

**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS MATEMATICAS**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA**

MODELACION Y CONTROL SUPERVISOR DIFUSO PARA LA TURBINA A GAS DE  
UNA CENTRAL TERMoeLECTRICA DE CICLO COMBINADO

FREDDY MATIAS MILLA NANJARI

2004

**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA**

MODELACION Y CONTROL SUPERVISOR DIFUSO PARA LA TURBINA A GAS DE  
UNA CENTRAL TERMOELECTRICA DE CICLO COMBINADO

FREDDY MATIAS MILLA NANJARI

<b>COMISION EXAMINADORA</b>	<b>NOTA (n°)</b>	<b>CALIFICACIONES</b> (Letras)	<b>FIRMA</b>
PROFESOR GUIA SRA. DORIS SAEZ	: .....	.....	.....
PROFESOR CO-GUIA SR. HECTOR AGUSTO	: .....	.....	.....
PROFESOR INTEGRANTE SR. LUIS VARGAS	: .....	.....	.....
NOTA FINAL DE EXAMEN DE TITULO	: .....	.....	.....

**MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE**  
**INGENIERO CIVIL ELECTRICISTA**

SANTIAGO DE CHILE  
ABRIL 2004

RESUMEN DE MEMORIA PARA OPTAR AL  
TITULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO  
POR : FREDDY MATIAS MILLA NANJARÍ  
FECHA : 15/04/2004  
PROF. GUÍA : Sra. DORIS SÁEZ H.

## **“Modelación y Control Supervisor Difuso Para la Turbina a Gas de una Central Termoeléctrica de Ciclo Combinado”**

El objetivo del presente trabajo es contribuir al desarrollo de un controlador supervisor óptimo para la turbina a gas de una central térmica de ciclo combinado, considerando objetivos tanto regulatorios como económicos.

En primer lugar, para cumplir con este objetivo, el trabajo se realizó sobre un simulador fenomenológico para la turbina a gas de una central térmica de ciclo combinado, programado en Matlab-Simulink.

Posteriormente, se planteó una función objetivo que optimiza el funcionamiento de la turbina a gas, tanto del punto de vista regulatorio como económico. Para esto, se diseñó un nivel supervisor que entrega un set-point óptimo dinámico al sistema regulatorio tradicional para la turbina a gas.

En una primera etapa de diseño se desarrolló un controlador supervisor lineal que se consideró como patrón de comparación para dos sistemas supervisores difusos propuestos.

Para el diseño de los controladores supervisores difusos se desarrolló un modelo difuso que logra caracterizar el comportamiento no lineal de la turbina a gas. El primer controlador supervisor difuso consideró que los parámetros del modelo difuso se mantienen constantes en sus sucesivas predicciones, lo cual implica una expresión linealizada del problema de optimización. En el segundo diseño de control supervisor difuso se consideró que los parámetros del modelo difuso se actualizan en cada predicción. Estas predicciones conforman las restricciones no lineales para el problema de optimización.

Ambos controladores supervisores difusos entregaron mejores resultados que el controlador supervisor lineal. En particular, la utilidad asociada a la turbina a gas se incrementa de 1.2 a 1.5 % con respecto a una estrategia de control puramente regulatoria con set-points constantes. Se destaca el mejor resultado con el segundo diseño de control supervisor difuso por su carácter netamente no lineal para evaluar las predicciones.

## ÍNDICE

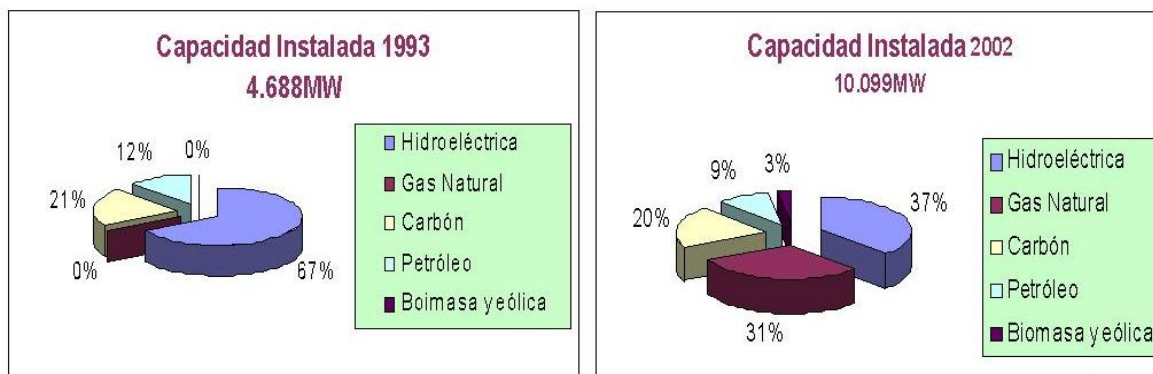
<b>1.- INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Motivación y alcances.....</b>	<b>1</b>
<b>1.3 Objetivos.....</b>	<b>2</b>
<b>1.4 Metodología.....</b>	<b>3</b>
<b>1.5 Estructura del Trabajo .....</b>	<b>3</b>
<b>II.- PLANTAS TERMOELÉCTRICAS DE CICLO COMBINADO .....</b>	<b>5</b>
<b>2.1 Funcionamiento general.....</b>	<b>5</b>
<b>2.2 Turbina a gas .....</b>	<b>8</b>
<b>2.3 Modelo fenomenológico.....</b>	<b>9</b>
2.3.1 Sistema de combustible.....	9
2.3.2 Compresor .....	10
2.3.3 Cámara de combustión.....	12
2.3.4 Turbina a gas.....	13
<b>2.4 Implementación del modelo de la turbina a gas .....</b>	<b>15</b>
2.4.1 Sistema de combustible.....	15
2.4.2 Compresor .....	15
2.4.3 Cámara de combustión.....	16
2.4.4 Turbina a gas.....	17
<b>2.5 Simulador en Matlab-Simulink.....</b>	<b>19</b>
<b>2.6 Pruebas por simulación.....</b>	<b>20</b>
<b>III.- MODELACIÓN DIFUSA.....</b>	<b>23</b>
<b>3.1 Modelo difuso de Takagi &amp; Sugeno .....</b>	<b>23</b>
<b>3.2 Método de identificación de Takagi &amp; Sugeno .....</b>	<b>23</b>
<b>3.4 Método de identificación general .....</b>	<b>25</b>
3.4.1 Modelo Difuso .....	25
3.4.2 Identificación de la estructura de premisas e inicialización de parámetros.....	26
3.4.3 Identificación de variables de entrada relevantes.....	30
<b>3.5 Ejemplo de aplicación .....</b>	<b>32</b>
3.5.1 Modelo lineal para la serie Wang .....	32
3.5.1 Modelo difuso Takagi & Sugeno para la serie Wang .....	33
<b>IV.- SISTEMA DE CONTROL SUPERVISOR.....</b>	<b>37</b>
<b>4.1 Planteamiento del problema .....</b>	<b>38</b>
<b>4.2 Componentes del sistema de control supervisor .....</b>	<b>38</b>
4.2.1 Función objetivo general.....	38
4.2.2 Modelo del nivel regulatorio .....	39
4.2.3 Restricciones generales .....	39
4.2.4 Modelo lineal del proceso .....	40
4.2.5 Modelo no lineal del proceso .....	40
<b>4.3 Algoritmo de solución para el controlador supervisor lineal. ....</b>	<b>40</b>
<b>4.4 Algoritmo de solución del controlador supervisor difuso linealizado. ....</b>	<b>41</b>
<b>4.5 Algoritmo de solución para el controlador supervisor difuso global.....</b>	<b>42</b>
<b>V.- APLICACIÓN A LA TURBINA A GAS. ....</b>	<b>44</b>
<b>5.1 Modelo lineal.....</b>	<b>44</b>
<b>5.2 Modelo difuso Takagi &amp; Sugeno .....</b>	<b>46</b>
<b>5.3 Estrategia de control supervisor .....</b>	<b>49</b>
5.3.1 Función objetivo .....	49
5.3.2 Modelo del nivel regulatorio .....	50

5.3.3 Modelo lineal del proceso .....	50
5.3.4 Modelo difuso linealizado del proceso.....	51
5.3.5 Modelo difuso global del proceso .....	52
5.3.6 Problema de optimización dinámico .....	52
<b>5.4 Control regulatorio con set-point óptimo estático .....</b>	<b>54</b>
<b>5.5 Resultados por simulación .....</b>	<b>56</b>
5.5.1 Análisis de datos.....	62
<b>VI.- CONCLUSIONES .....</b>	<b>64</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>65</b>
<b>ANEXO A .....</b>	<b>67</b>
<b>INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN DIFUSA .....</b>	<b>67</b>
A.1 Modelos difusos.....	68
A.2 Lógica difusa .....	69
A.3 Modelos difusos expertos .....	71
A.4 Métodos de identificación.....	71
<b>ANEXO B .....</b>	<b>73</b>
<b>OPTIMIZACIÓN NO LINEAL.....</b>	<b>73</b>
B.1 Optimización no lineal.....	74
B.2 Método de proyección del gradiente .....	76
<b>ANEXO C.....</b>	<b>79</b>
<b>ALGORITMOS .....</b>	<b>79</b>
C.1 Modelación difusa.....	80
C.2 Control supervisor .....	87

# 1.- INTRODUCCIÓN

## 1.2 Motivación y alcances

En Chile la demanda por energía eléctrica creció sobre el 6% promedio en estos últimos años, debido a factores, tales como aumento de la población, aumento de PIB (producto interno bruto), crecimiento del porcentaje de electrificación, etc. Este crecimiento en los últimos años a variado la distribución de la capacidad instalada para generación según recurso energético, como se presenta en la figura 1.1 [CDECs 1993],[CNE 2002].



Fuente: CDECs, diciembre 1993

Fuente: CNE, diciembre 2002

Figura 1.1 Capacidad instalada para generación según recurso energético

Un papel preponderante que ha asumido la generación térmica con gas natural, cuyas perspectivas aumentan cerca de un 15 % anual (figura 1.2). El precio de gas, aunque fluctuante como la última crisis del petróleo, es barato con respecto a otros carburantes: del orden de 1.2 centavos de dólar la termia (una termia equivalen a un millón de calorías, 1 m<sup>3</sup> de gas equivale a entre 9 y 10 termias según la composición específica del gas).

	Resid. y Comercio	Industrial	Transporte	Refinería y Petroquím.	Termoeléctrico	TOTAL
2002	485.309	1.044.913	14.919	3.707.549	2.930.570	8.183.260
2005	747.720	1.775.160	37.915	4.486.731	4.344.128	11.391.654
2008	1.001.658	2.103.040	87.610	4.486.731	5.936.971	13.616.009
2011	1.163.174	2.353.741	125.115	4.486.731	8.194.864	16.323.626

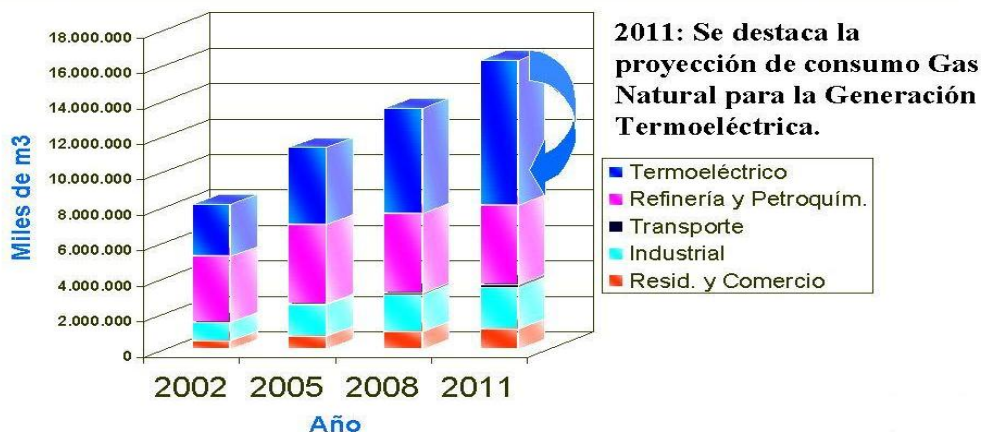


Figura 1.2 Requerimiento de gas natural (en miles de m<sup>3</sup>).

Las centrales térmicas de ciclo combinado, tienen eficiencias superiores que otro tipo de centrales termoeléctricas. Por ejemplo la central térmica de ciclo combinado Nueva Renca tiene una eficiencia máxima del 54,4 % en contraste con el 38 % de eficiencia máxima de una central de vapor carbón. Debido a la alta disponibilidad de estas centrales, pueden funcionar sin problemas durante 6.500-7500 horas equivalentes al año, siendo la disponibilidad el resultado de dividir la energía producida en un año por la potencia nominal de la planta.

En un marco de oferta competitiva, donde la electricidad se adquiere a quien la produce más barata, el mantenimiento de las ventajas competitivas requiere incrementar la eficiencia y dedicar más recursos a la innovación, promover el uso de tecnologías de punta en el sector para el incremento de su competitividad y productividad.

Por su parte, a pesar del hecho que el nivel regulatorio de los procesos industriales logra mantener el error acotado, entre las referencias y variables del proceso, es necesario optimizar aún más la operación de la planta. Para mejorar los resultados del sistema de control se puede optar por reemplazar el sistema regulatorio por un controlador óptimo o agregar un nivel supervisor sin modificar el nivel regulatorio. La última alternativa optimiza los recursos, y es la que se considera como objetivo de este trabajo.

### **1.3 Objetivos**

En el contexto señalado en la sección anterior, el objetivo general del presente trabajo es la modelación y control supervisor difuso para la turbina a gas de una central termoeléctrica de ciclo combinado, para optimizar el funcionamiento de su sistema de control, tomando en cuenta tanto fines regulatorios como económicos.

En particular los objetivos específicos son:

- Diseño y desarrollo de un modelo no lineal difuso para la turbina a gas de una central térmica de ciclo combinado, para representar las no linealidades y sus diferentes puntos de operación.
- Diseño y desarrollo de un controlador supervisor difuso para la turbina a gas de una central térmica de ciclo combinado, que incluya criterios económicos y regulatorios.

## 1.4 Metodología

Con el fin de cumplir con los objetivos establecidos, en el presente trabajo se aplicó la siguiente metodología que se resume en la Figura 1.3.

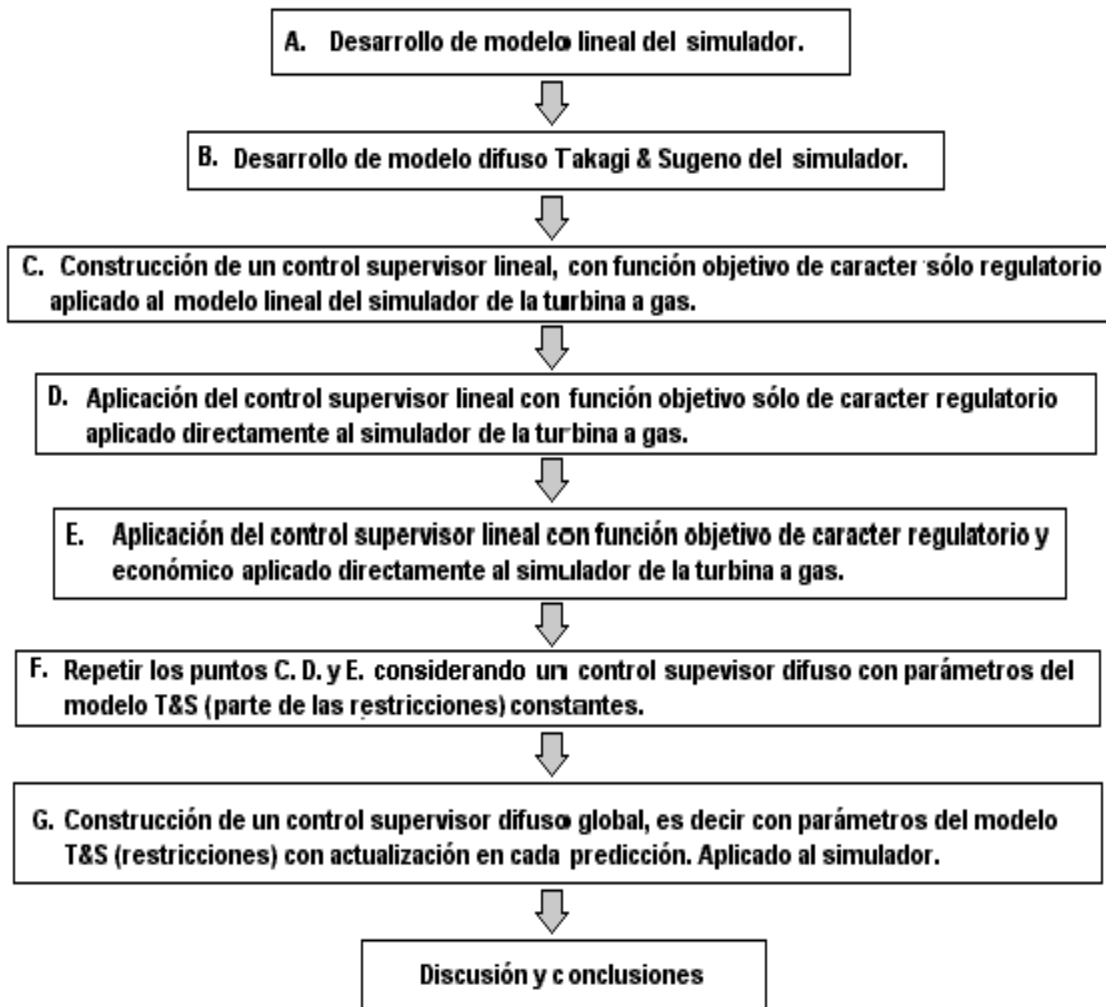


Figura 1.3: Metodología utilizada para el desarrollo

## 1.5 Estructura del Trabajo

El primer capítulo comienza con una introducción y motivación del tema investigado, especificando los objetivos que se persigue cumplir con el desarrollo y la metodología utilizada.

El segundo capítulo describe el esquema de funcionamiento general de una planta térmica de ciclo combinado. Se hace mención especial al funcionamiento de la turbina a gas, describiendo sus partes constitutivas con las correspondientes ecuaciones fenomenológicas que se expresan en el simulador utilizado.

En el tercer capítulo se aborda el tema de la modelación difusa, analizando la necesidad de la utilización de los modelos difusos de Takagi & Sugeno. Además, se presenta el método de identificación correspondiente.



En el cuarto capítulo se introduce el tema de control supervisor basado en modelos lineales y modelos difusos.

En el quinto capítulo se presenta la aplicación de los métodos descritos anteriormente sobre la turbina a gas. Se determina un modelo lineal, el cual sirve para construir un control supervisor lineal que se usará como base de comparación. Se deriva un modelo difuso del tipo Takagi & Sugeno, el cual es base para los sistemas supervisores difusos.

Finalmente, en el sexto capítulo se exponen las conclusiones del trabajo.

## II.- PLANTAS TERMOELÉCTRICAS DE CICLO COMBINADO

Las centrales termoeléctricas de ciclo combinado se han transformado en una parte esencial del presente y futuro de los sistemas eléctricos mundiales. Este rol es aun más preponderante en los sistemas eléctricos de Latinoamérica, dado que éste ha sido fuertemente impulsado en los últimos diez años, y como tal, posee máquinas diseñadas y construidas en el último decenio, principal década en el surgimiento de esta tecnología. También esta consideración es de especial relevancia a causa de las proyecciones de crecimiento de consumo en el mundo. América Latina es la región con mayores perspectivas de crecimiento, y se encuentra en una etapa de desarrollo socioeconómico que debe impulsar en gran medida el consumo eléctrico a través de la utilización de energía eléctrica en la industria. Esto hace que estas nuevas participantes del sector eléctrico tengan sobre su desempeño una enorme responsabilidad [CDECs 2002].

Económicamente, estas centrales térmicas también poseen una serie de ventajas frente a las tecnologías existentes a la fecha. La capacidad de entregar grandes cantidades de energía a precios económicos, quitándole así a los sistemas eléctricos la alta estocaticidad de los recursos hídricos, hace que esta sea una excelente alternativa frente a la generación térmica convencional e hidráulica, las cuales poseen restricciones de altos costos o límites ambientales. Al presentarse sequías, las fluctuaciones de precios serán más reducidas producto de la sustitución de generación hidráulica por generación térmica eficiente con costo marginal similar. Esta mayor estabilidad en los precios presenta un escenario más amigable para los inversionistas, consumidores o generadores, generándose así un entorno económico más estable [CDECs 2002].

### 2.1 Funcionamiento general.

Una central térmica de ciclo combinado consiste básicamente en un grupo Turbina a Gas-Generador, una chimenea recuperadora de calor y un grupo Turbina a Vapor-Generador, formando un sistema que permite producir electricidad [CDECs 2002].

El proceso de generación de energía eléctrica en una central térmica de ciclo combinado comienza con la aspiración de aire desde el exterior siendo conducido al compresor de la Turbina a Gas a través de un filtro.

El aire es comprimido y combinado con el combustible atomizado (gas natural por ejemplo) en una cámara donde se realiza la combustión. El resultado es un flujo de gases calientes que al expandirse hacen girar la Turbina a Gas proporcionando trabajo. El generador acoplado a la Turbina a Gas transforma este trabajo en energía eléctrica (ver figura 2.1).

Los gases de escape que salen de la Turbina a Gas pasan a la chimenea recuperadora de Calor. En esta chimenea se extrae la mayor parte del calor aún disponible en los gases de escape y se transmiten al ciclo agua-vapor, antes de pasar a la atmósfera.

La chimenea de recuperación se divide en tres áreas de intercambio de calor:

*Área 1:* Se denomina economizador y está ubicado en la parte superior de la chimenea. El agua a alta presión ingresa al economizador para ser recalentada hasta el punto de saturación.

*Área 2:* Se denomina ciclo de evaporación y está ubicada en la zona intermedia de la chimenea. Es donde se transforma el agua en vapor.

*Área 3:* Se denomina recalentador y está ubicada en la parte inferior de la chimenea, zona donde la temperatura es más alta producto de que está cerca de la salida de la Turbina a Gas. Aquí el

vapor saturado se recalienta aún más. Posteriormente este vapor recalentado es inyectado en la Turbina a Vapor donde se expande en las filas de alabes haciendo girar el eje de esta Turbina lo que genera trabajo, el cual es transformado en energía eléctrica en el generador acoplado a la Turbina a Vapor.

El vapor que sale de la Turbina de Vapor pasa a un condensador donde se transforma en agua. Este condensador es refrigerado mediante un sistema que inyecta agua fría por la superficie del condensador, lo que ocasiona la disipación del calor latente contenido en el vapor.

Posteriormente el agua pasa a un desgasificador/tanque de agua de alimentación. En el desgasificador se eliminan todos los gases no condensables. El tanque envía, a través de bombas, el agua a alta presión hacia la chimenea de recuperación para iniciar nuevamente el ciclo.

La interconexión al sistema de transmisión eléctrico de la central térmica se inicia a partir de la tensión suministrada por los generadores de las turbinas a gas y vapor, cerca de 13 kV la cual se eleva en los transformadores principales conectados a cada generador, pudiendo ser del orden de los 220 kV. Esto se realiza porque a baja tensión la intensidad de corriente es muy alta, necesitándose cables de transmisión de gran sección que soporten el flujo de electrones y generando adicionalmente grandes pérdidas de transmisión. Al elevarse la tensión, la intensidad de corriente es baja lo que origina una reducción en las pérdidas de transmisión.

El equipamiento que incluye las centrales de ciclo combinado es el siguiente:

- Una o más Turbinas a Gas, que representan  $2/3$  de la generación total de la planta.
- Una o más Turbinas a Vapor, que representan  $1/3$  de la generación total de la planta.
- Uno o más una chimeneas recuperadoras de calor. Este equipo realiza la evaporación del agua, para inyectarla en forma de vapor en la Turbina a Vapor. Deben haber tantas chimeneas recuperadoras de calor como Turbinas a Gas.
- Estación medidora y reductora de la presión del gas natural, más la tubería de la central.
- Sistema de control basado en microprocesadores para la central.
- Estanque de almacenamiento para el combustible para el combustible de respaldo (petróleo diesel).
- Sistema de refrigeración si es que la zona donde se instalará la planta no cuenta con sistemas de refrigeración naturales (agua de mar, pozos profundos, etc.).

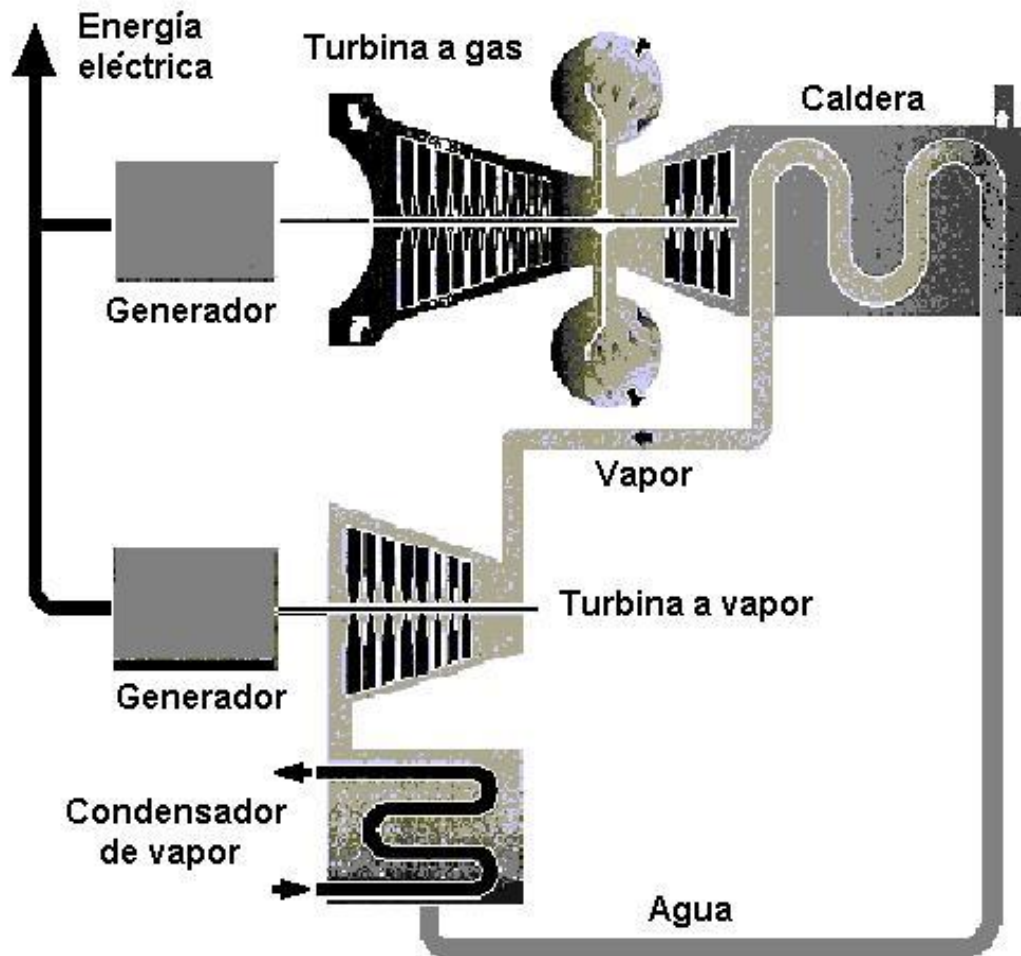


Figura 2.1 Visión simplificada de una planta térmica de ciclo combinado

## 2.2 Turbina a gas

Para lograr los objetivos propuestos se presenta el modelo fenomenológico de la turbina a gas propuesto por [Ordys 1994].

Como se presenta en la figura 2.2, el esquema de la turbina a gas consiste en: compresor, sistema de suministro de combustible, turbina a gas, cámara de combustión y generador eléctrico.

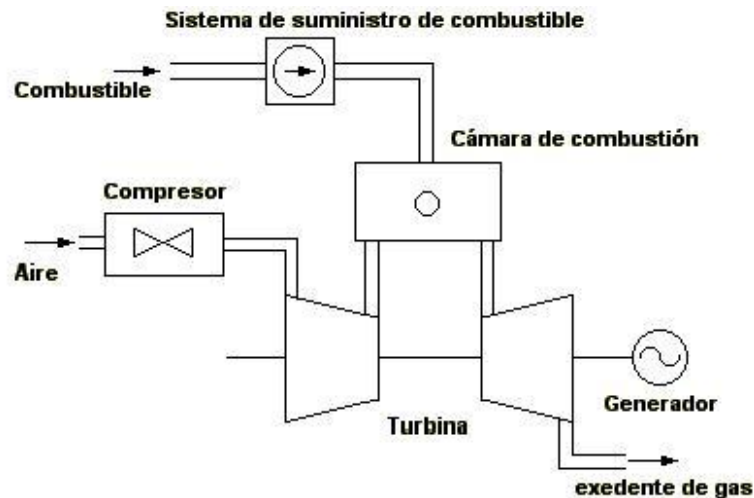


Figura 2.2 Turbina a gas de una central térmica de ciclo combinado.

Los principales componentes de una central generadora con turbina a gas son: *el compresor, la cámara de combustión y la turbina.*

El aire a presión atmosférica entra en la turbina por la entrada del compresor. Luego de la compresión se alcanza la condición más favorable para la combustión, el gas combustible es mezclado con el aire en la cámara de combustión. En la combustión el gas caliente se expande a través de la turbina produciendo potencia mecánica. En términos de la conversión de energía, la energía química presente en la combustión de los reactantes es transferida al flujo de gas durante la combustión. Esta energía (medida en términos de entalpía) es convertida en trabajo mecánico, por la expansión del gas a través de la turbina.

Los principales supuestos del modelo, [Ordys 1994] son los siguientes:

- El aire y productos de la combustión son tratados como gas ideal.
- Se asume que los calores específicos de los productos de la combustión, aire y vapor inyectado, son constantes.
- El flujo a través de las toberas es descrito por un proceso politrópico uniforme adiabático mono adimensional.
- La energía almacenada y el retardo de transporte en el compresor, turbina y cámara de combustión son relativamente pequeños.
- La introducción de energía cinética por el flujo de gas dentro del compresor y la turbina son despreciados.

- El flujo másico de aire a través del compresor es controlado vía las paletas de la guía de entrada.
- La formación de los contaminantes NO<sub>x</sub>, CO es modelada como una función estática de la razón vapor / combustible.

## 2.3 Modelo fenomenológico

Como se menciona anteriormente la turbina a gas está formada por cuatro subsistemas interconectados:

- Sistema de combustible.
- Compresor.
- Cámara de combustión.
- Turbina a gas.

### 2.3.1 Sistema de combustible

El sistema de combustible consiste en la válvula de combustible y el actuador. El flujo de combustible fuera de del sistema de combustible es debido a la inercia del actuador del sistema de combustible y del posicionador de la válvula.

*Actuador del sistema de combustible se representa por la siguiente función de transferencia:*

$$w_f = \frac{k_{ff}}{\tau_f s + 1} e_1 \quad (2.1)$$

donde:

- $w_f$  : flujo másico de combustible
- $k_{ff}$  : ganancia del sistema de combustible
- $\tau_f$  : constante de tiempo del sistema de combustible
- $e_1$  : posición de la válvula

*Posicionador de la válvula:*

$$e_1 = \frac{a}{bs + c} e_2 \quad (2.2)$$

donde

- $a, b, c$  : parámetros de la válvula
- $e_2$  : señal interna

*Señales para el posicionador de la válvula:*

$$e_2 = MF - k_f w_f + F_d \omega e^{-s\tau} \quad (2.3)$$

donde

- $MF$  : señal de combustible mínimo
- $K_f$  : coeficiente de realimentación
- $F_d$  : señal de demanda de combustible
- $\omega$  : velocidad de rotación de la turbina
- $\tau$  : retardo puro del sistema de combustible

*Variables de entrada para el sistema de combustible:*

- $F_d$  : señal de la demanda de combustible ( desde el controlador )
- $\omega$  : velocidad de rotación de la turbina ( desde el modelo del generador )

*Variables de salidas desde el modelo del sistema de combustible:*

- $w_f$  : flujo de combustible hacia la cámara de combustión

### 2.3.2 Compresor

*El compresor es descrito por las siguientes ecuaciones:*

$$w_a = A_o \left[ \left( \frac{2m_a}{\eta_{\infty c} (m_a - 1)} \right) \rho_i P_{cin} \left( r_c^{2/m_a} - r_c^{(m_a+1)/m_a} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

donde

- $w_a$  : flujo másico dentro del compresor
- $A_o$  : área de salida del flujo del compresor
- $\eta_{\infty c}$  : eficiencia politrópica del compresor
- $\rho_i$  : densidad del aire de entrada

- $P_{cin}$  : presión del aire de entrada
- $m_a$  : índice politrópico
- $r_c$  : razón de presión de salida / entrada

*Ecuación del índice politrópico:*

$$m_a = \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \frac{(\gamma_a - 1)}{\eta_{\infty C}}} \quad (2.5)$$

donde

$$\gamma_a = (c_{pa}/c_{va}) : \text{razón de calor específico para el aire ( constante)} \quad (2.6)$$

- $c_{pa}$  : calor específico a presión constante para el aire

$c_{va}$  : calor específico a volumen constante para el aire

*Ecuación de la presión de salida del aire:*

$$P_{cout} = P_{cin} r_c \quad (2.7)$$

*Ecuación de la temperatura de salida del aire:*

$$(T_{cout} / T_{cin}) = r_c^{\left(\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a \eta_{zc}}\right)} \quad (2.8)$$

donde

$T_{cout}$  : temperatura de salida del aire  
 $T_{cin}$  : temperatura de entrada del aire

*Ecuación de consumo de potencia del compresor:*

$$P_c = \frac{w_{ain} \Delta h_I}{\eta_c \eta_{trans}} \quad (2.9)$$

donde

$P_c$  : consumo de potencia del compresor  
 $\Delta h_I$  : cambio de entalpía isentrópica correspondiente a una compresión desde  $p_{cin}$   
a  $p_{cout}$   
 $\eta_c$  : eficiencia global del compresor  
 $\eta_{trans}$  : eficiencia de transmisión desde la turbina hacia el compresor

*Ecuación de eficiencia global del compresor:*

$$\eta_c = \frac{1 - (r_c)^{\left(\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a}\right)}}{1 - (r_c)^{\left(\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a \eta_{zc}}\right)}} \quad (2.10)$$

*Ecuación del cambio de entalpía isentrópica del gas perfecto:*

$$\Delta h_I = c_{pa} T_{cin} (r_c^{\left(\frac{R_a}{c_{pa}}\right)} - 1) \quad (2.11)$$

donde



- $c_{pa}$  : calor específico del aire a presión constante  
 $R_a$  : constante gaseosa del aire

### 2.3.3 Cámara de combustión

*Escape del flujo másico del gas*

$$w_G = w_a = w_f + w_{is} \quad (2.12)$$

*Ecuación de la energía de combustión*

$$w_G c_{pg} (T_{Tin} - 298) + w_f \Delta h_{25} + w_a c_{pa} (298 - T_{count}) + w_{is} c_{ps} (298 - T_{is}) = 0 \quad (2.13)$$

donde

- $w_f$  : flujo másico del combustible  
 $w_{is}$  : flujo másico de la inyección de vapor  
 $c_{pg}$  : calor específico de combustión de los gases (constante)  
 $T_{Tin}$  : temperatura de entrada del gas a la turbina  
 $\Delta h_{25}$  : entalpía específica de reacción con referencia a la temperatura de 25 °C  
 $c_{ps}$  : calor específico del vapor (constante)  
 $T_{is}$  : temperatura del gas inyectado

*Pérdida de presión en la cámara de combustión:*

$$P_{Tin} = P_{cout} - \Delta p \quad (2.14)$$

con

$$\Delta p = P_{cout} \left[ \left( k_1 + k_2 \left( \frac{T_{Tin}}{T_{cout}} - 1 \right) \right) \frac{R}{2} \left( \frac{w_G}{A_m P_{cout}} \right)^2 T_{cout} \right] \quad (2.15)$$

donde

- $P_{Tin}$  : presión de combustión de los gases en la entrada de la turbina  
 $\Delta p$  : pérdida de presión en la cámara de combustible  
 $k_1, k_2$  : coeficientes de pérdida de presión  
 $R_{cg}$  : constante universal de los gases para los gases en combustión  
 $A_m$  : área media de la sección transversal de la cámara de combustión

*Formación de contaminantes:*

$$g'_{nox} = f_{GT2} \left( \frac{w_{is}}{w_f} \right) \quad (2.16)$$

$$g'_{cco} = f_{GT3} \left( \frac{w_{is}}{w_f} \right) \quad (2.17)$$

donde

- $g'_{nox}$  : flujo másico del NO<sub>x</sub>
- $g'_{cco}$  : flujo másico del CO
- $f_{GT2}$  : curva experimental : flujo másico de NO<sub>x</sub> en función de la razón vapor y flujo másico de combustible
- $f_{GT3}$  : curva experimental : flujo másico de CO en función de la razón vapor y flujo másico de combustible

*Medida dinámica de la formación de contaminantes:*

$$g_{nox}(t) = g'_{nox}(t - \tau_m) \quad (2.18)$$

$$g_{cco}(t) = g'_{cco}(t - \tau_m) \quad (2.19)$$

donde

- $g_{nox}(t)$  : medida con retardo de flujo másico de NO<sub>x</sub>
- $g_{cco}(t)$  : medida con retardo de flujo másico de CO
- $\tau_m$  : medida del retardo

### 2.3.4 Turbina a gas

*Relación presión temperatura:*

$$\left( \frac{T_{Tout}}{T_{Tin}} \right) = r_T^{\eta_{\infty T} \left( \frac{\gamma_{cg} - 1}{\gamma_{cg}} \right)} \quad (2.20)$$

$T_{Tout}$  : temperatura de salida del gas de la turbina

$\eta_{\infty T}$  : eficiencia politrópica de la turbina

$r_T = \left( \frac{P_{Tout}}{P_{Tin}} \right)$  razón de presión de salida y entrada de la turbina

$\gamma_{cg} = \left( \frac{c_{pg}}{c_{vg}} \right)$  razón de calor específico por combustión de gases

*Flujo másico de gas a través de la turbina:*

$$w_G = A_{To} \left[ \left( \frac{2\eta_{\infty T} m_{cg}}{m_{cg} - 1} \right) \rho_{Tin} P_{Tin} \left( r_T^{\left(\frac{2}{m_{cg}}\right)} - r_T^{\left(\frac{m_{cg}+1}{m_{cg}}\right)} \right) \right]^{1/2} \quad (2.21)$$

con

$$m_{cg} = \frac{\gamma_{cg}}{\gamma_{cg} - \eta_{\infty T}(\gamma_{cg} - 1)} \quad (2.22)$$

$$\rho_{Tin} = f_{G4}(T_{Tin}, P_{Tin}) \quad (2.23)$$

donde

- $m_{cg}$  : índice politrópico de combustión de los gases
- $\rho_{Tin}$  : densidad del gas de la entrada
- $f_{GT4}$  : función de tablas del gas
- $w_G$  : flujo másico del gas de la turbina

*Ecuación de eficiencia global del compresor:*

$$\eta_T = \frac{1 - \left( r_T \right)^{\left( \frac{\eta_{\infty T} (\gamma_{cg} - 1)}{\gamma_{cg}} \right)}}{1 - \left( r_c \right)^{\left( \frac{\gamma_{cg} - 1}{\gamma_{cg}} \right)}} \quad (2.24)$$

donde  $\eta_T$  eficiencia global de la turbina

*Entrega de potencia*

$$P_T = \eta_T w_g \Delta h_I \quad (2.25)$$

$$P_{mech} = P_T - P_c \quad (2.26)$$

con

$$\Delta h_I = c_{pg} T_{Tin} \left( r_T^{\left( \frac{R_{cg}}{c_{pg}} \right)} - 1 \right) \quad (2.27)$$

donde

- $P_T$  : potencia mecánica entregada por la turbina
- $P_c$  : potencia requerida para manejar el compresor
- $P_{mech}$  : potencia mecánica disponible en la red
- $\Delta h_I$  : cambio de entalpía isentrópica correspondiente a una compresión desde  $P_{Tin}$  a  $P_{Tout}$

La figura 2.3 presenta un diagrama de bloques simplificado de la turbina a gas, los parámetros de sus ecuaciones se presentan en la sección 2.4.

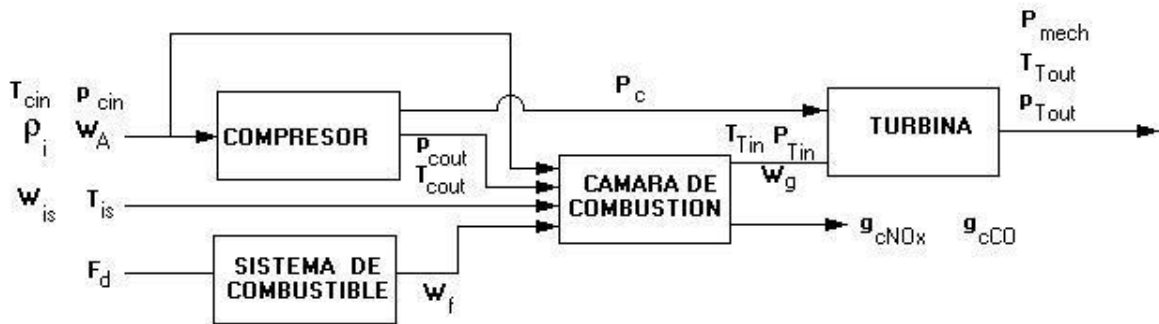


Figura 2.3 Diagrama de bloques de la turbina a gas

## 2.4 Implementación del modelo de la turbina a gas

### 2.4.1 Sistema de combustible

El siguiente diagrama en bloque es implementado:

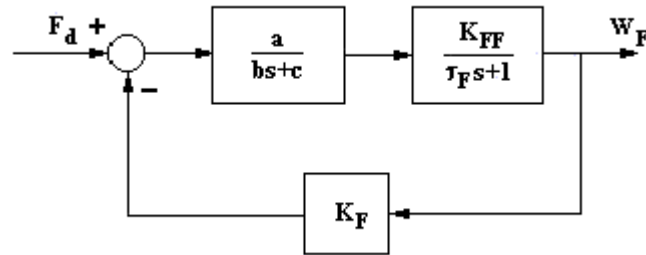


Figura 2.4 Diagrama en bloques del sistema de combustible.

Entradas :  $F_d$   
 Parámetros :  $a, b, c, \tau_F, K_F, K_{FF}$   
 Salidas :  $w_F$

### 2.4.2 Compresor

Entradas :  $w_a, \rho_i, p_{cin}, T_{cin}$   
 Parámetros :  $\eta_{\infty C}, A_0, \eta_{trans}, \tau_{cD}, c_{pair}$   
 Constantes :  $\gamma_a, R_{air}$

Ecuaciones algebraicas:

$$m_a = \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \frac{(\gamma_a - 1)}{\eta_{\infty C}}} \quad (2.28)$$

$$r_c \left( \frac{2}{m_a} \right) - r_c \left( \frac{m_a + 1}{m_a} \right) = \frac{\eta_{\infty C} (m_a - 1)}{2m_a} \frac{1}{\rho_i P_{cin}} \left( \frac{w_a}{A_0} \right)^2 \quad (2.29)$$

resolviendo para  $r_c$

$$p_{cout} = p_{cin} r_c \quad (2.30)$$

$$T_{cont} = T_{cin} r_c \left( \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a \eta_{\infty C}} \right) \quad (2.31)$$

$$\eta_c = \frac{1 - r_c \left( \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} \right)}{1 - r_c \left( \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a \eta_{\infty C}} \right)} \quad (2.32)$$

$$\Delta h_I = c_{pair} T_{cin} \left( \frac{\frac{R_{air}}{c_{pair}}}{r_c} - 1 \right) \quad (2.33)$$

$$P_c = \frac{w_a \Delta h_I}{\eta_c \eta_{trans}} \quad (2.34)$$

Salidas :  $p_{count}$ ,  $T_{count}$ ,  $p_c$

### 2.4.3 Cámara de combustión

Entradas :  $p_{cout}$ ,  $T_{cout}$ ,  $w_a$ ,  $w_f$ ,  $w_{is}$ ,  $T_{is}$

Parámetros :  $c_{pg}$ ,  $c_{pa}$ ,  $c_{ps}$ ,  $\Delta h_{25}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $R_{cg}$ ,  $A_m$ ,  $\tau_m$ ,  $h_{ref}$ ,  $T_{ref}$

Constantes :  $R_{cg}$

Ecuaciones algebraicas:

$$w_G = w_a + w_f + w_{is} \quad (2.35)$$

$$T_{Tin} = \frac{1}{w_G} \frac{1}{c_{pg}} \left[ w_a c_{pa} (T_{cout} - 298) + w_{is} c_{ps} (T_{is} - 298) - w_f \Delta h_{25} \right] \quad (2.36)$$

$$\Delta p = p_{count} \left[ \left( k_1 + k_2 \left( \frac{T_{Tin}}{T_{count}} - 1 \right) \frac{R_{cg}}{2} \left( \frac{w_G}{A_m p_{count}} \right)^2 T_{count} \right) \right] \quad (2.37)$$

$$p_{Tin} = p_{count} - \Delta p \quad (2.38)$$

$$g'_{nox} = f_{GT2} \left( \frac{w_{is}}{w_f} \right) \quad (2.39)$$

[curva experimental : contenido de NO<sub>x</sub> como función de la razón vapor a combustible]

$$g'_{cco} = f_{GT3} \left( \frac{w_{is}}{w_f} \right) \quad (2.40)$$

[curva experimental : contenido de CO como función de la razón vapor a combustible]

$$h_{Tin} = h_{ref} + c_{cp} (T_{Tin} - T_{ref}) \quad (2.41)$$

Dinámicas:

$$g'_{nox} = g'_{nox}(t - \tau_m) \quad (2.42)$$

$$g'_{cco} = g'_{cco}(t - \tau_m) \quad (2.43)$$

Salidas :  $w_G, T_{Tin}, p_{Tin}, g_{nox}, g_{cco}$

#### 2.4.4 Turbina a gas

Entradas :  $T_{Tin}, p_{Tin}, p_c, w_G$

Parámetros :  $p_{Tout}, \eta_{\infty C}, A_{t0}, c_{pg}$

Constantes :  $\gamma_{cg}, R_{cg}$

Ecuaciones algebraicas:

$$m_{cg} = \frac{\gamma_{cg}}{\gamma_a - \eta_{\infty T} (\gamma_{cg} - 1)} \quad (2.44)$$

$$\rho_{Tin} = \frac{p_{Tin}}{R_{cg} T_{Tin}} \quad (2.45)$$

$$r_T - r_T \left( \frac{2}{m_{cg}} \right) \left( \frac{m_{cg} + 1}{m_{cg}} \right) = \left( \frac{w_G}{A_{T0}} \right)^2 \frac{(m_{cg} - 1)}{2 \eta_{\infty T} m_{cg} \rho_{Tin} p_{Tin}} \quad (2.46)$$

resolviendo para  $r_T$

$$p_{Tout} = r_T p_{Tin} \quad (2.47)$$

$$T_{Tout} = T_{Tin} r_T \frac{\eta_{\infty T} (\gamma_{cg} - 1)}{\gamma_{cg}} \quad (2.48)$$

$$\Delta h_I = c_{pg} T_{Tin} \left( r_T \frac{\frac{R_{cg}}{c_{pg}}}{\gamma_{cg}} - 1 \right) \quad (2.49)$$

$$\eta_T = \frac{\frac{1 - r_T}{\left( \frac{\gamma_{cg} - 1}{\gamma_{cg}} \right)}}{\left( \eta_{\infty T} \frac{\gamma_{cg} - 1}{\gamma_{cg}} \right)} \quad (2.50)$$

$$p_T = \eta_T w_G \Delta h_I \quad (2.51)$$

$$h_{Tout} = h_{Tin} + \eta_T \Delta h_I \quad (2.52)$$

$$P_{mech} = p_T - p_c \quad (2.53)$$

Salidas :  $P_{mech}$ ,  $T_{Tout}$ ,  $p_{Tout}$ ,  $h_{Tout}$

## 2.5 Simulador en Matlab-Simulink.

Como se presenta en la figura 2.5, el simulador fue programado en Matlab-Simulink utilizando las ecuaciones fenomenológicas descritas en la sección 2.3 y 2.4. El tiempo de muestreo es de 0.1 [seg] y el método de integración es el de Runge-Kutta [Sáez 2001].

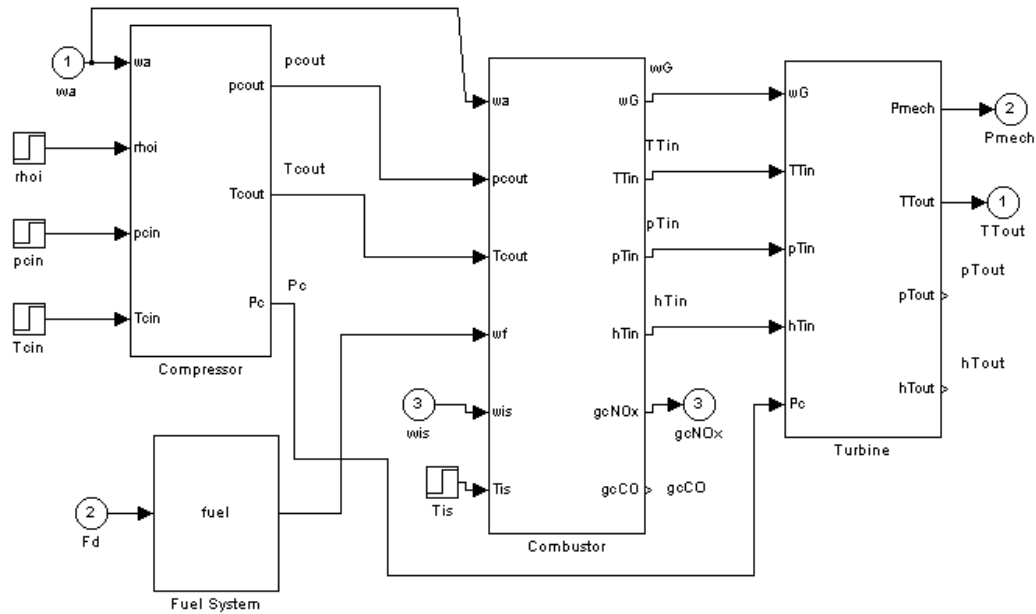


Figura 2.5 Simulador en Matlab-Simulink de la turbina a gas.



## 2.6 Pruebas por simulación

La figura 2.6 presenta la respuesta de lazo abierto a un escalón de 5% en el flujo de aire al compresor ( $W_a$ ). En este caso las variables no cambian en el tiempo porque la relación entrada y salida es estática esto está de acuerdo con las ecuaciones (2.35), (2.51) y (2.53). El comportamiento obtenido es razonable, ya que al aumentar el flujo de aire exterior debe bajar la temperatura de los gases del proceso y aumentar la combustión lo cual genera más potencia.

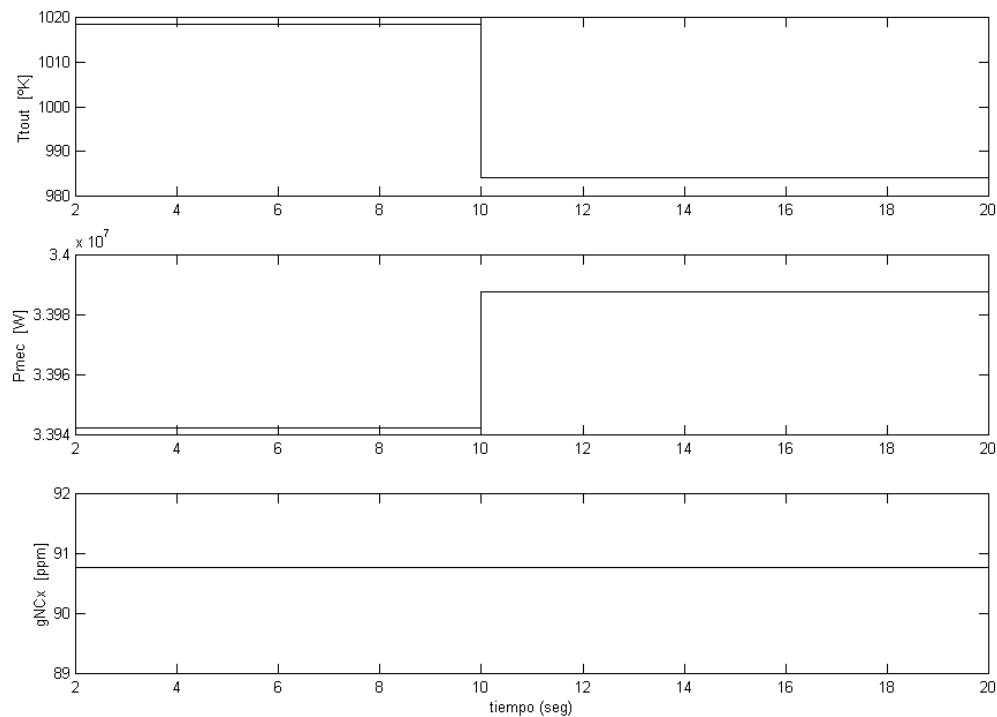


Figura 2.6 Respuesta al escalón en  $W_a$

En la figura 2.7 se muestra la respuesta a un escalón del 10% en el flujo de combustible ( $F_d$ ). Se detecta una constante de tiempo relacionada con el sistema dinámico de combustible (ver sección 2.4.1, ecuaciones (2.35), (2.51) y (2.53)).

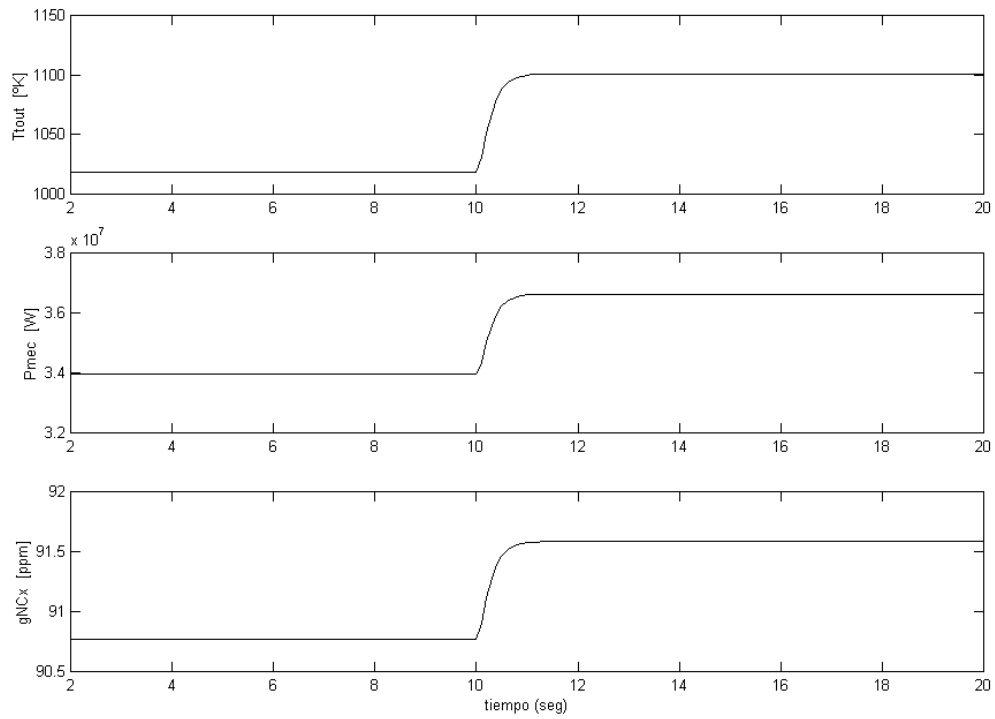


Figura 2.7 Respuesta al escalón en  $F_d$

En las figuras 2.8 y 2.9, se presenta la estrategia de control para el simulador de la turbina a gas. Las variables controladas son la temperatura del gas de salida de la turbina ( $T_{\text{Tout}}$ ), la potencia mecánica ( $P_{\text{mech}}$ ) y concentración de  $\text{NO}_x$  ( $g_{\text{cNO}_x}$ ). Las variables manipuladas son el flujo de aire en el compresor ( $W_a$ ), el flujo de combustible y la inyección del flujo de vapor ( $W_{\text{is}}$ ).

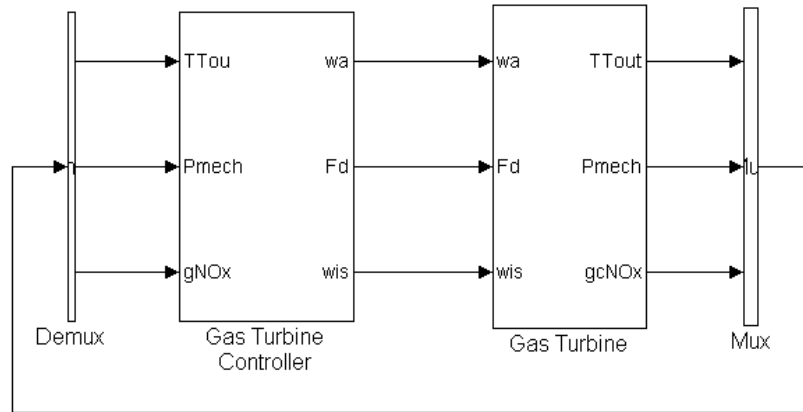


Figura 2.8 Estrategia de control para la turbina a gas

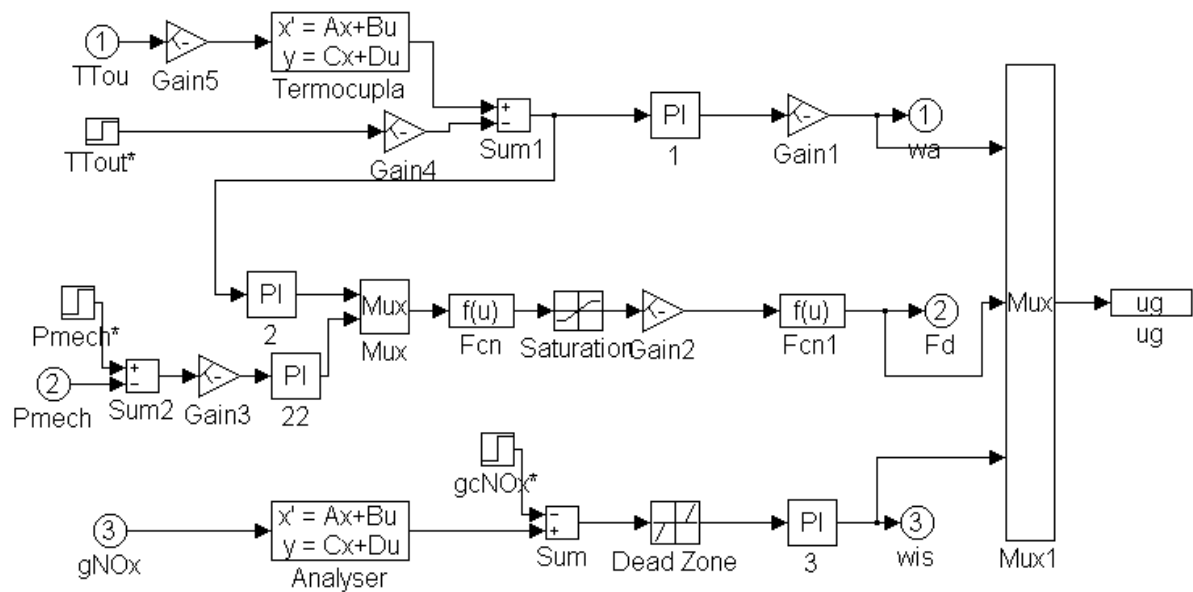


Figura 2.9 Detalle de la estrategia de control.

### III.- MODELACIÓN DIFUSA

En este trabajo se considera la modelación difusa para caracterizar las no linealidades de un proceso. (Ver más detalles en el anexo A)

A continuación se describen los modelos de Takagi & Sugeno que se consideran en este trabajo.

#### 3.1 Modelo difuso de Takagi & Sugeno

El modelo difuso de Takagi & Sugeno está compuesto por un conjunto de reglas en cuyas premisas las variables de entrada ( $x_1, \dots, x_n$ ) son relacionadas entre sí utilizando el operador lógico “and”, mientras que en las consecuencias, la salida del modelo “y” es calculada como una combinación lineal de las entradas más una constante. Es decir, el modelo difuso es un conjunto de  $N_r$  reglas del tipo:

$$\text{Si } x_1 \text{ es } R_{r1} \text{ y } \dots \text{ y } x_n \text{ es } R_{rn} \quad \text{then} \quad y = \gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_i \quad (r=1, \dots, N_r) \quad (3.1)$$

con  $R_{ri}$  conjunto difuso  $i$ .

#### 3.2 Método de identificación de Takagi & Sugeno

Dado un conjunto de datos de entrada-salida, el algoritmo determina los parámetros de las consecuencias,  $\gamma_{ri}$  ( $r=1, \dots, N_r$ ;  $i=0, \dots, n$ ), que minimizan el error medio cuadrático entre salida real y la salida del modelo difuso.

Para todos los datos de las variables de entrada ( $x_{k1}, \dots, x_{kn}$ ) se calcula los grados de pertenencia a sus respectivos conjuntos difusos, y evaluando los conectivos “and” de las premisas se calcula el grado de validez de la regla  $r$ ,  $W_r^{(k)}$ , con  $r=1, \dots, N_r$ .

La salida del modelo correspondiente a los  $k$ -ésimos valores de las entradas es:

$$y_k = \frac{\sum_{r=1}^{N_r} \left[ W_r^{(k)} \left( \gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_{ki} \right) \right]}{\sum_{r=1}^{N_r} W_r^{(k)}} = \sum_{r=1}^{N_r} \left[ \hat{W}_r^{(k)} \left( \gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_{ki} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$\text{con} \quad \hat{W}_r^{(k)} = \frac{W_r^{(k)}}{\sum_{r=1}^{N_r} W_r^{(k)}} \quad (3.3)$$

En forma vectorial se tiene:

$$\hat{y}_k = \left[ \hat{W}_1^{(k)} \quad \dots \quad \hat{W}_{Nr}^{(k)} \quad \hat{W}_1^{(k)} x_{k1} \quad \dots \quad \hat{W}_{Nr}^{(k)} x_{k1} \quad \dots \quad \hat{W}_1^{(k)} x_{kn} \quad \dots \quad \hat{W}_{Nr}^{(k)} x_{kn} \right] \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{Nr0} \\ \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{Nr1} \\ \vdots \\ \gamma_{1n} \\ \vdots \\ \gamma_{Nr,n} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Agrupando expresiones para todas las muestras se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A\Gamma = y \quad (3.5)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} \hat{W}_1^{(1)} & \dots & \hat{W}_{Nr}^{(1)} & \hat{W}_1^{(1)} x_{11} & \dots & \hat{W}_{Nr}^{(1)} x_{11} & \dots & \hat{W}_1^{(1)} x_{1n} & \dots & \hat{W}_{Nr}^{(1)} x_{1n} \\ \hat{W}_1^{(2)} & \dots & \hat{W}_{Nr}^{(2)} & \hat{W}_1^{(2)} x_{21} & \dots & \hat{W}_{Nr}^{(2)} x_{21} & \dots & \hat{W}_1^{(2)} x_{2n} & \dots & \hat{W}_{Nr}^{(2)} x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{W}_1^{(N)} & \dots & \hat{W}_{Nr}^{(N)} & \hat{W}_1^{(N)} x_{N1} & \dots & \hat{W}_{Nr}^{(N)} x_{N1} & \dots & \hat{W}_1^{(N)} x_{Nn} & \dots & \hat{W}_{Nr}^{(N)} x_{Nn} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\Gamma = [\gamma_{10} \quad \dots \quad \gamma_{Nr0} \quad \gamma_{11} \quad \dots \quad \gamma_{Nr1} \quad \dots \quad \gamma_{1n} \quad \dots \quad \gamma_{Nr,n}] \quad (3.7)$$

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_N]^T \quad (3.8)$$

Los parámetros de las consecuencias del modelo estarán dados por:

$$\Gamma = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (3.9)$$

Para que sea factible determinar los parámetros de las consecuencias ,  $\gamma_{ri}$  ( $r=1,\dots,Nr$ ;  $i=0,\dots,n$ ), se debe cumplir que el número de éstos sea menor o igual que el número de datos,  $Nr$  es decir:

$$(n+1)Nr \leq N \quad (3.10)$$

donde

$n$  : número de variables de entrada.

$Nr$  : número de reglas.

$N$  : número de datos.

### 3.4 Método de identificación general

En esta sección se muestra el método de identificación utilizado para lograr la estructura óptima de las premisas y parámetros del modelo difuso y las variables de entrada relevantes.

Este algoritmo determina los parámetros del modelo que minimizan el error medio cuadrático. La forma de determinar el error depende de como se calcula la salida del modelo.

Una propiedad importante del algoritmo es que se determina en forma automática la estructura y el número de reglas, mediante algoritmos de clustering difuso y optimización estructural. Obtenemos de este algoritmo valores iniciales para los parámetros de las premisas los cuales se estiman posteriormente con un método de optimización.

#### 3.4.1 Modelo Difuso

El modelo utilizado, es una relación no lineal entre las variables de la siguiente forma:

$$\hat{y} = f(X) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (3.11)$$

donde

$X = x_1, \dots, x_n$  : Variables de entrada.

$$\begin{aligned} \text{con } x_i &= y_{k-i} \quad i=1, \dots, na \quad \text{regresores de } y \\ x_j &= u_{k-j} \quad j=na+1, \dots, n \quad \text{regresores de } u \text{ y su correspondiente retardo} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$\hat{y}$  : Salida del modelo.

Además se define:

$$X_k = x_{k1}, \dots, x_{kn} : \text{Muestras k-ésima de las variables de entrada.} \quad (3.13)$$

$y$  : Variable de salida real.

$\hat{y}$  : Muestra k-ésima de la salida.

$\hat{y}_k$  : Valor de la salida del modelo para la k-ésima muestra.

Cada una de las  $N_r$  reglas del modelo se asocia a cada entrada  $i$  un conjunto difuso  $R_{ri}$ . De este modo, la regla  $r$  del modelo, para  $r = 1, \dots, N_r$ , tiene la siguiente forma:

$$\text{Si } x_1 \text{ es } R_{r1} \text{ y } \dots \text{ y } x_n \text{ es } R_{rn} \text{ entonces } \hat{y} = f_r(X) \quad (3.14)$$

con

$$f_r(X) = \gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_i \quad f_r^{(k)} = f_r(X_k) \quad (3.15)$$

Los coeficientes  $\gamma_{ri}$  ( $r=1,\dots,N_r$  ;  $i=0,\dots,n$ ) son parámetros de las consecuencias.

El grado de pertenencia del valor k-ésimo de la entrada al conjunto difuso asociado a ella en la regla r se calcula a través de una función de pertenencia que contiene dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , cuya expresión es :

$$\mu_{ri}^{(k)} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{ri}(x_{ki}-\beta_{ri}))^2} \quad (3.16)$$

El grado de validez de la regla r para el valor k-ésimo de las variables de entrada se calcula utilizando la regla del producto, es decir:

$$W_r^{(k)} = \prod_{i=1}^n \mu_{ri}^{(k)} \quad (3.17)$$

Normalizando las reglas para que los grados de validez sumen uno, se tiene:

$$\hat{W}_r^{(k)} = \frac{W_r^{(k)}}{\sum_{u=1}^{N_r} W_u^{(k)}} \quad (3.18)$$

La salida del modelo difuso para la muestra k-ésima de la entrada está dada por:

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= \sum_{r=1}^{N_r} \hat{W}_r^{(k)} f_r^{(k)} = \sum_{r=1}^{N_r} \left[ \hat{W}_r^{(k)} \left( \gamma_{r0} + \sum_{i=1}^n \gamma_{ri} x_{ki} \right) \right] \\ &= \left( \sum_{r=1}^{N_r} \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r1} \right) x_{k1} + \dots + \left( \sum_{r=1}^{N_r} \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{rn} \right) x_{kn} + \left( \sum_{r=1}^{N_r} \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r0} \right) \\ &= d_{k1} x_{k1} + \dots + d_{kn} x_{kn} + d_{k0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

con

$$d_{ki} = \sum_{r=1}^{N_r} \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{ri} \quad i = 0,\dots,n$$

### 3.4.2 Identificación de la estructura de premisas e inicialización de parámetros.

Se considera el algoritmo de clustering difuso para determinar el número óptimo de reglas y también los valores iniciales de los parámetros de las funciones de pertenencia.

El algoritmo que determina los puntos del espacio más representativo, conocidos como centros de los clusters, y los grados de pertenencia de las muestras a dichos conjuntos, se conoce como FCM (Fuzzy Clustering Means) [Hathaway 1993].

De acuerdo a la estructura de las consecuencias, esta se puede interpretar geoméricamente como que el espacio entrada-salida se divide en conjuntos con forma de plano (n+1)-dimensional. Luego se puede obtener una estimación de las funciones de pertenencia utilizando un algoritmo de clustering difuso que divida al espacio de las variables en conjuntos

con formas de hiperplanos. En un espacio n-dimensional la distancia entre un punto  $[x_{k1} \dots x_{kn} y_k]$  y el hiperplano  $y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$  en la dirección del eje y es:

$$d_{kr} = \left| y_k - \sum_{i=1}^n a_i x_{ki} - b \right| \quad (3.20)$$

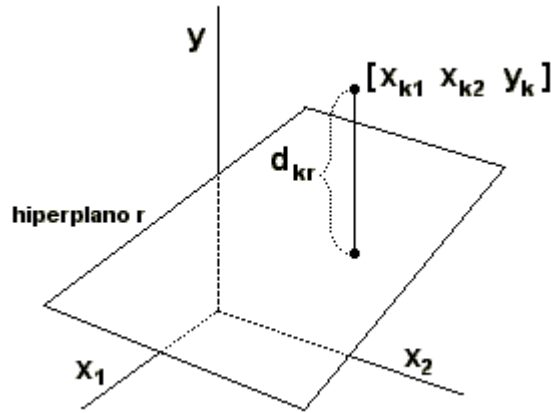


Figura 3.3 Distancia de un punto a un plano en la dirección y

Dado el número de cluster  $N_c$  y los datos de entrada-salida, el algoritmo de clustering determina los coeficientes de las ecuaciones de los hiperplanos que mejor representa a cada conjunto de datos, y los grados de pertenencia que asocian a cada muestra a los hiperplanos. La idea es que los grados de pertenencia de los puntos cercanos a los hiperplanos sean grandes comparados con los grados de pertenencia de los puntos lejanos.

$$\min z_\rho(u,a,b) = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr}^\rho d_{kr}^2 \quad (3.21)$$

$$s.a. \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr} = 1 \quad k = 1 \dots N \quad (3.22)$$

- $u_{kr}$  : grado de pertenencia de la k-ésima muestra al r-ésimo cluster.
- $d_{kr}$  : distancia de la muestra k-ésima al r-ésimo hiperplano.
- $x_{ki}$  : vector con la k-ésima muestra de las entradas.
- $y_k$  : muestra k-ésima de la salida.
- $a_{ri}, b_r$  : coeficiente del hiperplano r.
- $\rho$  : fuzzificador de conjuntos difusos. Se usará  $\rho = 2$ .
- $N_c$  : número de cluster.
- $N$  : número de muestras.
- $C_i$  : el prototipo del i-ésimo cluster



Para minimizar la función (3.21) se utiliza una versión adaptada del método del gradiente. Los coeficientes  $a_{ri}$  y  $b_r$  se desplazarán según la dirección de máximo descenso, mientras que los grados de pertenencia se actualizarán de modo de satisfacer las restricciones.

La solución se obtiene a partir del siguiente Lagragiano:

$$\ell = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr}^\rho d_{kr}^2 + \sum_{k=1}^N \lambda_k \left( 1 - \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr} \right) \quad (3.23)$$

Por lo tanto las condiciones de Kun-Tucker son:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a_{rj}} = \frac{\partial z_\rho}{\partial a_{rj}} = \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr}^\rho \frac{\partial (d_{kr}^2)}{\partial a_{rj}} = -2 \sum_{k=1}^N \left[ u_{kr}^\rho \left( y_k - \sum_{i=1}^n a_{ri} x_{ki} - b_r \right) x_{kj} \right] \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b_r} = \frac{\partial z_\rho}{\partial b_r} = \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr}^\rho \frac{\partial (d_{kr}^2)}{\partial b_r} = -2 \sum_{k=1}^N \left[ u_{kr}^\rho \left( y_k - \sum_{i=1}^n a_{ri} x_{ki} - b_r \right) \right] \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial u_{kr}} = \rho u_{kr}^{\rho-1} d_{kr}^2 - \lambda_k = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_k} = 1 - \sum_{r=1}^{N_c} u_{kr} = 0 \quad (3.27)$$

para  $r = 1, \dots, N_c$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

De las ecuaciones (4.21) a (4.25) se obtienen los centros de los cluster y las funciones de pertenencia.

$$C_i = \frac{\sum_{k=1}^N (u_{ik})^\rho \cdot X_k}{\sum_{j=1}^{N_c} (u_{ik})^\rho} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N_c \quad (3.28)$$

$$u_{kr} = \frac{1}{\sum_{s=1}^{N_c} \left( \frac{d_{kr}}{d_{ks}} \right)^{\frac{2}{\rho-1}}} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N_c \quad \forall \quad k = 1, \dots, N \quad (3.29)$$

El algoritmo incluye los siguientes pasos:

- Iniciar los  $u_{kr}$  con valores aleatorios.
- Calcular los centros de los cluster. Ecuación (3.28)
- Calcular la distancia de la muestra k-ésima al r-ésimo hiperplano. Ecuación (3.20)
- Actualizar los grados de pertenencia. Ecuación (3.29)
- Inicialización de los coeficientes a y b por regresión lineal

- f. En cada iteración:
- Calcular las derivadas con respecto a los coeficientes de los planos usando (3.24) y (3.25)
  - Desplazar los  $a_{ri}$  y  $b_r$  en la dirección de máximo descenso.
  - Calcular las distancias de las muestras a los planos definidos por los coeficientes desplazados, utilizando la ecuación (3.20)
  - Actualizar los grados de pertenencia actualizando la expresión (3.29)
  - Calcular la función objetivo a partir de (3.21). Si disminuyó, continuar. Si no, reducir la tasa en un factor, reconsiderar los valores anteriores de los coeficientes y repetir el paso.
- g. Si la función objetivo varía menos que un cierto umbral, terminar. Si no, volver al paso f.

El número óptimo de clusters, se obtiene al aplicar el algoritmo iterativamente para  $N_c = 2, 3, \dots$ , evaluando en cada caso la función decreciente dada por:

$$S(N_c) = \sum \sum u_{kr} \rho \left( d_{kr}^2 - \bar{d}_r^2 \right) \quad (3.30)$$

donde  $d_r$  es la distancia del valor promedio de las muestras al hiperplano  $r$ . La función se sustenta en que la partición del espacio debe ser tal que cada cluster debe ser lo más distinto posible a los otros, pero sus elementos deben ser lo más parecidos entre sí. Determinados los clusters se identifica los valores iniciales de los parámetros de las funciones de pertenencia de las entradas, que son utilizados en el algoritmo de optimización del error. El valor inicial del parámetro  $\beta_{ri}$  es el promedio ponderado de las coordenadas  $i$ -ésimas de las muestras por los grados de pertenencia al hiperplano  $r$ , es decir:

$$\beta_{ri}^{(0)} = \frac{\sum_{k=1}^N u_{kr} x_{ki}}{\sum_{k=1}^N u_{kr}} \quad (3.31)$$

Esto debido a que el vector  $[\beta_{r1} \beta_{r2} \dots \beta_{rn}]$  debe ser el centro del cluster  $r$ . A su vez, los valores iniciales de los parámetros  $\alpha_{ri}$  tendrán relación directa con el recíproco de la desviación estándar de los datos al interior de cada cluster:

$$\alpha_{ri}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N u_{kr} (x_{ki} - \beta_{ri}^{(0)})^2}{\sum_{k=1}^N u_{kr}}}} \quad (3.32)$$

Más detalles del algoritmo se presenta en el anexo B.

### 3.4.3 Identificación de variables de entrada relevantes

Para determinar la estructura óptima del modelo difuso a utilizar se hace necesario identificar las variables de entrada más significativas.

Dado el siguiente modelo no lineal:

$$y(k) = f(X(k)) \quad (3.33)$$

con

$$X(k) = \begin{bmatrix} y(k-1) \\ \vdots \\ u(k-na) \\ u(k-nk-1) \\ \vdots \\ u(k-nk-nb) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{na} \\ x_{na+1} \\ \vdots \\ x_{na+nb} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

La relevancia de una variable se calcula con la sensibilidad dada por la derivada de la salida con respecto a las entradas:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \quad (3.35)$$

Para el modelo difuso Takagi & Sugeno se tiene:

$$\text{Si } y(k-1) \text{ es } R_1^r \text{ y ... y } y(k-na) \text{ es } R_{na}^r \text{ y} \\ u(k-nk-1) \text{ es } R_{na+1}^r \text{ y ... y } u(k-nb-nk) \text{ es } R_{na+nb}^r \quad (3.36)$$

entonces

$$y_r(k) = \gamma_0^r + \gamma_1^r y(k-1) + \dots + \gamma_{na}^r y(k-na) + \gamma_{na+1}^r u(k-nk-1) + \dots + \gamma_{na+nb}^r u(k-nb-nk) \quad (3.37)$$

La salida del modelo difuso es:

$$y(k) = \frac{\sum_{r=1}^{N_r} W_r y_r(k)}{\sum_{r=1}^{N_r} W_r} \quad (3.38)$$

donde el grado de activación de las reglas está dado por:

$$W_r = \mu_1^r \cdots \mu_i^r \cdots \mu_{na+nb}^r \quad (3.39)$$

La función de pertenencia para el conjunto difuso  $R_i^r$  se calcula como:

$$\mu_i^r = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_i^r(x_i - \beta_i^r))^2} \quad (3.40)$$

Luego la sensibilidad con respecto a las variables de entrada es [Sáez 2000]:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = \frac{\sum_{r=1}^{N_r} \left( \frac{\partial W_r}{\partial x_i} y_r + \frac{\partial y_r}{\partial x_i} W_r \right) \sum_{r=1}^{N_r} W_r - \sum_{r=1}^{N_r} \left( \frac{\partial W_r}{\partial x_i} \right) \sum_{r=1}^{N_r} (W_r y_r)}{\sum_{r=1}^{N_r} W_r} \quad (3.41)$$

con:

$$\frac{\partial W_r}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu_i^r}{\partial x_i} \times \mu_1^r \times \dots \times \mu_{i-1}^r \times \mu_{i+1}^r \times \dots \times \mu_{na+nb}^r \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \mu_i^r}{\partial x_i} = \mu_i^r \times c_i^r \quad (3.43)$$

$$c_i^r = -(\alpha_i^r \times (x_i - \beta_i^r)) \times \alpha_i^r \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_i} = \gamma_i^r \quad (3.45)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.42) hasta (3.45) en (3.41) se tiene:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = \frac{\sum_{r=1}^{N_r} (W_r c_i^r y_r + \gamma_i^r W_r) \sum_{r=1}^{N_r} W_r - \sum_{r=1}^{N_r} (W_r c_i^r) \sum_{r=1}^{N_r} (W_r y_r)}{\sum_{r=1}^{N_r} W_r} \quad (3.46)$$

Evaluando en el conjunto de entrenamiento obtenemos la media  $\mu_i$  y la desviación estándar de las sensibilidades  $\sigma_i$  con lo que se construye el siguiente índice de sensibilidad.

$$I_i = \mu_i^2 + \sigma_i^2 \quad (3.47)$$

Es necesario normalizar los datos usados en este procedimiento para evitar las influencias de las magnitudes de éstos.

### 3.5 Ejemplo de aplicación

#### 3.5.1 Modelo lineal para la serie Wang

En [Wang 1993] se propone un ejemplo de sistema no lineal en tiempo discreto definido por la siguiente ecuación:

$$y(k) = \frac{y(k-1)y(k-2)y(k-3)u(k-2)(y(k-3)-1) + u(k-1)}{1 + y^2(k-3) + y^2(k-2)} \quad (3.48)$$

El modelo lineal es obtenido por mínimos cuadrados con tiempo de muestreo de 1 [seg]. Se consideran 200 muestras para el conjunto de entrada y 200 para validación. El error de validación considerado es:

$$e = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y}_k)^2 \right)} \quad \text{con } n = \text{número de datos.} \quad (3.49)$$

Por lo tanto, el modelo lineal obtenido está dado por:

$$\begin{aligned} & y(k) - 0.1338 y(k-1) + 0.0855 y(k-2) + 0.1108 y(k-3) - 0.1976 y(k-4) - 0.2369 y(k-5) \\ & - 0.0630 y(k-6) - 0.0890 y(k-7) - 0.0676 y(k-8) - 0.0097 y(k-9) = \\ & 0.7525 u(k-2) - 0.1198 u(k-3) - 0.0801 u(k-4) - 0.0424 u(k-5) - 0.0923 u(k-6) - 0.1357 u(k-7) \\ & + 0.0481 u(k-8) \end{aligned} \quad (3.50)$$

En la figura 3.4 se aprecia el comportamiento del modelo lineal de la serie Wang para una predicción a un paso.

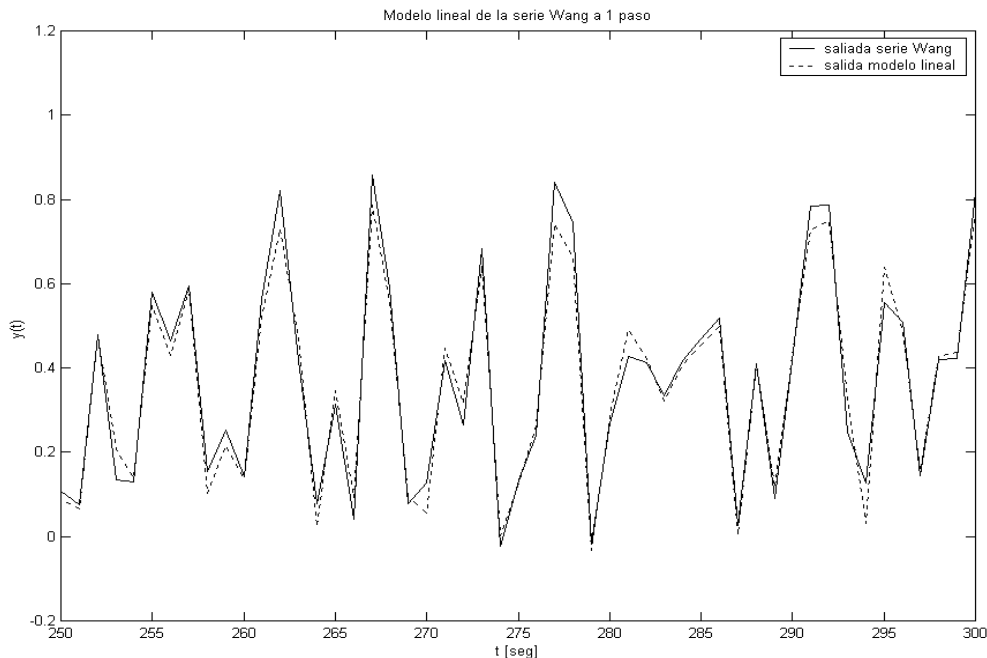


Figura 3.4 Modelo lineal de la serie Wang con predicción a un paso.

En la figura 3.5 se aprecia el comportamiento del modelo lineal de la serie Wang con predicción a N pasos.

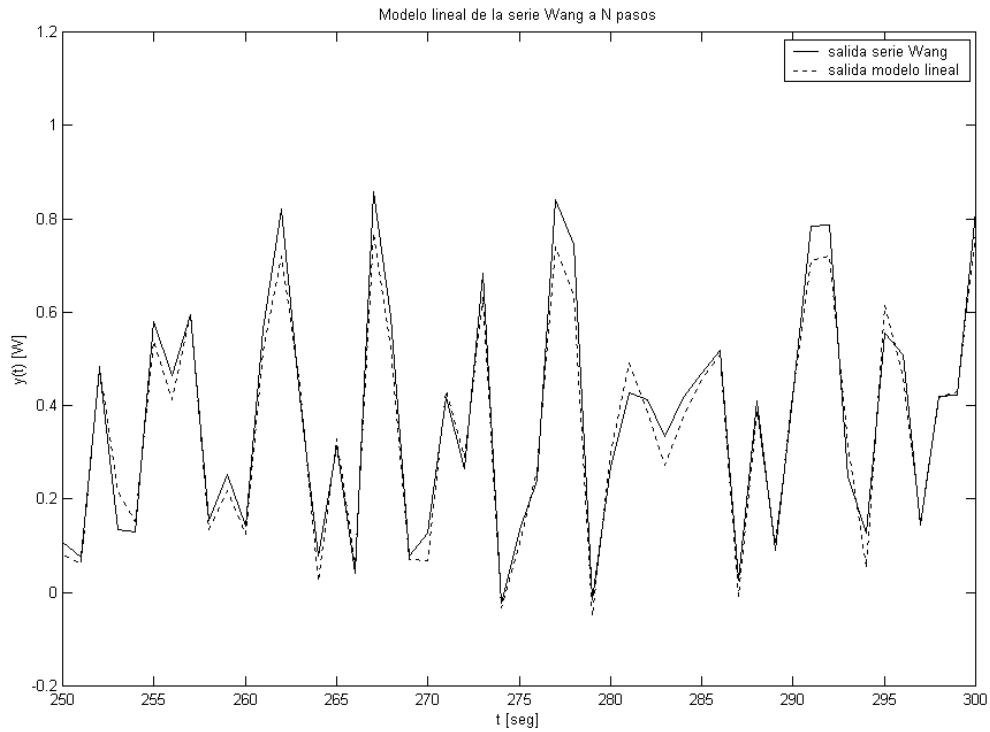


Figura 3.5 Modelo lineal de la serie Wang con predicción a N pasos.

En la tabla 3.1 se muestran los errores de validación, considerando la ecuación (3.49) para la serie Wang.

Modelo Lineal	Error validación
Predicción a 1 paso serie Wang	0.0881
Predicción a N pasos serie Wang	0.1064

Tabla 3.1 Error de validación con modelación lineal.

### 3.5.1 Modelo difuso Takagi & Sugeno para la serie Wang

Para obtener un modelo difuso Takagi & Sugeno de la serie Wang, se realizó en primer lugar, un análisis de sensibilidad para identificar las variables de entrada más significativas. Esto se aprecia en el índice de sensibilidad de la figura 3.6

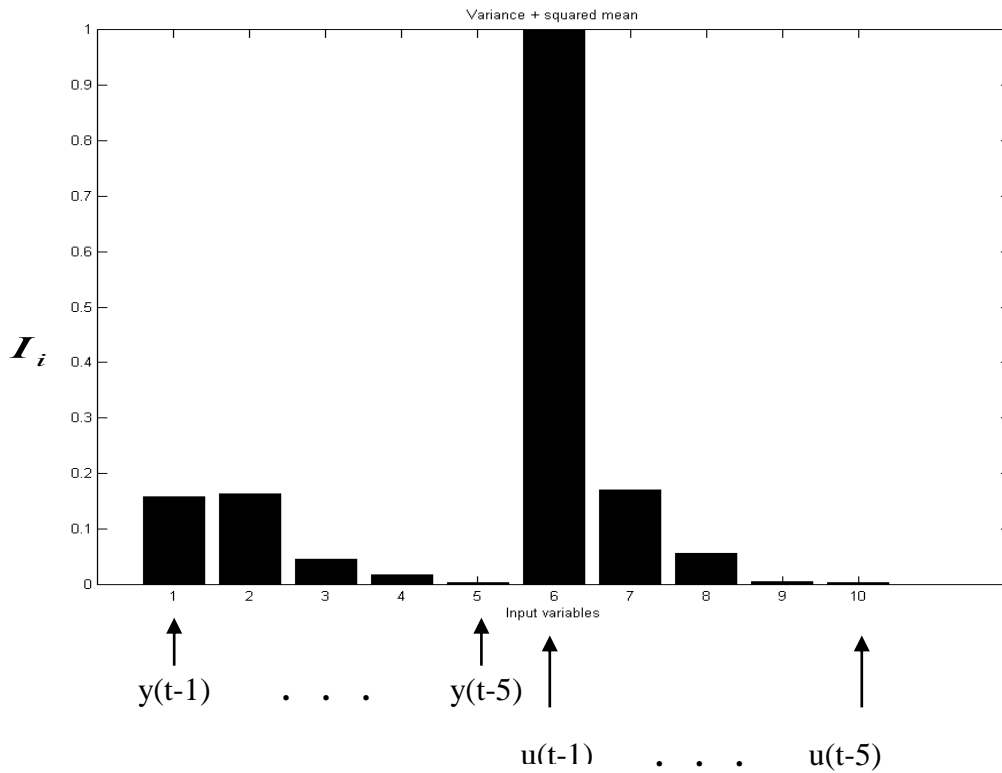


Figura 3.6 Índice de sensibilidad.

La figura 3.6 muestra que los regresores más significativo son  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$ ,  $u(k-1)$  y  $u(k-2)$ . Según la tabla 3.2 el error de validación es menor con el modelo reducido para la predicción a un paso y a N pasos.

Predicción a 1 paso	Variables de entrada	Error de validación
Modelo 1	$y(k-1) \dots y(k-5)$ $u(k-1) \dots u(k-5)$	0.0742
Modelo 2	$y(k-1) y(k-2)$ $u(k-1) u(k-2)$	0.0355

Predicción a N pasos	Variables de entrada	Error de validación
Modelo 1	$y(k-1) \dots y(k-5)$ $u(k-1) \dots u(k-5)$	0.0945
Modelo 2	$y(k-1) y(k-2)$ $u(k-1) u(k-2)$	0.0563

Tabla 3.2 Error de validación con modelación difusa.

En la figura 3.7 se aprecia el comportamiento del modelo difuso Takagi & Sugeno de la serie Wang con predicción a un paso.

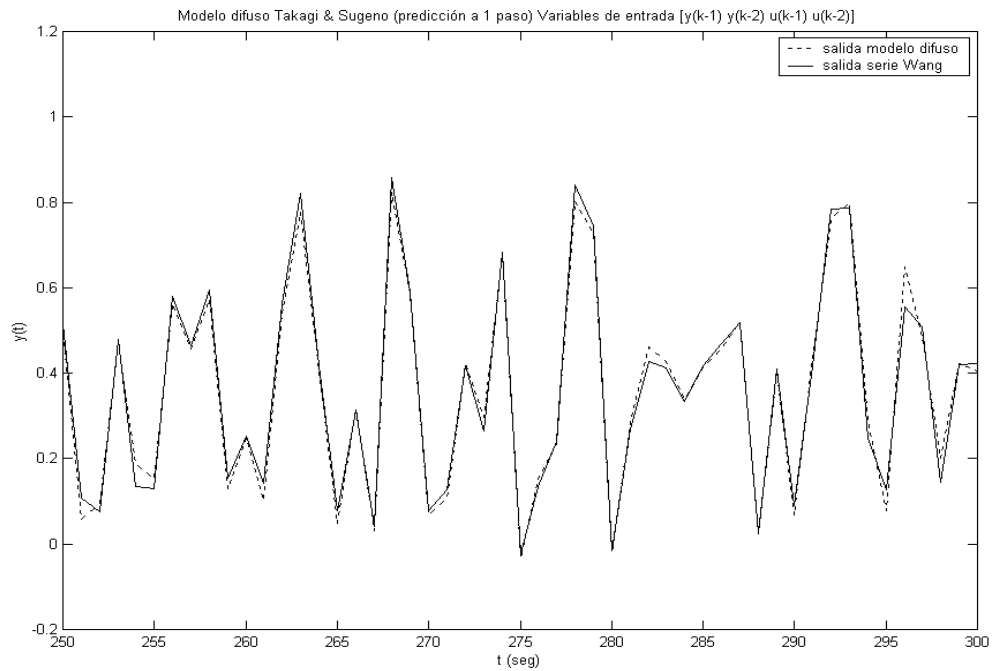


Figura 3.7 Modelo difuso T& S de la serie Wang con predicción a un paso.

En la figura 3.8 se aprecia el comportamiento del modelo difuso Takagi & Sugeno de la serie Wang con predicción a N=10 pasos.

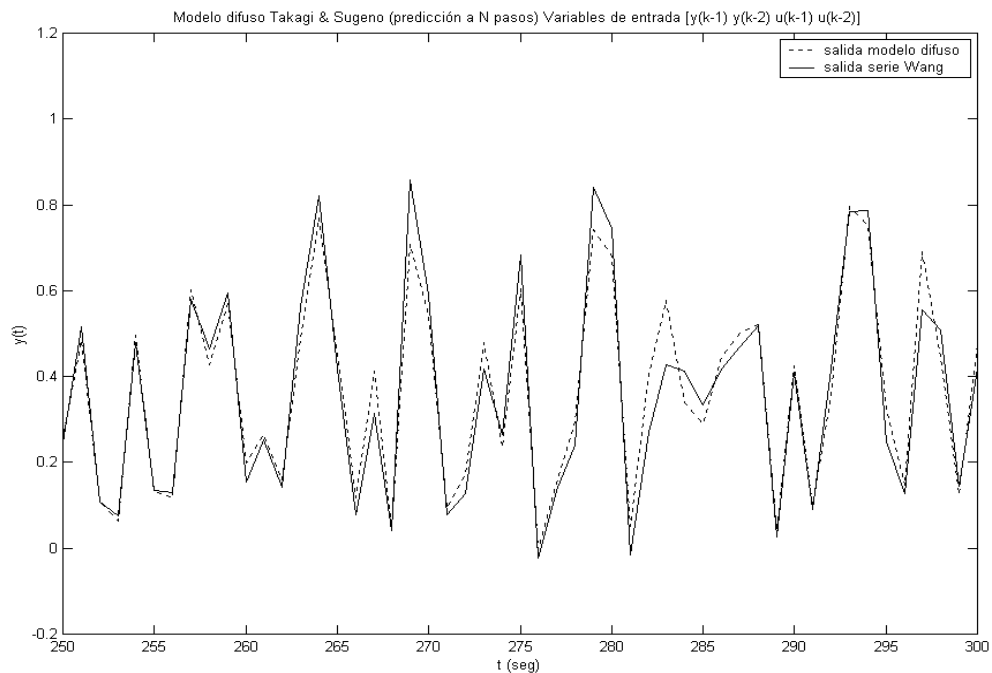


Figura 3.8 Modelo difuso T& S de la serie Wang con predicción a N pasos.

En este caso el modelo Takagi & Sugeno entrega 3 reglas. Los parámetros de las funciones de pertenencias  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$  ( $i=1,2$  y  $3$  ;  $j=1,2,3$  y  $4$ ) de la ecuación (3.21) se presentan en la tabla 3.3:



$\alpha_{ij}$				$\beta_{ij}$			
4.2153	4.5001	3.7945	3.3859	0.4290	0.3388	0.5456	0.5582
4.5786	3.7750	3.8294	4.0458	0.3504	0.5363	0.7094	0.5264
4.0041	4.0422	3.3632	3.2927	0.3450	0.3829	0.4247	0.4750

Tabla 3.3 Parámetros de las funciones de pertenencia.

Los parámetros de las consecuencias,  $\gamma_{ri}$  ( $r=1,2$  y  $3$  ;  $i=0,1,2,3$  y  $4$ ) se presentan en la tabla 3.4:

$\gamma_{r1}$	$\gamma_{r2}$	$\gamma_{r3}$	$\gamma_{r4}$	$\gamma_{r0}$
0.0408	-0.3955	1.1119	-0.3027	0.1563
1.1833	-0.2792	0.5057	-1.0822	0.3347
0.1412	0.0417	0.5942	0.0476	-0.0394

Tabla 3.34 Parámetros de las consecuencias.

El modelo difuso Takagi & Sugeno con sus premisas y consecuencias, se presenta en la ecuación (3.51).

$$\begin{aligned}
R^1 : & \text{ Si } (y_{k-1} \text{ es } A_1^1) \text{ y } (y_{k-2} \text{ es } A_2^1) \text{ y } (u_{k-1} \text{ es } A_3^1) \text{ y } (x_p \text{ es } A_4^2) \\
& \text{ entonces } \quad y_k^1 = \gamma_{11}y_{k-1} + \gamma_{12}y_{k-2} + \gamma_{13}u_{k-1} + \gamma_{14}u_{k-2} + \gamma_{10} \\
R^2 : & \text{ Si } (y_{k-1} \text{ es } A_1^2) \text{ y } (y_{k-2} \text{ es } A_2^2) \text{ y } (u_{k-1} \text{ es } A_3^2) \text{ y } (x_p \text{ es } A_4^2) \\
& \text{ entonces } \quad y_k^2 = \gamma_{21}y_{k-1} + \gamma_{22}y_{k-2} + \gamma_{23}u_{k-1} + \gamma_{24}u_{k-2} + \gamma_{20} \\
R^3 : & \text{ Si } (y_{k-1} \text{ es } A_1^3) \text{ y } (y_{k-2} \text{ es } A_2^3) \text{ y } (u_{k-1} \text{ es } A_3^3) \text{ y } (x_p \text{ es } A_4^3) \\
& \text{ entonces } \quad y_k^3 = \gamma_{31}y_{k-1} + \gamma_{32}y_{k-2} + \gamma_{33}u_{k-1} + \gamma_{34}u_{k-2} + \gamma_{30}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Por lo tanto la salida del modelo difuso es:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_k &= \sum_{r=1}^3 [\hat{W}_r^{(k)} (\gamma_{r1}y_{k-1} + \gamma_{r2}y_{k-2} + \gamma_{r3}u_{k-1} + \gamma_{r4}u_{k-2} + \gamma_{r0})] \\
&= \left( \sum_{r=1}^3 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r1} \right) y_{k-1} + \left( \sum_{r=1}^3 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r2} \right) y_{k-2} + \left( \sum_{r=1}^3 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r3} \right) u_{k-1} + \left( \sum_{r=1}^3 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r4} \right) u_{k-2} + \left( \sum_{r=1}^3 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r0} \right) \\
&= d_{k1}y_{k-1} + d_{k2}y_{k-2} + d_{k3}u_{k-1} + d_{k4}u_{k-2} + d_{k0}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Los programas en Matlab utilizados se describen en el Anexo C.

Finalmente, los modelos difusos generados para serie Wang, entregan un error de validación menor que los modelos lineales. Esto confirma las bondades de la identificación difusa Takagi & Sugeno para representar las no linealidades de un proceso.

#### IV.- SISTEMA DE CONTROL SUPERVISOR.

En un mundo cada vez más competitivo el sector industrial pretende mejorar la productividad y reducir sus costos. Además las grandes inversiones en centrales termoeléctricas, en particular en centrales de ciclo combinado, exigen un gran esfuerzo en mantener su disponibilidad en el tiempo, optimizando su funcionamiento tanto por razones operacionales como económicas y/o ambientales.

Por su parte, aunque el nivel regulatorio logra mantener el error acotado, entre la referencia y variables del proceso, por las razones antes señaladas es necesario optimizar aun más la operación de la planta. Ante este problema se tienen las siguientes alternativas de solución:

1. Reemplazar el sistema regulatorio por un sistema de control optimizante.
2. Agregar un nivel supervisor optimizante sin modificar el nivel regulatorio

Debido al alto costo asociado a la modificación de los controladores regulatorios (ejemplo, controladores PID), el sector industrial acepta con mayor facilidad la segunda alternativa. Además un sistema de control supervisor permite mejorar el nivel regulatorio a través de la modificación dinámica de los set-points o referencias, manteniendo fijo todo el sistema regulatorio del proceso.

Existen variadas contribuciones que tratan con la optimización de set-points basado en modelos de estado estacionario. Por ejemplo, [Ellis 1998] presenta la optimización económica de una unidad de craking catalítico de lecho fluidizado. El nivel regulatorio es compuesto por una restricción no lineal del controlador los set-point son entregados por el nivel optimizante. En este caso, los parámetros en estado estacionario son adaptados en línea.

En [Zheng 1999] se presenta una estrategia de control jerárquico para maximizar los resultados de una planta química. En este caso, los modelos en proceso en estado estacionario son usados para determinar los set-points, los cuales optimizan una función objetivo económica.

En [Muñoz 1999] y [Muñoz 2000] se proponen una estrategia económica de control para una planta de procesamiento de mineral. La estrategia está compuesta por un nivel regulatorio dado por un controlador predictivo multivariable y un optimizador económico global para determinar los set-points de controlador predictivo. En este trabajo son considerados modelos en estado estacionario no lineales del proceso de molienda y modelos dinámicos del proceso de flotación.

En [Becerra 1999] se propone una formulación predictiva multi-objetivo que incluye tanto objetivos económicos como regulatorios, basándose en modelos en estado estacionario.

Además existen algunos trabajos con modelos dinámicos. Por ejemplo, en [de Prada 1996] se propone una estrategia de control predictivo basado en la optimización de un índice económico. Esta estrategia fue aplicada a un reactor químico. En [Katebi 1997] se describe una estrategia de control descentralizada. En este trabajo se utiliza una representación en espacio de estado. La función objetivo representa solamente objetivos regulatorios. La estrategia de control fue aplicada a un simulador de una central térmica.



$$\begin{aligned}
J = & \sum_{j=1}^{N_y} \Psi_y^j \hat{y}^2(t+j) + \sum_{i=1}^{N_u} \Psi_u^i u^2(t+i-1) + \sum_{i=1}^{N_u} \Psi_{\Delta u}^i \Delta u^2(t+i-1) \\
& + \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_u} \Psi_{yu}^{ji} \hat{y}(t+j)u(t+i-1) + \sum_{j=1}^{N_y} \xi_y^j \hat{y}(t+j) + \sum_{i=1}^{N_u} \xi_u^i u(t+i-1) + \sum_{i=1}^{N_u} \xi_{\Delta u}^i \Delta u(t+i-1)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $u(t+i)$  son las variables manipuladas y  $\hat{y}(t+j)$  son las predicciones a  $j$ -pasos de las variables controladas. Además  $\Psi$  y  $\xi$  son parámetros de peso,  $N_u$  es el horizonte de control y  $N_y$  es el horizonte de predicción. La trayectoria externa  $w$  también puede ser incluida en la función objetivo.

La función objetivo (4.1) puede representar metas diferentes de optimización en el nivel supervisor. Por ejemplo, costos operacionales del funcionamiento de la planta, y/o consumo de energía y/o criterios regulatorios.

#### 4.2.2 Modelo del nivel regulatorio

La optimización de la operación de la planta se logra añadiendo un nivel supervisor óptimo sin modificar el nivel regulatorio. El nivel regulatorio puede ser representado por la siguiente expresión.

$$A_c(q^{-1})u(t) = B_{cr}(q^{-1})r(t) + B_{cy}(q^{-1})y(t) \tag{4.2}$$

con

$$\begin{aligned}
A_c(q^{-1}) &= 1 + a_{c_1}q^{-1} + \dots + a_{c_{nac}}q^{-nac} \\
B_{cr}(q^{-1}) &= b_{r_0} + b_{r_1}q^{-1} + \dots + b_{r_{mb}}q^{-mb} \\
B_{cy}(q^{-1}) &= b_{y_0} + b_{y_1}q^{-1} + \dots + b_{y_{nb}}q^{-ynb}
\end{aligned}$$

#### 4.2.3 Restricciones generales

Se consideran restricciones de amplitud y velocidad en las variables manipuladas y límites en las variables controladas. Es decir:

$$u_{\min} \leq u(t+i-1) \leq u_{\max} \quad \text{con } i = 1, \dots, N_u \tag{4.3}$$

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(t+i-1) \leq \Delta u_{\max} \quad \text{con } i = 1, \dots, N_u \tag{4.4}$$

$$y_{\min} \leq y(t+i) \leq y_{\max} \quad \text{con } i = 1, \dots, N_y \tag{4.5}$$

#### 4.2.4 Modelo lineal del proceso

Para construir un controlador supervisor lineal es necesario determinar el modelo lineal del proceso. En este trabajo se utiliza un modelo ARIX (Auto Regresive Integer with eXogenous Variables), que es más apropiado para muchos procesos industriales, con perturbaciones no estacionarias.

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t) \quad (4.6)$$

con

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + aq^{-1} + \dots + aq^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \end{aligned}$$

Además  $e(t)$  es ruido blanco de media cero y  $q^{-1}$  es el operador de desplazamiento.

#### 4.2.5 Modelo no lineal del proceso

Para el caso no lineal se construye un modelo Takagi & Sugeno descrito en la sección 3.1, que se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_{k+j} = d^1 y_{k+j-1} + \dots + d^{ny} y_{k+j-ny} + d^{ny+1} u_{k+j-1} + \dots + d^{ny+nu} u_{k+j-nu} + d^{ny+nu+1} \quad (4.7)$$

donde los parámetros  $d^i = d^i(y_{k+j-1}, \dots, y_{k+j-ny}, u_{k+j-1}, \dots, u_{k+j-nu})$  son función no lineal de los regresores, descritos en la ecuación ecuación (3.19).

### 4.3 Algoritmo de solución para el controlador supervisor lineal.

Se considera la optimización numérica de la función objetivo descrita en (4.1), considerando el modelo lineal del proceso (4.6) y del nivel regulatorio (4.2) como restricciones, además de las restricciones habituales (4.3), (4.4) y (4.5).

Las variables de optimización son:

$$\begin{aligned} &\hat{y}(t+1), \dots, \hat{y}(t+N_y), u(t), u(t+1), \dots, u(t+N_u), r(t), r(t+1), \dots, r(t+N_y), \\ &\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como  $\mathbf{E}(e(t+j)) = 0$ , con  $\mathbf{E}$  operador esperanza, las restricciones para la predicción de las variables controladas, usando el modelo lineal del proceso (4.6) son:

$$\begin{aligned} & \hat{y}(t+j) + a_1 \hat{y}(t+j-1) + \dots + a_{na} \hat{y}(t+j-na) \\ & - b_1 u(t+j-1) - \dots - b_{nb} u(t+j-nb) = 0 \\ & \text{para } j = 1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.9)$$

Usando la ecuación (4.9) las restricciones para la predicción de las variables controladas como función de los incrementos de las variables manipuladas son:

$$\begin{aligned} & \hat{y}(t+j) + (a_1 - 1) \hat{y}(t+j-1) + \dots - a_{na} \hat{y}(t+j-na-1) \\ & - b_1 \Delta u(t+j-1) - \dots - b_{nb} \Delta u(t+j-nb) = 0 \\ & \text{para } j = 1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para iguales condiciones, las restricciones para las variables manipuladas, usando el modelo del nivel regulatorio (4.2) son:

$$\begin{aligned} & u(t+i-1) + a_{c1} u(t+i-2) + \dots + a_{cnac} u(t+i-nac) \\ & - b_{r0} r(t+i-1) - b_{r1} r(t+i-2) - \dots - b_{rnb} r(t+i-rnb) \\ & - b_{y0} \hat{y}(t+i-1) - b_{y1} \hat{y}(t+i-2) - \dots - b_{y_{ynb}} \hat{y}(t+i-ynb-1) = 0 \\ & \text{para } i = 1, \dots, N_u \end{aligned} \quad (4.11)$$

De (4.11) las restricciones para los incrementos de las variables manipuladas son:

$$\begin{aligned} & \Delta u(t+i-1) + a_{c1} \Delta u(t+i-2) + \dots + a_{cnac} \Delta u(t+i-nac) \\ & - b_{r0} r(t+i-1) - (b_{r1} - b_{r0}) r(t+i-2) - \dots - b_{rnb} r(t+i-rnb) \\ & - b_{y0} \hat{y}(t+i-1) - (b_{y1} - b_{y0}) \hat{y}(t+i-2) - \dots - b_{y_{ynb}} \hat{y}(t+i-ynb-1) = 0 \\ & \text{para } i = 1, \dots, N_u \end{aligned} \quad (4.12)$$

La solución del problema de optimización está dado por Programación Cuadrática, debido a que la función objetivo es cuadrática y las restricciones son lineales. Ver programa en anexo C.

#### 4.4 Algoritmo de solución del controlador supervisor difuso linealizado.

En esta sección se considera un algoritmo similar al presentado en la sección 4.3, pero con la diferencia que se reemplaza el modelo lineal por el modelo difuso Takagi & Sugeno linealizado, es decir se hace la suposición que los parámetros del modelo se mantienen constantes en todas las restricciones (predicciones) del proceso, ecuación (4.13). Por lo cual, nuevamente se plantea un problema de programación cuadrática.

$$\begin{aligned} & \hat{y}(t+j) - d^1 \hat{y}(t+j-1) - \dots - d^{na} \hat{y}(t+j-na) \\ & + d^{na+1} u(t+j-1) + \dots + d^{na+nb} u(t+j-nb) = 0 \\ & \text{para } j = 1, \dots, N_y \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & \text{siendo } d^l = d^l(y(t+j-1), \dots, y(t+j-na), u(t+j-nb), \dots, u(t+j-nb)) \\ & l = 1, \dots, na+nb \quad j=1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

#### 4.5 Algoritmo de solución para el controlador supervisor difuso global.

Este caso se considera el modelo difuso del proceso (4.7), pero los parámetros de las restricciones del proceso no lineal son actualizados en cada predicción, es decir en la ecuación (4.14) se exige ahora que  $j=1, \dots, N_y$ . Luego se hace necesario utilizar optimización no lineal.

Debido a que la mayoría de las restricciones del problema son de igualdad se consideró el método de optimización del Gradiente Proyectado, pues al trabajar con restricciones de igualdad lo que se busca es un punto óptimo sobre una superficie (hipersuperficie) y los métodos de tradicionales tienden a ser poco eficientes en estas condiciones. En este caso se logra un óptimo global del problema de optimización.

Para la solución de problema, es necesario obtener el gradiente de las restricciones del problema de optimización. En particular el gradiente de las ecuaciones (3.19) del modelo difuso Takagi & Sugeno se calculan a partir las derivadas parciales de las ecuaciones del modelo con respecto a los regresores utilizados. Este proceso, se detalla a continuación.

$$\text{Sea: } x_0 \equiv y_k \quad x_1 \equiv y_{k-1} \quad x_2 \equiv y_{k-2} \quad x_3 \equiv u_{k-1} \quad x_4 \equiv u_{k-2} \quad (4.15)$$

$$w^i(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{i1}(x_1 - \beta_{i1}))^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{i2}(x_2 - \beta_{i2}))^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{i3}(x_3 - \beta_{i3}))^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{i4}(x_4 - \beta_{i4}))^2} \quad i = 1, 2 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial w^j}{\partial x_k} = -\left(a_{jk}^2(x_k - b_{jk})\right)w^j \quad j = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.17)$$

En nuestro caso, una restricción del modelo difuso del proceso está dada por:

$$Eq = -x_0 + \frac{\gamma_{11}w^1 + \gamma_{21}w^2}{w^1 + w^2}x_1 + \frac{\gamma_{12}w^1 + \gamma_{22}w^2}{w^1 + w^2}x_2 + \frac{\gamma_{13}w^1 + \gamma_{23}w^2}{w^1 + w^2}x_3 + \frac{\gamma_{14}w^1 + \gamma_{24}w^2}{w^1 + w^2}x_4 = 0 \quad (4.18)$$

Donde las derivadas son:

$$\frac{\partial Eq}{\partial x_0} = -1 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial Eq}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^4 \left[ \frac{\left( \gamma_{1j} \frac{\partial w^1}{\partial x_i} + \gamma_{2j} \frac{\partial w^2}{\partial x_i} \right) (w^1 + w^2) - \left( \frac{\partial w^1}{\partial x_i} + \frac{\partial w^2}{\partial x_i} \right) (\gamma_{1j}w^1 + \gamma_{2j}w^2)}{(w^1 + w^2)^2} \right] x_j + \quad (4.20)$$

$$\left[ \frac{\left( \gamma_{15} \frac{\partial w^1}{\partial x_i} + \gamma_{25} \frac{\partial w^2}{\partial x_i} \right) (w^1 + w^2) - \left( \frac{\partial w^1}{\partial x_i} + \frac{\partial w^2}{\partial x_i} \right) (\gamma_{15} w^1 + \gamma_{25} w^2)}{(w^1 + w^2)^2} \right] + \left( \frac{\gamma_{1i} w^1 + \gamma_{2i} w^2}{w^1 + w^2} \right)$$

$i = 1, 2, 3, 4$

El punto óptimo se determina mediante la siguiente ecuación iterativa:

$$y_{j+1} = y_j - \nabla h(X)^T \left[ \nabla h(X) \nabla h(X)^T \right]^{-1} h(y_j) \quad (4.21)$$

con  $X = [\hat{y}(t+1) \dots \hat{y}(t+10) \quad u(t) \dots u(t+10) \quad r(t) \dots r(t+10) \quad \Delta u(t) \dots \Delta u(t+10)]$

donde  $h(X)$  es la función que representa las restricciones del problema de optimización y  $\nabla h(X)$  su gradiente. Se presentan más detalles matemáticos del algoritmo en el anexo B y su programación en el anexo C.



## V.- APLICACIÓN A LA TURBINA A GAS.

En este capítulo se describen los modelos obtenidos para el simulador de la turbina a gas. Posteriormente, se presenta la implementación los controladores supervisores propuestos.

### 5.1 Modelo lineal.

#### 5.1.1 Bases de comparación

El modelo lineal es obtenido por mínimos cuadrados con tiempo de muestreo de 1 [seg]. Se consideran 1500 muestras para el conjunto de entrada y 1500 para validación. El error de validación considerado se presenta en la ecuación (3.49).

El modelo lineal para la turbina a gas está dado por:

$$\begin{aligned} & y(k) - 2.5159 y(k-1) + 2.4567 y(k-2) - 1.3471 y(k-3) - 0.5522 y(k-4) - 0.1868 y(k-5) \\ & - 0.0409 y(k-6) = \\ & 6.2351 \times 10^6 u(k-1) - 5.5616 \times 10^6 u(k-2) - 0.9325 \times 10^6 u(k-3) - 0.4204 \times 10^6 u(k-4) - \\ & 0.1614 \times 10^6 u(k-5) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde  $y(k)$  es la potencia y  $u(k)$  es el flujo de combustible.

En la figura 5.1 se aprecia el comportamiento del modelo lineal de la Turbina a gas con predicción a un paso.

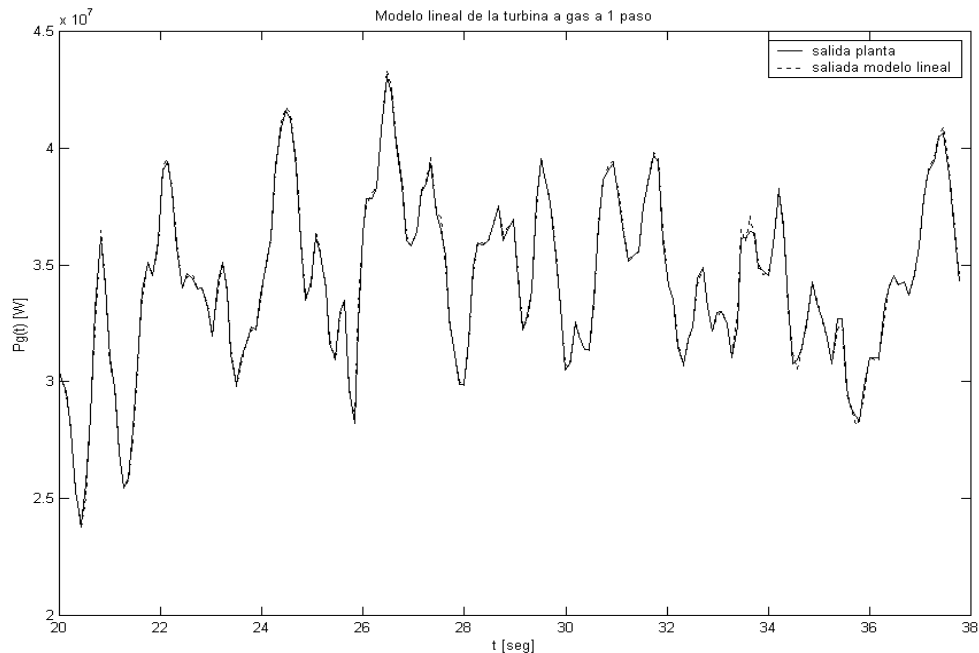


Figura 5.1 Modelo lineal de la turbina gas con predicción a un paso

En la figura 5.2 se aprecia el comportamiento del modelo lineal de la Turbina a gas con predicción a N pasos.

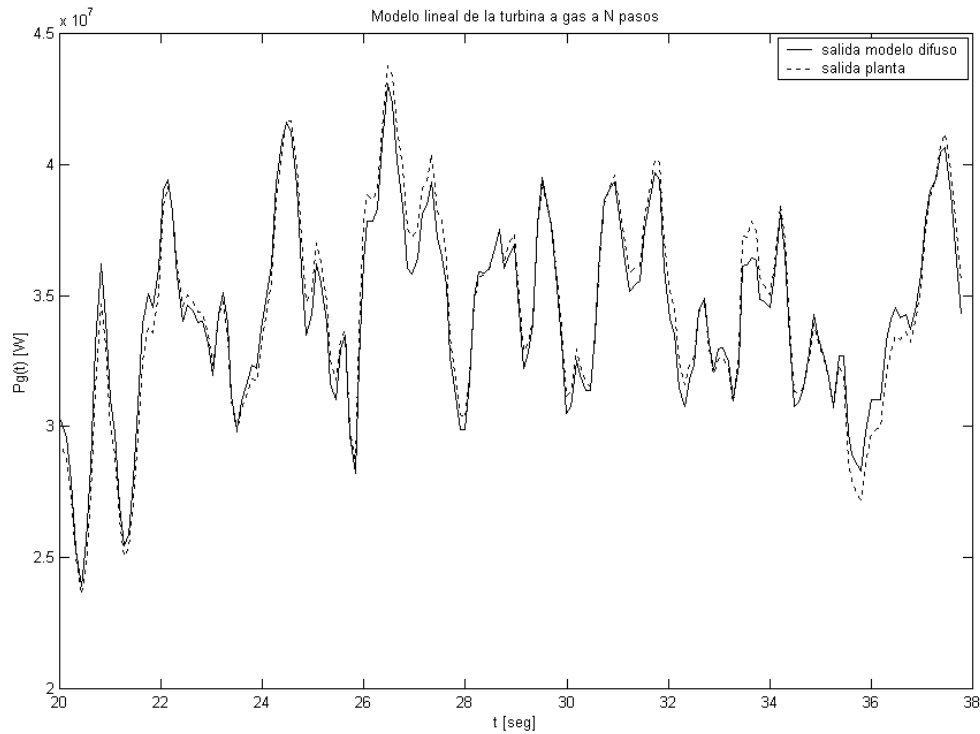


Figura 5.2 Modelo lineal de la turbina a gas con predicción a N pasos.

En la tabla 5.1 se muestran valores del error de validación, para la salida del modelo lineal de la turbina a gas. Por lo tanto se concluye que ambas predicciones entregan muy buenos resultados, incluso a 10 pasos.

Modelo	Error validación
lineal a 1 paso de la Turbina a gas	$2.6760 \times 10^5$
lineal a 10 pasos de la Turbina a gas	$3.9966 \times 10^6$

Tabla 5.1 Error de validación con modelación lineal.

## 5.2 Modelo difuso Takagi & Sugeno

Para obtener un modelo difuso Takagi & Sugeno para la turbina a gas, se realizó en primer lugar, un análisis de sensibilidad para identificar las variables de entrada más significativas. Se presenta el índice de sensibilidad en la figura 5.3

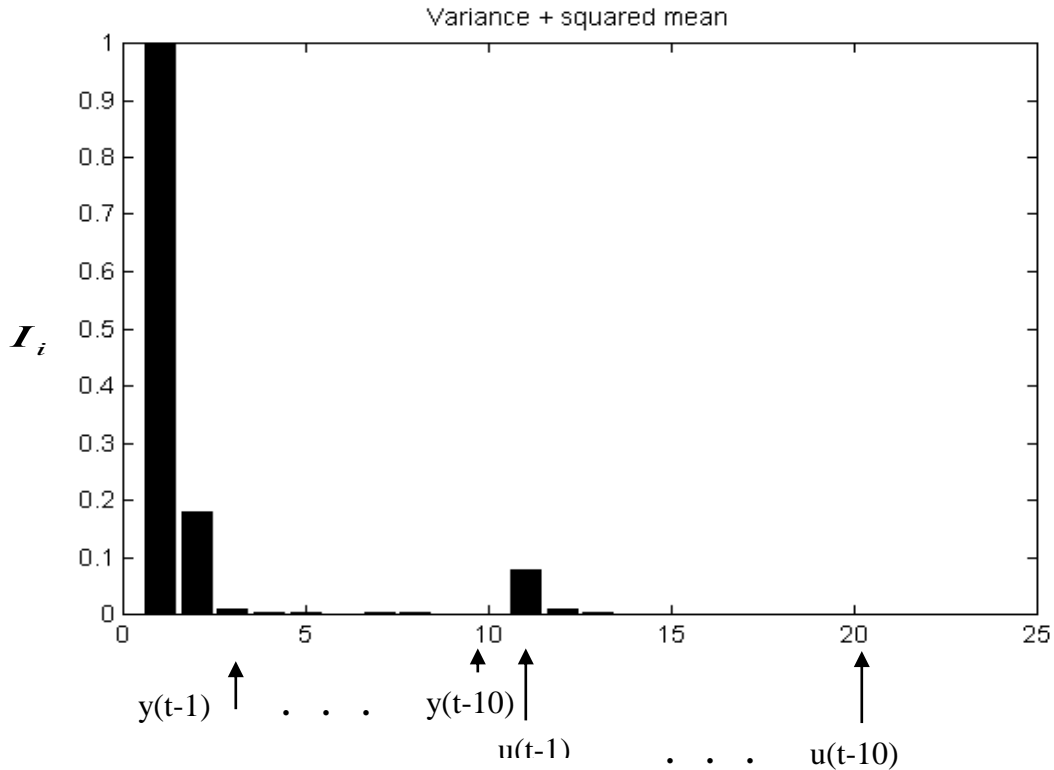


Figura 5.3 Índice de sensibilidad

La figura 5.3 muestra que los regresores más significativo son  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$ ,  $u(k-1)$  y  $u(k-2)$ . El error de validación es menor con el modelo reducido para la predicción a un paso y a  $N=10$  pasos según se aprecia en la tabla 5.2. También, se obtienen muy buenos resultados

Predicción a 1 paso	Variables de entrada	Error de validación
Modelo 1	$y(k-1) \dots y(k-10)$ $u(k-1) \dots u(k-10)$	$4.6486 \times 10^5$
Modelo 2	$y(k-1) y(k-2)$ $u(k-1) u(k-2)$	$2.1973 \times 10^5$

Predicción a N pasos	Variables de entrada	Error de validación
Modelo 1	$y(k-1) \dots y(k-10)$ $u(k-1) \dots u(k-10)$	$1.0610 \times 10^6$
Modelo 2	$y(k-1) y(k-2)$ $u(k-1) u(k-2)$	$6.0209 \times 10^5$

Tabla 5.2 Error de validación con modelación difusa

En la figura 5.4 se aprecia el comportamiento del modelo difuso Takagi & Sugeno para la turbina a gas con predicción a un paso.

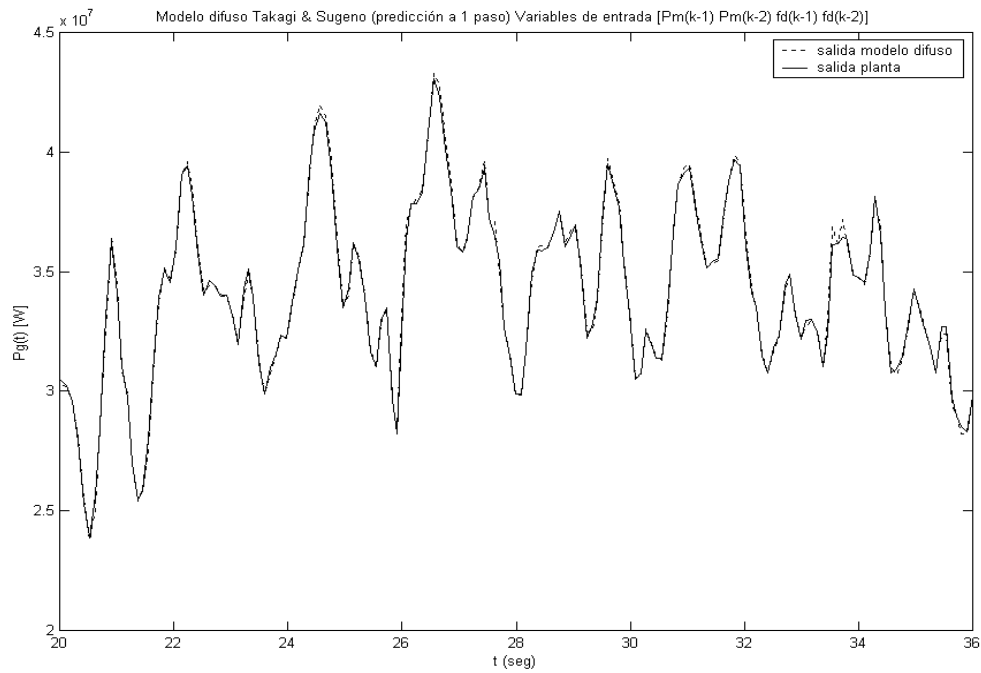


Figura 5.4 Modelo difuso T& S de la Turbina a gas con predicción a un paso.

En la figura 5.5 se aprecia el comportamiento del modelo difuso Takagi & Sugeno de la Turbina a gas con predicción a N=10 pasos.

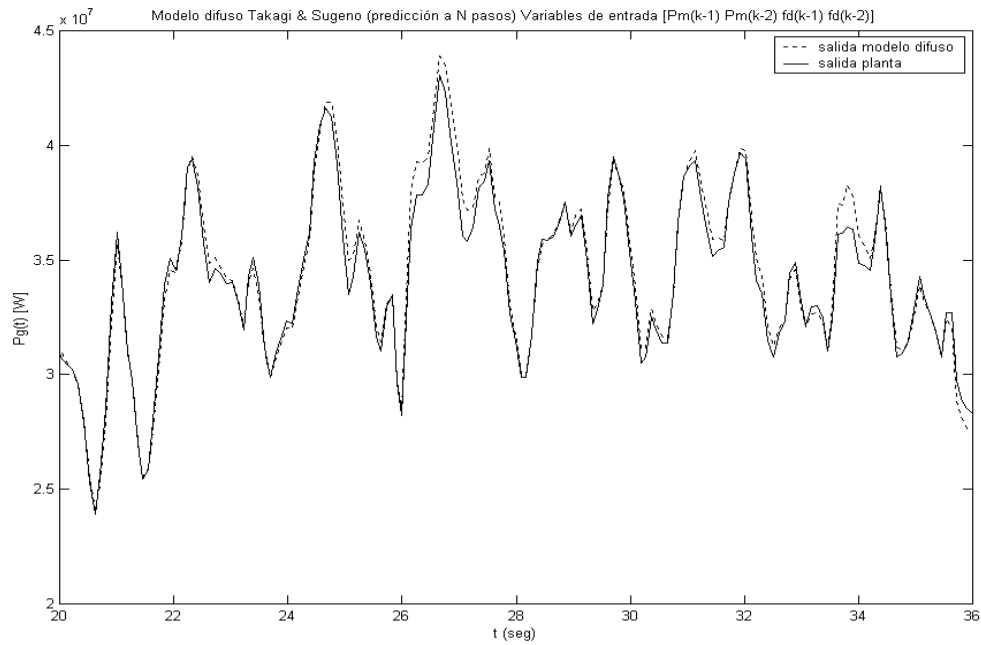


Figura 5.5 Modelo difuso T& S de la Turbina a gas con predicción a N=10 pasos.

En este caso el modelo Takagi & Sugeno entrega 2 reglas. Los parámetros de las funciones de pertenencias  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$  (  $i=1,2$  ;  $j = 1,2,3$  y  $4$  ) de la ecuación (3.21) se presentan en la tabla 5.3:

$\alpha_{ij}$	$3.4868 \times 10^7$	$3.2571 \times 10^7$	5.9137	3.0270
	$0.5796 \times 10^7$	$3.5816 \times 10^7$	5.1151	5.1040
$\beta_{ij}$	$3.2492 \times 10^7$	$3.3201 \times 10^7$	0.6277	0.5441
	$3.4464 \times 10^7$	$3.4454 \times 10^7$	0.6263	0.6280

Tabla 5.3 Parámetros de las funciones de pertenencia.

Los parámetros de las consecuencias,  $\gamma_{ri}$  (  $r=1,2$  ;  $i = 0,1,2,3$  y  $4$  ) se presentan en la tabla 5.4:

$\gamma_{r1}$	$\gamma_{r2}$	$\gamma_{r3}$ [Ws/Kg]	$\gamma_{r4}$ [Ws/Kg]	$\gamma_{r0}$ [W]
1.0660	-0.2473	$6.2053 \times 10^6$	$3.9484 \times 10^6$	$8.7503 \times 10^6$
1.1600	-0.3041	$6.2036 \times 10^6$	$2.5081 \times 10^6$	$-6.9744 \times 10^6$

Tabla 5.4 Parámetros de las consecuencias.

El modelo difuso Takagi & Sugeno para la turbina a gas es:

$$\begin{aligned}
 R^1 : & \text{ Si } (y_{k-1} \text{ es } A_1^1) \text{ y } (y_{k-2} \text{ es } A_2^1) \text{ y } (u_{k-1} \text{ es } A_3^1) \text{ y } (u_{k-2} \text{ es } A_4^2) \\
 & \text{ entonces } \quad y_k^1 = \gamma_{11} y_{k-1} + \gamma_{12} y_{k-2} + \gamma_{13} u_{k-1} + \gamma_{14} u_{k-2} + \gamma_{10} \\
 R^2 : & \text{ Si } (y_{k-1} \text{ es } A_1^2) \text{ y } (y_{k-2} \text{ es } A_2^2) \text{ y } (u_{k-1} \text{ es } A_3^2) \text{ y } (u_{k-2} \text{ es } A_4^2) \\
 & \text{ entonces } \quad y_k^2 = \gamma_{21} y_{k-1} + \gamma_{22} y_{k-2} + \gamma_{23} u_{k-1} + \gamma_{24} u_{k-2} + \gamma_{20}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

La salida del modelo difuso es:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_k &= \sum_{r=1}^2 \left[ \hat{W}_r^{(k)} (\gamma_{r1} y_{k-1} + \gamma_{r2} y_{k-2} + \gamma_{r3} u_{k-1} + \gamma_{r4} u_{k-2} + \gamma_{r0}) \right] \\
 &= \left( \sum_{r=1}^2 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r1} \right) y_{k-1} + \left( \sum_{r=1}^2 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r2} \right) y_{k-2} + \left( \sum_{r=1}^2 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r3} \right) u_{k-1} + \left( \sum_{r=1}^2 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r4} \right) u_{k-2} + \left( \sum_{r=1}^2 \hat{W}_r^{(k)} \gamma_{r0} \right) \\
 &= d_{k1} y_{k-1} + d_{k2} y_{k-2} + d_{k3} u_{k-1} + d_{k4} u_{k-2} + d_{k0}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Finalmente los modelos difusos generados entregan un error menor que los modelos lineales. Se obtuvo un modelo difuso para la turbina a gas con predicción a 10 pasos que mejoró un 15% el error con respecto al obtenido con una modelación lineal, esto confirma las bondades de la identificación difusa Takagi & Sugeno para representar las no linealidades del proceso. Esto se aprecia en la tabla 5.2 y los programas utilizados se presentan en el anexo C.

### 5.3 Estrategia de control supervisor

Para obtener un set-point óptimo dinámico para el sistema regulatorio de la turbina a gas es necesario solucionar un problema de optimización cuya función objetivo y restricciones se detallan a continuación.

#### 5.3.1 Función objetivo

Se propone una función objetivo que considera un objetivo económico y un objetivo a nivel regulatorio.

$$\text{Máx. } J = J_{Cp} - \eta J_{Cr} \quad (5.4)$$

donde

$J_{Cp}$  incluye la función utilidad de la planta.

$J_{Cr}$  incluye error de trayectoria y esfuerzo de acción de control.

$\eta$  es un factor de peso.

La función objetivo económica está dada por:

$$J_{Cp} = \sum_{i=1}^N C_p P_g(t+i-1) - \sum_{i=1}^N C_f F_d(t+i-1) + CF \quad (5.5)$$

donde

$C_p$  es el precio de la potencia.

$C_f$  es el costo del combustible.

$CF$  es el costo fijo.

La función objetivo regulatoria está dada por.

$$J_{Cr} = C_{rPg} \left( \sum_{j=1}^N (\hat{P}_g(t+j) - P_g^*)^2 + \lambda_{Fd} \sum_{i=1}^N \Delta F_d^2(t+i-1) \right) \quad (5.6)$$

donde

$C_{rPg}$  es el costo del nivel regulatorio.

$\lambda_{Fd}$  es el factor de peso.

Además  $\hat{P}_T(t+j)$  es la  $j$ -ésima predicción de la potencia mecánica,  $P_T^*$  es la trayectoria de set-point externa.

En este caso  $u(t) = f_d(t)$ ,  $y(t) = P_m(t)$  y  $r^*(t) = P_m^*(t)$ , por lo cual, considerando el horizonte de predicción  $N=10$ , las variables de optimización son:

$$\begin{aligned} & \hat{y}(t+1), \dots, \hat{y}(t+10), u(t), u(t+1), \dots, u(t+10), r(t), r(t+1), \dots, r(t+10), \\ & \Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+10) \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.3.2 Modelo del nivel regulatorio

Considerando un controlador PI, se tiene:

$$f_d(s) = \left( k_p + \frac{k_i}{s} \right) (P_m^r(s) - P_m(s)) \quad (5.8)$$

con  $k_p = 1.3629 \times 10^9$  la ganancia proporcional,  $k_i = 2.2715 \times 10^9$  la ganancia del integrador,  $P_m^r(t)$  el set-point de la potencia mecánica. El modelo discreto para el controlador PI es:

$$A_c(q^{-1})f_d(t) = B_{cr}(q^{-1})P_m^r(t) + B_{cy}(q^{-1})P_m(t) \quad (5.9)$$

donde los polinomios son:

$$A_c(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad (5.10)$$

$$B_{cr}(q^{-1}) = \alpha + \beta q^{-1}$$

$$B_{cy}(q^{-1}) = -(\alpha + \beta q^{-1})$$

$$\text{con } \alpha = \frac{T_s k_i}{2} + k_p, \quad \beta = \frac{T_s k_i}{2} - k_p \quad (5.11)$$

Dependiendo de las ecuaciones del proceso, utilizadas como restricciones para el problema de optimización, se logra obtener tres soluciones para el problema del control supervisor. La primera considera el modelo lineal, la segunda el modelo difuso linealizado y la última un modelo difuso.

### 5.3.3 Modelo lineal del proceso

El modelo lineal obtenido con un muestreo de 1 [s] es:

$$A(q^{-1})P_m(t) = B(q^{-1})f_d(t) + e(t) \quad (5.12)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + a_3 q^{-3} + a_4 q^{-4} + a_5 q^{-5} + a_6 q^{-6} \quad (5.13)$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + b_3 q^{-3} + b_4 q^{-4} + b_5 q^{-5}$$

$$\text{con } a_1 = -2.5159, \quad a_2 = 2.4567, \quad a_3 = -1.3471, \quad a_4 = -0.5522, \quad a_5 = -0.1868,$$

$$a_6 = -0.0409$$

$$b_1 = 6.2351 \times 10^6, \quad b_2 = -5.5616 \times 10^6, \quad b_3 = -0.9325 \times 10^6, \quad b_4 = 0.1614 \times 10^6,$$

$$b_5 = 0.1614 \times 10^6$$

### Predicciones lineales

Suponiendo  $e(t)$  ruido blanco, tenemos que  $\mathbf{E}(e(t+j))=0$ , con  $\mathbf{E}$  operador esperanza, las restricciones para la predicción de las variables controladas, usando el modelo del proceso, son:

$$\hat{y}(t+j) + a_1\hat{y}(t+j-1) + \dots + a_6\hat{y}(t+j-6) - b_1u(t+j-1) - \dots - b_5u(t+j-5) = 0 \quad (5.14)$$

para  $j = 1, \dots, 10$

Las restricciones para la predicción de las variables controladas como función de los incrementos de las variables manipuladas son:

$$\hat{y}(t+j) + (a_i - 1)\hat{y}(t+j-1) + (a_2 - a_1)\hat{y}(t+j-2) + \dots + (a_6 - a_5)\hat{y}(t+j-6) - a_6\hat{y}(t+j-7) - b_1\Delta u(t+j-1) - \dots - b_5\Delta u(t+j-5) = 0$$

para  $j = 1, \dots, 10$

(5.15)

Las restricciones para las variables manipuladas, usando el modelo del nivel regulatorio y reemplazando  $u(t)$  por  $f_d(t)$ ,  $P_m(t)$  por  $y(t)$  y  $P_m^*(t)$  por  $r(t)$  son:

$$u(t+i-1) - u(t+i-2) - \alpha r(t+i-1) - \beta r(t+i-2) + \alpha\hat{y}(t+i-1) + \beta\hat{y}(t+i-2) = 0 \quad (5.16)$$

para  $i = 1, \dots, 11$

Además las restricciones para los incrementos de las variables manipuladas son:

$$\Delta u(t+i-1) - \Delta u(t+i-2) - \alpha r(t+i-1) + (\alpha - \beta)r(t+i-2) + \beta r(t+i-3) + \alpha\hat{y}(t+i-1) + (\beta - \alpha)\hat{y}(t+i-2) - \beta\hat{y}(t+i-3) = 0$$

para  $i = 1, \dots, 11$

(5.17)

se incluye también las siguientes restricciones de límite inferior para  $u(t)$ .

$$u(t+i-1) \geq 0 \quad (5.18)$$

para  $i = 1, \dots, 11$

#### **5.3.4 Modelo difuso linelizado del proceso**

El modelo difuso linelizado se realiza con modelación difusa de Takagi & Sugeno ecuación (5.3).

En este caso  $y(t) = P_m(t)$  y  $u(t) = f_d(t)$ . Las ecuaciones no lineales del proceso se plantean a continuación.



El grado de validez de la regla es :

$$w^i(y_{k-1}, y_{k-2}, u_{k-1}, u_{k-2}) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{i1}(y_{k-1}-\beta_{i1}))^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{i2}(y_{k-2}-\beta_{i2}))^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{i3}(u_{k-1}-\beta_{i3}))^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{i4}(u_{k-2}-\beta_{i4}))^2} \quad (5.19)$$

$i = 1, 2$

Los parámetros de la salida del modelo difuso son:

$$d^l(y_{k-1}, y_{k-2}, u_{k-1}, u_{k-2}) = \frac{w^l(y_{k-1}, y_{k-2}, u_{k-1}, u_{k-2})\gamma_{1l} + w^2(y_{k-1}, y_{k-2}, u_{k-1}, u_{k-2})\gamma_{2l}}{w^l(y_{k-1}, y_{k-2}, u_{k-1}, u_{k-2}) + w^2(y_{k-1}, y_{k-2}, u_{k-1}, u_{k-2})} \quad (5.20)$$

$l = 1, \dots, 5$

### Predicciones con modelo difuso linealizado

Las predicciones se calculan con las ecuaciones (5.3) con un horizonte de predicción de 10 pasos del modelo difuso Takagi & Sugeno

$$y_{k+j} = d^1 y_{k+j-1} + d^2 y_{k+j-2} + d^3 u_{k+j-1} + d^4 u_{k+j-2} + d^5 \quad \text{con } j = 1, \dots, 10 \quad (5.21)$$

$$\text{con } d^l = d^l(y_{k+j-1}, y_{k+j-2}, u_{k+j-1}, u_{k+j-2}) \quad l = 1, \dots, 5 \quad j = 1 \quad (5.22)$$

En el modelo difuso linealizado se consideran los parámetros constantes, dependientes de la primera evaluación de los regresores (5.22).

### **5.3.5 Modelo difuso global del proceso**

En el modelo difuso global se utilizan las mismas predicciones usadas en el modelo difuso linealizado (5.20), (5.21), (5.22) pero con la diferencia que los parámetros se modifican en cada paso de predicción.

### Predicciones con modelo difuso global

$$y_{k+j} = d^1 y_{k+j-1} + d^2 y_{k+j-2} + d^3 u_{k+j-1} + d^4 u_{k+j-2} + d^5 \quad \text{con } j = 1, \dots, 10 \quad (5.23)$$

$$\text{siendo } d^l = d^l(y_{k+j-1}, y_{k+j-2}, u_{k+j-1}, u_{k+j-2}) \quad l = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 10 \quad (5.24)$$

### **5.3.6 Problema de optimización dinámico**

En este caso, la función objetivo descrita en la ecuación (5.4) se utiliza con las siguientes variables de optimización.

$$X = [\hat{y}(t+1) \quad \dots \quad \hat{y}(t+10) \quad u(t) \quad u(t+1) \quad \dots \quad u(t+10) \quad r(t) \quad r(t+1) \quad \dots \quad r(t+10) \\ \Delta u(t) \quad \Delta u(t+1) \quad \dots \quad \Delta u(t+10)] \quad (5.25)$$

donde

$$\begin{aligned}
C_p &= 10 \text{ [\$$/MW]} \text{ precio de la potencia} \\
C_f &= 100 \text{ [\$$/kg]} \text{ costo del combustible} \\
C_{rPg} &= 10^{-11} \text{ costo del nivel regulatorio} \\
\lambda_{Fd} &= 10^{18} \text{ factor de peso} \\
N &= 10 \\
\eta &= \text{factor de peso.}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Por lo tanto se considera el problema de optimización dado por:

$$\underset{X}{Max} \quad \sum_{i=1}^N C_p y(t+i-1) - \sum_{i=1}^N C_f u(t+i-1) + \eta C_{rPg} \left( \sum_{j=1}^N (y(t+j) - r^*)^2 + \lambda_{Fd} \sum_{i=1}^N \Delta u^2(t+i-1) \right) \tag{5.27}$$

Además, las restricciones asociadas al nivel regulatorio son:

$$\begin{aligned}
&\Delta u(t+i-1) - \Delta u(t+i-2) \\
&- \alpha r(t+i-1) + (\alpha - \beta)r(t+i-2) + \beta r(t+i-3) \\
&+ \alpha \hat{y}(t+i-1) + (\beta - \alpha)\hat{y}(t+i-2) - \beta \hat{y}(t+i-3) = 0 \\
&\text{para } i = 1, \dots, 11
\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
&u(t+i-1) \geq 0 \\
&\text{para } i = 1, \dots, 11
\end{aligned} \tag{5.29}$$

### Restricciones asociadas al modelo lineal

Para el caso lineal se incluyen las siguientes restricciones y se resuelve por programación cuadrática.

$$\begin{aligned}
&\hat{y}(t+j) + (a_1 - 1)\hat{y}(t+j-1) + (a_2 - a_1)\hat{y}(t+j-2) + \dots + (a_6 - a_5)\hat{y}(t+j-6) \\
&- a_6 \hat{y}(t+j-7) - b_1 \Delta u(t+j-1) - \dots - b_4 \Delta u(t+j-4) = 0 \\
&\text{para } j = 1, \dots, 10
\end{aligned} \tag{5.30}$$

### Restricciones asociadas al modelo difuso linealizado

Para el modelo difuso linealizado se incluyen las restricciones semejantes a las ecuaciones (5.30), pero los parámetros usados son los coeficientes del modelo difuso Takagi & Sugeno de la ecuación (5.22). En la siguiente ecuación se muestran las ecuaciones del modelo difuso linealizado y se resuelve por programación cuadrática.

$$\begin{aligned}
&\hat{y}(k+j) + (d_1 - 1)\hat{y}(k+j-1) + (d_2 - d_1)\hat{y}(k+j-2) \\
&- d_3 \Delta u(k+j-1) - d_4 \Delta u(k+j-2) = 0 \\
&\text{para } j = 1, \dots, 10
\end{aligned} \tag{5.31}$$

### Restricciones asociadas al modelo difuso global

Para el modelo difuso global se incluyen las siguientes restricciones. Se resuelve por el método de optimización del gradiente proyectado, debido a que las restricciones son no lineales.

$$-y_{k+j} + d^1 y_{k+j-1} + d^2 y_{k+j-2} + d^3 u_{k+j-1} + d^4 u_{k+j-2} + d^5 = 0 \quad \text{con } j=1, \dots, 10 \quad (5.32)$$

$$\text{siendo } d^l = d^l(y_{k+j-1}, y_{k+j-2}, u_{k+j-1}, u_{k+j-2}) \quad l=1, \dots, 5 \quad j=1, \dots, 10 \quad (5.33)$$

### 5.4 Control regulatorio con set-point óptimo estático

El control supervisor propuesto es comparado con una estrategia de control puramente regulatoria, donde el set-point óptimo es constante y calculado a partir de la optimización estática de la función objetivo definida en (5.4) usando el modelo estático del proceso que se detalla a continuación. Es decir:

$$J = C_p P_g - C_f F_d + C_{rPg} (P_g - P_g^*)^2 + \lambda \Delta F_d^2 \quad (5.34)$$

ya que  $\lambda \Delta F_d \rightarrow 0$

Considerando el controlador PI se tiene en estado estacionario la siguiente relación:

$$P_g = P_g^r \quad (5.35)$$

El modelo estático es:

$$P_g = k_{Pg} F_d \quad (5.36)$$

Por lo tanto, la función objetivo está dada por:

$$J = C_p P_g^r - C_f \frac{P_g^r}{K_{Pg}} + C_{rPg} (P_g^r - P_g^*)^2 \quad (5.37)$$

Realizando la optimización estática, se tiene:

$$\frac{\partial J}{\partial P_g^r} = 0 \quad \Rightarrow \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial J}{\partial P_g^r} = C_p - \frac{C_f}{k_{Pg}} + 2C_{rPg} (P_g^r - P_g^*) = 0 \quad (5.39)$$

Entonces, el set-point óptimo estático está dado por:

$$P_g^r = P_g^* - \frac{C_p}{2C_{rPg}} + \frac{C_f}{2k_{Pg}C_{rPg}} = P_g^* - \frac{C_p K_{Pg} - C_f}{2C_{rPg}k_{Pg}} = 3.347 * 10^7 \quad (5.40)$$

## 5.5 Resultados por simulación

A continuación se presentan los resultados de los distintos controladores supervisores obtenidos. Se muestran resultados para el controlador supervisor lineal, el controlador supervisor difuso linealizado y el controlador supervisor difuso global. Para realizar los controladores supervisores se utilizó Matlab-Simulink, cuyos algoritmos se muestran en el anexo C.

Para el análisis comparativo, se considera una perturbación dada por los cambios de temperatura del flujo másico de aire dentro del compresor, para producir condiciones de operación diferentes. Los valores de la perturbación ( $T_{cin}$ ) se mueven entre 276 y 294 [°K] para 450 segundos. La perturbación se aprecia en la figura 5.6

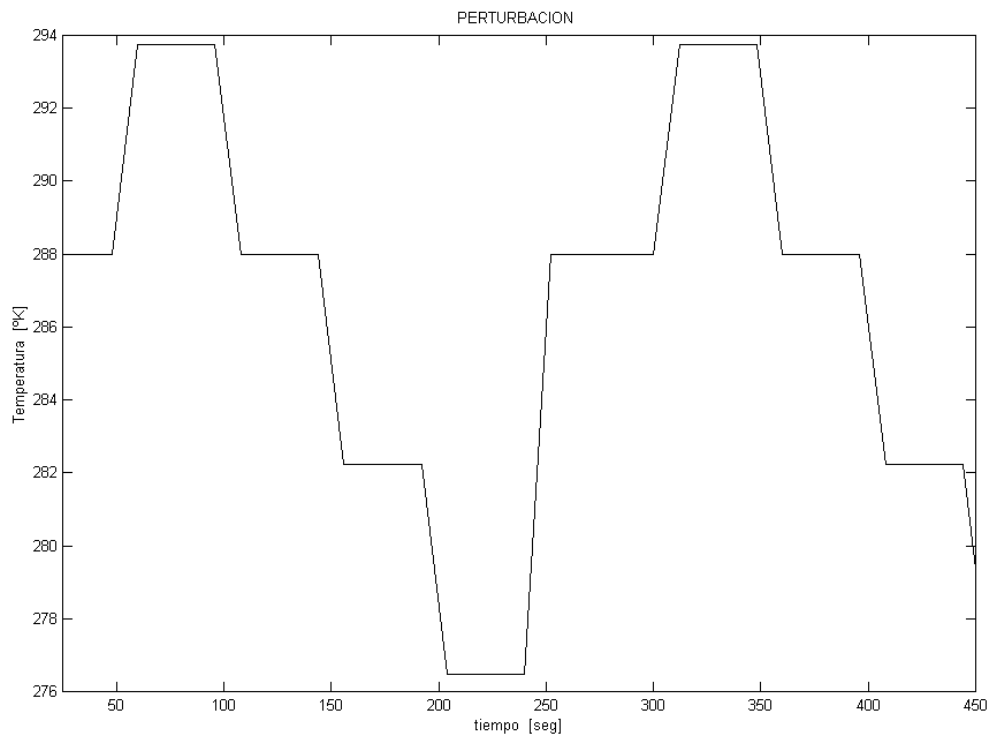


Figura 5.6 Perturbación de la temperatura en el flujo másico de aire.

En la figura 5.7 se muestra la respuesta de lazo cerrado de la turbina a gas, con set-point constante, con el controlador supervisor óptimo lineal y con el controlador supervisor óptimo difuso linealizado con  $\eta$  igual 1.

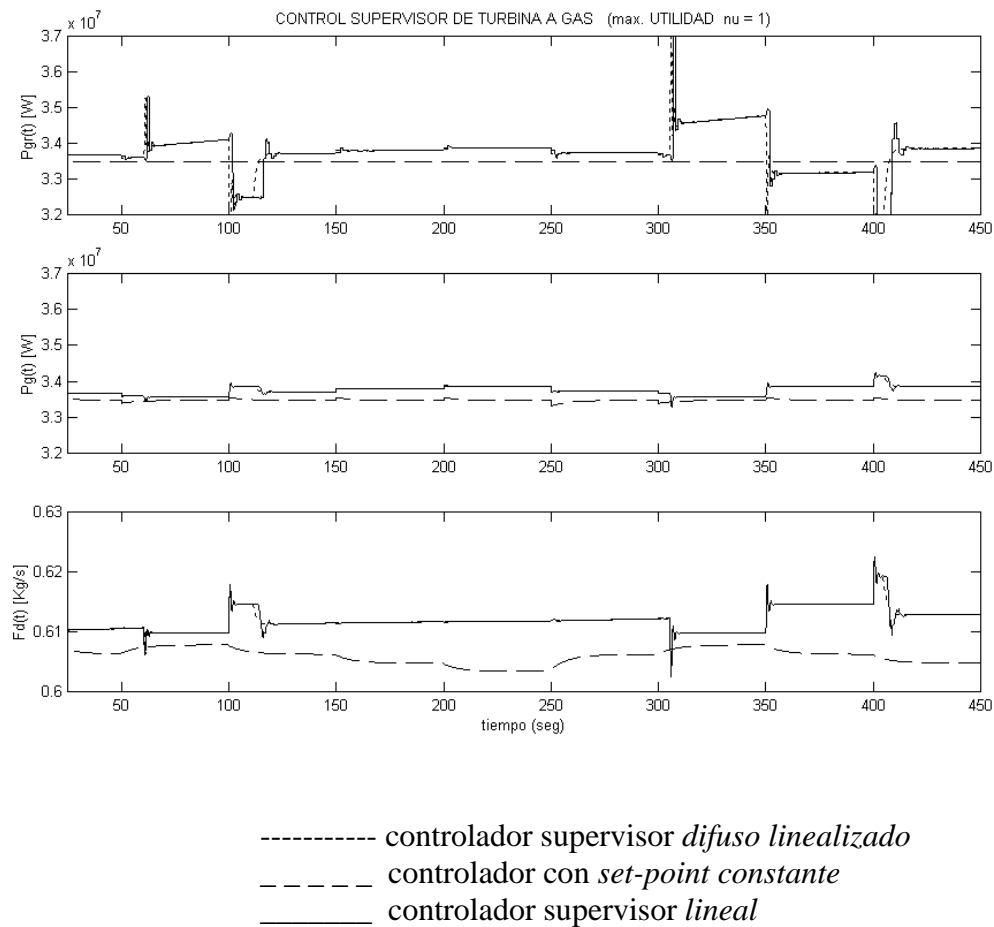


Figura 5.7 Respuesta de lazo cerrado ( $\eta = 1$ )

En la figura 5.7 se aprecia una mínima diferencia entre los resultados del controlador supervisor lineal y el controlador supervisor difuso linealizado, esto es debido a que al linealizar el modelo difuso se disminuye notablemente sus características no lineales de predicción.

Se aprecia como la energía utilizada en los dos controladores supervisores es mayor que la del controlador con set-point constante, debido a que se maximiza dinámicamente la utilidad que incluye los beneficios por la cantidad de energía generada.

En la figura 5.8 se muestra la respuesta de lazo cerrado para la turbina a gas con set-point constante, con el controlador supervisor óptimo lineal y con el controlador supervisor óptimo difuso linealizado con  $\eta$  igual 0.5.

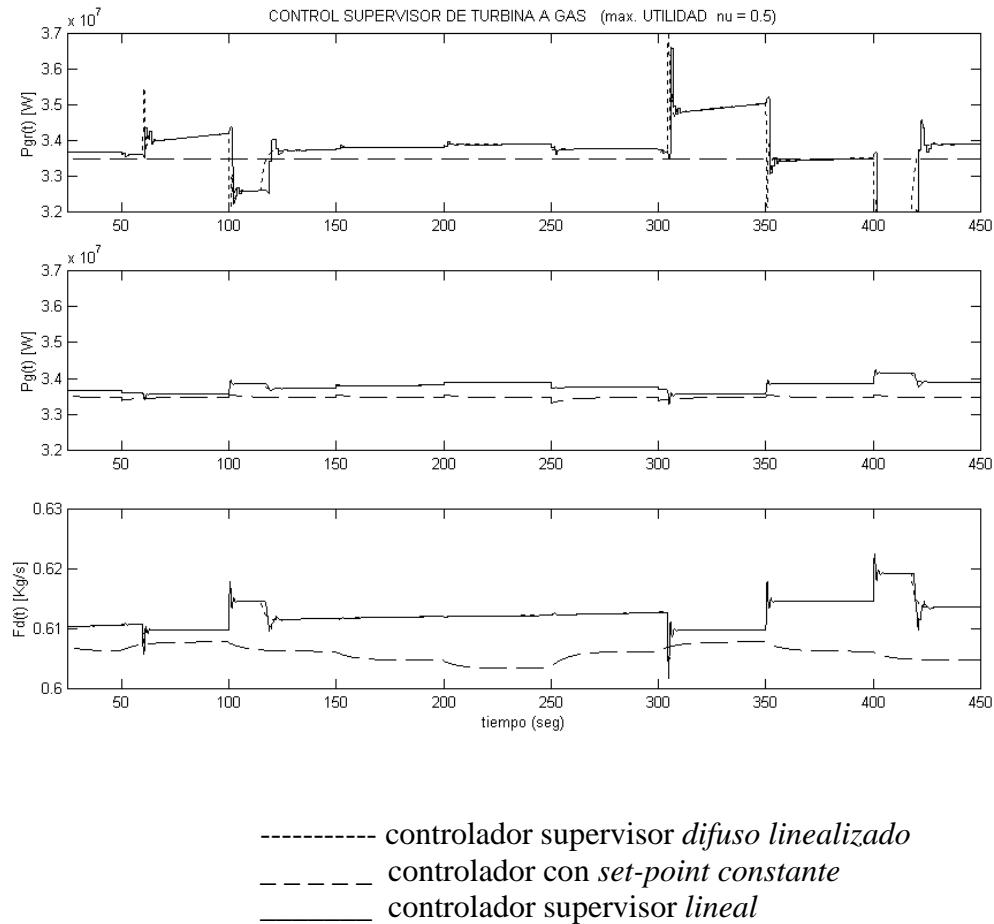


Figura 5.8 Respuesta de lazo cerrado ( $\eta = 0.5$ )

También, se aprecia en la figura 5.8 una mínima diferencia entre los resultados del controlador supervisor lineal y el controlador supervisor difuso linealizado, debido al mismo argumento anterior.

En la figura 5.9 se muestra en detalle la respuesta de lazo cerrado para la turbina a gas con el set-point constante, con el controlador supervisor óptimo lineal y con el controlador supervisor óptimo difuso linealizado con  $\eta$  igual 1. La respuesta transiente del controlador difuso linealizado es un poco mejor que la respuesta del controlador lineal.

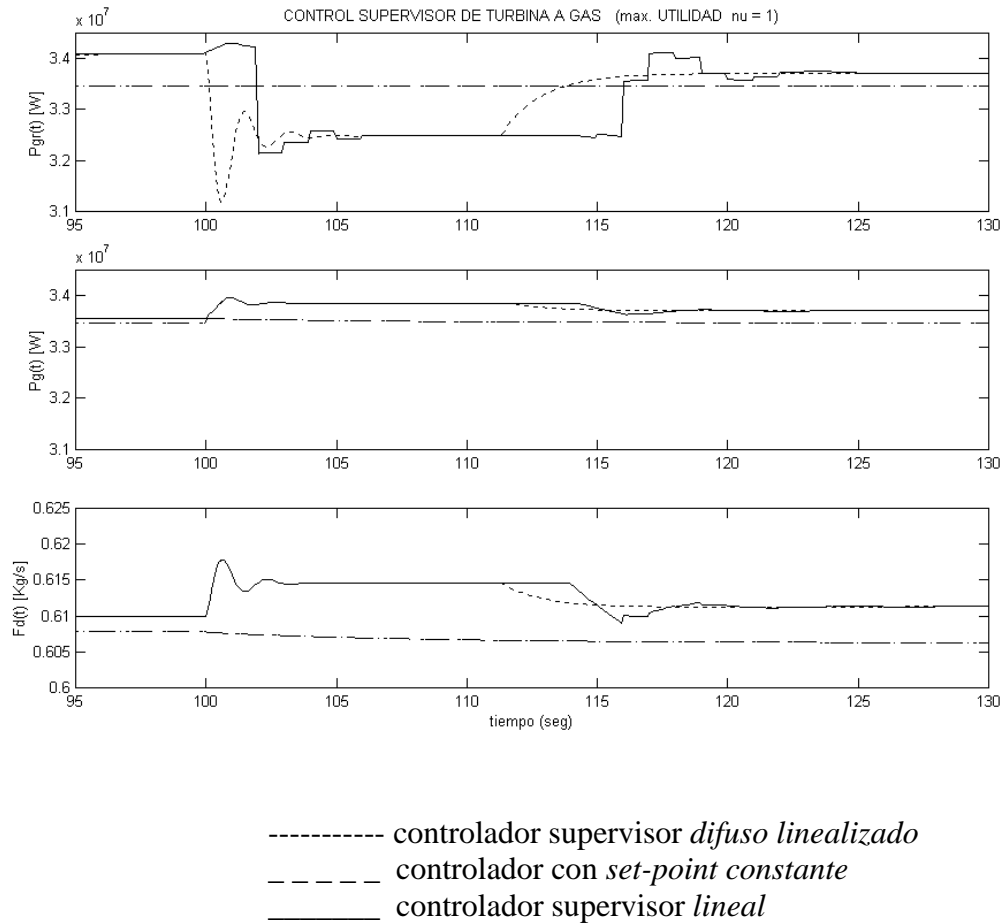


Figura 5.9 Detalle de la respuesta de lazo cerrado ( $\eta = 1$ )

En la figura 5.9 se puede observar las menores oscilaciones obtenida por el controlador supervisor difuso ya que este responde mejor al proceso que es no lineal.



En la figura 5.10 se muestra la respuesta de lazo cerrado para la turbina a gas con set-point constante, con el controlador supervisor óptimo lineal y con el controlador supervisor óptimo difuso global con  $\eta$  igual 1.

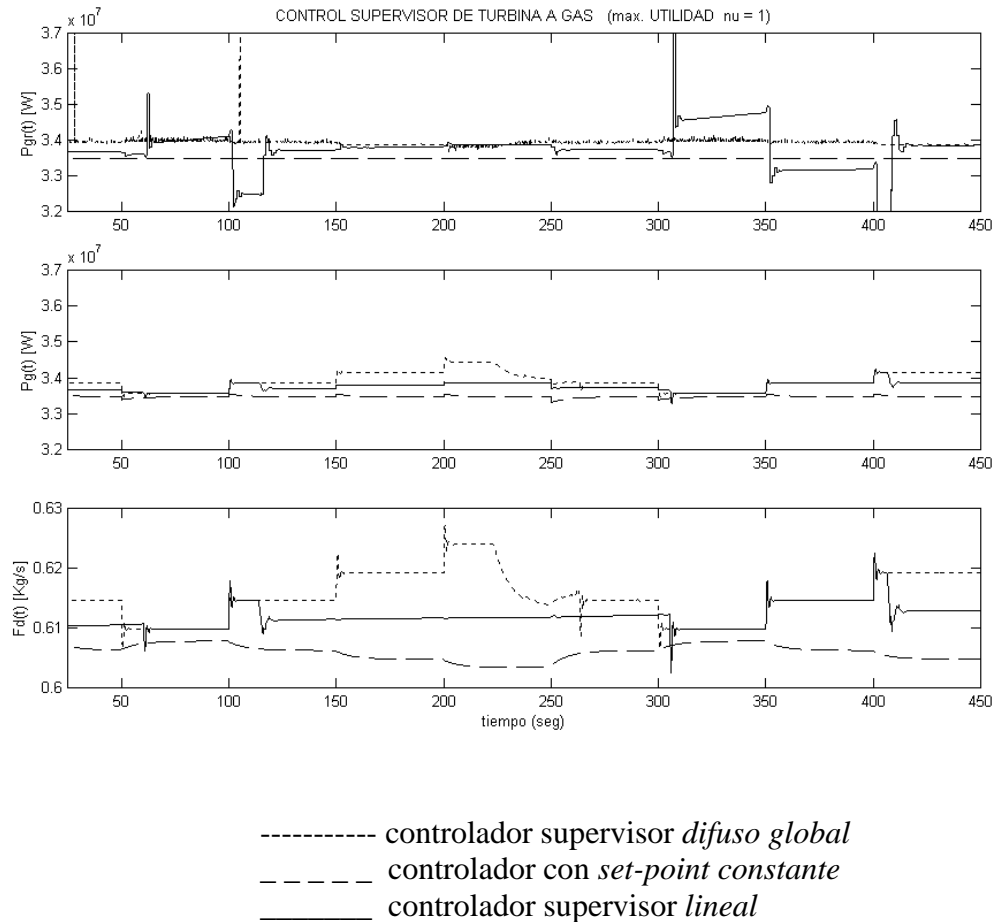


Figura 5.10 Respuesta de lazo cerrado ( $\eta = 1$ )

En la figura 5.10 se aprecia como la energía utilizada en los dos controladores supervisores es mayor que la del controlador con set-point constante y mucho mayor en el controlador difuso global. Esto último se debe a que se maximiza dinámicamente la utilidad que incluye los beneficios por la cantidad de energía generada.

En la figura 5.11 se muestra la respuesta de lazo cerrado para la turbina a gas con set-point constante, con el controlador supervisor óptimo lineal y con el controlador supervisor óptimo difuso global con  $\eta$  igual 0.5.

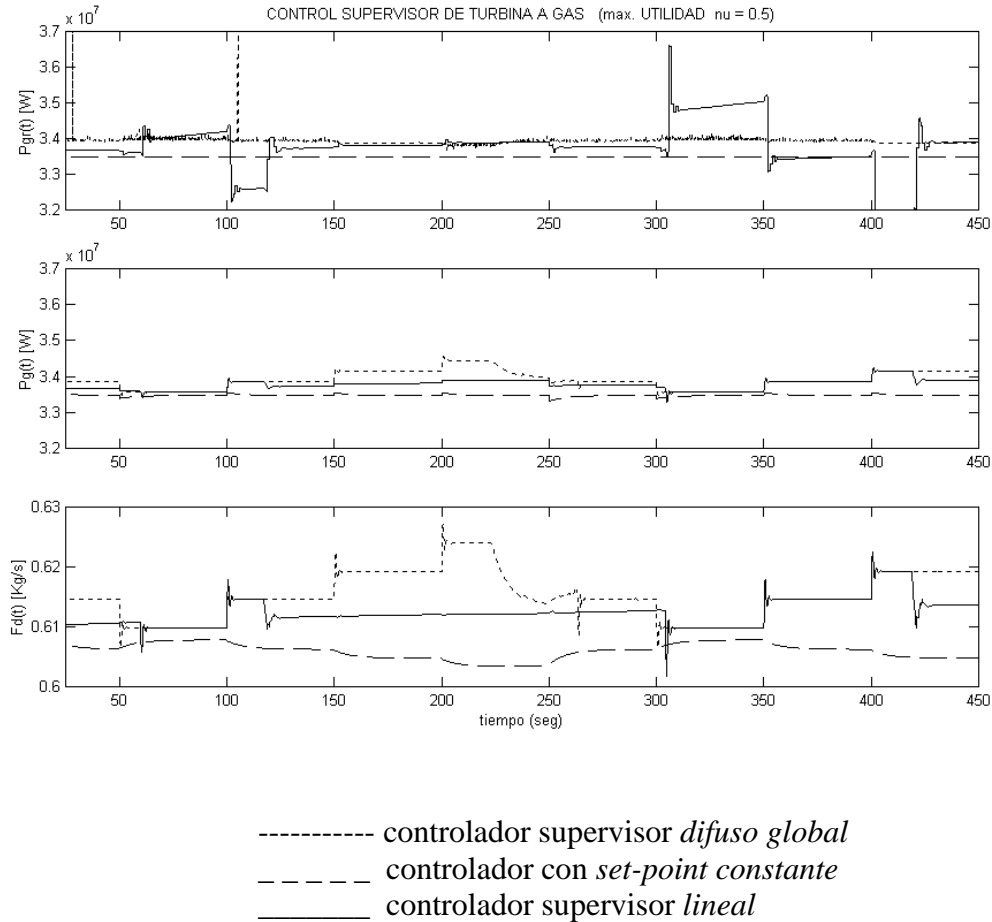


Figura 5.11 Respuesta de lazo cerrado ( $\eta = 0.5$ )

En la figura 5.11 también se aprecia como la energía utilizada en los dos controladores supervisores es mayor que la del controlador con set-point constante y mucho mayor en el controlador difuso global.

### 5.5.1 Análisis de datos

En la tabla 5.3 y 5.4 son evaluados los valores medios de las funciones objetivos (ecuación (5.25)) usando los datos de las figuras 5.6, 5.7, 5.9 y 5.10. También el beneficio con respecto al set point constante es definido como:

$$beneficio = \left( 100 - \frac{J_{CP \text{ con NIVEL SUPERVISOR}}}{J_{CP \text{ con SET-POINTS CONSTANTE}}} \cdot 100 \right) \% \quad (5.36)$$

El costo operacional decrece usando un nivel supervisor, sin embargo se deteriora el objetivo regulatorio. Hay una compensación entre el criterio económico  $J_{cp}$  y el criterio regulatorio  $J_{cr}$ .

$J = J_{cp} - \eta J_{cr}$ horizonte = 10pasos	$\eta = 1$			
	Nivel Supervisor con set-point variable			Set-point constante
	<i>Lineal</i>	<i>Difuso linealizado</i>	<i>Difuso global</i>	
$J_{cp}$ [\$\$]	$3.3156 \times 10^3$	$3.3157 \times 10^3$	$3.3324 \times 10^3$	$3.2863 \times 10^3$
$J_{cr}$ [\$\$]	4.8115	4.5384	11.4005	15.2725
$J$ [\$\$]	$3.3108 \times 10^3$	$3.3112 \times 10^3$	$3.3210 \times 10^3$	$3.2717 \times 10^3$
Beneficio c/r set-point constante.	<b>0.8837%</b>	<b>0.8867%</b>	<b>1.3834%</b>	

Tabla 5.3 Valores medios de los objetivos regulatorios y económicos (  $\eta=1$  ).

$J = J_{cp} - \eta J_{cr}$ horizonte = 10pasos	$\eta = 0.5$			
	Nivel Supervisor con set-point variable			Set-point constante
	<i>Lineal</i>	<i>Difuso linealizado</i>	<i>Difuso global</i>	
$J_{cp}$ [\$\$]	$3.3178 \times 10^3$	$3.3179 \times 10^3$	$3.3359 \times 10^3$	$3.2863 \times 10^3$
$J_{cr}$ [\$\$]	5.1597	4.9040	12.3005	15.2725
$J$ [\$\$]	$3.3153 \times 10^3$	$3.3155 \times 10^3$	$3.3236 \times 10^3$	$3.2717 \times 10^3$
Beneficio c/r set-point constante.	<b>0.9494%</b>	<b>0.9524%</b>	<b>1.4869%</b>	

Tabla 5.4 Valores medios de los objetivos regulatorios y económicos (  $\eta=0.5$  ).

Se aprecia en la tabla 5.4, que con  $\eta = 0.5$ , el beneficio aumenta cerca del 7 % pues se pondera menos el objetivo regulatorio ( $J_{Cr}$ ) y se privilegia más el objetivo económico de la utilidad ( $J_{Cp}$ ).

Las tablas 5.3 y 5.4 muestran que el incremento de la utilidad con respecto a un sistema de control con set-point constante es:

- 0.8837 a 0.9494 % con el controlador supervisor lineal.
- 0.8867 a 0.9524 % con el controlador supervisor lineal difuso.
- 1.3834 a 1.4869 % con el controlador supervisor global.

Se aprecia una leve superioridad en el beneficio del control supervisor difuso linealizado sobre el control supervisor lineal, alrededor del 0.34 %.

El beneficio del controlador supervisor difuso global sobre el controlador supervisor lineal es aproximadamente del 36 %. Esto último, se debe a las buenas predicciones realizadas por la modelación difusa.

## VI.- CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló un método de optimización del sistema de control para la turbina a gas de una central térmica de ciclo combinado, considerando objetivos tanto regulatorios como económicos.

En primer lugar, se desarrolló un modelo difuso, utilizando una metodología de identificación sistemática que incluye un análisis de sensibilidad para obtener las variables de entrada relevantes. De esta forma, se obtuvo un modelo difuso para la turbina a gas con predicción a 10 pasos que mejoró un 15 % el error con respecto al obtenido con una modelación lineal.

Se estableció una función objetivo a nivel supervisor que logra representar la utilidad de la planta y un criterio regulatorio.

Utilizando esta función objetivo se desarrolló un controlador supervisor lineal que fue aplicado al simulador de la turbina a gas. Este controlador entregó un 0.9 % de incremento de utilidad con respecto a una estrategia puramente regulatoria (controlador PI), basado en set-points constantes obtenidos de la optimización estática de la misma función objetivo.

A continuación, considerando la misma función objetivo, se diseñaron dos estrategias de control supervisor difuso. En primer lugar, se diseñó un controlador supervisor difuso linealizado donde los parámetros del modelo difuso utilizado se suponen constantes en todas las predicciones. Con este controlador supervisor difuso linealizado se obtuvo un incremento de utilidad de un 0.34 % con respecto a la estrategia de control supervisor lineal. Esta leve mejora se debe a que el proceso es altamente no lineal y requiere predicciones no lineales.

De esta manera, se diseñó una estrategia de control supervisor difuso global, en la cual los parámetros del modelo difuso varían en todas las predicciones. En este caso, se logró un incremento de la utilidad del 36 % con respecto a la estrategia de control supervisor lineal. Esta mejora significativa se debe a la utilización de las predicciones no lineales del modelo difuso.

Como trabajo futuro, es posible incluir restricciones de carácter ambiental que limiten la polución producida en proceso.

Se considera también relevante realizar un análisis de estabilidad y robustez para los controladores supervisores difusos diseñados.

Finalmente, este sistema de control supervisor propuesto, considerando tanto modelación lineal como modelación difusa, podría ser implementado fuera de línea como un sistema de apoyo a la operación, que entregue recomendaciones para fijar los set-points de la planta, según el criterio económico y regulatorio propuesto

## BIBLIOGRAFÍA

- [Angeli 1999] Angeli, D., Mosca, E. (1999). **Command governors for constrained nonlinear systems**. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 44, N°4, pp. 816-820.
- [Becerra 1999] Becerra , V., Abu-el-zee, Z., Robert , P. (1999). **Integrating predictive control and economic optimization**. Computing & Control Engineering Journal, October, pp 198-208
- [Bemporad 1997] Bemporad, A., Casavola , A., Mosca, E. (1997). **Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management**. IEEE Transactions on automatic Control , Vol. 44, N°4 pp. 816-820.
- [Cazogala 1981] Cazogala, E., Pedrycz, W. **Some Problems Concerning the Construction of Algorithms of Decision-Making in Fuzzy Systems**. International Journal of Man-Machine Studies 15(2)(2): 201-211 (1981)
- [CND 2002] Comisión Nacional de Energia WWW Site. <http://www.cne.cl>
- [CDECs 2002] Comisión de Despacho Económico WWW Site. <http://www.cdecs.cl>
- [de Prada 1996] de Prada, C., Valentin, A. (1996). **Set-point optimization in multivariable constrained predictive control**. Proceedings of the 13<sup>th</sup> Word Congress of IFAC International Federation of Automatic Control, San Francisco, June 30 – July 5, pp. 351-356.
- [Ellis 1998] Ellis, R., Li, X., Riggs, J. (1998). **Modeling and optimization of a model IV fluidized catalytic cracking unit**. AIChE Journal, Vol. 44, N°9, pp. 2068-2079
- [Gilbert 1999] **Gilbert, E., Kolmanovsky, I. (1999)**. Fast reference governors for systems with state and control constrain and disturbance inputs. **Int. J. Robust Nonlinear Control, 9 (15), pp. 1117-1141.**
- [Hartigan 1975] Hartigan, A., **Clustering Algorithms**, John Wiley & Sons, 1975.
- [Hathaway 1993] Hathaway, R., Bezdek, J. C. (1993). **Switching regression models and fuzzy clustering**. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 1, N°3, pp. 195-204.
- [Katebi 1997] Katebi, M., Johnson, M.(1997). **Predictive control design for large-scale system**. Automatica, Vol. 33, N°3, pp. 421-425.

- [Luenberger 1989] Luenberger D. (1989). **Programación lineal y no lineal**. Addison Wesley Iberoamericana , Delaware, United States of America.
- [Martín 1996] Martín, J., Rodellar, J. (1996). **Adaptive predictive control: from the concepts to plant optimization**. Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, London, Great Britain.
- [Muñoz 1999] Muñoz, C., Cipriano, A. (1999). **An integrated system for supervision and economic optimal control of mineral processing plants**. Mineral Engineering, Vol. 12, N° 6, pp. 627-643.
- [Muñoz 2000] Muñoz, C. (2000). **Diseño de un método de control predictivo con restricciones y su aplicación y prueba por simulación para la optimización económica de plantas de molienda- flotación de minerales**. Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- [Ordys 1994] Ordys, A., Pike, A., Jonson, M., Katebi, R., Grimble, M. (1994). **Modeling and Simulation of Power generation Plants**. Springer-Verlag, London, Great Britain.
- [Ramos 1993] Ramos, M. **Identificación de modelos basados en lógica difusa**, Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Electricista , Universidad de Chile, 1993
- [Sáez 2001] Sáez, D., Cipriano A., Ordys W. (2001). **Optimisation of Industrial Processes at Supervisory Level**. Springer-Verlag, London, Great Britain.
- [Sugeno 1993] Sugeno, M., Yasukawa, T. (1993). **A fuzzy logic based approach to qualitative modeling**. IEEE Trans. On Fuzzy Systems, Vol. 1, N° 1, pp. 7-31.
- [Takagi 1985] Takagi, T., Sugeno, M. (1985). **Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control**. IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-15, N°1, pp. 116-132.
- [Tryon 1970] Tryon, R., Bailey, D., **Cluster Analysis**, McGraw-Hill, 1970.
- [Wang 1993] Wang, L.,X. (1993). **Adaptive fuzzy systems and control: design and stability analysis**, Prentice-Hall, pp. 41-43.
- [Zadeh 1965] Zadeh, L. **Fuzzy sets**. Information & Control., 8, 1965.
- [Zheng 1999] Zheng, A., Mahajanam, R., Douglas, J. (1999). **Hierarchical procedure for plantwide control system synthesis**. AIChE Journal, Vol. 45, N°6, pp. 1255-1265.

**ANEXO A**

**INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN DIFUSA**



## **A.1 Modelos difusos**

La identificación de modelos se refiere a la secuencia de pasos para encontrar una relación, preferiblemente matemática, entre las variables de entrada y salida de un proceso o sistema, con el fin de predecir su comportamiento en ciertas situaciones.

Si se opta por utilizar un método no convencional para modelar cierto proceso debido a que los tradicionales no logran representar la dinámica interna de ellos, y se decide ocupar un modelo basado en lógica no convencional como la lógica difusa, surge la pregunta si será posible aplicar los mismos criterios y algoritmos a modelos basados en este tipo de lógica [Sugeno 1993].

La primera dificultad en presentarse, es la determinación de la estructura del modelo que se resuelve con diversos criterios basados en el conocimiento, luego viene la identificación de parámetros para la estructura ya conocida, lo cual se puede realizar con el uso de clustering [Ramos 1993], [Sugeno 1993] y [Takagi 1985].

El clustering es una herramienta de identificación de patrones, originalmente utilizado para encontrar centros de conjuntos dispersos en el espacio [Tryon 1970] con gran utilidad en estadística. Esto es, determinar conjunto cuyas características los distinguen de los demás y los hacen únicos en su género.

En general los algoritmos de clustering son procedimientos diseñados especialmente para buscar una partición que aproxime a los datos razonablemente bien, a través de las posibles combinaciones existentes [Hartigan 1975].

El clustering difuso establece un grado de pertenencia de una variable a un conjunto permitiendo una representación más real que un clustering clásico.

EL clustering difuso es utilizado para obtener los conjuntos de las premisas y las consecuencias de un modelo difuso e incluso para obtener los parámetros de las relaciones funcionales de las consecuencias como se verá posteriormente.

## A.2 Lógica difusa

Se ha considerado de manera general que el concepto de lógica difusa apareció en 1965, introducido por Lotfi A. Zadeh en la Universidad de California en Berkeley, [Zadeh 1965]. La lógica difusa puede entenderse como una herramienta matemática cuya amplia aplicabilidad se basa en la concepción de conjuntos con fronteras no exacta. En la teoría tradicional de conjuntos un elemento puede pertenecer o no a un determinado conjunto, mientras que en la teoría de conjuntos difusos los elementos tienen un grado de pertenencia a dichos conjuntos.

Un conjunto difuso  $A$  que pertenece a un conjunto de discusión  $U$ , está caracterizado por una función de pertenencia  $\mu_A(u)$ , que toma valores reales en el intervalo  $[0,1]$ . Este conjunto, puede ser representado como una colección de pares ordenados compuestos por un elemento  $u$  y el grado de pertenencia de este al conjunto  $A$ , denotado por  $\mu_A(u)$ .

$$A \rightarrow \{ (\mu_A(u)) \} \quad (A.1)$$

El grado de pertenencia se cuantifica por la función de pertenencia, la que se determina en forma subjetiva y se escoge, generalmente, como una función lineal de forma trapezoidal o triangular (ver figura A.1)

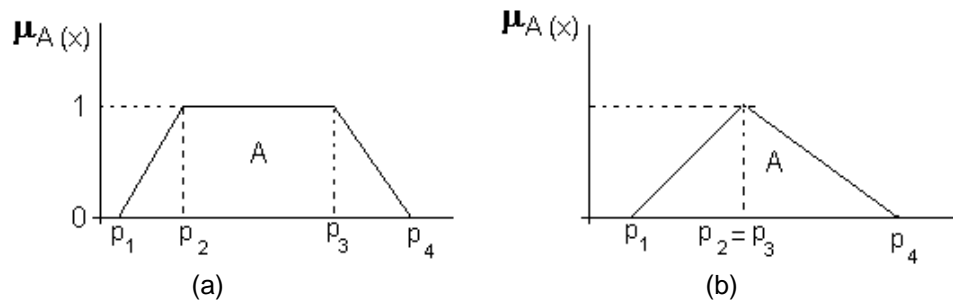


Figura A.1 funciones de pertenencia difusas; (a) trapezoidal y (b) triangular.

De esta área se desprende la modelación difusa, que es una herramienta muy eficiente para modelar sistemas no lineales y que puede incorporar dinámicas variantes en el tiempo y/o ser afectado significativamente por variables no medibles en el tiempo.

Los conjuntos difusos son utilizados para representar los diferentes valores que toman las variables de entrada y salida de un modelo difuso. A estas variables, que toman valores tales como “bajo”, “mediano” o “grande”, y cuyo valor numérico puede pertenecer a más de un conjunto difuso, se les conoce como variables difusas.

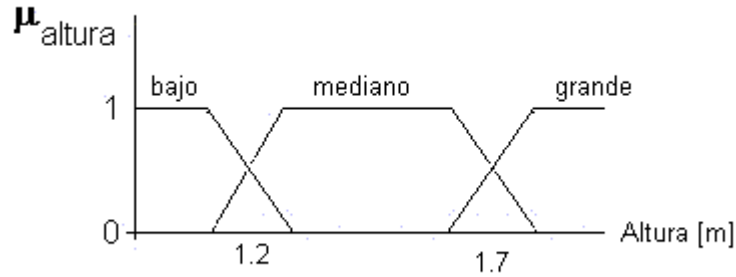


Figura A.2 Conjuntos difusos y funciones de pertenencia asociadas a la variable altura

La figura A.2 muestra los conjuntos y funciones de pertenencia asociados a la variable altura, que permite obtener a partir de un valor numérico de ésta, los grados de pertenencia a cada uno de los conjuntos difusos.

La conexión de conjuntos difusos hace posible expresar reglas difusas como sentencias condicionales. Las sentencias condicionales difusas son conocidas como reglas de tipo “if ... then ...”, conteniendo condiciones ( premisas) y acciones (consecuencias), y se presentan de la forma:

If < lista de condiciones > then < lista de condiciones >

Cada uno de los elementos de la lista de condiciones es una relación difusa de pertenencia de una variable a un conjunto y se unen entre ellas mediante la utilización de conectivos lógicos “y” y “o”, que tienen su equivalencia con las operaciones básicas de intersección y unión respectivamente.

### A.3 Modelos difusos expertos

Un modelo difuso es un conjunto de reglas difusas como las presentadas en la ecuación A.1 , las cuales son combinadas para producir una única respuesta para determinado conjunto de entradas. Cada una de las reglas para un modelo tipo MISO (Múltiple Input Single Output) pueden ser formuladas como sigue :

$$R^i : \text{if } (x_1 \text{ is } A_1^i) \wedge (x_2 \text{ is } A_2^i) \wedge \dots \wedge (x_p \text{ is } A_p^i) \quad \text{then} \quad y \text{ is } B^i \quad \forall i=1 \dots N \quad (\text{A.2})$$

Donde  $R^i$  es la  $i$ -ésima regla ( $1 \leq i \leq N_r$ );  $x_j$  es la  $j$ -ésima variable difusa de entrada ( $1 \leq j \leq p$ );  $A_j^i$  es un conjunto difuso de la  $j$ -ésima variable para la  $i$ -ésima regla;  $y$  es la variable de salida y  $B^i$  el conjunto difuso de ésta .

La salida del conjuntos de reglas está dada por los siguientes tres pasos.

1. Dadas las entradas  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{p0}$ , el grado de activación de la regla es :

$$W_0^i = \mu_{A_1^i}(x_{10}) \cdot \mu_{A_2^i}(x_{20}) \cdot \dots \cdot \mu_{A_p^i}(x_{p0}) \quad (\text{A.3})$$

2. Se defusifica el conjunto  $B^i$  de las consecuencias, tomando su centro de gravedad  $b^i$  como:

$$b^i = \frac{\int \mu_{B^i}(x) \cdot x \cdot dx}{\int \mu_{B^i}(x) \cdot dx} \quad (\text{A.4})$$

3. Se calcula el valor inferido de la salida  $y$  para la entrada  $x_0$  tomando el promedio ponderado de los centros de gravedad  $b^i$  , con respecto de los pesos de las reglas  $w_0^i$

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} w_0^i \cdot b^i}{\sum_{i=1}^{N_r} w_0^i} \quad (\text{A.5})$$

### A.4 Métodos de identificación

Se ha propuesto muchas técnicas de identificación de modelos difusos, siendo las más utilizadas las propuesta por Czogala y Pedrycz en 1981 [Czogala 1981] y por Takagi & Sugeno en 1985 [Takagi 1985]. Estos dos algoritmos requieren de un conocimiento previo de los datos de entrada /salida de manera de poder realizar una partición que genere los respectivos conjuntos difusos.

El método de Czogala y Pedrycz requiere conocer con mayor detalle los rangos de variación de las muestras pues la salida generada por el modelo depende fuertemente de los conjuntos difusos asociados a ella, mientras que en el modelo de Takagi & Sugeno es calculada como una combinación lineal de las entradas, por lo que no es necesaria la definición de conjuntos difusos asociados al espacio de salida.

Debido a la naturaleza netamente no lineal del simulador de la turbina se utilizó en este trabajo el método de Takagi & Sugeno para modelarlo.

**ANEXO B**  
**OPTIMIZACIÓN NO LINEAL**

## B.1 Optimización no lineal

Sabemos que el problema de optimización con restricciones no lineales es de la forma [Luenberger 1989]:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } f(x) & \\ \text{sujeto a } & h_1(x) = 0 \quad g_1(x) \leq 0 \\ & h_2(x) = 0 \quad g_2(x) \leq 0 \\ & \vdots \\ & h_m(x) = 0 \quad g_p(x) \leq 0 \end{array} \quad (\text{B.1})$$

$$x \in E^n \quad \text{con } n \leq m$$

Suponemos  $h_i$  y  $g_j$   $i = 1, \dots, m$   $j = 1, \dots, p$  funciones continuas con derivadas parciales continuas. Por simplicidad de notación, se introduce las funciones con valores vectoriales  $h = (h_1, \dots, h_m)$  y  $g = (g_1, \dots, g_p)$  y se vuelve a escribir como (B.2)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } f(x) & \\ \text{sujeto a } & h(x) = 0 \quad g(x) \leq 0 \end{array} \quad (\text{B.2})$$
$$x \in E^n$$

Una restricción de desigualdad  $g_i(x) \leq 0$  se dice activa en el punto factible  $x$  si  $g_i(x) = 0$ , y es inactiva en  $x$  si  $g_i(x) < 0$ . Se adopta la convención de que cualquier restricción de igualdad  $h_i(x) = 0$  es activa en cualquier punto factible. Las restricciones activas en un punto factible  $x$  restringen el dominio de factibilidad en las proximidades de  $x$ , mientras que las otras restricciones, las inactivas, no ejercen influencia en las proximidades de  $x$ . Por lo tanto al analizar las propiedades de un punto mínimo local, es evidente que se puede centrar la atención en las restricciones activas. Esto se ilustra en la figura B.1 donde se aprecia que las propiedades locales que satisfacen la solución  $x^*$  no dependen de las restricciones inactivas  $g_2$  y  $g_3$ .

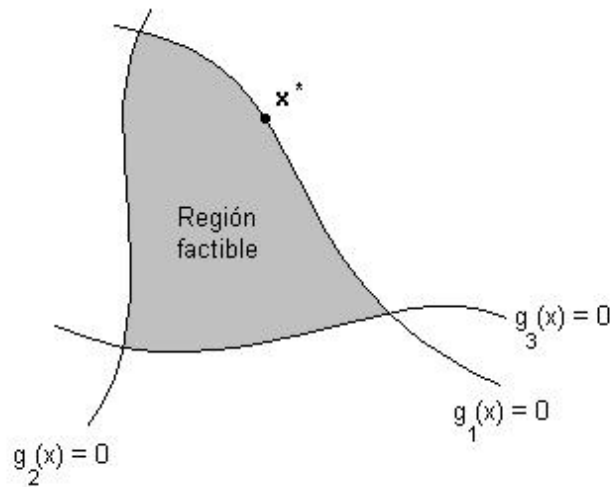


Figura B.1 Ejemplo de restricciones inactivas

Lógicamente si se supiera de antemano qué restricciones serán activas en la solución de (B.1), la solución sería un punto mínimo local del problema definido, ignorando las restricciones inactiva y tratando todas las restricciones activas como restricciones de igualdad. Por lo tanto, en relación con las soluciones locales, se podría considerar el problema como si sólo tuviera restricciones de igualdad.

Un conjunto de restricciones de igualdad en  $E^n$

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 0 \\ h_2(x) &= 0 \\ &\vdots \\ h_m(x) &= 0 \end{aligned} \tag{B.3}$$

define un subconjunto de  $E^n$ , que se considera mejor tratándolo como una hipersuperficie que tiene dimensión  $n-m$ . Asociado a un punto de la superficie está el plano tangente en ese punto.

Un punto  $x^*$  que satisfaga la restricciones  $h(x^*) = 0$  se denomina punto regular de las restricciones si los vectores gradientes  $\nabla h_1(x^*)$ , ...,  $\nabla h_m(x^*)$  son linealmente independientes. En los puntos regulares se puede caracterizar el plano tangente dependiendo de los gradientes de las funciones de restricción:

En un punto regular  $x^*$  de la superficie S definida por  $h(x^*) = 0$ , el plano tangente es igual a

$$M = \left\{ y : \nabla h(x^*) \cdot y = 0 \right\} \tag{B.4}$$

Una representación del plano tangente se puede ver en la figura 4.3



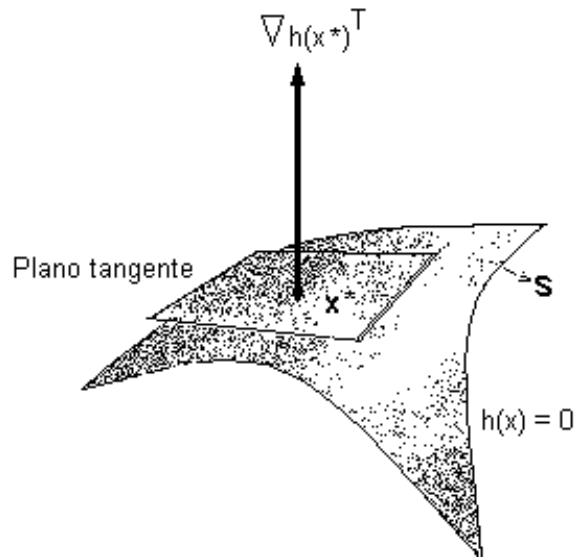


Figura B.2 Ejemplo de plano tangente

En la figura B.3 se ve un ejemplo de punto regular, donde los vectores gradiente de cada restricción de igualdad son linealmente independientes.

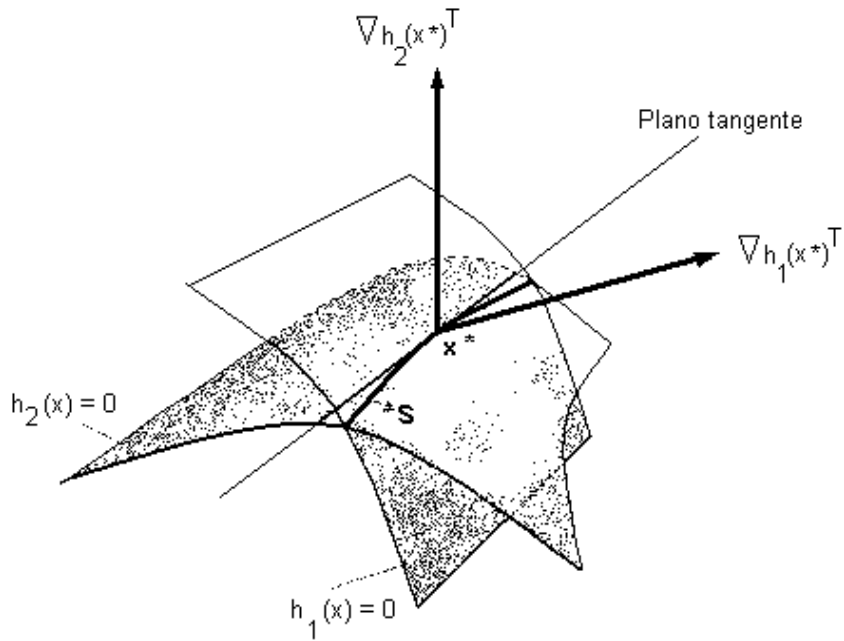


Figura B.3 Ejemplo de plano tangente

## B.2 Método de proyección del gradiente

El método de proyección del gradiente está motivado por el método normal del descenso de mayor pendiente para problemas sin restricciones. El gradiente negativo se proyecta sobre la superficie de trabajo para definir la dirección de movimiento.

La idea básica es que en un punto factible  $x_k \in E^n$  se determina las restricciones activas y se proyecta el gradiente negativo sobre el subespacio tangente a la superficie determinada por estas restricciones. Este vector, si es distinto de cero, determina la dirección del paso siguiente (ver figura B.4).

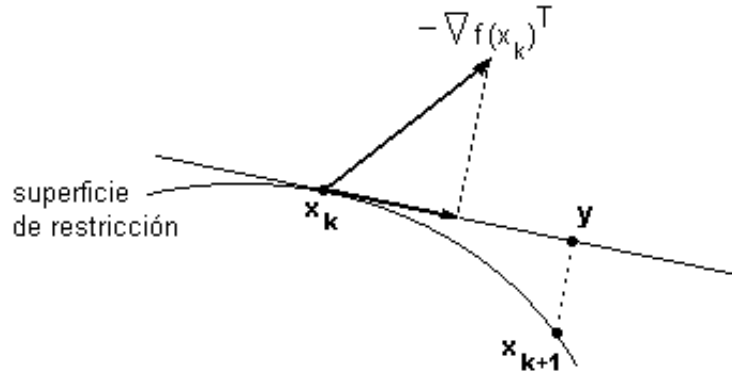


Figura B.4 Método de proyección del gradiente

La superficie puede ser curva como se ve en la figura (B.4), por lo que no siempre se puede avanzar por este gradiente negativo proyectado para obtener el punto siguiente. Lo que se hace es hacer un movimiento a lo largo del gradiente negativo proyectado hacia el punto  $y$ . Después se hace un movimiento en dirección perpendicular al plano tangente en el punto original hacia un punto factible próximo sobre la superficie de trabajo, como se ilustra en la figura (B.4). Una vez hallado este punto, se determina el valor del objetivo. Esto se repite con varias veces hasta que se halla un punto factible que satisfaga uno de los criterios estándar de descenso para la mejora relativa al punto original.

La característica más importante de este método es el problema de regresar a la región factible desde puntos exteriores a ella. La idea consiste en volver desde cualquier punto próximo a  $x_k$  a la superficie de restricciones en una dirección ortogonal al plano tangente a  $x_k$ . Así, desde un punto  $y$  se busca un punto de la forma

$$y + \nabla h(x_k)^T \alpha = y^* \quad \text{tal que} \quad h(y^*) = 0. \quad (\text{B.5})$$

como se muestra en la figura (B.5), dicha solución puede no existir siempre, pero si existe para  $y$  suficiente cerca de  $x_k$ .

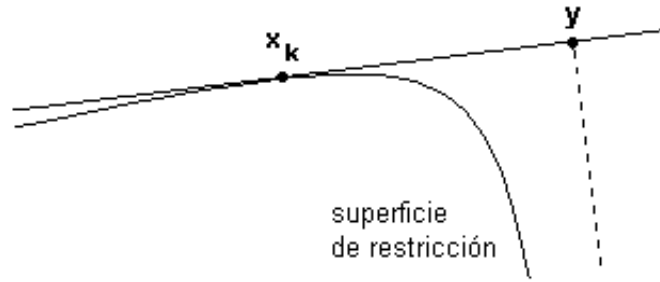


Figura B.5 Caso en el que no se puede volver a la superficie

Para hallar la primera aproximación adecuada de  $\alpha$ , y por lo tanto de  $y^*$ , la ecuación se hace lineal en  $x_k$ , y se obtiene

$$h(y + \nabla h(x_k)^T \alpha) \cong h(y) + \nabla h(x_k) \nabla h(x_k)^T \alpha \quad (\text{B.6})$$

donde la aproximación es precisa para  $|\alpha|y$   $|y - x|$  pequeña. Esto motiva la primera aproximación

$$\alpha_1 = -[\nabla h(x_k) \nabla h(x_k)^T]^{-1} h(y) \quad (\text{B.7})$$

$$y_1 = y - \nabla h(x_k)^T [\nabla h(x_k) \nabla h(x_k)^T]^{-1} h(y) \quad (\text{B.8})$$

al sustituir  $y_1$  por  $y$  y repetir de manera sucesiva el proceso, resulta la sucesión  $\{y_j\}$  generada por

$$y_{j+1} = y_j - \nabla h(x_k)^T [\nabla h(x_k) \nabla h(x_k)^T]^{-1} h(y_j) \quad (\text{B.9})$$

que inicializándose lo suficientemente cerca de  $x_k$  y de la superficie de restricción, convergerá a una solución  $y^*$ .

**ANEXO C**  
**ALGORITMOS**

## C.1 Modelación difusa

```
% MODELO T&S A 1 PASO
clear
load fuel.mat
load pmech.mat

w1=size(Pm);
w2=size(Fd);
Fdd=Fd(2,:);
Pmm=Pm(2,:);
ndat=200;
y=(Pmm(1:ndat)');
x=(Fdd(1:ndat)');
re=2;
ss=2;
[yd,Xd]=desf(y,x,re,ss,1);
[a,b]=premisas(y(re+1:ndat),[yd Xd],20);

g=TAKSUG(y(re+1:ndat),[yd Xd],a,b)

yy=(Pmm(ndat:2*ndat)');
xx=(Fdd(ndat:2*ndat)');
[ydd,Xdd]=desf(yy,xx,re,ss,1);
ye=ysim([ydd Xdd],a,b,g);
h=size(ye);
t=Fd(1,ndat+re:ndat+re+h(2)-1);
plot(t,ye,': ',t,yy(re+1:h(2)+re))
title('Modelo difuso Takagi & Sugeno (predicción a 1 paso) Variables de entrada [Pm(k-1) Pm(k-2) fd(k-1) fd(k-2)] ')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Pg(t)')
axis([20 36 2e7 4.5e7])
regresores=re
e=sqrt(sum((yy(re+1:h(2)+re)-ye).^2)/h(2))
e1=(sum((yy(re+1:h(2)+re)-ye).^2)/h(2))
```

---

```
function [yd,Xd]=desf(y,X,na,nb,nk)
```

```
% [yd,Xd]=desf(y,X,na,nb,nk)
% Esta funcion desfasa las entradas y la salida para dejarlas como
% entradas a un modelo dinámico.
n=sum(nb);
[Nd,Ne]=size(X);
nmax=max([na+1 max(nb+nk)]);
N=Nd-nmax+1;
Xd=zeros(N,n);
l=0;
for i=1:Ne
    for k=1:nb(i)
        l=l+1;
        for j=nmax+1:Nd+1
            Xd(j-nmax,l)=X(j-nk(i)-k,i);
        end
    end
end
end
for i=1:na
    u=[u y(nmax-i:Nd-i)];
end
end
yd=u;
```

---

```
function [a,b]=premisas(y,X,NRmax)
```

```
% [a,b]=premisas(y,X,NRmax)
% Entrega las matrices a y b con los valores iniciales de las funciones
% de pertenencia. Para ello, hace un clustering difuso del tipo switching
% regression model a partir de los datos de entrada-salida (X,y)
% NRmax es el máximo número de reglas permitido
```

```
% Por Felipe Montoya, 1996.
```

```

Nd=size(X,1);
n=size(X,2);
Nc=2;
fin=0;
my=mean(y);
mX=mean(X);
S=1e30;

%disp('Optimizando número de reglas...')

while fin==0
    if Nc>2
        aant=a2;
        bant=b2;
        Uant=U;
        end

    % Aplicando algoritmo FCP
    [a2,b2,U]=fcp(y,X,Nc);

    % Cálculo de función objetivo

    Sant=S;

    mf=U.^2;
    S=0;
    for r=1:Nc
        for k=1:Nd
            S=S+mf(r,k)*((y(k)-a2(r,:)*X(k,:))-b2(r))^2-(my-a2(r,:)*mX'-b2(r))^2);
        end
    end

    %disp([Nc S])

    if (Sant<S | Nc>NRmax)
        if Nc==2
            NR=Nc;
        else
            NR=Nc-1; % Número de reglas a utilizar
            a2=aant;
            b2=bant;
            U=Uant;
        end
        fin=1;
    end

    Nc=Nc+1;

end

%disp('Número de reglas:');
%disp(NR);

% Determinación de a y b.

b=zeros(NR,n);

mf=U.^2;

for i=1:n
    for r=1:NR
        num=0;
        den=0;
        for k=1:Nd
            num=num+mf(r,k)*X(k,i);
            den=den+mf(r,k);
        end
        b(r,i)=num/den;
    end
end

a=zeros(NR,n);

```

```

for i=1:n
    for r=1:NR
        num=0;
        den=0;
        for k=1:Nd
            num=num+mf(r,k)*(X(k,i)-b(r,i))^2;
            den=den+mf(r,k);
        end
        a(r,i)=sqrt(den/num);
    end
end

```

---

```

function g=taksug(y,X,a,b)

```

```

% g=TAKSUG(y,X,a,b)
% Obtiene, a partir de datos entrada-salida, los parámetros g de las
% consecuencias de un modelo difuso usando el método de Takagi y Sugeno.
% y contiene los datos de salida; X los de entrada.
% En caso multivariable, X=[x1 x2 ... xn].
% La respuesta g, es una matriz en la que la fila r está compuesta
% por los coeficientes del modelo correspondiente a la regla r. Es decir,
% la consecuencia de la regla r es:
%   y = gr0 + gr1 x1 + gr2 x2 + ... + grn xn
% Los parámetros de las funciones de pertenencia de la variable xi en la
% regla r son a(r,i) y b(r,i).

```

```

% Por Felipe Montoya, 1996.

```

```

[N,n]=size(X); % N: n° datos; n: n° variables de entrada
NR=size(a,1); % Número de reglas.

```

```

A=zeros(N,(n+1)*NR); % Armandando la matriz A

```

```

for k=1:N

```

```

    for r=1:NR
        for i=1:n
            mu(r,i)=exp(-0.5*(a(r,i)*(X(k,i)-b(r,i)))^2);
        end
    end
end

```

```

W=ones(1,NR); % Vector con los grados de validez para datos k

```

```

for r=1:NR
    for i=1:n
        W(r)=W(r)*mu(r,i);
    end
end

```

```

Wn=W/sum(W);

```

```

for r=1:NR
    A(k,r)=Wn(r);
end

```

```

for r=1:NR
    for i=1:n
        A(k,i*NR+r)=Wn(r)*X(k,i);
    end
end

```

```

end

```

```

p=A\y;

```

```

for i=1:n+1
    for r=1:NR
        g(r,i)=p(NR*(i-1)+r);
    end
end
end

```

```

-----
function [a,b,U]=fcp(y,X,Nc)

% [a,b,U]=fcp(y,X,Nc)
% Realiza la versión para clusters con forma de hiperplano
% (n+1)-dimensional del algoritmo FCM, Fuzzy c-means, donde
% n es el número de entradas.
% y son los valores de la salida, ordenados en un vector columna
% X son los de las entradas, ordenados en una matriz con una muestra
% por fila
% Nc es el número de clusters (hiperplanos) en que se desea partir
% el espacio entrada-salida.
% Entrega a y b, coeficientes tales que el plano r-ésimo es:
%  $y = a(r,1)*x_1 + a(r,2)*x_2 + \dots + a(r,n)*x_n + b(r)$ 
% Los grados de pertenencia de las muestras a cada plano se entregan
% en la matriz U.

Nd=size(X,1);           % Número de muestras
n=size(X,2);           % Número de variables

% Partición difusa inicial
U = rand(Nc, Nd);
col_sum = sum(U);
U = U./col_sum(ones(Nc, 1), :); % Para que columnas sumen uno.

% Solución del algoritmo FCM con (X,y) para inicialización

%disp('Inicializando')

X2=[X y];

for l=1:20

    %disp(l)

    % Modificación exponencial
    mf=U.^2;

    % Cálculo coeficientes c
    for j=1:n+1
        for r=1:Nc
            num=0;
            den=0;
            for k=1:Nd
                num=num+mf(r,k)*X2(k,j);
                den=den+mf(r,k);
            end
            c(r,j)=num/den;
        end
    end

    % Cálculo de los cuadrados de las distancias a los centros
    for r=1:Nc
        for k=1:Nd
            dist2(k,r)=sum((c(r,:)-X2(k,:)).^2);
        end
    end

    % Actualización grados de pertenencia
    for r=1:Nc
        for k=1:Nd
            den=0;
            for s=1:Nc
                den=den+dist2(k,r)/dist2(k,s);
            end
            U(r,k)=1/den;
        end
    end

end

```



% Inicialización de los coeficientes a y b por regresión lineal

```
for k=1:Nd
    for r=1:Nc
        A(k,r)=U(r,k);
        for i=1:n
            A(k,r+i*Nc)=U(r,k)*X(k,i);
        end
    end
end
```

```
p=(A'*A)\(A'*y);
```

```
b=p(1:Nc);
for i=1:n
    for r=1:Nc
        a(r,i)=p(i*Nc+r);
    end
end
```

```
fobj=1e+30;
```

% fobj contiene el valor inicial

```
fobjt=zeros(50,1);
```

% Tasa de desplazamiento inicial  
t=0.5/Nd;

```
for l=1:50
```

% Modificación exponencial  
mf=U.^2;

% Cálculo del gradiente  
Ga=zeros(Nc,n);  
Gb=zeros(Nc,1);  
for r=1:Nc  
 for k=1:Nd  
 Da=(y(k)-a(r,:)\*X(k,:))-b(r);  
 for j=1:n  
 Ga(r,j)=Ga(r,j)-2\*mf(r,k)\*Da\*X(k,j);  
 end  
 Gb(r)=Gb(r)-2\*mf(r,k)\*Da;  
 end  
end

% Desplazamiento

```
fin=0;
```

```
cont=0;  
while fin==0
```

```
    cont=cont+1;
```

% Actualización coeficientes  
a2=a-t\*Ga;  
b2=b-t\*Gb;

% Cálculo de los cuadrados de las distancias  
for r=1:Nc  
 for k=1:Nd  
 dist2(k,r)=(y(k)-a2(r,:)\*X(k,:))-b2(r))^2;  
 end  
end

% Actualización grados de pertenencia  
for r=1:Nc  
 for k=1:Nd  
 den=0;  
 for s=1:Nc  
 den=den+dist2(k,r)/dist2(k,s);

```

        end
        U2(r,k)=1/den;
    end
end

mf2=U2.^2;

% Cálculo función objetivo
fobj2=0;
for k=1:Nd
    for r=1:Nc
        fobj2=fobj2+mf2(r,k)*dist2(k,r);
    end
end

if fobj2<fobj
    fin=1;
    fobj=fobj2;
    fobjt(l)=fobj2;
    t=t*1.1;
    a=a2;
    b=b2;
    U=U2;
else
    t=t/2;
end

if cont==10
    break
end

%disp([l fobj2 fobjt(l)])

end

% check termination condition
if l>1,
    if abs(fobjt(l) - fobjt(l-1)) < (1e-3)*fobjt(l-1), break; end,
end

end

```

```

-----
function y=ysim(X,a,b,g)

```

```

% ysim=ysim(X,a,b,g)

```

```

[Nd,n]=size(X);

```

```

% N : n° de datos, n: número de variables de entrada no autorregresivas.

```

```

NR=size(a,1);      % Número de reglas
mu=zeros(NR,n);    % Grados de pertenencia

```

```

ysim=zeros(Nd,1);  % Salida del modelo

```

```

E=0;               % Inicialización del error

```

```

for k=1:Nd % Para cada dato

```

```

    for r=1:NR
        for i=1:n
            mu(r,i)=exp(-0.5*(a(r,i)*(X(k,i)-b(r,i)))^2);
        end
    end
end

```

```

% Grados de validez

```

```

W=ones(1,NR);

```

```

for r=1:NR
    for i=1:n

```

```

    W(r)=W(r)*mu(r,i);
end
end

% Cálculo de la salida
Wn=W/sum(W);
wn(k,1:NR)=Wn;

yr=g*[1 ;X(k,:)]'; % Vector de salidas de las reglas

y(k)=Wn*yr;

end

-----
function y=difu(y2,y1,u2,u1)

a=[ 3.4868e-007  3.2571e-007  5.9137  3.0270
    3.5796e-007  3.5816e-007  5.1151  5.1047 ];

b=[ 3.2492e+007  3.3201e+007  0.6277  0.5441
    3.4464e+007  3.4454e+007  0.6263  0.6280 ];

g=[ 1.0660 -0.2473  6.2053e+006  3.9484e+006  8.7503e+004
    1.1600 -0.3041  6.2036e+006  2.5081e+006 -6.9744e+005 ];

for k=1:2
    w(k)=exp(-0.5*(a(k,1)*(y2-b(k,1)))^2)*exp(-0.5*(a(k,2)*(y1-b(k,2)))^2) * exp(-0.5*(a(k,3)*(u2-b(k,3)))^2)*exp(-0.5*(a(k,4)*(u1-
b(k,4)))^2);
end
for j=1:5
    d(j)=(g(1,j)*w(1) + g(2,j)*w(2))/(w(1)+w(2));
end

y=d(1)*y2 + d(2)*y1 + d(3)*u2 + d(4)*u1 + d(5);

```

## C.2 Control supervisor

En las figuras C.1 y C.2 se muestran la implementación del controlador optimizante supervisor lineal, sobre el simulador de la turbina a gas y su nivel regulatorio. El programa de la función optimizante se muestra a continuación.

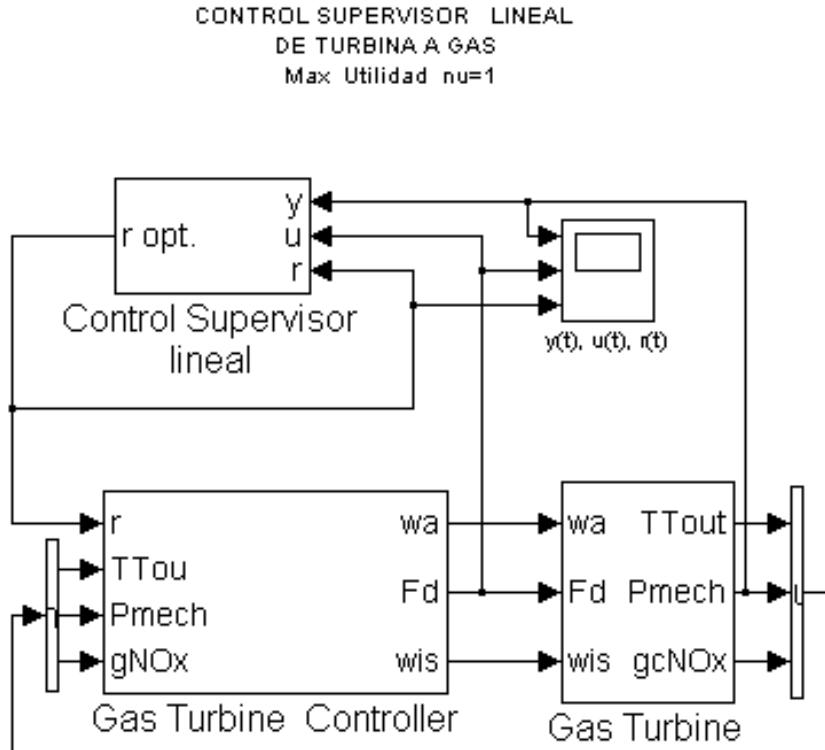


Figura C.1 Implementación del control supervisor lineal.

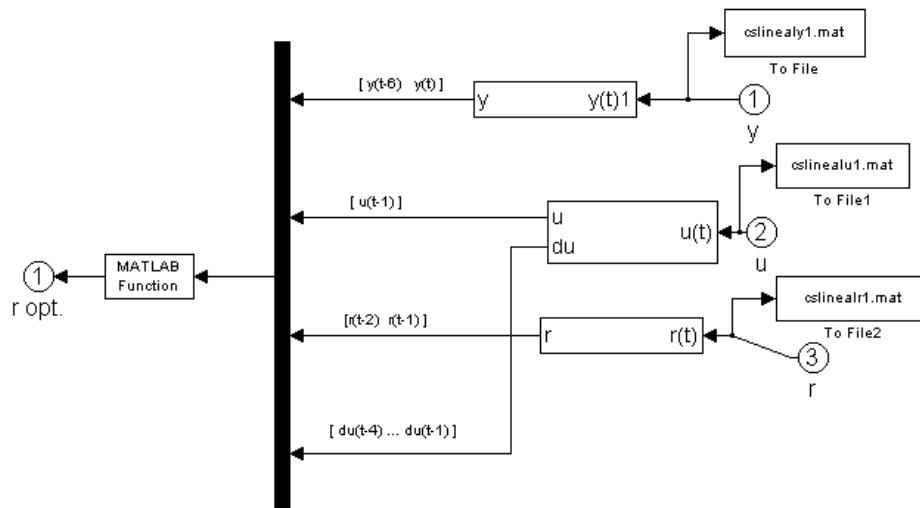


Figura C.2 Detalle de la implementación del control supervisor lineal.

```

function y=cslineal1(ax);
% supervisor lineal

a(1)=-2.5159;
a(2)=2.4567;
a(3)=-1.3471;
a(4)=0.5522;
a(5)=-0.1868;
a(6)=0.0409;
b(1)=6.2351e+006;
b(2)=-5.5616e+006;
b(3)=-0.9325e+006;
b(4)=0.4204e+006;
b(5)=-0.1614+006;
N=10;
%*****
%**** maximizar utilidad ****
%*****
Cp=10^-5;
Cf=100;
lamda=10e18;
rop=3.386*10^7;
nu=1;
CrPg=10e-11;

H=zeros(4*N+3,4*N+3);
H(1:N,1:N)=eye(N)*CrPg*2*nu;
H(3*N+3:4*N+3,3*N+3:4*N+3)=eye(N+1)*CrPg*2*lamda*nu;

f=zeros(4*N+3,1);
f(1:N,1)=ones(N,1)*(-Cp-2*nu*CrPg*rop);
f(N+1:2*N+1,1)=ones(N+1,1)*Cf;

%:.....
lb(1,1:N)=ones(1,N)*-inf;
lb(1,N+1:2*N+1)= zeros(1,N+1);
lb(1,2*N+2:3*N+2)=ones(1,N+1)*-inf;
lb(1,3*N+3:4*N+3)=ones(1,N+1)*-inf;

x0=ones(1,4*N+3)*0.1;
%:.....

kp=2.95*10^(-8)*0.06*0.77;
ki=2.95*10^(-8)*0.1*0.77;
ts=1;
alfa=ts*ki/2+kp;
beta=ts*ki/2-kp;
%-----
na=length(a);
nb=length(b);%incluye los ceros
%-----
Aq=zeros(3*N+2,4*N+3);
B1=zeros(N,N+nb-1);
B2=zeros(N+1,N+2);
A3=zeros(N,N+na+1);
A4=zeros(N+1,N+3);
for i=1:na;
    va(na-i+1)=[a(i)];
end
da=[0 va 1]-[va 1 0];
for i=1:nb;
    vb(nb-i+1)=[b(i)];
end
for i=1:N
    B1(i,i:nb+i-1)=[-vb];
    A3(i,i:na+i+1)=[da];
end
for i=1:N+1
    B2(i,i+1)=[-1 1];

```

```

A4(i,i:i+2)=[-beta beta-alfa alfa];
end
Aq(1:N+1,N+1:2*N+1)=[B2(1:N+1,2:N+2)];
Aq(1:N+1,3*N+3:4*N+3)=eye(N+1);
Aq(N+2:2*N+1,1:N)=[A3(1:N,na+2:N+na+1) ];
Aq(N+2:2*N+1,3*N+3:4*N+2)=[B1(1:N,nb:N+nb-1)];
Aq(2*N+2:3*N+2,1:N)=[A4(1:N+1,4:N+3)];
Aq(2*N+2:3*N+2,2*N+2:4*N+3)=[-A4(1:N+1,3:N+3) B2(1:N+1,2:N+2)];
% ***** BB *****
if na+1<3
    n1=3;
    m1=3-(na+1);
else
    n1=na+1;
end
if nb-1>=1
    n4=nb-1;
else
    n4=1;
end
n3=2;
n2=1;
nn=n1+n2+n3+n4;
BB=zeros(3*N+2,nn);
if na+1>=3
    BB(N+2:2*N+1,1:n1)=[A3(1:N,1:na+1)];
else
    BB(N+2:2*N+1,m1+1:n1)=[A3(1:N,1:na+1)];
end
BB(1,n1+n2)=-1;
BB(2*N+2,nn)=-1;
if nb-1>=1
    BB(N+2:2*N+1,n1+n2+n3+1:nn)=[B1(1:N,1:n4)];
end
BB(2*N+2:3*N+2,n1-2:n1)=A4(1:N+1,1:3);
BB(2*N+2:3*N+2,n1+n2+n3-1:n1+n2+n3)=-A4(1:N+1,1:2);
%-----
%-----
bq=BB*ax;
bq=-bq;
%x = quadprog(H,f,[],[],Aq,bq,lb,[],x0);
x = quadprog(H,f,[],[],Aq,bq) ;

y=x(2*N+2); %setpoint-óptimo

```

En las figuras C.3 y C.4 se muestran la implementación del controlador optimizante supervisor difuso linealizado, sobre el simulador de la turbina a gas y su nivel regulatorio. El programa de la función optimizante se muestra a continuación.

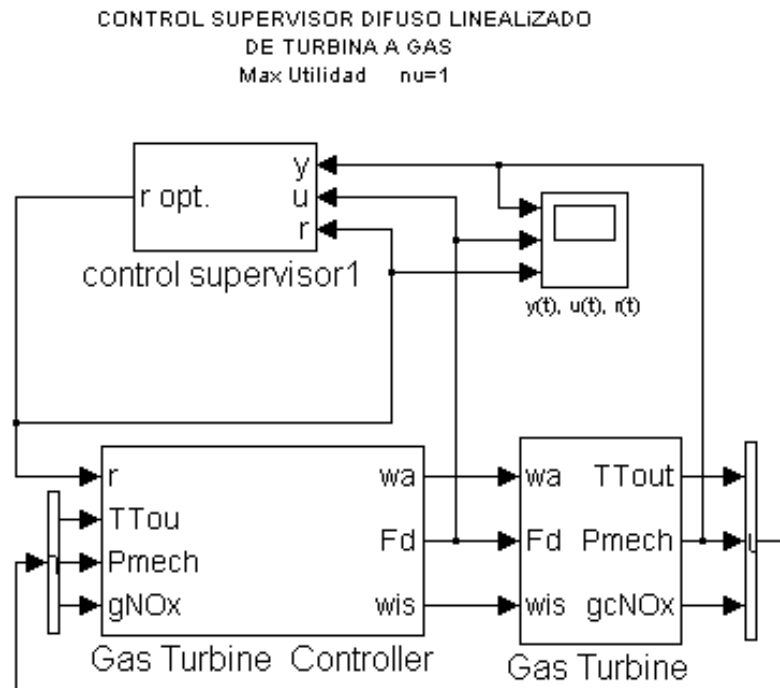


Figura C.3 Implementación del control supervisor difuso linealizado.

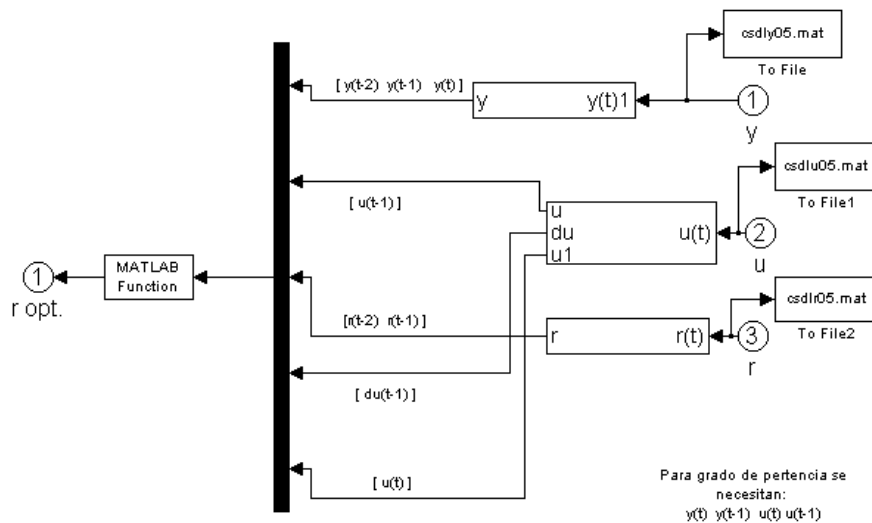


Figura C.4 Detalle de la implementación del control supervisor difuso linealizado.

```

function y=csdifusolineal1(ax);
% Control supervisor difuso linealizado

%ax=rand(8,1);
%ax=[3.386e7 3.386e7 3.386e7 0.61 3.386e7 3.386e7 0.1 0.61]
%coeficientes de funciones de pertenencia mu=exp(-0.5*(a(x-b))^2)
aa=[ 3.4868e-007 3.2571e-007 5.9137 3.0270
    3.5796e-007 3.5816e-007 5.1151 5.1047 ];

bb=[ 3.2492e+007 3.3201e+007 0.6277 0.5441
    3.4464e+007 3.4454e+007 0.6263 0.6280 ];

% (regla k) if y(t-1)in A1 ... u(t-2)in A4 then y(t,k)=g(1,k)y(t-1)+g(2,k)y(t-2)+g(3,k)u(t-1)+g(4,k)u(t-2)+ g(5,k)
% k=1,2
g=[ 1.0660 -0.2473 6.2053e+006 3.9484e+006 8.7503e+004
    1.1600 -0.3041 6.2036e+006 2.5081e+006 -6.9744e+005 ];
%-----
%
% P R E D I C C I O N E S a 10 pasos
%
% u(t)=x(11) r(t)=x(22) du(t)=x(33)
% y(t+1)=x(1) u(t+1)=x(12) r(t+1)=x(23) du(t+1)=x(34)
% y(t+2)=x(2) u(t+2)=x(13) r(t+2)=x(24) du(t+2)=x(35)
% y(t+3)=x(3) u(t+3)=x(14) r(t+3)=x(25) du(t+3)=x(36)
% y(t+4)=x(4) u(t+4)=x(15) r(t+4)=x(26) du(t+4)=x(37)
% y(t+5)=x(5) u(t+5)=x(16) r(t+5)=x(27) du(t+5)=x(38)
% y(t+6)=x(6) u(t+6)=x(17) r(t+6)=x(28) du(t+6)=x(39)
% y(t+7)=x(7) u(t+7)=x(18) r(t+7)=x(29) du(t+7)=x(40)
% y(t+8)=x(8) u(t+8)=x(19) r(t+8)=x(30) du(t+8)=x(41)
% y(t+9)=x(9) u(t+9)=x(20) r(t+9)=x(31) du(t+9)=x(42)
% y(t+10)=x(10) u(t+10)=x(21) r(t+10)=x(32) du(t+10)=x(43)
%-----
%
%ax(1) = y(t-2)
%ax(2) = y(t-1)
%ax(3) = y(t)
%ax(4) = u(t-1)
%ax(5) = r(t-2)
%ax(6) = r(t-1)
%ax(7) = du(t-2)
%ax(8) = u(t)
%-----
%
% w1 y w2 grado de validez de la regla, a 1 y 2 pasos
for k=1:2
    wc(k)=exp(-0.5*(aa(k,1)*(ax(3)-bb(k,1)))^2)*exp(-0.5*(aa(k,2)*(ax(2)-bb(k,2)))^2) *exp(-0.5*(aa(k,3)*(ax(8)-bb(k,3)))^2)*exp(-
    0.5*(aa(k,4)*(ax(4)-bb(k,4)))^2);
end
% coeficientes del modelo difuso T&S d(j)=(w1g(1,j)+w2g(2,j))/(w1+w2) , a 1 y 2 pasos
for j=1:5
    dc(j)= (g(1,j)*wc(1) + g(2,j)*wc(2) )/( wc(1)+wc(2) );
end
%-----
% restricciones del MODELO DIFUSO j=1,2
% ceq(j)=-y(t+j) + d(1,j)*y(t+j-1)+d(2,j)*y(t+j-2) + d(3,j)*u(t+j-1)+ d(4,j)*u(t+j-2) + d(5,j)
% ceq(0)=-y(t) + d(1,0)*y(t-1) +d(2,0)*y(t-2) + d(3,0)*u(t-1) + d(4,0)*u(t-2) + d(5,0)
%-----
a(1)=-dc(1);
a(2)=-dc(2);
b(1)=dc(3);
b(2)=dc(4);
N=10;
%*****
%**** maximizar utilidad ****
%*****
Cp=10^-5;
Cf=100;
lamda=10e18;
rop=3.386*10^7;
nu=1;
CrPg=10e-11;

```



```

H=zeros(4*N+3,4*N+3);
H(1:N,1:N)=eye(N)*CrPg*2*nu;
H(3*N+3:4*N+3,3*N+3:4*N+3)=eye(N+1)*CrPg*2*lamda*nu;

f=zeros(4*N+3,1);
f(1:N,1)=ones(N,1)*(-Cp-2*nu*CrPg*rop);
f(N+1:2*N+1,1)=ones(N+1,1)*Cf;

%:.....
lb(1,1:N)=ones(1,N)*-inf;
lb(1,N+1:2*N+1)= zeros(1,N+1);
lb(1,2*N+2:3*N+2)=ones(1,N+1)*-inf;
lb(1,3*N+3:4*N+3)=ones(1,N+1)*-inf;

x0=ones(1,4*N+3)*0.1;
%:.....

kp=2.95*10^(-8)*0.06*0.77;
ki=2.95*10^(-8)*0.1*0.77;
ts=1;
alfa=ts*ki/2+kp;
beta=ts*ki/2-kp;
%-----
na=length(a);
nb=length(b);%incluye los ceros
%-----
Aq=zeros(3*N+2,4*N+3);
B1=zeros(N,N+nb-1);
B2=zeros(N+1,N+2);
A3=zeros(N,N+na+1);
A4=zeros(N+1,N+3);
for i=1:na;
    va(na-i+1)=[a(i)];
end
da=[0 va 1]-[va 1 0];
for i=1:nb;
    vb(nb-i+1)=[b(i)];
end
for i=1:N
    B1(i,i:nb+i-1)=[-vb];
    A3(i,i:na+i+1)=[da];
end
for i=1:N+1
    B2(i,i+1)=[-1 1];
    A4(i,i+2)=[-beta beta-alfa alfa];
end
Aq(1:N+1,N+1:2*N+1)=[B2(1:N+1,2:N+2)];
Aq(1:N+1,3*N+3:4*N+3)=eye(N+1);
Aq(N+2:2*N+1,1:N)=[A3(1:N,na+2:N+na+1)];
Aq(N+2:2*N+1,3*N+3:4*N+2)=[B1(1:N,nb:N+nb-1)];
Aq(2*N+2:3*N+2,1:N)=[A4(1:N+1,4:N+3)];
Aq(2*N+2:3*N+2,2*N+2:4*N+3)=[-A4(1:N+1,3:N+3) B2(1:N+1,2:N+2)];
% ***** BB *****
if na+1<3
    n1=3;
    m1=3-(na+1);
else
    n1=na+1;
end
if nb-1>=1
    n4=nb-1;
else
    n4=1;
end
n3=2;
n2=1;
nn=n1+n2+n3+n4;
BB=zeros(3*N+2,nn);
if na+1>=3
    BB(N+2:2*N+1,1:n1)=[A3(1:N,1:na+1)];

```

```

else
    BB(N+2:2*N+1,m1+1:n1)=[A3(1:N,1:na+1)];
end
BB(1,n1+n2)=-1;
BB(2*N+2,nn)=-1;
if nb-1>=1
    BB(N+2:2*N+1,n1+n2+n3+1:nn)=[B1(1:N,1:n4)];
end
BB(2*N+2:3*N+2,n1-2:n1)=A4(1:N+1,1:3);
BB(2*N+2:3*N+2,n1+n2+n3-1:n1+n2+n3)=-A4(1:N+1,1:2);
%-----
%-----
bq=BB*ax(1:7);
bq=-bq;
%x = quadprog(H,f,[],[],Aq,bq,lb,[],x0);
x = quadprog(H,f,[],[],Aq,bq) ;

y=x(2*N+2); %setpoint-óptimo

```

En las figuras C.5 y C.6 se muestran la implementación del controlador optimizante supervisor global, sobre el simulador de la turbina a gas y su nivel regulatorio. El programa de la función optimizante se muestra a continuación.

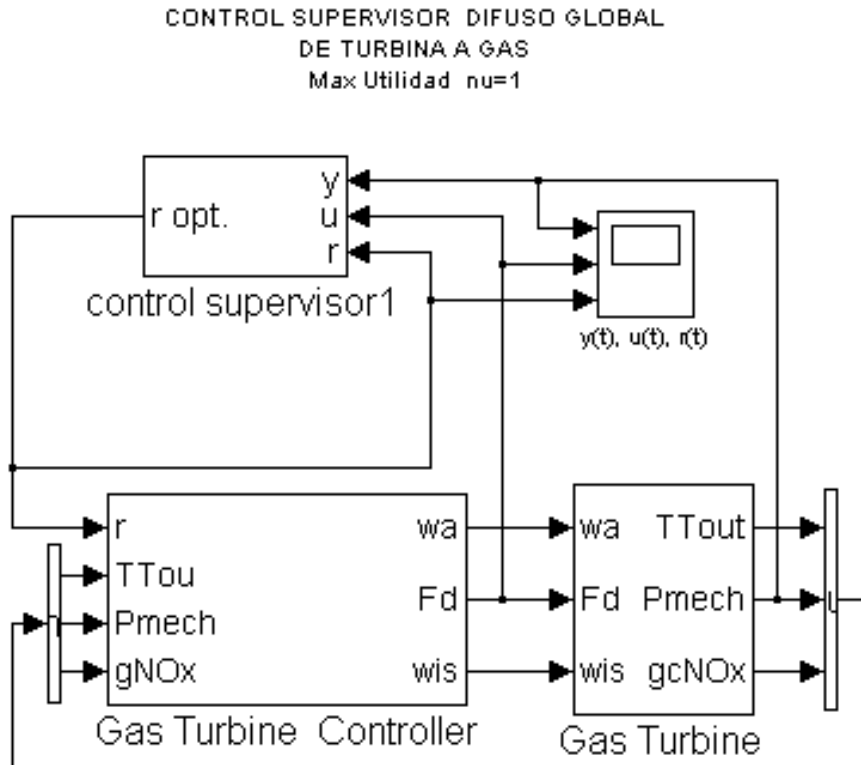


Figura C.5 Implementación del control supervisor global.

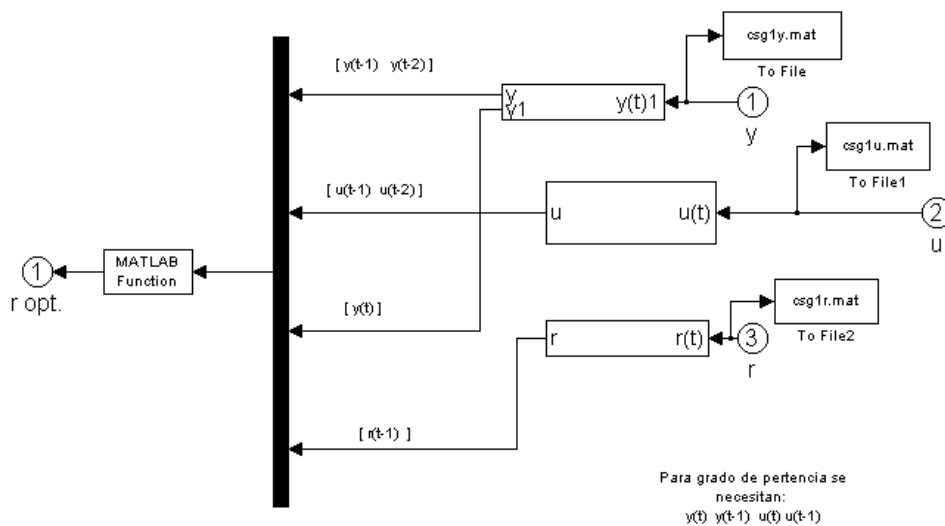


Figura C.6 Detalle de la implementación del control supervisor global.



```

% y(t+2)=x(2) u(t+2)=x(13) r(t+2)=x(24) du(t+2)=x(35)
% y(t+3)=x(3) u(t+3)=x(14) r(t+3)=x(25) du(t+3)=x(36)
% y(t+4)=x(4) u(t+4)=x(15) r(t+4)=x(26) du(t+4)=x(37)
% y(t+5)=x(5) u(t+5)=x(16) r(t+5)=x(27) du(t+5)=x(38)
% y(t+6)=x(6) u(t+6)=x(17) r(t+6)=x(28) du(t+6)=x(39)
% y(t+7)=x(7) u(t+7)=x(18) r(t+7)=x(29) du(t+7)=x(40)
% y(t+8)=x(8) u(t+8)=x(19) r(t+8)=x(30) du(t+8)=x(41)
% y(t+9)=x(9) u(t+9)=x(20) r(t+9)=x(31) du(t+9)=x(42)
% y(t+10)=x(10) u(t+10)=x(21) r(t+10)=x(32) du(t+10)=x(43)
%-----
%
%                               Datos
%                               |<--- y(t-1) = ax(1)
%                               |<--- y(t-2) = ax(2)
%                               |<--- u(t-1) = ax(3)
% r*(optimo)<---|<--- u(t-2) = ax(4)
%                               |<--- y(t) = ax(5)
%                               |<--- r(t-1) = ax(6)
%-----
%coeficientes d(j)=(w1g(1,j)+w2g(2,j))/(w1+w2)
for j=1:5
    for k=1:2
        w0(k)=exp(-0.5*(a(k,1)*(ax(5)-b(k,1)))^2)*exp(-0.5*(a(k,2)*(ax(1)-b(k,2)))^2) *exp(-0.5*(a(k,3)*(x(11)-b(k,3)))^2)*exp(-
        0.5*(a(k,4)*(ax(3)-b(k,4)))^2);
        w1(k)=exp(-0.5*(a(k,1)*(x(1)-b(k,1)))^2)*exp(-0.5*(a(k,2)*(ax(5)-b(k,2)))^2) *exp(-0.5*(a(k,3)*(x(12)-b(k,3)))^2)*exp(-
        0.5*(a(k,4)*(x(11)-b(k,4)))^2);
    end
    d(j,1)=(g(1,j)*w0(1) + g(2,j)*w0(2))/(w0(1)+w0(2));
    d(j,2)=(g(1,j)*w1(1) + g(2,j)*w1(2))/(w1(1)+w1(2));
end
%-----
for i=3:10
    for k=1:2
        w(k)=exp(-0.5*(a(k,1)*(x(i-1)-b(k,1)))^2)*exp(-0.5*(a(k,2)*(x(i-2)-b(k,2)))^2) * exp(-0.5*(a(k,3)*(x(N+i)-b(k,3)))^2)*exp(-
        0.5*(a(k,4)*(x(N+i-1)-b(k,4)))^2);
    end
    for j=1:5
        d(j,i)=(g(1,j)*w(1) + g(2,j)*w(2))/(w(1)+w(2));
    end
end
%-----
% restricciones del MODELO DIFUSO j=1,...,10
% ceq(j)=-y(t+j) + d(1,j)*y(t+j-1)+d(2,j)*y(t+j-2) + d(3,j)*u(t+j-1)+ d(4,j)*u(t+j-2) + d(5,j)
% ceq(0)=-y(t) + d(1,0)*y(t-1) +d(2,0)*y(t-2) + d(3,0)*u(t-1) + d(4,0)*u(t-2) + d(5,0)
%-----
% ceq(1)=-y(t+1) + d(1,1)*y(t) + d(2,1)*y(t-1) + d(3,1)*u(t) + d(4,1)*u(t-1) + d(5,1)
% ceq(1)=-x(1) + d(1,1)*ax(5) + d(2,1)*ax(1) + d(3,1)*x(11) + d(4,1)*ax(3) + d(5,1);
%-----
% ceq(2)=-y(t+2) + d(1,2)*y(t+1) + d(2,2)*y(t) + d(3,2)*u(t+1) + d(4,4)*u(t) + d(5,2)
% ceq(2)=-x(2) + d(1,2)*x(1) + d(2,2)*ax(5) + d(3,2)*x(12) + d(4,2)*x(11) + d(5,2);
%-----
% ceq(3)=-y(t+3) + d(1,3)*y(t+2) + d(2,3)*y(t+1) + d(3,3)*u(t+2) + d(4,3)*u(t+1) + d(5,3)
% ceq(4)=-y(t+4) + d(1,4)*y(t+3) + d(2,4)*y(t+2) + d(3,4)*u(t+3) + d(4,4)*u(t+2) + d(5,4)
% ceq(5)=-y(t+5) + d(1,5)*y(t+4) + d(2,5)*y(t+3) + d(3,5)*u(t+4) + d(4,5)*u(t+3) + d(5,5)
%-----
% ceq(10)=-y(t+10) + d(1,10)*y(t+9) + d(2,10)*y(t+8) + d(3,10)*u(t+9)+ d(4,10)*u(t+8) + d(5,10)
%-----
% ceq(3)=-x(3) + d(1,3)*x(2) + d(2,3)*x(1) + d(3,3)*x(13) + d(4,3)*x(12) + d(5,3)
% ceq(4)=-x(4) + d(1,4)*x(3) + d(2,4)*x(2) + d(3,4)*x(14) + d(4,4)*x(13) + d(5,4)
% ceq(5)=-x(5) + d(1,5)*x(4) + d(2,5)*x(3) + d(3,5)*x(15) + d(4,5)*x(14) + d(5,5)
%-----
% ceq(10)=-x(10) + d(1,10)*x(9) + d(2,10)*x(8) + d(3,10)*x(20) + d(4,10)*x(19) + d(5,10)

for j=3:N
    ceq(j)=-x(j) + d(1,j)*x(j-1) + d(2,j)*x(j-2) + d(3,j)*x(N+j) + d(4,j)*x(N+j-1) + d(5,j);
end
%restricciones del CONTROL PI j=1,...,11
% ceq(N+j)=-u(t+j-2)+u(t+j-1) + beta*r(t+j-2)-alfa*r(t+j-1) -beta*y(t+j-2)+alfa*y(t+j-1)
%-----
% ceq(N+1)=-u(t-1)+u(t) + beta*r(t-1)-alfa*r(t) -beta*y(t-1)+alfa*y(t)
% ceq(N+2)=-u(t)+u(t+1) + beta*r(t)-alfa*r(t+1) -beta*y(t)+alfa*y(t+1)

```

```

% ceq(N+3)=-u(t+1)+u(t+2) + beta*r(t+1)-alfa*r(t+2) -beta*y(t+1)+alfa*y(t+2)
%
% ceq(N+11)=-u(t+9)+u(t+10) + beta*r(t+9)-alfa*r(t+10) -beta*y(t+9)+alfa*y(t+10)

%.....
% ceq(N+1)=-ax(3)+x(11) + beta*ax(6)-alfa*x(22) -beta*ax(1)+alfa*ax(5)
% ceq(N+2)=-x(11)+x(12) + beta*x(22)-alfa*x(23) -beta*ax(5)+alfa*x(1)
% ceq(N+3)=-x(12)+x(13) + beta*x(23)-alfa*x(24) -beta*x(1)+alfa*x(2)
%
% ceq(N+11)=-x(20)+x(21) + beta*x(31)-alfa*x(32) -beta*x(9)+alfa*x(10)
%.....

ceq(N+1)=-ax(3)+x(11) + beta*ax(6)-alfa*x(22) -beta*ax(1)+alfa*ax(5);
ceq(N+2)=-x(11)+x(12) + beta*x(22)-alfa*x(23) -beta*ax(5)+alfa*x(1);

for j=3:11
ceq(N+j)=-x(N+j-1)+x(N+j) + beta*x(2*N+j)-alfa*x(2*N+j+1) -beta*x(j-2)+alfa*x(j-1);
end

% ----- Gradiente -----
% ceq(3) =-x(3) + d(1,3)*x(2) + d(2,3)*x(1) + d(3,3)*x(13) + d(4,3)*x(12) + d(5,3)
% ceq(4) =-x(4) + d(1,4)*x(3) + d(2,4)*x(2) + d(3,4)*x(14) + d(4,4)*x(13) + d(5,4)
% ceq(5) =-x(5) + d(1,5)*x(4) + d(2,5)*x(3) + d(3,5)*x(15) + d(4,5)*x(14) + d(5,5)
%
% ceq(10)=-x(10) + d(1,10)*x(9) + d(2,10)*x(8) + d(3,10)*x(20) + d(4,10)*x(19) + d(5,10)

%-----
% ***** GRADIENTE DE LAS RESTRICIONES DEL MODELO DIFUSO *****

%for jj=3:N
% ceq(jj)=-x(jj) + d(1,jj)*x(jj-1) + d(2,jj)*x(jj-2) + d(3,jj)*x(N+jj) + d(4,jj)*x(N+jj-1) + d(5,jj);
%end

for jj=1:N

if jj==1
xx(1)=ax(5);
xx(2)=ax(1);
xx(3)=x(11);
xx(4)=ax(3);

xx(5)=1;
for j=1:2
ww(j)=exp(-0.5*(a(j,1)*(xx(1)-b(j,1)))^2)*exp(-0.5*(a(j,2)*(xx(2)-b(j,2)))^2) * exp(-0.5*(a(j,3)*(xx(3)-b(j,3)))^2)*exp(-
0.5*(a(j,4)*(xx(4)-b(j,4)))^2);
end

for j=1:2
for k=1:4
if k==3
Dw(j,k)=-a(j,k)^2*(xx(k)-b(j,k))*ww(j);
else
Dw(j,k)=0;
end
end
end
end

%-----

if jj==2
xx(1)=x(1);
xx(2)=ax(5);
xx(3)=x(12);
xx(4)=x(11);

xx(5)=1;
for j=1:2
ww(j)=exp(-0.5*(a(j,1)*(xx(1)-b(j,1)))^2)*exp(-0.5*(a(j,2)*(xx(2)-b(j,2)))^2) * exp(-0.5*(a(j,3)*(xx(3)-b(j,3)))^2)*exp(-
0.5*(a(j,4)*(xx(4)-b(j,4)))^2);
end

```









```

w1(k)=exp(-0.5*(a(k,1)*( x(1)-b(k,1)))^2)*exp(-0.5*(a(k,2)*(ax(5)-b(k,2)))^2) *exp(-0.5*(a(k,3)*(x(12)-b(k,3)))^2)*exp(-
0.5*(a(k,4)*(x(11)-b(k,4)))^2);
end
d(j,1)=(g(1,j)*w0(1) + g(2,j)*w0(2) )/( w0(1)+w0(2) );
d(j,2)=(g(1,j)*w1(1) + g(2,j)*w1(2) )/( w1(1)+w1(2) );
end
%-----
for i=3:10
for k=1:2
w(k)=exp(-0.5*(a(k,1)*x(i-1)-b(k,1)))^2)*exp(-0.5*(a(k,2)*x(i-2)-b(k,2)))^2 * exp(-0.5*(a(k,3)*x(N+i)-b(k,3)))^2)*exp(-
0.5*(a(k,4)*x(N+i-1)-b(k,4)))^2);
end
for j=1:5
d(j,i)=(g(1,j)*w(1) + g(2,j)*w(2))/(w(1)+w(2));
end
end

%-----

%-----
% restricciones del MODELO DIFUSO      j=1,...,10
% ceq(j)=-y(t+j) + d(1,j)*y(t+j-1)+d(2,j)*y(t+j-2) + d(3,j)*u(t+j-1)+ d(4,j)*u(t+j-2) + d(5,j)
% ceq(0)=-y(t) + d(1,0)*y(t-1) +d(2,0)*y(t-2) + d(3,0)*u(t-1) + d(4,0)*u(t-2) + d(5,0)
%-----
% ceq(1)=-y(t+1) + d(1,1)*y(t) + d(2,1)*y(t-1) + d(3,1)*u(t) + d(4,1)*u(t-1) + d(5,1)
ceq(1)=-x(1) + d(1,1)*ax(5) + d(2,1)*ax(1) + d(3,1)*x(11) + d(4,1)*ax(3) + d(5,1);
%-----
% ceq(2)=-y(t+2) + d(1,2)*y(t+1) + d(2,2)*y(t) + d(3,2)*u(t+1) + d(4,4)*u(t) + d(5,2)
ceq(2)=-x(2) + d(1,2)*x(1) + d(2,2)*ax(5) + d(3,2)*x(12) + d(4,2)*x(11) + d(5,2);
%-----
% ceq(3)=-y(t+3) + d(1,3)*y(t+2) + d(2,3)*y(t+1) + d(3,3)*u(t+2) + d(4,3)*u(t+1) + d(5,3)
% ceq(4)=-y(t+4) + d(1,4)*y(t+3) + d(2,4)*y(t+2) + d(3,4)*u(t+3) + d(4,4)*u(t+2) + d(5,4)
% ceq(5)=-y(t+5) + d(1,5)*y(t+4) + d(2,5)*y(t+3) + d(3,5)*u(t+4) + d(4,5)*u(t+3) + d(5,5)
%-----
% ceq(10)=-y(t+10) + d(1,10)*y(t+9) + d(2,10)*y(t+8) + d(3,10)*u(t+9)+ d(4,10)*u(t+8) + d(5,10)
%-----
% ceq(3)=-x(3) + d(1,3)*x(2) + d(2,3)*x(1) + d(3,3)*x(13) + d(4,3)*x(12) + d(5,3)
% ceq(4)=-x(4) + d(1,4)*x(3) + d(2,4)*x(2) + d(3,4)*x(14) + d(4,4)*x(13) + d(5,4)
% ceq(5)=-x(5) + d(1,5)*x(4) + d(2,5)*x(3) + d(3,5)*x(15) + d(4,5)*x(14) + d(5,5)
%-----
% ceq(10)=-x(10) + d(1,10)*x(9) + d(2,10)*x(8) + d(3,10)*x(20) + d(4,10)*x(19) + d(5,10)

for j=3:N
ceq(j)=-x(j) + d(1,j)*x(j-1) + d(2,j)*x(j-2) + d(3,j)*x(N+j) + d(4,j)*x(N+j-1) + d(5,j);
end

%restricciones del CONTROL PI      j=1,...,11
% ceq(N+j)=-u(t+j-2)+u(t+j-1) + beta*r(t+j-2)-alfa*r(t+j-1) -beta*y(t+j-2)+alfa*y(t+j-1)
%-----
% ceq(N+1)=-u(t-1)+u(t) + beta*r(t-1)-alfa*r(t) -beta*y(t-1)+alfa*y(t)
% ceq(N+2)=-u(t)+u(t+1) + beta*r(t)-alfa*r(t+1) -beta*y(t)+alfa*y(t+1)
% ceq(N+3)=-u(t+1)+u(t+2) + beta*r(t+1)-alfa*r(t+2) -beta*y(t+1)+alfa*y(t+2)
%-----
% ceq(N+11)=-u(t+9)+u(t+10) + beta*r(t+9)-alfa*r(t+10) -beta*y(t+9)+alfa*y(t+10)

%-----
% ceq(N+1)=-ax(3)+x(11) + beta*ax(6)-alfa*x(22) -beta*ax(1)+alfa*ax(5)
% ceq(N+2)=-x(11)+x(12) + beta*x(22)-alfa*x(23) -beta*ax(5)+alfa*x(1)
% ceq(N+3)=-x(12)+x(13) + beta*x(23)-alfa*x(24) -beta*x(1)+alfa*x(2)
%-----
% ceq(N+11)=-x(20)+x(21) + beta*x(31)-alfa*x(32) -beta*x(9)+alfa*x(10)
%-----

ceq(N+1)=-ax(3)+x(11) + beta*ax(6)-alfa*x(22) -beta*ax(1)+alfa*ax(5);
ceq(N+2)=-x(11)+x(12) + beta*x(22)-alfa*x(23) -beta*ax(5)+alfa*x(1);

for j=3:N+1
ceq(N+j)=-x(N+j-1)+x(N+j) + beta*x(2*N+j)-alfa*x(2*N+j+1) -beta*x(j-2)+alfa*x(j-1);
end

ceq(2*N+2)=-ax(3)+x(11) + x(33);

```

```
for j=2:N+1
ceq(2*N+j+1)=-x(N+j-1)+x(N+j) + x(3*N+j+2);
end

ceq=ceq';
```