.7	3328.2	3287
J_{Cr}	4.1126	4.5384	0.3038	15.148
Profit	0.8270%	0.8731%	1.2534%	
$\eta = 0.5$				
J_{Cp}	3316.3	3317.9	3349.7	3248
J_{Cr}	4.9694	4.9040	7.1479	60.142
Profit	2.1028%	2.1520%	3.1311%	

Los resultados de simulación se detallan en la tabla B2.2, la cual muestra que el controlador supervisor lineal tiene una mejora del 0.83 % al 2.1 % en contraste de una estrategia de control con set-point constante.

Para el control supervisor difuso linealizado donde se mantienen los parámetros de las predicciones constantes se encontró una mejora del 0.87 % al 2.15 % comparado con la estrategia de control estándar.

Cuando se utilizó una estrategia de control supervisor difuso con solución con algoritmo genético se obtuvo una mejora de entre el 1.25 % y 3.13 % con respecto a una estrategia de control estándar, el cual es el mejor resultado de la tabla B2.2. Una gruesa estimación de los datos económicos de las centrales termoeléctricas, muestra que el costo operacional es de 15 US\$/MWh para unidades de 350 MW, con factor de planta 0.8 (potencia media/potencia máxima), la mejora de la ganancia del 3 % implica un ahorro de 1 millón de US\$ anualmente.

La tabla B2.2 muestra claramente que método difuso con algoritmos genéticos entregan un alta ganancia un η dado (ver ecuación 1). Esto a raíz del hecho que, la no-linealidad del proceso son capturadas en forma más eficiente por los métodos difusos en comparación a las simplificadas expresiones lineales. Esto reconfirma en la Figura B2.3.

En, de la tabla B2.2, la ganancia crece cuando η decrece. Este era de esperarse ya que un pequeño valores para η implica un mayor peso para el criterio económico. Sin embargo bajo estas condiciones, el punto de operación se desvía con respecto al punto de operación nominal y de acuerdo a las simulaciones resultantes esto puede comprometer la estabilidad del algoritmo. Por lo tanto existe una compensación entre el criterio económico J_{Cr} , el cual tiene que ser tomado en cuenta de acuerdo al objetivo de la estrategia de control de la planta.

Existe el problema del tiempo de computo que en el caso de la solución genética es cercano a los 15 minutos por punto. Por lo que es necesario mejorar la velocidad de algoritmo lo cual se puede hacer por ejemplo remplazando en control supervisor por una red neuronal que lo simule.

Apéndice C

Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son considerados como técnicas de optimización, su uso en optimización se deriva a través de competición basadas en una función de fitness (aptitud). Este fitness representa la actuación de una solución factible en cada iteración y da a un criterio mantener o rechazar a un individuo dentro del espacio de búsqueda.

Algoritmo (SGA Genético Simple)

Las soluciones propuestas (o la población inicial) se pone en código en un *string* binario, este procedimiento se llama codificación.

La convergencia de los algoritmos genéticos es principalmente basada en una formulación correcta de la función fitness. En este caso la función fitness es representada por la función objetivo.

Las técnicas de recombinación son con el operador *crossover* y el operador mutación. El primero cruza (o intercambio recíproco de una parte del *string*) entre dos "padres" o individuos de la población actual para crear dos nuevas descendencia que se evalúan en la próxima iteración o "generación" en la función fitness. Un proceso similar es la mutación, donde la descendencia se obtiene de dos individuos que intercambian simplemente un *bit* o "gen" del *string* puesto en código con una probabilidad baja.

La nueva generación se obtiene a través de los procesos de recombinación, cada individuo se evalúa en la función fitness. Entonces es necesario definir un criterio para seleccionar la

próxima generación de padres. Esto puede hacerse en dos maneras diferentes: los individuos mejores se seleccionan entre los padres y descendencia, y son los padres para la próxima generación; los próximos padres de la generación se seleccionan con un porcentaje definido alto (60-80%) de los individuos mejores entre los padres y descendencia, y el porcentaje restante se selecciona de los otros individuos con un método probabilística. como Roulette Wheeled Selection (RWS) o Stochastic Universal Sampling (SUS).

La optimización con un algoritmo genético simple (SGA) se puede resumirse como sigue:

1. Empieza con $t=0$.
2. Se inicialice población $P(t)$. La población se inicializa al azar del espacio de las soluciones factible.
3. Se evalúa la primera población $P(t)$ a la función de aptitud.
4. Mientras la condición de fin no se ha alcanzado hacer:
 - a. $t = t + 1$
 - b. Seleccionar $P(t)$ de $P(t-1)$, con un criterio definido como RWS, SUS u otro.
 - c. Modificar $P(t)$ con un método de recombinación.
 - d. Evaluar $P(t)$
5. Fin.
6. Fin.

Hay que tener en cuenta que un algoritmo genético es independiente del problema, lo cual lo hace un algoritmo *robusto*, por ser útil para cualquier problema, pero a la vez *débil*, pues no está especializado en ninguno.

Después de varias pruebas se concluyo que uso del operador de nicho *crowding deterministico* producía mejores resultados.

Los operadores de *nicho* están encaminados a mantener la diversidad genética de la población, de forma que *string* similares sustituyan sólo a *string* similares, y son especialmente útiles en problemas con muchas soluciones; un algoritmo genético con este operador es capaz de hallar todos los máximos, dedicándose cada especie a un máximo.

Los métodos de nicho producen una subdivisión del espacio en nichos y la población en especies, a través de la reducción de la competencia de puntos distantes en el espacio de búsqueda. La distancia de “Hamming” (el número de bits en que difieren dos “string” binarios) entre dos individuos es utilizada.

$$d_{ij} = d(s_i, s_j) \tag{C.1}$$

donde s_i y s_j son los *string* codificados.

El algoritmo Crowding Determinístico se describe a continuación:

1. Seleccionar dos padres p_1 y p_2 aleatoriamente sin reemplazo

2. Cruzarlos y obtener individuos c_1 y c_2
3. Aplicar mutación y otros posibles operadores, obteniéndose individuos c_1' y c_2'
4. Dada la distancia definida en (), aplicar la siguiente regla de reemplazo:

$$\begin{aligned}
 \text{si } [d(p_1, c_1') + d(p_2, c_2')] &\leq [d(p_1, c_2') + d(p_2, c_1')] \\
 \text{si } fitness(c_1) < fitness(p_1) & \quad p_1 = c_1' \\
 \text{si } fitness(c_2) < fitness(p_2) & \quad p_2 = c_2'
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \text{si } fitness(c_2) < fitness(p_1) & \quad p_1 = c_2' \\
 \text{si } fitness(c_1) < fitness(p_2) & \quad p_2 = c_1'
 \end{aligned}$$

la selección final se realiza entre el padre e hijo más lejanos.

Apéndice D

Dentro del sistema regulador está incluido un sistema de control de la frecuencia, para modelarlo es necesario conocer la relación entre la potencia mecánica, la carga y la frecuencia, lo cual se detalla a continuación.

D.1 Relación entre la potencia mecánica y eléctrica y el cambio de velocidad

Un generador impulsado por una turbina puede ser representado por una gran masa rodante con dos pares en oposición actuando sobre el eje de rotación. Como se muestra en la Figura 1, T_{mech} actúa para incrementar la velocidad rotacional, mientras que el par eléctrico, T_{elec} , actúa para disminuirla. Cuando T_{mech} y T_{elec} son iguales en magnitud, la velocidad angular, ω , será constante. Si la carga eléctrica se incrementa de manera que T_{elec} sea mayor que T_{mech} , el sistema rodante completo empezará a frenarse. Ya que sería dañino dejar que el equipo disminuya demasiado su velocidad, algo debe hacerse para incrementar el par T_{mech} para restablecer el equilibrio; esto es, regresar la velocidad rotacional a un valor aceptable y los pares a la igualdad, para que así la velocidad sea nuevamente constante [Kundur 1994, Wood 1996].

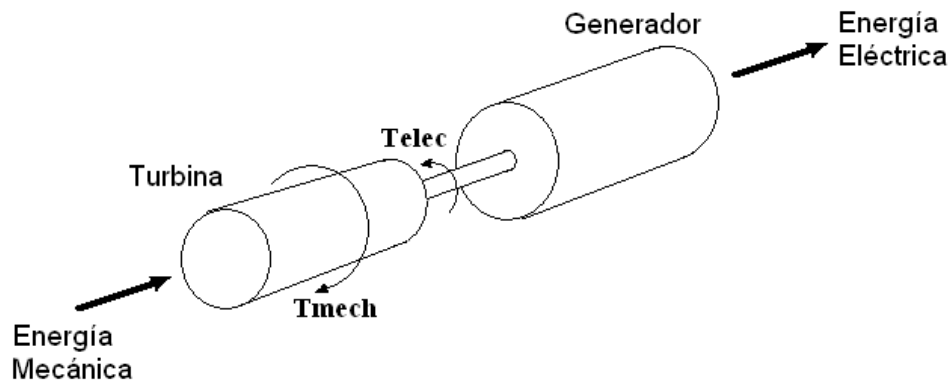


Figura D.1. Pares mecánico y eléctrico en una unidad generadora

En términos de la transformada de Laplace la relación entre la potencia mecánica y eléctrica y el cambio de velocidad es:

:

$$\Delta P_{mech} - \Delta P_{elec} = Ms\Delta\omega \quad (D.1)$$

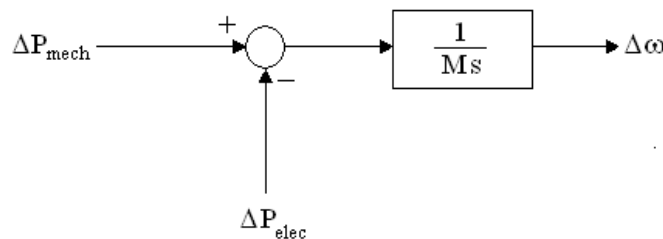


Figura D.2. Relación entre la potencia mecánica y eléctrica y el cambio de velocidad.

Donde

- ω : Velocidad angular de la máquina rotatoria. (D.2)
- M : Momentum angular de la maquina.
- P_{mech} : Potencia mecánica de entrada.
- P_{elec} : Potencia eléctrica de salida.

D.1.1. Modelo de la carga

La carga en un sistema de potencia consiste en una variedad de dispositivos eléctricos. Algunos de ellos son puramente resistivos, algunos son motores con características variables de potencia-frecuencia, y otras exhiben características bastantes diferentes [Kundur 1994, Aboytes 1985 y 1990]. Para el caso de motores, como los de ventiladores y bombas, la potencia eléctrica cambia con la frecuencia debido a cambios de velocidad del motor. Ya que los motores son parte dominante de la carga eléctrica, es necesario modelar

el efecto del cambio en frecuencia de la carga neta demandada por el sistema. La relación entre el cambio de carga debido al cambio en frecuencia está dada por

$$\Delta P_{L(\text{frecuencia})} = D\Delta\omega \quad \text{o} \quad D = \frac{\Delta P_{L(\text{frecuencia})}}{\Delta\omega} \quad (\text{D.3})$$

donde la constante de amortiguamiento de carga, D, se expresa como el cambio porcentual en la carga dividido entre el cambio porcentual en frecuencia.

El cambio neto en la potencia eléctrica, P_{elec} , es:

$$\Delta P_{elec} = \underbrace{\Delta P_L}_{\substack{\text{Cambio de} \\ \text{carga No} \\ \text{sensible a la} \\ \text{frecuencia.}}} + \underbrace{D\Delta\omega}_{\substack{\text{Cambio de} \\ \text{carga} \\ \text{Sensible a la} \\ \text{frecuencia.}}} \quad (\text{D.4})$$

Incluyendo esto en el diagrama de bloques, resulta el nuevo diagrama mostrado en al Figura 3

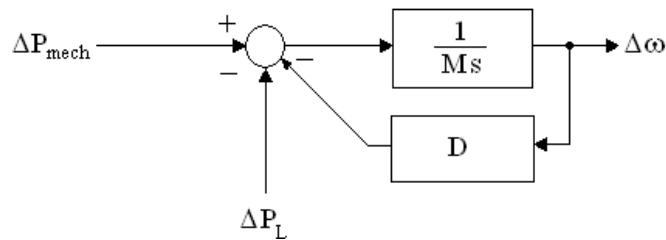


Figura D.3. Masa rotatoria y carga vista desde la salida de la turbina.

Apéndice E

seccion (5.1)

$$\begin{aligned}\Delta = 1 - q^{-1} \quad a_1 = -0.0874 \quad a_2 = 0.0537 \\ b_1 = -0.0111 * 10^3 \quad b_2 = -0.0401 * 10^7 \\ c_1 = 1.2063 * 10^3 \quad c_2 = 4.2355 * 10^7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_x = 0.9608 \quad G_1 = 100 \quad G_3 = 2.95 * 10^{-8} \\ b_x = 0.03921 \quad G_2 = 0.77 \quad G_4 = 0.00098 \\ G_5 = 0.0009\end{aligned}$$

$$\alpha_a = \frac{T_s k_{Ia}}{2} + k_{pa} = \frac{0.1 * (-10)}{2} + (-10) = -10.5$$

$$\alpha_b = \frac{T_s k_{Ib}}{2} + k_{pb} = \frac{0.1 * 0.1}{2} + 0.05 = 0.055$$

$$\alpha_c = \frac{T_s k_{Ic}}{2} + k_{pc} = \frac{0.1 * 0.1}{2} + 0.05 = 0.055$$

$$\beta_a = \frac{T_s k_{Ia}}{2} - k_{pa} = \frac{0.1 * (-10)}{2} - (-10) = 9.5$$

$$\beta_b = \frac{T_s k_{Ib}}{2} - k_{pb} = \frac{0.1 * 0.1}{2} - 0.05 = -0.045$$

$$\beta_c = \frac{T_s k_{lc}}{2} - k_{pc} = \frac{0.1 * 0.1}{2} - 0.05 = -0.045$$

$$P_{s.p.} = 3.386 * 10^7$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= b_x G_4 G_1 \alpha_c = 0.2113 * 10^{-3} & \alpha_{12} &= b_x G_4 G_1 \beta_c = -0.1729 * 10^{-3} \\ \beta_{11} &= -1 & \beta_{12} &= 1 + a_x = 1.9608 & \beta_{13} &= -a_x = -0.9608 \\ \gamma_{11} &= -G_1 G_5 \alpha_c = -0.005 & \gamma_{12} &= G_1 G_5 (\alpha_c a_x - \beta_c) = 0.0088 & \gamma_{13} &= G_1 G_5 \beta_c a_x = -0.0039 \\ \alpha_{31} &= -G_3 \alpha_b = -0.1623 * 10^{-8} & \alpha_{32} &= -G_3 \beta_b = 0.1328 * 10^{-8} \\ \beta_{31} &= -1 & \beta_{32} &= 1 \\ \gamma_{31} &= G_3 \alpha_b = 0.1623 * 10^{-8} & \gamma_{32} &= G_3 \beta_b = -0.1328 * 10^{-8} \end{aligned}$$

Modelo del generador

El modelo del generador implementado se puede ver en la Figura 5.4 (detalles en apéndice D)

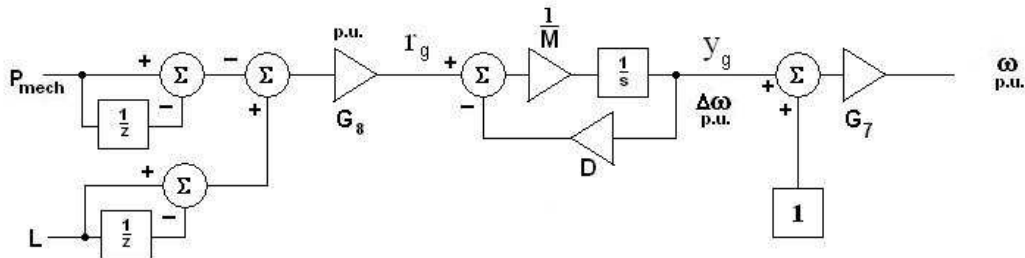


Figura 5.4. Modelo del generador implementado.

A partir del modelo carga (más detalles en el apéndice D)

$$\frac{y_g(s)}{r_g(s)} = \frac{1}{Ms + D}$$

donde

- $D = 0.8$: Constante de amortiguamiento de carga.
- $M = 4.5$: Momentum angular de la maquina.

discretizando con c2d.mat de MATLAB

$$\frac{y_g(z^{-1})}{r_g(z^{-1})} = \frac{0.1048 + 0.09878z^{-1}}{1 - 0.8371z^{-1}}$$

$$y_g(t) - 0.8371y_g(t-1) = 0.1048r_g(t) + 0.09878r_g(t-1)$$

$$r_g(t) = (\Delta L(t) - \Delta y_2(t)) \frac{1}{P_{s.p.}}$$

$$\text{con } \Delta = 1 - z^{-1}$$

$$r_g(t) = (L(t) - L(t-1) - P_{mech}(t) + P_{mech}(t-1)) \frac{1}{P_{s.p.}}$$

$$\text{con } P_{s.p.} = 3.386 * 10^7$$

además se tiene

$$\omega(t) = y_g(t) + 1$$

entonces

$$\begin{aligned} \omega(t) - 1.8371(\omega(t-1) - 1) &= (-P_{mech}(t) + P_{mech}(t-1) + L(t) - L(t-1)) \frac{0.1048}{P_{s.p.}} \\ &+ (-P_{mech}(t-1) + P_{mech}(t-2) + L(t-1) - L(t-2)) \frac{0.09878}{P_{s.p.}} \end{aligned}$$

definiendo

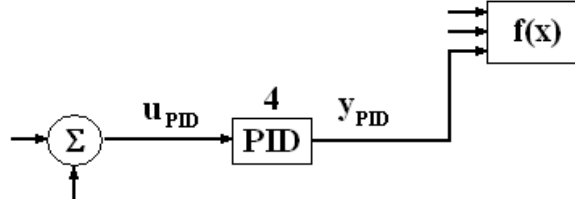
$$\begin{aligned} \alpha_{41} &= \frac{0.09878}{P_{s.p.}} & \psi_1 &= -\frac{0.09878}{P_{s.p.}} & \phi_{21} &= 0.8371 \\ \alpha_{42} &= -\frac{0.09878}{P_{s.p.}} + \frac{0.1048}{P_{s.p.}} & \psi_2 &= \frac{0.09878}{P_{s.p.}} - \frac{0.1048}{P_{s.p.}} & C_{L\omega} &= -0.1629 \\ \alpha_{43} &= -\frac{0.1048}{P_{s.p.}} & \psi_3 &= \frac{0.1048}{P_{s.p.}} & & \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} C_{L\omega} &= \alpha_{41}P_{mech}(t-2) + \alpha_{42}P_{mech}(t-1) + \alpha_{43}P_{mech}(t) \\ &+ \psi_1L(t-2) + \psi_2L(t-1) + \psi_3L(t) + \phi_{21}\omega(t-1) - \omega(t) \end{aligned}$$

Modelo del PID

También es necesario modelar el PID 4 con un modelo discreto.



La ecuación en Transformada de Laplace para el PID es:

$$\frac{y_{PID}}{u_{PID}} = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s$$

Usando la aproximación triangular

$$\frac{1}{s} \approx \frac{T_s(z+1)}{2(z-1)}$$

tenemos

$$\frac{y_{PID}}{u_{PID}} = k_p + k_i \frac{T_s(z+1)}{2(z-1)} + k_d \frac{2(z-1)}{T_s(z+1)}$$

$$\frac{y_{PID}}{u_{PID}} = \frac{2k_p T_s(z-1)(z+1) + k_i T_s^2(z+1)^2 + 2k_d(z-1)^2}{2T_s(z-1)(z+1)}$$

$$\frac{y_{PID}}{u_{PID}} = \frac{2k_p T_s(z^2-1) + k_i T_s^2(z^2+2z+1) + 2k_d(z^2-2z+1)}{2T_s(z^2-1)}$$

$$\frac{y_{PID}}{u_{PID}} = \frac{(2k_p T_s + k_i T_s^2 + 2k_d)z^2 + (2k_i T_s^2 - 4k_d)z + k_i T_s^2 + 2k_d - 2k_p T_s}{2T_s(z^2-1)}$$

$$\frac{y_{PID}}{u_{PID}} = \frac{\left(k_p + \frac{k_i T_s}{2} + \frac{k_d}{T_s}\right)z^2 + \left(k_i T_s - 2\frac{k_d}{T_s}\right)z + \frac{k_i T_s}{2} + \frac{k_d}{T_s} - k_p}{2T_s(z^2-1)}$$

$$y_{PID}(1-z^{-2}) = \left(\left(k_p + \frac{k_i T_s}{2} + \frac{k_d}{T_s}\right) + \left(k_i T_s - \frac{2k_d}{T_s}\right)z^{-1} + \left(\frac{k_i T_s}{2} + \frac{k_d}{T_s} - k_p\right)z^{-2} \right) u_{PID}$$

$$y_{PID}(t) - y_{PID}(t-2) = \phi_{13} u_{PID}(t) + \phi_{12} u_{PID}(t-1) + \phi_{11} u_{PID}(t-2)$$

con

$$\phi_{13} = k_p + \frac{k_i T_s}{2} + \frac{k_d}{T_s} \quad \phi_{12} = k_i T_s - \frac{2k_d}{T_s} \quad \phi_{11} = \frac{k_i T_s}{2} + \frac{k_d}{T_s} - k_p$$

$$k_p = 0.05$$

$$T_s = 1$$

$$k_i = 0.1$$

$$k_d = 0.1$$

Apéndice F

Principales programas realizados

Programas capítulo VI

Función que calcula el fitness para los genes generados por la variable delta δ

```
function foo=fo_delta(d,axx,gen,N)

d=d';
c=d';

axx=axx';

% y1(t-2)=axx(1)
% y1(t-1)=axx(2)
% y2(t-1)=axx(3)
% y2(t-2)=axx(4)
% u1(t-2)=axx(5)
% u1(t-1)=axx(6)
% u2(t-2)=axx(7)
% u2(t-1)=axx(8)
% r1(t-2)=axx(9)
% r1(t-1)=axx(10)
% r2(t-1)=axx(11)
% ub(t-1)=axx(12)
% ua(t-2)=axx(13)
% ua(t-1)=axx(14)
% uc(t-2)=axx(15)
% uc(t-1)=axx(16)
% L(t-2)=axx(17)
```

```

% L(t-1)=axx(18)
% w(t-2)=axx(19)
% w(t-1)=axx(20)

N=10;
%-----Modelo lineal ARX-----
% y1(t)+a1(1)y1(t-1)+a1(2)y1(t-2)...= b1(1)u1(t-1)+b1(2)u1(t-2)+...+c1(1)u2(t-
1)+c1(2)u2(t-2)...+e(t)
% y2(t)+a2(1)y2(t-1)+a2(2)y2(t-2)...= b2(1)u1(t-1)+b2(2)u1(t-2)+...+c2(1)u2(t-
1)+c2(2)u2(t-2)...+e(t)
%-----1era ecuacion-----
a1(1)=0.08743121968840;
b1(1)=-0.01114221222363e3;
c1(1)= 1.20632560695128e3;

%-----2da ecuacion-----
a2(1)=0.05378337403174;
b2(1)=-0.04019660804141e7;
c2(1)=4.23552446381820e7;

%=====
=====
rop1=1015.8;
rop2=3.386e7;
lwa=10^(13.5);
lfd=10^(17);
CrTTout=1e-7;
CrPmech=1e-11;
eta=1;
CPmech=0;
CFd=0;

% 1 11 21 31 41 51 61 71 81 91 101 110 121 131
% 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140
% y1 y2 u1 u2 Au1 Au2 r1 r2 ua ub uc L W yab
%-----
H=zeros(14*N,14*N);
H(1:N,1:N)=eye(N)*2*CrTTout*eta; %y1
H(N+1:2*N,N+1:2*N)=eye(N)*2*CrPmech*eta; %y2
H(4*N+1:5*N,4*N+1:5*N)=eye(N)*2*lwa*CrTTout*eta; %Au1
H(5*N+1:6*N,5*N+1:6*N)=eye(N)*2*lfd*CrPmech*eta; %Au2
f=zeros(14*N,1);
f(1:N,1)=ones(N,1)*(-2*rop1)*CrTTout*eta;
f(N+1:2*N,1)=ones(N,1)*(-CPmech-2*rop2*CrPmech*eta);
f(3*N+1:4*N,1)=ones(N,1)*CFd;
%-----
Ts=1;
alfaA=Ts*(-10)/2+(-10);
betaA=Ts*(-10)/2-(-10);

alfaB=Ts*0.1/2+0.05;%*****
betaB=Ts*0.1/2-0.05;%*****
alfaC=Ts*0.1/2+0.05;%*****
betaC=Ts*0.1/2-0.05;%*****
%-----
ax=0.9608;
bx=0.03921;
G1=100;
G2=0.77;
G3=2.95*10^-8;
G4=0.00098;
G5=0.00098;

alfa1=fliplr([bx*G4*G1*alfaC bx*G4*G1*betaC]);

```

```

beta1=fliplr([-1 1+ax -ax]);
gama1=fliplr([-G1*G5*alfaC G1*G5*(alfaC*ax-betaC) G1*G5*betaC*ax]);

alfa2=fliplr([bx*G4*alfaA bx*G4*betaA]);
beta2=fliplr([-1 1+ax -ax]);
gama2=fliplr([-G5*alfaA G5*(alfaA*ax-betaA) G5*betaA*ax]);

alfa3=fliplr([-G3*alfaB -G3*betaB]);
beta3=fliplr([-1 1]);
gama3=fliplr([G3*alfaB G3*betaB]);
%=====
%-----incluye los ceros y uno -----

aa1=fliplr([-1 -a1 0]-[0 -1 -a1]);
aa2=fliplr([-1 -a2 0]-[0 -1 -a2]);
bb1=fliplr([b1 0]-[0 b1]);
bb2=fliplr([b2 0]-[0 b2]);
cc1=fliplr([c1 0]-[0 c1]);
cc2=fliplr([c2 0]-[0 c2]);

na1=length(aa1);
na2=length(aa2);
nb1=length(bb1);
nb2=length(bb2);
nc1=length(cc1);
nc2=length(cc2);

for i=1:N
    A1(i,i:na1+i-1)=[aa1];
    A2(i,i:na2+i-1)=[aa2];
    B1(i,i:nb1+i)=[bb1 0];
    B2(i,i:nb2+i)=[bb2 0];
    C1(i,i:nc1+i)=[cc1 0];
    C2(i,i:nc2+i)=[cc2 0];
    D1(i,i:i+2)=[0 -1 1];
    D2(i,i:i+2)=[0 -1 1];
end
Alf=A1(1:N,na1:N+na1-1);
A2f=A2(1:N,na2:N+na2-1);
B1f=B1(1:N,nb1+1:N+nb1);
B2f=B2(1:N,nb2+1:N+nb2);
C1f=C1(1:N,nc1+1:N+nc1);
C2f=C2(1:N,nc2+1:N+nc2);
D1f=D1(1:N,3:N+2);
D2f=D2(1:N,3:N+2);

A1p=A1(1:N,1:2);
A2p=A2(1:N,1:2);
B1p=B1(1:N,1:2);
B2p=B2(1:N,1:2);
C1p=C1(1:N,1:2);
C2p=C2(1:N,1:2);
D1p=D1(1:N,1:2);
D2p=D2(1:N,1:2);

AU1=-1*eye(N);
AU2=-1*eye(N);

for i=1:N
    Ya(i,i:2+i)=[alfa1 0];
    Yb(i,i:2+i)=[alfa2 0];
    Yc(i,i:2+i)=[0 alfa3];

    Ua(i,i:2+i)=[beta1];
    Ub(i,i:2+i)=[beta2];
    Uc(i,i:2+i)=[0 beta3];

    Ra(i,i:2+i)=[gama1];
    Rb(i,i:2+i)=[gama2];

```



```

Rc(i,i:2+i)=[0 gama3];

end

Yaf=Ya(1:N,3:N+2);
Ybf=Yb(1:N,3:N+2);
Ycf=Yc(1:N,3:N+2);

Uaf=Ua(1:N,3:N+2);
Ubf=Ub(1:N,3:N+2);
Ucf=Uc(1:N,3:N+2);

Raf=Ra(1:N,3:N+2);
Rbf=Rb(1:N,3:N+2);
Rcf=Rc(1:N,3:N+2);
%-----
Yap=Ya(1:N,1:2);
Ybp=Yb(1:N,1:2);
Ycp=Yc(1:N,1:2);

Uap=Ua(1:N,1:2);
Ubp=Ub(1:N,1:2);
Ucp=Uc(1:N,1:2);

Rap=Ra(1:N,1:2);
Rbp=Rb(1:N,1:2);
Rcp=Rc(1:N,1:2);

z=zeros(N,N);
U=eye(N);

GG2=-U*G2;

s=zeros(N,2);

%-----
%::: Uc :::
%-----
Ts=1;
Ki=0.1;
Kd=0.1;
Kp=0.05;
alfa4=[0.09878 (-0.09878+1) -0.1048]/rop2;
psi=-alfa4;
fi1=[(Ki*Ts/2+Kd/Ts-Kp) (Ki*Ts-2*Kd/Ts) (Kp+Ki*Ts/2+Kd/Ts)];
fi2=0.8371;
Wsp=1;
C4=sum(fi1)*Wsp;

for i=1:N
    Yd(i,i:2+i)=[alfa4];
    L(i,i:2+i)=[psi];
    W1(i,i:2+i)=[0 fi2 -1];
    UC(i,i:2+i)=[-1 0 1];
    W2(i,i:2+i)=[fi1];
end
Ydf=Yd(1:N,3:N+2);
Ydp=Yd(1:N,1:2);
Lf=L(1:N,3:N+2);
Lp=L(1:N,1:2);
W1f=W1(1:N,3:N+2);
W1p=W1(1:N,1:2);
W2f=W2(1:N,3:N+2);
W2p=W2(1:N,1:2);
UCf=UC(1:N,3:N+2);
UCp=UC(1:N,1:2);

%=====
% si d=1 ua<ub ua<uc

```

```

% si d=0  ub<ua  ub<uc
% si d=2  uc<ua  uc<ub

d1a=[ 1; 1];   d1b=[-1 ; 0];   d1c=[0 ; -1];
d0a=[-1; 0];   d0b=[ 1 ; 1];   d0c=[0 ; -1];
d2a=[-1; 0];   d2b=[ 0 ; -1];   d2c=[1 ; 1];
UA=zeros(2*N,N);
UB=zeros(2*N,N);
UC=zeros(2*N,N);

for i=1:N
    if d(i)==1
        UA( 2*i-1: 2*i,i )=d1a;
        UB( 2*i-1: 2*i,i )=d1b;
        UC( 2*i-1: 2*i,i )=d1c;
    else
        if d(i)==0
            UA( 2*i-1: 2*i,i )=d0a;
            UB( 2*i-1: 2*i,i )=d0b;
            UC( 2*i-1: 2*i,i )=d0c;
        else
            UA( 2*i-1: 2*i,i )=d2a;
            UB( 2*i-1: 2*i,i )=d2b;
            UC( 2*i-1: 2*i,i )=d2c;
        end
    end
end

z1=zeros(2*N,1);
z2=[z;z];
%   1   11  21  31  41  51  61  71  81  91  101 110 121 131
%   10  20  30  40  50  60  70  80  90 100 110 120 130 140
%   y1  y2  u1  u2  Au1 Au2 r1  r2  ua  ub  uc  L  W  yab
%-----
A=[z2 z2 z2 z2 z2 z2 z2 z2 UA UB UC z2 z2 z2 ];
b=z1;

%=====
%=====
% para linealizacion de multiplicacion

ua0=axx(14);
w0=axx(20);
G2w=U*G2*w0;
Ua0=U*G2*ua0;

%-----
% yab = ua*d(2-d) + ub(1-d)(2-d)/2 + uc(1-d)d/2
Ua=zeros(N);
Ub=zeros(N);
Uc=zeros(N);
d1=d.*(2-d);
d2=(1-d).*(2-d)/2;
d3=(1-d).*d/2;

for i=1:N
    Ua(i,i)=d1(i);
    Ub(i,i)=d2(i);
    Uc(i,i)=d3(i);
end

%   1   11  21  31  41  51  61  71  81  91  101 110 121 131
%   10  20  30  40  50  60  70  80  90 100 110 120 130 140
%-----
%   y1  y2  u1  u2  Au1 Au2 r1  r2  ua  ub  uc  L  W  yab
Aeq=[A1f  z  B1f C1f  z  z  z  z  z  z  z  z  z  z
      z  A2f B2f C2f  z  z  z  z  z  z  z  z  z  z
      z  z  D1f z  AU1 z  z  z  z  z  z  z  z  z
      z  z  z  D2f z  AU2 z  z  z  z  z  z  z  z

```

```

Yaf z Uaf z z z Raf z z z z z z z
Ybf z z z z z Rbf z Ubf z z z z z
z Ycf z z z z z Rcf z Ucf z z z z
z z z z z z z z z z UCf z W2f z

z Ydf z z z z z z z z z z Lf W1f z
z z z -U z z z z z z z z Ua0 G2w
z z z z z z z z z z U z z
z z z z z z z z Ua Ub Uc z z -U];

beq=[Alp s Blp Clp s s s s s s s s
s A2p B2p C2p s s s s s s s s
s s D1p s s s s s s s s
s s s D2p s s s s s s s s
Yap s Uap s Rap s s s s s s s

Ybp s s s Rbp s Ubp s s s s s
s Ycp s s s Rcp s Ucp s s s s
s s s s s UCp s W2p s

s Ydp s s s s s Lp W1p s
s s s s s s s s s s
s s s s s s s s s s
s s s s s s s s s];

%-----
% yl...r1 0 r2 ua 0 ub (uc L w) yab
axxt=[axx(1:10) 0 axx(11) axx(13:14) 0 axx(12) axx(15:20) 0 0];
%-----

beq=beq*axxt';
beq=-beq;
beq(71:80)=beq(71:80)+C4;
beq(81:90)=beq(81:90)-0.1629;
beq(91:100)=beq(91:100)+ua0*w0*G2;
beq(101:110)=beq(101:110)+3.386e7;

%=====
% perdidas de conexion
% si ( d(i)=1 o d(i)=2 ) => r2(i)=ropt2
nd=0;
for i=1:N
    if d(i)~=0
        nd=nd+1;
    end
end

nun=0;
if nd >0
    Aeq1=zeros(nd,14*N);
    for i=1:N
        if d(i)~=0
            nun=nun+1;
            Aeq1(nun,7*N+i)=1;
        end
    end
    beq1=ones(nd,1)*3.386e7;
    Aeq=[Aeq1;Aeq];
    beq=[beq1;beq];
end

%=====
% consistencia de las condiciones iniciales y el Switch
for i=1:N
    if d(i)==1

```

```

        uua(i)=0.8006234;
        uub(i)=0.8007234;
        uuc(i)=0.8007234;
        yyab(i)=0.8006234;
    else
        if d(i)==0
            uua(i)=0.8008234;
            uub(i)=0.8007234;
            uuc(i)=0.8008234;
            yyab(i)=0.8007234;
        else
            uua(i)=0.8006234;
            uub(i)=0.8006234;
            uuc(i)=0.8005234;
            yyab(i)=0.8005234;
        end
    end
end
%=====
%=====
%   1   11  21  31  41  51  61  71  81  91  101 110 121 131
%   10  20  30  40  50  60  70  80  90 100  110 120 130 140
%   y1  y2  u1  u2  Au1 Au2  r1  r2  ua  ub  uc  L  W  yab
%-----
PMECH=3.386e7;
TTOUT=1015.8;
FD=0.61648;
WA=46.132;

zz=ones(N,1);
ub=[ones(13*N,1)*inf; zz*1.5];
lb=[ones(3*N,1)*-inf; zz*0.061648;ones(9*N,1)*-inf; zz*(-0.1)];

q=ones(10,1);
w=q;

x0=[q*TTOUT;q*PMECH;q*WA;q*FD;q*0;q*0;q*TTOUT;q*PMECH;uua';uub';uuc';q*PMECH;w;yyab'];
[x,fval] = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0) ;

r1=x(6*N+1); %setpoint-óptimo 1
r2=x(7*N+1); %setpoint-óptimo 2

r=[r1 r2];

r=[r1 r2];

%-----
%-----

foo=fval;
if gen==4;
    save DDD d
    save XXX x
end
end

```

Programas capítulo VII

Programa para lograr un ley de control PWA en el control supervisor predictivo de la seccion 7.2.1

```

sysStruct.C = [1 0]; %System Dynamics 1: y(k)=Cx(k)+Du(k)+g
sysStruct.D = 0; %System Dynamics 1: y(k)=Cx(k)+Du(k)+g
sysStruct.g = [0]; %System Dynamics 1: y(k)=Cx(k)+Du(k)+g
sysStruct.A = [0.8 1;-0.1 1]; %System Dynamics 1: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+f

```

```

sysStruct.B = [0.1;0.1]; %System Dynamics 1: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+f
sysStruct.f = [0;0]; %System Dynamics 1: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+f

sysStruct.ymin = -1; %Output constraints for dynamic 1 and 2
sysStruct.ymax = 1; %Output constraints for dynamic 1 and 2
sysStruct.umin = -1; %Input constraints for dynamic 1 and 2
sysStruct.umax =1; %Input constraints for dynamic 1 and 2

X0b=[0
    0];
refX=[0
    0];
QQ=[ 1 0
    0 1];
qy=[1]

probStruct.tracking = 0;
probStruct.yref = [0];
probStruct.norm=2; %Quadratic Objective
probStruct.Q=QQ; %Objective: min_U J=sum x'Qx + u'Ru...
probStruct.R=[1]; %Objective: min_U J=sum x'Qx + u'Ru...
probStruct.N=10; %...over the prediction horizon 5
probStruct.Tconstraint=1; %Compute optimal solution, not low complexity.
%probStruct.xref=refX;
probStruct.subopt_lev=2
probStruct.P_N=qy
% P=unitbox(18, 10);
%probStruct.Tset=P;
probStruct.Qy=qy
%If we now call
ctrlStruct0=mpt_Control(sysStruct,probStruct); %Compute feedback controller
%mpt_plotPartition(ctrlStruct)

```

Programa para lograr un ley de control PWA en el control supervisor predictivo de la seccion 7.2.2

```

sysStruct.C{1} = [1 0 0]; %System Dynamics 1: y(k)=Cx(k)+Du(k)+g
sysStruct.D{1} = 0; %System Dynamics 1: y(k)=Cx(k)+Du(k)+g
sysStruct.g{1} = [0]; %System Dynamics 1: y(k)=Cx(k)+Du(k)+g
sysStruct.A{1} = [-1.4 1 0;-0.5 1 0;-0.25 0 1]; %System Dynamics 1: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+f
sysStruct.B{1} = [0.5;0.5;0.25]; %System Dynamics 1: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+f
sysStruct.f{1} = [0;0;0]; %System Dynamics 1: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+f
sysStruct.guardX{1} = [0 1 -1]; %Dynamics 1 defined in guardX*x <= guardC
sysStruct.guardC{1} = [0]; %Dynamics 1 defined in guardX*x <= guardC

sysStruct.C{2} = [1 0 0]; %System Dynamics 2: y(k)=Cx(k)+Du(k)+g
sysStruct.D{2} = 0; %System Dynamics 2: y(k)=Cx(k)+Du(k)+g
sysStruct.g{2} = [0]; %System Dynamics 2: y(k)=Cx(k)+Du(k)+g
sysStruct.A{2} = [-1.15 0 1;-0.5 1 0;-0.25 0 1]; %System Dynamics 2: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+f
sysStruct.B{2} = [0.25;0.5;0.25]; %System Dynamics 2: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+f
sysStruct.f{2} = [0;0;0]; %System Dynamics 2: x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+f
sysStruct.guardX{2} = [0 -1 1]; %Dynamics 2 defined in guardX*x <= guardC
sysStruct.guardC{2} = [0]; %Dynamics 2 defined in guardX*x <= guardC

sysStruct.ymin = -1; %Output constraints for dynamic 1 and 2
sysStruct.ymax = 2; %Output constraints for dynamic 1 and 2
sysStruct.umin = -1; %Input constraints for dynamic 1 and 2
sysStruct.umax = 1; %Input constraints for dynamic 1 and 2

X0b=[1
    0
    0];
refX=[1
    0
    0];

QQ=[ 1 0 0
    0 0 0
    0 0 0];

qy=[1]

```

```

probStruct.norm=inf; %Quadratic Objective
probStruct.Q=QQ; %Objective: min_U J=sum x'Qx + u'Ru...
probStruct.R=[1 ]; %Objective: min_U J=sum x'Qx + u'Ru...
probStruct.N=6; %...over the prediction horizon 5
probStruct.Tconstraint=0; %Compute optimal solution, not low complexity.
probStruct.xref=refX;
probStruct.subopt_lev=0
probStruct.P_N=qy
% P=unitbox(18, 10);
%probStruct.Tset=P;
%probStruct.tracking=0
probStruct.QY=qy

%If we now call

ctrlStruct1=mpt_Control(sysStruct,probStruct); %Compute feedback controller
%mppt_plotPartition(ctrlStruct1)

[U, feasible,region,coct]=mpt_getInput(ctrlStruct1, X0b)
save ctrlStruct1

```

Programas capítulo VIII

Se utilizó método heurístico para garantizar la estabilidad para el sistema (8.42) en lazo cerrado con optimización con algoritmos genéticos para un controlador MPC. El LMI (8.35) ha sido resuelto usando Matlab LMI Control Toolbox (sección 8.3.1)

```

% LMI

setlmis([])
A1=[0.35 -0.6062;0.6062 0.35];
A2=[0.35 0.6062;-0.6062 0.35];
B=[0;1];

Z=lmivar(1,[1,1;1,1]);% 1=diag 2=2x2 1=llena
Y1=lmivar(2,[1,2]);% 2=rect 1x2
Y2=lmivar(2,[1,2]);% 2=rect 1x2

Qm=lmivar(1,[1 0;0 1]);% 1=diag 2=2x2
Rm=lmivar(3,[2.5]);% 1=diag 1=1x1

% primer sistema LMI
A=A1;
lmiterm([-1 1 1 Z],1,1); % term Z -1:(LMI>0) (1,1) var=1
lmiterm([-1 2 1 Z],1,1); % term Z
lmiterm([-1 3 1 Y1],1,1); % term y
lmiterm([-1 4 1 Z],A,1); % term AZ
lmiterm([-1 4 1 Y1],B,1); % term BY

lmiterm([-1 1 2 Z],1,1); % term Z
lmiterm([-1 2 2 0],Qm); % term Qm

lmiterm([-1 1 3 -Y1],1,1); % term Y'
lmiterm([-1 3 3 0],Rm); % term Rm

lmiterm([-1 1 4 -Y1],1,B'); % term Y'B'
lmiterm([-1 1 4 -Z],1,A'); % term Z'A'
lmiterm([-1 4 4 Z],1,1); % term Z

%segundo sistema LMI
A=A2;

lmiterm([-2 1 1 Z],1,1); % term Z -1:(LMI>0) (1,1) var=1
lmiterm([-2 2 1 Z],1,1); % term Z

```

```

lmiterm([-2 3 1 Y2],1,1); % term y
lmiterm([-2 4 1 Z],A,1); % term AZ
lmiterm([-2 4 1 Y2],B,1); % term BY

lmiterm([-2 1 2 Z],1,1); % term Z
lmiterm([-2 2 2 0],Qm); % term Qm

lmiterm([-2 1 3 -Y2],1,1); % term Y'
lmiterm([-2 3 3 0],Rm); % term Rm

lmiterm([-2 1 4 -Y2],1,B'); % term Y'B'
lmiterm([-2 1 4 -Z],1,A'); % term Z'A'
lmiterm([-2 4 4 Z],1,1); % term Z

lmisys=getlmis;

[tmin,xfegas]=feasp(lmisys);
z=dec2mat(lmisys,xfegas,Z)
y1=dec2mat(lmisys,xfegas,Y1)
y2=dec2mat(lmisys,xfegas,Y2)

tmin

P=inv(z)
K1=y1*P
K2=y2*P

```

Para determinar el conjunto invariante positivo se utilizó el toolbox de conjunto poliédricos de (Kerrigan,2000) (seccion 8.3.1)

```

K1=[-6.0223e-001 -3.4931e-001];
K2=[ 6.0223e-001 -3.4931e-001];

A1=[0.35 -0.6062;0.6062 0.35];
A2=[0.35 0.6062;-0.6062 0.35];
B1=[0;1];
B2=B1;

Ac11=[A1+B1*K1];
Ac12=[A2+B2*K2];

C=[K1
   K2
  -K1
  -K2];
d=[1
   1
   1
   1];
Xu=[C d];

ax=[-1 1
     1 -1
     1 1
     -1 -1];
bx=[1;1;1;1]*100;
axbx=[ax bx]

y=axbx;
X1=Xu;
X2=Xu;
for i=1:N % (N debe ser grande )
    Qx1=onestepaut(Ac11,X1);
    x1=intsect(Qx1,X1,1);
    X1=x1;

    Qx2=onestepaut(Ac12,X2);
    x2=intsect(Qx2,X2,1);

```

```

X2=X2;

if i==1
y=X2
end

x=intsect(X2,X1,1);
x=intsect(x,y,1);
y=x;

end
x

[As,bs] = aug2std(x);
P=polytope(As,bs);
plot(P)

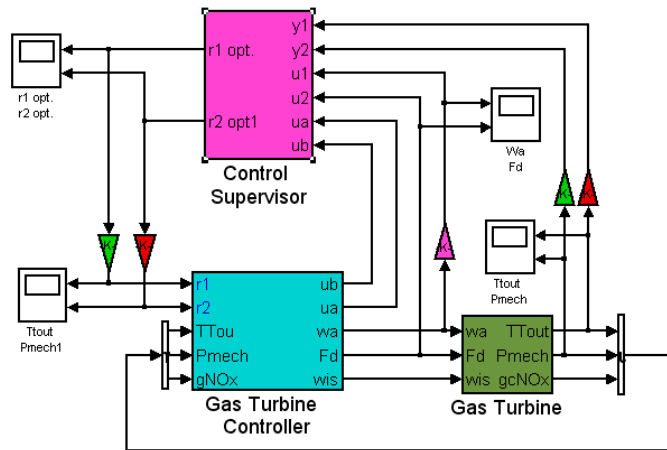
```

Implementación del controlador supervisor predictivo híbrido estable con optimización con algoritmos genéticos.

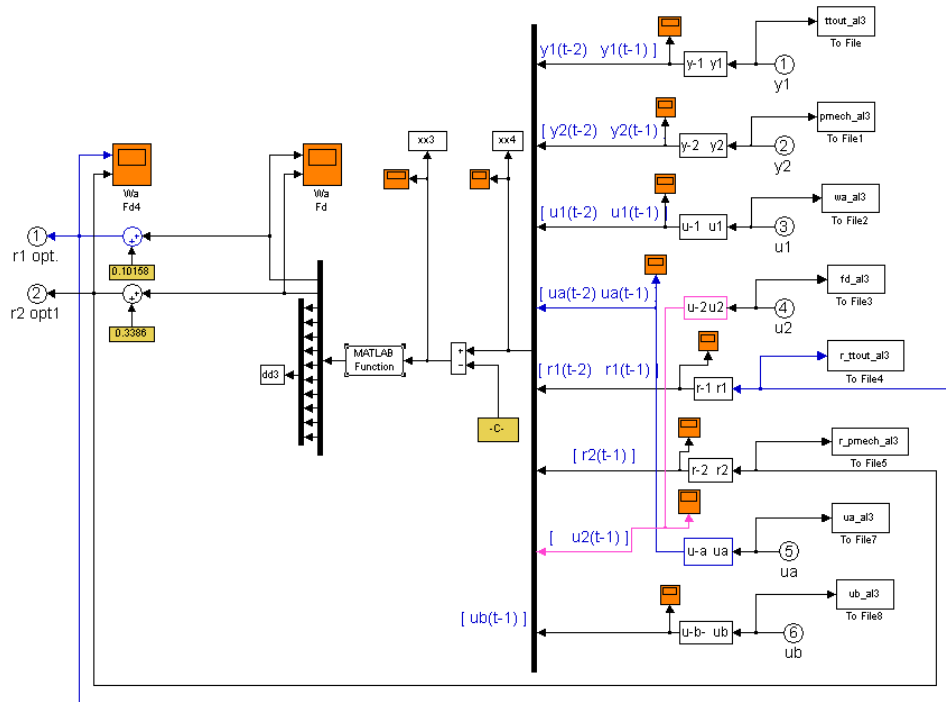
**CONTROL SUPERVISOR
LINEAL MIMO
DE TURBINA A GAS
alternativa N°3
muestreo a 1[s]**

*estabilidad con conjunto invariante
terminal y función de Liapunov
la referencia =0*

Genético
crowding



detalle: Bloque de Control Supervisor



Optimizador genético

```

%      gen_crowding_delta

% x1 =y1(k)
% x2 =y1(k-1)
% x3 =y1(k-2)
% x4 =y2(k)
% x5 =y2(k-1)
% x6 =u1(k-1)
% x7 =u1(k-2)
% x8 =ua(k-1)
% x9 =ua(k-2)
% x10 =r1(k-1)
% x11 =r1(k-2)
% x12 =r2(k-1)
% x13 =u2(k-1)
% x14 =ub(k-1)

function r=gen_crowding_delta(aux)

N=10;

NIND = 1024;          % Number of individuals per subpopulations
MAXGEN = 1;          % maximum Number of generations
GGAP = 1;            % Generation gap, how many new individuals are created

h=zeros(NIND,N);

h=[ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
    1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
    1 1 1 1 1 1 1 1 0 1
    1 1 1 1 1 1 1 0 1 1
    1 1 1 1 1 1 0 1 1 1
    1 1 1 1 1 0 1 1 1 1
    1 1 1 1 0 1 1 1 1 1

```



```

        [a n]=min(ObjV);
pob=Chrom;
fix=pob(n,:);
fix=fix';
load xxx
load d
dim_vector=14;
r1=xxx(11*dim_vector+1); %setpoint-óptimo 1 (Temperatura)
r2=xxx(11*dim_vector+2); %setpoint-óptimo 1 (Potencia)
r=[r1 r2 d];

```

```

% Crowding deterministico

function output_DC=Crowding_delta(Chrom,auxi,NIND,gen,N);
%N=10;
output_DC=Chrom;
Ind=randperm(NIND);
for i=1:(NIND/2),
    padre1=Chrom(Ind(i),:);
    padre2=Chrom(Ind(i+1),:);
    Valores_padres=[padre1;padre2];
    Fitness_padres=objfun_delta(Valores_padres,auxi,gen,N);
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    SelCh = recomb('xovsp',[padre1;padre2],1.0);
    hijo1=SelCh(1,:);
    hijo2=SelCh(2,:);
    Valores_hijos=SelCh;
    Fitness_hijos=objfun_delta(Valores_hijos,auxi,gen,N);
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if((Dist(Valores_padres(1),Valores_hijos(1))+Dist(Valores_padres(2),Valores_hijos(2)))<=(Dist(Valores_padres(1),Valores_hijos(2))+Dist(Valores_padres(2),Valores_hijos(1))))
    if(Fitness_hijos(1)<Fitness_padres(1))
        padre1=hijo1;
    end;
    if(Fitness_hijos(2)<Fitness_padres(2))
        padre2=hijo2;
    end;
else
    if(Fitness_hijos(2)<Fitness_padres(1))
        padre1=hijo2;
    end
    if(Fitness_hijos(1)<Fitness_padres(2))
        padre2=hijo1;
    end
end
output_DC(Ind(i),:)=padre1;
output_DC(Ind(i+1),:)=padre2;
end

% End of function

```

Función objetivo

```

function foo=fo_delta(d,auxi,gen,N)
%load K1K2 % K1 K2
load XF % x_fin region terminal
%load PP % P ponderador de estdo final
%load QQ % QQ Q

%-----lera ecuacion-----
al(1)=0.08743121968840;
b1(1)=-0.01114221222363e3*1e-4*1e2;
c1(1)= 1.20632560695128e3*1e-4;

```

```

%-----2da ecuacion-----
a2(1)=0.05378337403174;
b2(1)=-0.04019660804141e7*1e-8*1e2;
c2(1)=4.23552446381820e7*1e-8;
%-----

aa1=[1 a1 0]-[0 1 a1];
aa2=[1 a2 0]-[0 1 a2];
bb1=[b1 0]-[0 b1];
bb2=[b2 0]-[0 b2];
cc1=[c1 0]-[0 c1];
cc2=[c2 0]-[0 c2];

Ts=1;
alfaA=Ts*(-10)/2+(-10);
betaA=Ts*(-10)/2-(-10);

alfaB=Ts*0.1/2+0.05;*****
betaB=Ts*0.1/2-0.05;*****
alfaC=Ts*0.1/2+0.05;*****
betaC=Ts*0.1/2-0.05;*****

%-----
ax=0.9608;
bx=0.03921;

ax=0.9608;
bx=0.03921-7.8410e-002;
%bx=0.03921;

G1=100;
G2=0.77;
G3=2.95;
G4=9.8;
G5=9.8;

%bx*G4*G1*alfaC
alfa=[ bx*G4*G1*alfaC   bx*G4*G1*betaC
        bx*G4*alfaA     bx*G4*betaA
        -G3*alfaB       -G3*betaB];

beta=[ -1*1e2   (1+ax)*1e2   -ax*1e2
        -1   1+ax   -ax
        -1   1   0   ];

gama=[ -G1*G5*alfaC   G1*G5*(alfaC*ax-betaC)   G1*G5*betaC*ax
        -G5*alfaA     G5*(alfaA*ax-betaA)     G5*betaA*ax
        G3*alfaB       G3*betaB               0
];

alfa(1,1)=alfa(1,1)/beta(1,1);
alfa(1,2)=alfa(1,2)/beta(1,1);
alfa(2,1)=alfa(2,1)/beta(2,1);
alfa(2,2)=alfa(2,2)/beta(2,1);
alfa(3,1)=alfa(3,1)/beta(3,1);
alfa(3,2)=alfa(3,2)/beta(3,1);

beta(1,2)=beta(1,2)/beta(1,1);
beta(1,3)=beta(1,3)/beta(1,1);
beta(2,2)=beta(2,2)/beta(2,1);
beta(2,3)=beta(2,3)/beta(2,1);
beta(3,2)=beta(3,2)/beta(3,1);
beta(3,1)=beta(3,1)/beta(3,1);

gama(1,1)=gama(1,1)/beta(1,1);
gama(1,2)=gama(1,2)/beta(1,1);
gama(1,3)=gama(1,3)/beta(1,1);

```

```

gama(2,1)=gama(2,1)/beta(2,1);
gama(2,2)=gama(2,2)/beta(2,1);
gama(2,3)=gama(2,3)/beta(2,1);

gama(3,1)=gama(3,1)/beta(3,1);
gama(3,2)=gama(3,2)/beta(3,1);

a11=aal(2);
a12=aa1(3);
b11=bb1(1);
b12=bb1(2);
c11=cc1(1);
c12=cc1(2);

a21=aa2(2);
a22=aa2(3);
b21=bb2(1);
b22=bb2(2);
c21=cc2(1);
c22=cc2(2);

m(1,1)=-a11;%
m(1,2)=b11*alfa(1,1)-a12+c11*G2*alfa(2,1);%
m(1,3)=b11*alfa(1,2)+c11*G2*alfa(2,2);%
m(1,6)=b12-b11*beta(1,2);%
m(1,7)=-b11*beta(1,3);%
m(1,8)=-c11*G2*beta(2,2);%
m(1,9)=-c11*G2*beta(2,3);%
m(1,10)=-b11*gama(1,2)-c11*G2*gama(2,2);%
m(1,11)=-b11*gama(1,3)-c11*G2*gama(2,3);%
m(1,13)=c12;%

m(2,1)=1;%

m(3,2)=1;%

m(4,2)=b21*alfa(1,1)+c21*G2*alfa(2,1);%
m(4,3)=b21*alfa(1,2)+c21*G2*alfa(2,2);%
m(4,4)=-a21;%
m(4,5)=-a22;%
m(4,6)=b22-b21*beta(1,2);%
m(4,7)=-b21*beta(1,3);%
m(4,8)=-c21*G2*beta(2,2);%
m(4,9)=-c21*G2*beta(2,3);%
m(4,10)=-b21*gama(1,2)-c21*G2*gama(2,2);%
m(4,11)=-b21*gama(1,3)-c21*G2*gama(2,3);%
m(4,13)=c22;%

m(5,4)=1;%

m(6,2)=alfa(1,1);
m(6,3)=alfa(1,2);
m(6,6)=-beta(1,2);
m(6,7)=-beta(1,3);
m(6,10)=-gama(1,2);
m(6,11)=-gama(1,3);

m(7,6)=1;

m(8,2)=alfa(2,1);
m(8,3)=alfa(2,2);
m(8,8)=-beta(2,2);
m(8,9)=-beta(2,3);
m(8,10)=-gama(2,2);
m(8,11)=-gama(2,3);

m(9,8)=1;
m(11,10)=1;

```

```

m(13,2)=G2*alfa(2,1);
m(13,3)=G2*alfa(2,2);
m(13,8)=-G2*beta(2,2);
m(13,9)=-G2*beta(2,3);
m(13,10)=-G2*gama(2,2);
m(13,11)=-G2*gama(2,3);

```

```

m(14,4)=alfa(3,1);
m(14,5)=alfa(3,2);
m(14,12)=-gama(3,2);
m(14,14)=-beta(3,2);

```

```

n(1,1)=-b11*gama(1,1)-c11*G2*gama(2,1);%
n(4,1)=-b21*gama(1,1)-c21*G2*gama(2,1);%
n(6,1)=-gama(1,1);
n(8,1)=-gama(2,1);
n(10,1)=1;
n(12,2)=1;
n(13,1)=-G2*gama(2,1);
n(14,2)=-gama(3,1);

```

```

% -----
%      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11      12      13      14
% 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888
Aa=[ m(1,1) m(1,2) m(1,3) 0 0 m(1,6) m(1,7) m(1,8) m(1,9) m(1,10) m(1,11) 0 m(1,13) 0
      m(2,1) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 m(3,2) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 m(4,2) m(4,3) m(4,4) m(4,5) m(4,9) m(4,7) m(4,8) m(4,9) m(4,10) m(4,11) 0 m(4,13) 0
      0 0 0 m(5,4) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 m(6,2) m(6,3) 0 0 m(6,6) m(6,7) 0 0 m(6,10) m(6,11) 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 m(7,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 m(8,2) m(8,3) 0 0 0 0 m(8,8) m(8,9) m(8,10) m(8,11) 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 m(9,8) 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 m(11,10) 0 0 0 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
      0 m(13,2) m(13,3) 0 0 0 0 m(13,8) m(13,9) m(13,10) m(13,11) 0 0 0 0
      0 0 0 m(14,4) m(14,5) 0 0 0 0 0 0 m(14,10) 0 m(14,14)];

```

```

Ba=[n(1,1) 0
     0 0
     0 0
     n(4,1) 0
     0 0
     n(6,1) 0
     0 0
     n(8,1) 0
     0 0
     n(10,1) 0
     0 0
     0 n(12,2)
     n(13,1) 0
     0 n(14,2)];

```

```

m(1,1)=-a11;
m(1,2)=b11*alfa(1,1)-a12;
m(1,3)=b11*alfa(1,2);
m(1,4)=c11*G2*alfa(3,1);
m(1,5)=c11*G2*alfa(3,2);
m(1,6)=b12-b11*beta(1,2);
m(1,7)=-b11*beta(1,3);
m(1,10)=-b11*gama(1,2);
m(1,11)=-b11*gama(1,3);
m(1,12)=-c11*G2*gama(3,2);
m(1,13)=c12;
m(1,14)=-c11*G2*beta(3,2);

```

```

m(2,1)=1;

```

```

m(3,2)=1;

```

```

m(4,2)=b21*alfa(1,1);
m(4,3)=b21*alfa(1,2);
m(4,4)=-a21+c21*G2*alfa(3,1);

```

```

m(4,5)=c12*G2*alfa(3,2)-a22;
m(4,6)=b22-b21*beta(1,2);
m(4,7)=-b21*beta(1,3);
m(4,9)=b21*gama(1,3);
m(4,10)=-b21*gama(1,2);
m(4,11)=-b21*gama(1,3);
m(4,12)=-c12*G2*gama(3,2);
m(4,13)=c22;
m(4,14)=-c21*G2*beta(3,2);

```

```

m(5,4)=1;

```

```

m(6,2)=alfa(1,1);
m(6,3)=alfa(1,2);
m(6,6)=-beta(1,2);
m(6,7)=-beta(1,3);
m(6,10)=-gama(1,2);
m(6,11)=-gama(1,3);

```

```

m(7,6)=1;

```

```

m(8,2)=alfa(2,1);
m(8,3)=alfa(2,2);
m(8,8)=-beta(2,2);
m(8,9)=-beta(2,3);
m(8,10)=-gama(2,2);
m(8,11)=-gama(2,3);

```

```

m(9,8)=1;
m(11,10)=1;

```

```

m(13,4)=G2*alfa(3,1);
m(13,5)=G2*alfa(3,2);
m(13,12)=-G2*gama(3,2);
m(13,14)=-G2*beta(3,2);

```

```

m(14,4)=alfa(3,1);
m(14,5)=alfa(3,2);
m(14,12)=-gama(3,2);
m(14,14)=-beta(3,2);

```

```

n(1,1)=-b11*gama(1,1);
n(1,2)=-c11*G2*gama(3,1);
n(4,1)=-b21*gama(1,1);
n(4,2)=-c21*G2*gama(3,1);
n(6,1)=-gama(1,1);
n(8,1)=-gama(2,1);
n(10,1)=1;
n(12,2)=1;
n(13,2)=-G2*gama(3,1);
n(14,2)=-gama(3,1);

```

```

% -----
%      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11      12      13      14
% 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888 88888
Ab=[ m(1,1) m(1,2) m(1,3) m(1,4) m(1,5) m(1,6) m(1,7) 0 0 m(1,10) m(1,11) m(1,12) m(1,13) m(1,14)
    m(2,1) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 m(3,2) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 m(4,2) m(4,3) m(4,4) m(4,5) m(4,6) m(4,7) 0 m(4,9) m(4,10) m(4,11) m(4,12) m(4,13) m(4,14)
    0 0 0 m(5,4) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 m(6,2) m(6,3) 0 0 m(6,6) m(6,7) 0 0 m(6,10) m(6,11) 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 m(7,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 m(8,2) m(8,3) 0 0 0 0 m(8,8) m(8,9) m(8,10) m(8,11) 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 m(9,8) 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 m(11,10) 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 m(13,4) m(13,5) 0 0 0 0 m(13,12) 0 m(13,14)
    0 0 0 0 m(14,4) m(14,5) 0 0 0 0 0 0 m(14,12) 0 m(14,14)];

```

```

Bb=[n(1,1) n(1,2)
    0 0
    0 0
    n(4,1) n(4,2)]

```

```

0      0
n(6,1) 0
0      0
n(8,1) 0
0      0
n(10,1) 0
0      0
0      n(12,2)
0      n(13,2)
0      n(14,2)];

% x1 =y1(k)
% x2 =y1(k-1)
% x3 =y1(k-2)
% x4 =y2(k)
% x5 =y2(k-1)
% x6 =u1(k-1)
% x7 =u1(k-2)
% x8 =ua(k-1)
% x9 =ua(k-2)
% x10 =r1(k-1)
% x11 =r1(k-2)
% x12 =r2(k-1)
% x13 =u2(k-1)
% x14 =ub(k-1)
A1=Aa;
A2=Ab;
B11=Ba;
B22=Bb;
if auxi(8)<=auxi(14)
    M0=A1;
    B0=B11;
else
    M0=A2;
    B0=B22;
end

M1=(1-d(1))*A2+d(1)*A1;
M2=(1-d(2))*A2+d(2)*A1;
M3=(1-d(3))*A2+d(3)*A1;
M4=(1-d(4))*A2+d(4)*A1;
M5=(1-d(5))*A2+d(5)*A1;
M6=(1-d(6))*A2+d(6)*A1;
M7=(1-d(7))*A2+d(7)*A1;
M8=(1-d(8))*A2+d(8)*A1;
M9=(1-d(9))*A2+d(9)*A1;
M10=(1-d(10))*A2+d(10)*A1;

z6=zeros(1,7);
z5=zeros(1,5);
D1=[z6 2*d(1)-1 z5 -2*d(1)+1 ];
D2=[z6 2*d(2)-1 z5 -2*d(2)+1 ];
D3=[z6 2*d(3)-1 z5 -2*d(3)+1 ];
D4=[z6 2*d(4)-1 z5 -2*d(4)+1 ];
D5=[z6 2*d(5)-1 z5 -2*d(5)+1 ];
D6=[z6 2*d(6)-1 z5 -2*d(6)+1 ];
D7=[z6 2*d(7)-1 z5 -2*d(7)+1 ];
D8=[z6 2*d(8)-1 z5 -2*d(8)+1 ];
D9=[z6 2*d(9)-1 z5 -2*d(9)+1 ];
D10=[z6 2*d(10)-1 z5 -2*d(10)+1 ];

B1=d(1)*B11+(1-d(1))*B22;
B2=d(2)*B11+(1-d(2))*B22;
B3=d(3)*B11+(1-d(3))*B22;
B4=d(4)*B11+(1-d(4))*B22;
B5=d(5)*B11+(1-d(5))*B22;
B6=d(6)*B11+(1-d(6))*B22;
B7=d(7)*B11+(1-d(7))*B22;
B8=d(8)*B11+(1-d(8))*B22;
B9=d(9)*B11+(1-d(9))*B22;
B10=d(10)*B11+(1-d(10))*B22;

```



```

I=eye(14);
0=zeros(14);
0=zeros(14,2);

%      x0  x1  x2  x3  x4  x5  x6  x7  x8  x9  x10 u0  u1  u2  u3  u4  u5  u6  u7  u8  u9
Aq=[ -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      M1  -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B1  0   0   0   0   0   0   0   0
      0   M2  -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B2  0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   M3  -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B3  0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   0   M4  -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B4  0   0   0   0   0   0   0
      0   0   0   0   M5  -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B5  0   0   0   0   0
      0   0   0   0   0   M6  -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B6  0   0   0   0   0
      0   0   0   0   0   0   M7  -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B7  0   0   0   0   0
      0   0   0   0   0   0   0   M8  -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B8  0   0   0   0
      0   0   0   0   0   0   0   0   M9  -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B9  0   0
      0   0   0   0   0   0   0   0   0   M10 -I   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   B10];

0=zeros(1,14);
0=zeros(1,2);

Adel=[D1  0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      0   D2  0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   D3  0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   0   D4  0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   0   0   D5  0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   0   0   0   D6  0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   0   0   0   0   D7  0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   0   0   0   0   0   D8  0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   0   0   0   0   0   0   D9  0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
      0   0   0   0   0   0   0   0   0   D10 0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0];

dy=size(x_fin);
Ti=x_fin(1:dy(1),1:14); % restricciones terminales
o=zeros(dy(1),14);
0=zeros(dy(1),2);

TT= [ 0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   Ti  0   0   0   0   0   0   0   0];
%A=[Adel;TT];
A=[Adel];
% x1  =y1(k)
% x2  =y1(k-1)
% x3  =y1(k-2)
% x4  =y2(k)
% x5  =y2(k-1)
% x6  =u1(k-1)
% x7  =u1(k-2)
% x8  =ua(k-1)
% x9  =ua(k-2)
% x10 =r1(k-1)
% x11 =r1(k-2)
% x12 =r2(k-1)
% x13 =u2(k-1)
% x14 =ub(k-1)

b0=M0*auxi(1:14)+B0*[auxi(10);auxi(11)];
bq=[-b0;zeros(14*10,1)];
%b=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
b=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];

% si d(i)=1 r2(i)=ropt2
aec=sum(d);
N=10;
% -----
% aec=0;
% -----
nun=0;
if aec>0
    Aq1=zeros(aec,11*14+10*2);
    for i=1:N

```

```

        if d(i)==1
            nun=nun+1;
            Aq1(nun,14*(i+1)+12)=1; % x12 =r2(k-1)
        end
    end
    bq1=ones(aec,1)*0;
    Aq=[Aq;Aq1];
    bq=[bq;bq1];

end

if aec>0
    v=1;
    while v==1
        [v Aq bq]=saca_fila_li(Aq,bq,sum(d));
    end
end
%s=Aeq;
%save si s

```

```
%-----
```

```

% x1 =y1(k)
% x2 =y1(k-1)
% x3 =y1(k-2)
% x4 =y2(k)
% x5 =y2(k-1)
% x6 =u1(k-1)
% x7 =u1(k-2)
% x8 =ua(k-1)
% x9 =ua(k-2)
% x10 =r1(k-1)
% x11 =r1(k-2)
% x12 =r2(k-1)
% x13 =u2(k-1)
% x14 =ub(k-1)

```

```

Q=eye(14);
P=Q;

```

```

R=eye(2)*1e8;
0=zeros(14);
G=[Q 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 Q 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 Q 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 Q 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 Q 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 Q 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 Q 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 Q 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 Q 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 Q 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 P] ;

```

```
z=zeros(11*14,10*2);
```

```

0=zeros(2);
Z=[R 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 R 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 R 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 R 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 R 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 R 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 R 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 R 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 R 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 R];
H=[G z

```

```

    z' Z];
f=zeros(11*14+10*2,1);

arriba=ones(11*14+10*2,1)*inf;
abajo=arriba*-1;

for i=1:11 % ancho Xk= 14
    arriba(8+(i-1)*14)=1.5;
    abajo(8+(i-1)*14)=-0.1;
    arriba(9+(i-1)*14)=1.5;
    abajo(9+(i-1)*14)=-0.1;

    arriba(14+(i-1)*14)=1.5;
    abajo(14+(i-1)*14)=-0.1;

    %abajo(13+(i-1)*14)=0.061648;
end
x0=f*0;
options = optimset('LargeScale','off');
[xxx,fval] = quadprog(H,f,A,b,Aq,bq,abajo,arriba,x0,options);
%x=xxx(3*6+1);
%-----

foo=fval;
if gen==1;
    save xxx
    save d
end

```

Apéndice G

El complemento de Schur surge naturalmente en la solución de un sistema lineal tal como

$$Ax + By = a$$

$$Cx + Dy = b$$

donde x y a son vectores columna p -dimensionales y b es un vector columna q -dimensional y A , B , C , D son respectivamente de $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$ y $q \times q$ matrices, y D es invertible. Multiplicando la segunda ecuación por BD^{-1} y luego sustrayendo de la ecuación de arriba tenemos

$$(A - BD^{-1}C)x = a - BD^{-1}b \text{ con lo cual determinamos el valor de } x$$

Ahora dada la matriz

$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ tal que M es una matriz de $(p+q) \times (p+q)$ entonces se define el complemento de Schur de bloque D de la matriz M como la matriz S de $p \times p$ dada por

$$S = A - BD^{-1}C$$

luego la inversa de M puede ser expresada en términos del complemento de Schur

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} S^{-1} & -S^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CS^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$

lo que queda demostrado multiplicando la matriz anterior por M

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} S^{-1} & -S^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CS^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S^{-1}(A - BD^{-1}C) & S^{-1}B - S^{-1}BD^{-1}D \\ -D^{-1}CS^{-1}A + D^{-1}C + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1}C & -D^{-1}CS^{-1}B + D^{-1}D + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1}D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

los términos son

$$\begin{aligned} S^{-1}(A - BD^{-1}C) &= 1 \\ -D^{-1}CS^{-1}A + D^{-1}C + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1}C &= D^{-1}C(1 - S^{-1}(A - BD^{-1}C)) = 0 \\ S^{-1}B - S^{-1}BD^{-1}D &= 0 \\ -D^{-1}CS^{-1}B + D^{-1}D + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1}D &= -D^{-1}CS^{-1}B + 1 + D^{-1}CS^{-1}B = 1 \end{aligned}$$

Ahora se puede expresar

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Por lo tanto M es definida positiva si sólo si S es definida positiva.

Además se puede decir a partir del complemento de Schur las siguientes expresiones equivalentes:

1. Las desigualdades matriciales $Q > 0$ y $M - RQ^{-1}R^T > 0$
2. La desigualdad matricial $\begin{bmatrix} M & R \\ R^T & Q \end{bmatrix} > 0$

Así aplicando el complemento de Schur a la siguiente matriz

$$\left[\begin{array}{c|ccc} Z & Z & Y_j^T & (A_j Z + B_j Y_j)^T \\ \hline Z & Q^{-1} & 0 & 0 \\ Y_j & 0 & R^{-1} & 0 \\ (A_j Z + B_j Y_j) & 0 & 0 & Z \end{array} \right] > 0$$

lo cual permite

$$Z - \begin{bmatrix} Z & Y_j^T & (A_j Z + B_j Y_j)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ Y_j \\ (A_j Z + B_j Y_j) \end{bmatrix} > 0$$

y

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Z^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

como $Q > 0$ y $R > 0$ se sigue que

$$\begin{cases} Z > 0 \\ Z - ZQZ - Y_j^T R Y_j - (A_j Z + B_j Y_j)^T Z^{-1} (A_j Z + B_j Y_j) > 0 \end{cases}$$

como $Z = P^{-1}$ y $Y_j = K_j P^{-1}$, $j \in S$

$$\begin{cases} P^{-1} > 0 \\ P^{-1} - (A_j P^{-1} + B_j K_j P^{-1})^T P (A_j P^{-1} + B_j K_j P^{-1}) - P^{-1} Q P^{-1} - (K_j P^{-1})^T R (K_j P^{-1}) > 0 \end{cases}$$

se multiplica y premultiplica por P

$$\begin{cases} P > 0 \\ P - (A_j + B_j K_j)^T P (A_j + B_j K_j) - Q - (K_j)^T R (K_j) > 0 \end{cases}$$

Apéndice H

Consistencia de ecuación (7.41)

Dado la función objetivo

$J(U_N, x(0)) \equiv \|Px_N\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} (\|Qx_k\|_p + \|Ru_k\|_p)$ tenemos el siguiente problema de optimización

$$J^*(x(0)) = \min_{U_N} J(U_N, x(0))$$

sujeto a

$$Dx_k + Lu_k \leq M, \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$x_N \in X_f$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k \geq 0$$

$$x_0 = x(0)$$

El problema anterior se puede convertir en un problema de optimización que depende de la condición inicial x_0 y la secuencia U_N

A partir del modelo $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ para $k = 1, 2, 3, \dots, N-1$

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0$$

$$x_2 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1$$

$$x_3 = A^3x_0 + A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2$$

$$x_k = A^kx_0 + A^{k-1}Bu_0 + A^{k-2}Bu_1 + A^{k-3}Bu_2 + \dots + A^2Bu_{k-2} + ABu_{k-1} + Bu_k$$

$$x_k = A^kx_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu_{k-1-j}$$

si $U_N = [u_0 \quad u_1 \quad \dots \quad u_{N-1}]^T$ la ecuación anterior de puede escribir como

$$x_k = A^kx_0 + [A^{k-1}B | \dots | A^2B | AB | B]U_N$$

Remplazando en la función objetivo y con $p = 2$ se cumple

$$J(U_N, x(0)) = \left(A^N x_0 + \sum_{j=0}^{N-1} A^j Bu_{k-1-j} \right)^T P \left(A^N x_0 + \sum_{j=0}^{N-1} A^j Bu_{k-1-j} \right) \\ + \left[A^0 x_0 \right]^T Q \left[A^0 x_0 \right] + u_0^T R u_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\left[A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu_{k-1-j} \right]^T Q \left[A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu_{k-1-j} \right] + u_k^T R u_k \right)$$

$$J(U_N, x(0)) = \left(A^N x_0 \right)^T P \left(A^N x_0 \right) + \left(\sum_{j=0}^{N-1} A^j Bu_{k-1-j} \right)^T P \left(\sum_{j=0}^{N-1} A^j Bu_{k-1-j} \right) + 2 \left(A^N x_0 \right)^T P \left(\sum_{j=0}^{N-1} A^j Bu_{k-1-j} \right) \\ + \left[A^0 x_0 \right]^T Q \left[A^0 x_0 \right] + u_0^T R u_0 + \\ + \sum_{j=1}^{N-1} \left(\left[A^k x_0 \right]^T Q \left[A^k x_0 \right] + \left[\sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu_{k-1-j} \right]^T Q \left[\sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu_{k-1-j} \right] + 2 \left(A^k x_0 \right)^T P \left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu_{k-1-j} \right) \right) \\ + \sum_{j=0}^{N-1} u_k^T R u_k$$

ahora sean las matrices

$$M = [A^{k-1}B | \dots | A^2B | AB | B]$$

$$Mn = [A^{k-1}B | 2A^{k-2}B | \dots | (N-2)A^2B | (N-1)A^1B | NA^0B]$$

$$\begin{aligned}
Ma &= (A^0 x_0)^T [0 | \cdots | 0 | 0 | 0 | A^0 B] \\
&+ (A^1 x_0)^T [0 | \cdots | 0 | 0 | A^1 B | A^0 B] \\
&+ (A^2 x_0)^T [0 | \cdots | 0 | A^2 B | A^1 B | A^0 B] \\
&\quad \vdots \\
&+ (A^{N-1} x_0)^T [A^{k-1} B | \cdots | A^2 B | A^1 B | A^0 B]
\end{aligned}$$

Luego la función objetivo se puede escribir en función de x_0 y U_N de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
J(U_N, x(0)) &= \frac{1}{2} x_0^T \left[2(A^N)^T P(A^N) + 2 \sum_{k=0}^{N-1} (A^k)^T Q(A^k) \right] x_0 \\
&+ \min_{\{U_N\}} \left\{ \frac{1}{2} U_N^T [2M^T PM + 2Mn^T QMn + R] U_N + x_0^T Ma U_N \right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$J^*(U_N, x(0)) = \frac{1}{2} x^T(0) Y x(0) + \min_{U_N} \left(\frac{1}{2} U_N^T H U_N + x^T(0) F U_N \right)$$

con

$$Y = 2(A^N)^T P(A^N) + 2 \sum_{k=0}^{N-1} (A^k)^T Q(A^k)$$

$$H = 2M^T PM + 2Mn^T QMn + R$$

$$F = Ma$$

Del mismo modo las cuatro restricciones se pueden escribir en función de la condición inicial x_0 y la secuencia U_N , es decir en la forma $GU_N \leq W + Ex(0)$

La primera restricción $Dx_k + Lu_k \leq M$, $k = 0, \dots, N-1$ se puede escribir como

$$\left[\begin{array}{ccccc} DB & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ DAB & DB & 0 & \cdots & 0 \\ DA^2B & DAB & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & DB & 0 \\ DA^{N-1}B & DA^{N-2}B & \cdots & DAB & DB \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cccc} L & & \cdots & 0 \\ & L & & \vdots \\ & & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & L \end{array} \right] U_N \leq \left[\begin{array}{c} M \\ M \\ \vdots \\ \vdots \\ M \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} D \\ DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^{N-1} \end{array} \right] x_0$$

Para $x_N \in X_f$ si la región terminal X_f es tal que se puede describir como el siguiente poliedro $Hx_N \leq h$ tenemos que la segunda y tercera restricción se pueden unir y escribir como

$$H \left[A^{N-1}B \mid \dots \mid A^2B \mid AB \mid B \right] U_N \leq h - HA^N x_0$$

y la cuarta restricción es obvia.

Consistencia de ecuación (7.44)

El problema

$$J_z^*(x(0)) = \min_z \frac{1}{2} z^T H z$$

sujeto a

$$Gz \leq W + Sx(0) \quad \text{con } z = U_N + H^{-1}F^T x(0) \text{ y } S = E + GH^{-1}F^T$$

es igual a el problema

$$J^*(x(0)) = \frac{1}{2} x^T(0) Y x(0) + \min_{U_N} \left(\frac{1}{2} U_N^T H U_N + x^T(0) F U_N \right)$$

sujeto a $GU_N \leq W + Ex(0)$

Demostración:

$$\begin{aligned} J_z^*(x(0)) &= \min_z \frac{1}{2} z^T H z = \min_z \frac{1}{2} (U_N + H^{-1}F^T x(0))^T H (U_N + H^{-1}F^T x(0)) \\ &= \min_z \frac{1}{2} \left(U_N^T H U_N + 2U_N^T H H^{-1}F^T x(0) + (H^{-1}F^T x(0))^T H (H^{-1}F^T x(0)) \right) \\ &= \min_z \left(\frac{1}{2} U_N^T H U_N + U_N^T F^T x(0) + \frac{1}{2} (H^{-1}F^T x(0))^T F^T x(0) \right) \end{aligned}$$

sumando y restando $\frac{1}{2} x^T(0) Y x(0)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} x^T(0) Y x(0) + \min_z \left(\frac{1}{2} U_N^T H U_N + U_N^T F^T x(0) + \frac{1}{2} (H^{-1}F^T x(0))^T F^T x(0) - \frac{1}{2} x^T(0) Y x(0) \right) \\ &= J^*(x(0)) + \frac{1}{2} x(0)^T (Y - FH^{-1}F^T) x(0) \end{aligned}$$

como $\frac{1}{2} x(0)^T (Y - FH^{-1}F^T) x(0)$ no depende de z

la función $J_z^*(x(0)) = J^*(x(0))$

Además para la restricción tenemos que

$$\begin{aligned} & Gz \leq W + Sx(0) \quad \text{con} \quad z = U_N + H^{-1}F^T x(0) \quad \text{y} \quad S = E + GH^{-1}F^T \\ \Rightarrow & G(U_N + H^{-1}F^T x(0)) \leq W + (E + GH^{-1}F^T)x(0) \\ \Rightarrow & G(U_N + H^{-1}F^T x(0) - H^{-1}F^T x(0)) \leq W + Ex(0) \\ \therefore & GU_N \leq W + Ex(0) \end{aligned}$$