

Índice general

1. Cuantización de campos libres	5
1.1. Introducción	5
1.2. Spin 0	7
1.2.1. Cuantización del campo escalar real.	7
1.2.2. Cuantización del campo escalar complejo	10
1.2.3. Relaciones de conmutación y otros invariantes.	12
1.2.4. Las simetrías discretas \mathcal{P} , \mathcal{C} y \mathcal{T} en el caso de campos escalares.	15
1.3. Spin $\frac{1}{2}$	16
1.3.1. Ecuación de Dirac. Notación básica.	16
1.3.2. Cuantización del campo de Dirac	20
1.3.3. Funciones invariantes asociadas al campo de Dirac.	23
1.3.4. Las simetrías discretas \mathcal{P} , \mathcal{C} y \mathcal{T} en el caso de campos fermiónicos.	24
1.3.5. PCT	28
1.4. Spin 1	29
1.4.1. Cuantización del campo vectorial real masivo.	29
1.4.2. Cuantización del campo electromagnético en el gauge de radiación	32
1.4.3. Cuantización covariante del campo electromagnético.	35
2. Interacciones	41
2.1. Acoplamiento electromagnético minimal	41
2.2. Algunos acoplamientos no-electromagnéticos sencillos	45

2.3. Definiciones y notación alrededor del concepto de isospin . . .	46
2.4. Lagrangianos invariantes bajo $SU(2)$	49
2.5. Acoplamiento universal (Yang-Mills) del mesón ρ	53
2.6. Campos de medida, de gauge o de Yang-Mills.	56
3. Teoría de Perturbaciones	61
3.1. En el cuadro de interacción	61
3.2. El operador de desplazamiento temporal $U(t, t')$	63
3.3. Teorema de Wick.	66
3.4. La matriz S en electrodinámica.	67
3.5. Scattering Compton.	70
3.6. Reglas de Feynman y el scattering Moller.	73
3.6.1. Sección eficaz y razón de decaimiento.	75
3.6.2. Sección eficaz diferencial en el scattering Compton.	77
3.6.3. Sección eficaz diferencial en el caso del scattering Moller.	80
3.6.4. Sobre el problema de las autoenergías.	82
3.6.5. Transiciones vacío-vacío: $\langle 0 S 0 \rangle$	85
3.6.6. Interacción con un campo electromagnético externo	86
3.6.7. Electrodinámica escalar.	87
4. Renormalización	89
4.1. Sobre el significado de la renormalización.	89
4.2. La masa desnuda y la masa física del mesón.	92
4.3. La masa desnuda y física del fermión.	96
4.4. Renormalización del vértice.	98
4.5. Renormalización de las líneas externas, de los campos y de la constante de acoplamiento.	100
4.6. Amplitudes renormalizada	102
4.7. La identidad de Ward en QED.	106
4.8. Renormalización del campo externo.	109

Capítulo 1

Cuantización de campos libres

1.1. Introducción

La teoría cuántica nació por la necesidad de cuantizar el campo electromagnético para poder describir en forma adecuada los fenómenos cuánticos de radiación. La teoría resultante es la electrodinámica cuántica y la partícula asociada al campo electromagnético es el fotón. Se dice que el fotón es *el cuanto de radiación electromagnética*. Hoy día todas las partículas elementales son descritas en principio como cuantos de un campo ad hoc.

Los campos que se utilizan para describir partículas de spin entero se cuantizan aplicando las mismas reglas de conmutación de Heisenberg que para un sistema con un número finito de grados de libertad. No se trata de un nuevo tipo de cuantización, o *segunda cuantización* como a veces se la llama, sino que es la misma cuantización ya estudiada en mecánica cuántica sólo que aplicada a campos. En esta misma sección se cuantizará un sistema muy simple de osciladores para mostrar cómo este sistema cuántico con infinitos grados de libertad posee estados estables que se interpretan como *partículas libres*.

El intento de hacer una mecánica cuántica relativista se frustra debido al problema de la existencia de estados con energía negativa implicado por la exigencia de que las ecuaciones de movimiento sean covariantes. A posteriori es posible comprender que esta dificultad se debe a que relatividad implica que cada partícula tiene asociada una antipartícula. Este gran de-

scubrimiento de Dirac llevó a concebir a las partículas elementales como estados compuestos por ellas mismas y los pares partícula antipartícula respectivos $e = e + ee\bar{e} + ee\bar{e}e\bar{e}\dots$ en un sentido que sólo se podrá entender mucho más adelante. Dice Heisenberg: *Creo que el descubrimiento más decisivo en conexión con las propiedades o la naturaleza de las partículas elementales fue el descubrimiento de la antimateria por Dirac. Aquel fue un hecho que aparentemente tenía que ver con el reemplazo del grupo de Galileo por el grupo de Lorentz. Creo que este descubrimiento de partículas y antipartículas por Dirac ha cambiado completamente toda nuestra visión de la física atómica. (...) Tan pronto como uno sabe que puede crear pares de acuerdo con la teoría de Dirac, entonces uno tiene que considerar a una partícula elemental como un sistema compuesto; porque virtualmente podría ser esta partícula más un par o esta partícula más dos pares etc., y así repentinamente toda la idea de una partícula elemental ha cambiado. Hasta ese momento pienso que cada físico había pensado sobre las partículas elementales en la línea filosófica de Demócrito, es decir, considerando que son siempre la misma cosa (...). Después del descubrimiento de Dirac todo se vió diferente porque ahora uno se podía preguntar por qué un protón tendría que ser siempre un protón, por qué un protón no podía a veces ser un protón más un par electrón positrón etc. Este nuevo concepto de las partículas elementales de ser un sistema compuesto me ha parecido desde el comienzo como un gran reto.*

Íntimamente ligado a la idea de una teoría cuántica de campos está también el hecho que el número de partículas elementales no se conserva. Así por ejemplo, se tiene procesos como

$$\begin{array}{rcl}
 \pi^0 & \rightarrow & \gamma + \gamma \\
 n & \rightarrow & e^- + p + \bar{\nu}_e \\
 e^+ + e^- & \rightarrow & \gamma + \gamma \\
 e^+ + e^- & \rightarrow & e^+ + e^- + \gamma + \gamma \\
 \Omega^- & \rightarrow & \Xi^0 + \pi^-
 \end{array}$$

Tratando un sistema de N partículas con la ecuación de Schrödinger este número es conservado. Sólo en forma artificial es posible introducir mecanismos que permitan que el número de partículas no se conserve en mecánica cuántica no relativista.

1.2. Spin 0

1.2.1. Cuantización del campo escalar real.

En mecánica cuántica ordinaria se cuantiza sistemas con un número finito, o al menos discreto, de grado de libertad. Aquí se verá el caso de un sistema con un continuo de grados de libertad y también se verá que el postulado de cuantización, o sea, las relaciones de conmutación entre las coordenadas generalizadas y los respectivos momentos conjugados canónicos, se mantienen idénticos, al menos en este caso del campo escalar.

Sea $\Phi(x)$ un campo escalar real libre cuya dinámica se determina a partir de la densidad lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} : (\Phi_{,\mu}(x)\Phi^{,\mu}(x) - \mu^2\Phi^2(x)) : \quad (1.2.1)$$

La correspondiente ecuación de campo es la ecuación de Klein-Gordon,

$$(\square + \mu^2)\Phi = 0$$

al que se impone condiciones de cuantización

$$\begin{aligned} [\Phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}; t)] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\Phi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{x}; t)] &= [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}; t)] = 0 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

donde el momento conjugado canónico de Φ se define en la forma usual,

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\Phi}(x)} = \dot{\Phi}.$$

Puesto que los operadores de campo obedecen ciertas relaciones de conmutación, no siempre es claro cómo se generaliza expresiones de teoría clásica a cuántica. Parte de esta ambigüedad es removida definiendo un cierto *orden normal*.

Bajo transformaciones homogéneas de Lorentz un campo escalar transforma de acuerdo a

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \Phi(\Lambda^{-1}x).$$

Además *cualquier* campo satisface la ley de transformación, bajo traslación,

$$e^{iPa}\Phi(x)e^{-iPa} = \Phi(x+a) \quad (1.2.3)$$

donde P es el generador de traslaciones del grupo de Poincaré, de donde se deduce que para cualquier campo se cumple,

$$[\Phi(x), P_\mu] = i\partial_\mu \Phi(x) \quad (1.2.4)$$

ecuación que tiene como caso particular la ecuación $[\Phi(x), P_0] = i\dot{\Phi}(x)$.

La densidad Hamiltoniana se define en la forma usual,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= : \pi(x)\dot{\Phi}(x) : - \mathcal{L}(x) \\ &= \frac{1}{2} : \left(\dot{\Phi}^2 + (\vec{\nabla}\Phi)^2 + \mu^2\Phi^2 \right) : \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

y la densidad de momento es

$$\vec{\mathcal{P}}(x) = - : \pi \vec{\nabla}\Phi :$$

Se reitera que la ordenación de los factores no importa mientras esté indicado que se trata de productos en orden normal, $: AB := BA :$

Puesto que Φ es una solución de la ecuación de Klein-Gordon puede ser escrito como una superposición del conjunto completo de soluciones de onda plana definidos por

$$f_{\vec{p}}^n = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} e^{-in(\omega_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} e^{-inpx}, \quad n = \pm 1 \quad (1.2.6)$$

En el espacio de funciones de \vec{x} expandido por estas ondas planas se define el producto escalar entre dos funciones, (f, g) por

$$(f, g) \equiv i \int (f^* \dot{g} - \dot{f}^* g) d^3x \quad (1.2.7)$$

Se puede demostrar que

$$\left(f_{\vec{p}}^n, f_{\vec{p}'}^{n'} \right) = n \delta_{nn'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.2.8)$$

La condición de que Φ sea real determina una relación entre los coeficientes,

$$\Phi(x) = \int d^3p \left\{ a(\vec{p}) f_{\vec{p}}^+(x) + a^\dagger(\vec{p}) f_{\vec{p}}^- \right\} \quad (1.2.9)$$

Los coeficientes de la expansión son operadores cuyas relaciones de conmutación están determinadas por las relaciones de cuantización de los

campos. Para deducirlas se usa una notación abreviada (con $a^+ = a$ y $a^- = a^\dagger$)

$$\Phi(x) = \sum_{n \pm 1} \int d^3 p a^n(\vec{p}) f_{\vec{p}}^n(x) \quad (1.2.10)$$

y puede demostrarse que

$$a_{\vec{p}}^{(n)} = n \left(f_{\vec{p}}^{(n)}, \Phi \right) \quad (1.2.11)$$

De lo anterior sigue que

$$\left[a^n(\vec{p}), a^{n'}(\vec{p}') \right] = n \delta_{nn'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.2.12)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} [a(\vec{p}), a(\vec{p}')] &= [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = 0 \\ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] &= \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

que son las relaciones de conmutación que satisfacen los operadores de creación y destrucción de partículas libres. Esto viene a mostrar la existencia de cuantos asociados a los campos, los que se comportan como partículas. Corresponden a los fonones de una red cristalina tridimensional de osciladores armónicos con la diferencia que la velocidad del sonido es reemplazada por la velocidad de la luz y además no existe una red discreta sino un continuo—el campo—que ha sido cuantizado. Nótese la estrecha relación que existe entre la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de un oscilador armónico.

Demuestre que

$$H = \int d^3 x \mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \int d^3 p \omega_{\vec{p}} : (a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})) : \quad (1.2.14)$$

El producto normal se define como el reordenamiento de operadores de creación y destrucción colocando a los operadores de creación a la izquierda de los operadores de destrucción.

Con esta definición se puede escribir H en la forma

$$H = \int d^3 p \omega_{\vec{p}} a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p})$$

El sentido de la ordenación normal es la siguiente. Si se considera el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional, el operador a es

$$a = \frac{\omega x + ip}{\sqrt{2\omega}}$$

y semejantemente se define a^\dagger . Ellos satisfacen $[a, a^\dagger] = 1$ viéndose que H puede escribirse,

$$H = \frac{1}{2}\omega(a^\dagger a + aa^\dagger) = \omega a^\dagger a + \frac{\omega}{2}$$

Bien se sabe que la energía del estado base es $\frac{\omega}{2}$, esto es $H|0\rangle = \frac{\omega}{2}|0\rangle$. Y en tres dimensiones es $3\omega/2$ y generalizando a n grados de libertad, el estado base tiene una energía $n\omega/2$ que diverge para nuestro sistema con un continuo de grados de libertad. Esto hace necesario redefinir el cero de la energía, de modo que $H|0\rangle = 0$ y es precisamente ésto lo que hace la definición del producto normal. Es importante notar que la diferencia entre un producto y el correspondiente producto normal es un *número clásico*, de modo que el carácter del operador considerado no se modifica.

1.2.2. Cuantización del campo escalar complejo

La cuantización del campo escalar complejo es muy similar a la del campo real. Existen dos formas equivalentes de hacer esta cuantización a partir de la densidad lagrangeana

$$\mathcal{L}(x) =: (\Phi_{,\mu}^\dagger(x)\Phi^\mu(x) - \mu^2\Phi^\dagger(x)\Phi(x)) : \quad (1.2.15)$$

La primera manera consiste en definir un momento conjugado para Φ y otro para Φ^\dagger que se denota π_Φ y π_Φ^\dagger y se procede a postular relaciones de conmutación a tiempos iguales como para el caso escalar teniendo en cuenta además que las variables relacionadas a Φ y Φ^\dagger conmutan a tiempos iguales, e.g., $[\Phi, \pi_\Phi^\dagger] = [\Phi, \Phi^\dagger] = [\Phi^\dagger, \pi_\Phi] = 0$.

Otra manera de cuantizar consiste primero en separar al campo en dos campos reales,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - i\Phi_2), \quad \Phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2) \quad (1.2.16)$$

lo que permite escribir la densidad lagrangiana en la forma de la suma de dos densidades lagrangianas para los campos reales Φ_i , $i = 1, 2$,

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} : (\Phi_{i,\mu}\Phi_i^\mu - \mu^2\Phi_i^2) :$$

Luego se procede a cuantizar tal como se hizo en la Sec. §1.2.1,

$$\begin{aligned} [\Phi_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{x}, t)] &= \delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\Phi_i(\vec{x}, t), \Phi_j(\vec{x}', t)] &= [\pi_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{x}', t)] = 0. \end{aligned}$$

Como estos campos satisfacen la ecuación de Klein-Cordon se los puede expandir en ondas planas,

$$\Phi_i(x) = \sum_{n=\pm 1} \int d^3 p a_i^n(\vec{p}) f_{\vec{p}}^n(x)$$

lo cual implica las siguientes ecuaciones de conmutación para las dos parejas de operadores de creación y destrucción,

$$\left[a_i^n(\vec{p}), a_j^{n'}(\vec{p}') \right] = n \delta_{n,-n'} \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

Pero los campos físicos son Φ y Φ^\dagger lo que nos obliga a definir operadores de creación y destrucción para esos campos,

$$a(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\vec{p}) - ia_2(\vec{p})), \quad b(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\vec{p}) + ia_2(\vec{p}))$$

y los correspondientes operadores de creación, con los cuales se puede escribir,

$$\Phi(x) = \int d^3 p (a(\vec{p}) f_{\vec{p}}^+(x) + b^\dagger(\vec{p}) f_{\vec{p}}^-(x)).$$

Como se ve este campo tiene dos cuantos, a los cuales están asociados dos parejas creación-destrucción: (a^\dagger, a) y (b^\dagger, b) , los que, como se verá, corresponden a partículas que, teniendo la misma masa, tiene carga opuesta. Tal como se calculó (1.2.14) ahora puede demostrarse que

$$H = \int d^3 p (a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}))$$

lo que muestra que efectivamente se tiene contribución de ambos tipos de cuantos a la energía total (que es positiva semidefinida) y ambos con el mismo $\omega_{\vec{p}}$ y por lo tanto con la misma masa.

Por otro lado se tiene que la densidad lagrangeana (1.2.15) es invariante bajo la transformación de gauge

$$\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi, \quad \Phi^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha} \Phi^\dagger$$

lo que implica que la siguiente corriente satisface una ley de continuidad,

$$j^\mu = -i : \left(\frac{\partial}{\partial \Phi_{,\mu}} \Phi - \frac{\partial}{\partial \Phi_{,\mu}^\dagger} \Phi^\dagger \right) := -i : (\Phi^{\dagger,\mu} \Phi - \Phi^{\mu} \Phi^\dagger) :$$

lo que permite definir la carga conservada

$$Q = e \int d^3x j^0(x) = e \int d^3p (a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})). \quad (1.2.17)$$

Ambos cuantos contribuyen con signo opuesto a la carga total, mostrándose así que las dos partículas tienen carga eléctrica opuesta. En realidad no es necesario que esta carga sea de origen eléctrico, puede ser cualquier tipo de carga discreta conservada como número bariónico, número leptónico etc.

— Problema: Demostrar (1.2.17).

1.2.3. Relaciones de conmutación y otros invariantes.

La forma canónica de cuantizar campos consiste en postular ciertas relaciones de conmutación a *tiempos iguales* entre los campos. Este postulado pareciera violar la covariancia que le corresponde tener a una teoría relativista, pero como se verá las relaciones de conmutación son perfectamente covariantes. En efecto,

$$\begin{aligned} & [\Phi(x), \Phi^\dagger(x')] \\ &= \sum_{n,n'} \int \int d^3p' d^3p \left\{ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] f_{\vec{p}}^+(x) f_{\vec{p}'}^-(x') + [b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}')] f_{\vec{p}}^-(x) f_{\vec{p}'}^+(x) \right\} \\ &= \int d^3p \{ f_{\vec{p}}^+(x) f_{\vec{p}}^-(x') - f_{\vec{p}}^-(x) f_{\vec{p}}^+(x') \} \\ &\equiv i\Delta(x - x'; \mu^2). \end{aligned}$$

Fácilmente se puede demostrar que otras expresiones para $i\Delta$ son

$$\begin{aligned} i\Delta(x, \mu^2) &= \int \frac{d^3p}{2\omega_p} (e^{-ipx} - e^{ipx}) \\ &= -i \int \frac{d^3p}{\omega_p} \sin px \\ &= \int d^4p e^{ipx} \varepsilon(p_0) \delta(p^2 - \mu^2) \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

— Problema Demostrar (1.2.18)

La función Δ tiene una interesante propiedad conocida con el nombre de *condición de microcausalidad*, y es que los campos conmutan a distancias tipo espacio,

$$[\Phi(x), \Phi^\dagger(x')] = 0 \quad \text{para} \quad (x - x')^2 < 0. \quad (1.2.19)$$

Primero se comprueba para el caso particular $t = t'$ directamente a partir de la expresión intermedia en (1.2.18) para el conmutador, ya que el integrando se convierte en una función impar del vector \vec{p} . Luego se nota que el conmutador es una función invariante como se aprecia de la última forma en (1.2.18) por lo que (1.2.19) vale en general. La última forma en forma (1.2.18) es invariante porque el delta de Dirac asegura que el cuadvectores p es tipo tiempo y esto implica que el signo de su componente temporal es un invariante bajo el grupo de Lorentz, excluida la inversión temporal como es usual.

Si se separa a Φ en sus partes de creación $\Phi^{(-)}$ y destrucción, $\Phi^{(+)}$,

$$\Phi = \Phi^{(+)} + \Phi^{(-)}$$

se puede estudiar separadamente los conmutadores $[\Phi^{(+)}, \Phi^{\dagger(-)}]$ y $[\Phi^{(-)}, \Phi^{\dagger(+)}]$. Ellos resultan ser

$$[\Phi^{(+)}(x), \Phi^{\dagger(-)}(x')] = \int d^3k f_{\vec{p}}^+(x) f_{\vec{p}}^-(x') \equiv \Delta^{(+)}(x - x'; \mu^2)$$

Función que también puede escribirse en la forma,

$$\Delta^{(+)}(x; \mu^2) = \int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{-ikx}$$

El otro conmutador es

$$\begin{aligned} [\Phi^{(-)}(x), \Phi^{\dagger(+)}(x')] &= - \int d^3k f_{\vec{p}}^-(x) f_{\vec{p}}^+(x') \\ &= -\Delta^{(+)}(x' - x; \mu^2) \\ &= \Delta^{(-)}(x - x'; \mu^2). \end{aligned}$$

De lo anterior es directo ver que

$$i\Delta(x - x') = \Delta^+(x - x') + \Delta^-(x - x')$$

y también,

$$\langle 0 | \Phi(x), \Phi^{\dagger}(x') | 0 \rangle = \Delta^+(x - x')$$

Puesto que Φ satisface la ecuación de KG es automático que

$$\begin{aligned} (\square + \mu^2)\Delta^+(x - x'; \mu^2) &= 0 \\ (\square + \mu^2)\Delta^-(x - x'; \mu^2) &= 0 \end{aligned}$$

Otra propiedad interesante de Δ es

$$\partial_0 \Delta(x)|_{t=0} = \delta^{(3)}(\vec{x})$$

Otra función invariante muy importante que se define es el *propagador de Feynman* para una partícula escalar,

$$i\Delta_F(x-x';\mu^2) = \langle 0 | T\Phi(x)\Phi^\dagger(x') | 0 \rangle$$

donde el producto cronológico T para campos bosónicos se define

$$\begin{aligned} T\Phi(x)\Phi^\dagger(x') &= \begin{cases} \Phi(x)\Phi^\dagger(x') & \text{si } x_0 > x'_0 \\ \Phi^\dagger(x')\Phi(x) & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases} \\ &= \theta(x_0 - x'_0)\Phi(x)\Phi^\dagger(x') + \theta(x'_0 - x_0)\Phi^\dagger(x')\Phi(x) \end{aligned}$$

De aquí resulta que

$$i\Delta_F(x) = \theta(x_0)\Delta^+(x) - \theta(-x_0)\Delta^-(x)$$

— Problema Demostrar que

$$i\Delta_F(x;\mu^2) = i \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (1.2.20)$$

De aquí resulta que

$$(\square + \mu^2)\Delta_F(x;\mu^2) = -\delta^{(4)}(x)$$

Finalmente se define las funciones

$$\begin{aligned} \Delta_R(x) &= -\theta(x_0)\Delta(x) \\ \Delta_A(x) &= \theta(-x_0)\Delta(x) \end{aligned}$$

— Problema: El producto temporal entre operadores bosónicos $\Phi_a(x_a)$, $a = 1, 2, \dots, N$ se define por

$$T[\Phi_1(x_1) \cdots \Phi_N(x_N)] = \sum_{\mathcal{P} \in S_N} \theta(x_{i_1}^0 - x_{i_2}^0) \theta(x_{i_2}^0 - x_{i_3}^0) \cdots \theta(x_{i_{N-1}}^0 - x_{i_N}^0) \Phi_{i_1}(x_{i_1}) \cdots \Phi_{i_N}(x_{i_N})$$

donde la suma al lado derecho es sobre las $N!$ permutaciones de los índices $(i_1 \cdots i_N)$, reordenamientos de $(1, 2, \dots, N)$

Demostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{i_\mu}} T[\Phi_1(x_1) \cdots \Phi_N(x_N)] &= T(\Phi_1, \mu(x_1)\Phi_2(x_2) \cdots \Phi_N(x_N)) + \\ &+ g^{0\mu} \sum \theta(x_{i_2}^0 - x_{i_3}^0) \cdots \theta(x_{i_{N-1}}^0 - x_{i_N}^0) \{ \delta(x_1^0 - x_{i_1}^0) [\Phi_1, \Phi_{i_2}] \Phi_{i_3} \Phi_{i_4} \cdots + \\ &+ \Phi_{i_2} \delta(x_1^0 - x_{i_3}^0) \Phi_{i_4} \cdots + \cdots \} \end{aligned}$$

Los Φ no son necesariamente campos, podrían representar derivadas de ellos, corrientes, etc.

1.2.4. Las simetrías discretas \mathcal{P} , \mathcal{C} y \mathcal{T} en el caso de campos escalares.

En esta sección se define operadores de paridad, conjugación de carga y de inversión temporal que actúan *sólo sobre los operadores de Fock* (creación y destrucción y que además dejan invariante al estado vacío). Los dos primeros se definen como operadores unitarios mientras que, como es usual, \mathcal{T} se define antiunitario.

El operador \mathcal{P} . Se exige que se cumpla,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\Phi(\vec{x},t)\mathcal{P}^{-1} &= \lambda_P\Phi(-\vec{x},t), \\ \mathcal{P}\mathcal{P}^\dagger &= 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}|0\rangle = |0\rangle\end{aligned}$$

Más explícitamente la primera de estas relaciones es

$$\int d^3p\{\mathcal{P}a(\vec{p})\mathcal{P}^{-1}f_{\vec{p}}^+(x) + \mathcal{P}b^\dagger(\vec{p})\mathcal{P}^{-1}f_{\vec{p}}^-(x)\} = \lambda_P \int d^3p\{a(\vec{p})f_{\vec{p}}^+(\vec{x},t) + b^\dagger(\vec{p})f_{\vec{p}}^-(-x,t)\}.$$

En la expresión se cambia la variable de integración de \vec{p} a $-\vec{p}$ y además se nota que

$$f_{-\vec{p}}^n(-\vec{x},t) = f_{\vec{p}}^n(x)$$

con lo cual se puede ahora comparar los coeficientes de los f^n a ambos lados ya que sus argumentos x y \vec{p} son iguales. Se obtiene,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}a(\vec{p})\mathcal{P}^{-1} &= \lambda_P a(-\vec{p}) \\ \mathcal{P}b^\dagger(\vec{p})\mathcal{P}^{-1} &= \lambda_P b^\dagger(-\vec{p})\end{aligned}\tag{1.2.21}$$

más las correspondientes relaciones que resultan al tomar el hemítico conjugado en (1.2.21). Hay que ver cuál es el efecto de \mathcal{P} en un estado de una partícula escalar:

$$\mathcal{P}|\vec{p}\rangle = \mathcal{P}a^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \lambda_P a^\dagger(-\vec{p})|0\rangle = \lambda_P |-\vec{p}\rangle$$

El operador \mathcal{C} . Esta vez se exige que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\Phi\mathcal{C}^{-1} &= \lambda_C\Phi^\dagger \\ \mathcal{C}\mathcal{C}^\dagger &= 1 \quad \mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle\end{aligned}$$

lo cual fácilmente conduce al resultado

$$\begin{aligned}\mathcal{C}a(\vec{p})\mathcal{C}^{-1} &= \lambda_C b(\vec{p}) \\ \mathcal{C}b^\dagger(\vec{p})\mathcal{C}^{-1} &= \lambda_C a^\dagger(\vec{p})\end{aligned}\tag{1.2.22}$$

lo que muestra claramente que el operador cambia partículas en sus correspondientes antipartículas.

El operador \mathcal{T} . Esta operación cambia t en $-t$ pero a la vez es necesario tomar complejo conjugado de la cantidad sobre la cual está actuando, lo que hace que \mathcal{T} no sea un operador lineal, pero sea factorizable en un operador lineal y unitario U por la operación $K = \text{tomar complejo conjugado}$,

$$\mathcal{T} = UK, \quad UU^\dagger = 1 \quad Kz = z^*K \quad (z = \text{número conjugado}) \quad (1.2.23)$$

y tal que

$$\mathcal{T}\Phi(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = \lambda_T\Phi(\vec{x}, -t).$$

Tal como en los casos anteriores se impone la última relación en detalle pero recordando que el factor K de \mathcal{T} afecta a las funciones f^n convirtiéndolas en $(f^n)^* = f^{-n}$ con lo cual,

$$\int d^3p\{\mathcal{T}a(\vec{p})\mathcal{T}^{-1}f_{\vec{p}}^-(x) + \dots\} = \lambda_T \int d^3p\{a(\vec{p})f_{\vec{p}}^+(\vec{x}, -t) + \dots\}$$

De aquí se deduce entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}a(\vec{p})\mathcal{T}^{-1} &= \lambda_T a(-\vec{p}) \\ \mathcal{T}b^\dagger(\vec{p})\mathcal{T}^{-1} &= \lambda_T b^\dagger(-\vec{p}) \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

que producen el mismo efecto sobre los operadores de Fock que \mathcal{P} como puede verse al comparar con (1.2.22). La diferencia está en que \mathcal{T} es antiunitario en el siguiente sentido,

$$\langle \mathcal{T}\alpha | \mathcal{T}\beta \rangle^* = (\langle U\alpha | |U\beta \rangle)^* = \langle U\alpha | U\beta \rangle^* = \langle \alpha | \beta \rangle^* = \langle \beta | \alpha \rangle$$

1.3. Spin $\frac{1}{2}$

1.3.1. Ecuación de Dirac. Notación básica.

La ecuación de Dirac es

$$(i \not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (1.3.25)$$

o bien

$$\bar{\psi}(x)(i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0$$

que en espacio de momento da las ecuaciones

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u(\vec{p}) &= 0 & (\not{p} + m)v(\vec{p}) &= 0 \\ \bar{u}(\not{p})(\not{p} - m) &= 0 & \bar{v}(\vec{p})(\not{p} + m) &= 0 \end{aligned}$$

Donde se está usando la siguiente notación

$$\begin{aligned} \partial &= \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} \quad \text{con} \quad \partial = (\partial_i) = \frac{\partial}{\partial x^i} \\ x^\mu &= (x^0, \vec{x}), \quad x_\mu = (x_0, -\vec{x}), \quad x = (x^i) \\ \gamma^\mu &= (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad \vec{\gamma} = (\gamma^i), \quad \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Cuando sea necesario usar una representación explícita de las matrices de Dirac normalmente se usará una de las dos representaciones que siguen,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & +\vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \quad (1.3.26)$$

o bien

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & +\vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.27)$$

Estas dos representaciones tienen varias propiedades en común,

$$\begin{aligned} \gamma_0^\dagger &= \gamma_0, & \vec{\gamma}^\dagger &= -\vec{\gamma}, & \gamma_5^\dagger &= \gamma_5 & \gamma_0^2 &= 1 & (\gamma^i)^2 &= -1 & \gamma_5^2 &= 1 \\ & & & & \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 &= \gamma_\mu \end{aligned}$$

Para referirnos colectivamente a las soluciones $u(\vec{p})$ y $v(\vec{p})$ se usará la notación

$$u^n = \begin{cases} u & \text{si } n = +1 \\ v & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

Pero es necesario aun otro índice para caracterizar totalmente a las cuatro soluciones linealmente independiente que existen. Se exige que las soluciones sean además autofunciones del operador proyector de spin (para ver más sobre esto se recomienda leer Bjorken y Drell, sec. 3.2).

$$\Sigma(s^\mu) = \frac{1 - \gamma_5 \gamma^\mu s_\mu}{2} \quad s^\mu p_\mu = 0, \quad s^2 = -1 \quad (1.3.28)$$

que tiene la propiedad

$$\Sigma^2 = \Sigma \Rightarrow \text{autovalores } 0, 1 \quad (1.3.29)$$

con el cual se define el índice s ($s = \text{cuadrivector } s^2 = 1, s^\mu p_\mu = 0$) de tal modo que

$$\Sigma(s)u_s^n(\vec{p}) = \delta_{ss'}u_s^n(\vec{p}) \quad , \quad \bar{u}_s^n(\vec{p})\Sigma(s) = \delta_{ss'}, \bar{u}_s n(\vec{p}). \quad (1.3.30)$$

Se elige las siguientes normalización para estos espinores,

$$\bar{u}_s^n(\vec{p})u_s^n(p) = n\delta_{nn'}, \quad \left(u_s^n(n\vec{p})\right)^\dagger u_s^n(n\vec{p}) = \frac{\omega p}{m}\delta_{nn'}, \delta_{ss'} \quad (1.3.31)$$

(al final se incluye una demostración de la segunda de estas expresiones)

Con ellos se puede definir los proyectores de energía,

$$\Lambda^n(\vec{p}) = \sum_s u_s^n(\vec{p})\bar{u}_s^n(\vec{p}) = \frac{n \not{p} + m}{2m} \quad (1.3.32)$$

los que satisfacen las relaciones siguientes,

$$\begin{aligned} \Lambda^+(\vec{p}) + \Lambda^-(\vec{p}) &= 1 \\ \Lambda^n(\vec{p})\Lambda^{n'}(\vec{p}) &= \delta_{n'n}\Lambda^n(\vec{p}). \end{aligned}$$

Se demostrará que

$$\gamma^0 u_s^n(\vec{p}) = n u_s^n(-\vec{p}). \quad (1.3.33)$$

Es claro que \vec{p} cambia en $-\vec{p}$ si se nota que la ecuación general para espinores

$$(\not{p} - nm)u^n(\vec{p}) = 0, \quad \bar{u}^n(\vec{p})(\not{p} - nm) = 0 \quad (1.3.34)$$

es satisfecha por $\gamma^0 u^n(\vec{p})$ con el mismo n pero con el signo de \vec{p} cambiado. Para ver que s no cambia se observa que

$$\Sigma(s^0, \vec{s})\gamma^0 = \gamma^0 \Sigma(-s^0, \vec{s}) \quad (1.3.35)$$

entonces

$$\Sigma(s)\gamma^0 u_s^n(-\vec{p}) = \gamma^0 \Sigma(-s^0, \vec{s})u_s^n(-p) \stackrel{*}{=} \gamma^0 u_s^n = (-\vec{p}) = \lambda u_{s'}^n(\vec{p}) \quad (1.3.36)$$

La igualdad $*$ es válida porque si $s^\mu p_\mu = 0$, como es necesario por definición de Σ , entonces $(-s^0, \vec{s})^\mu (p^0, -\vec{p})_\mu = 0$. En la última igualdad se ha utilizado el resultado previo de que $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, pero λ y s' deben aun determinarse. Pot

otro lado la expresión en el extremo izquierdo de (1.3.36) puede escribirse como

$$\lambda \Sigma(s) u_{s'}^n(\vec{p}) = \lambda \delta_{ss'} u_{s'}^n(\vec{p})$$

que debe ser igual a (1.3.36), mostrándose así que s no cambia. Finalmente se determina λ . Para ello se hará uso de las expresiones (1.3.30) para $p = 0$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{s'}^n \gamma^0 u_s^n &= \lambda \bar{u}_{s'}^n u_s^n = \lambda n \delta_{ss'} \\ &= u_{s'}^{n\dagger} u_s^n = \delta_{ss'} \end{aligned}$$

— Problema: Demostrar que

$$\bar{u}_s^n(\vec{p}) \gamma^\mu u_{s'}^n(\vec{p}) = \frac{p^\mu}{m} \delta_{ss'}$$

— Problema

- Demstrar que los proyectores de spin y de energía definidos en (1.3.28) y (1.3.32) conmutan.
- Desmostrar que los proyectos

$$P_a(\vec{p}) = \Lambda^n(\vec{p}) \Sigma(s)$$

donde $a = 1, 2, 3, 4$ para $(n, s) = (+1, +s); (+1, -s), (-s, s), (-1, -s)$ satisfacen

$$P_a(\vec{p}) p_b(\vec{p}) = \delta_{ab} P_a$$

- Encontrar la forma matricial de $\Sigma(s)$ para el sistema en reposo del electrón usando la representación (1.3.27) de las matrices de Dirac suponiendo que el spin está orientado en la dirección del eje z .

Demostración de (1.3.31): de (1.3.34) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= (n \not{p} - m) u_s^n(\vec{p}) = (n \omega_{\vec{p}} \gamma^0 - n \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - m) \mu_s^n(\vec{p}) \\ &\Rightarrow (n \omega_p \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}) u_s^n(n\vec{p}) = m u_s^n(n\vec{p}) \\ &\Rightarrow \bar{u}_s^n(n\vec{p}) (n \omega_p \gamma^0 - \vec{p} \cdot \gamma) = m \bar{u}_s^n(n\vec{p}) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$2m u_{s'}^{n'\dagger}(n'\vec{p}) u_s^n(n\vec{p}) = 2m u_{s'}^{-n'}(n'\vec{p}) \gamma^0 u_s^n(n\vec{p})$$

$$\begin{aligned}
&=^{(a)} \bar{u}_{s'}^{n'}(n'\vec{p})|\gamma^0(n\omega_{\vec{p}}\gamma^0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}) + (n'\omega_p\gamma^0 - \gamma\cdot p)\gamma^0|u_s^n(n\vec{p}) \\
&= (n+n')\omega_{\vec{p}}\bar{u}_{s'}^{n'}(n\vec{p}) \tag{b}
\end{aligned}$$

Pero $(n+n') = 2n\delta_{nn'}$, lo que permite hacer $n = n'$ en $\bar{u}u$ así se puede hacer uso de (1.3.31), entonces

$$\begin{aligned}
&= 2n\delta_{nn'}\omega_{\vec{p}}n\delta_{ss'} \\
&\Rightarrow u_{s'}^{n'\dagger}(n'\vec{p})u_s^n(n\vec{p}) = \frac{\omega}{m}\delta_{nn'}\delta_{ss'}
\end{aligned}$$

Lo que se ha demostrado en (b) es que

$$mu_{s'}^{n'\dagger}(n'\vec{p})u_s^n(n\vec{p}) = n\delta_{nn'}\omega_p\bar{u}_{s'}^n(n\vec{p})u_s^n(n\vec{p})$$

que prueba que para $m \rightarrow 0$ se debe tener $\bar{u}u = 0$

1.3.2. Cuantización del campo de Dirac

La idea es partir del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi : \tag{1.3.37}$$

y postular relaciones de cuantización tal como se hizo en §1.2.1 para el caso del campo escalar. Ocurre sin embargo que si se postula relaciones de conmutación como (1.2.2) la energía del sistema no es siempre positiva lo cual físicamente es inadmisibles. Se comienza justificando que es necesario postular relaciones de anticonmutación a través de un estudio del Hamiltoniano del sistema. De (1.3.37) se tiene que

$$\pi_{\psi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^{\dagger}(x)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= : \pi \dot{\psi} : - \mathcal{L} \\
&= : \psi^{\dagger}(-i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial} + \gamma^0m)\psi :
\end{aligned}$$

De aquí que

$$H = \int d^3x : \psi^{\dagger}(-i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial} + \gamma^0m)\psi :$$

Si ahora se utiliza la ecuación de Dirac (1.3.25) se obtiene

$$H = \int d^3x : \psi^{\dagger}i\partial_t\psi := \int d^3x : \bar{\psi}i\gamma^0\partial_0\psi : \tag{1.3.38}$$

Para poder continuar con el cálculo es necesario que se haga una expansión de ψ en ondas planas,

$$\psi(x) = \sum_{s=\pm 1} \int d^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_p}} \left\{ b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx + a_s^\dagger(\vec{p})} v_s(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad (1.3.39)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{s=\pm 1} \int d^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_p}} \left\{ a_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) e^{-ipx} + b_s^\dagger(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) e^{ipx} \right\}$$

lo que en notación compacta se escribe

$$\psi(x) = \sum_{n,s} \int d^3 p c_s^n(\vec{p}) f_{\vec{p}}^{ns}(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) = \sum_{n,s} \int d^3 p c_s^n(\vec{p})^\dagger f_{\vec{p}}^{-ns}(x) \quad (1.3.40)$$

donde

$$c_s^{+1} = b_s \quad y \quad c_s^{-1} = a_s^\dagger \quad (1.3.41)$$

y

$$f_{\vec{p}}^{ns}(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_1}} u_s^n(\vec{p}) e^{-inpx}, \quad \bar{f}_{\vec{p}}^{ns}(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_{\vec{p}}}} \bar{u}_s^n(p) e^{inpx}$$

que satisfacen las relaciones de ortogonalidad,

$$\int d^3 x \bar{f}_{\vec{p}'}^{n's'}(x) \gamma^0 f_{\vec{p}}^{ns}(x) = \delta_{nn'} \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}').$$

Con todo esto ahora se puede reemplazar (1.3.40) en (1.3.38) lo que da,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{mm'} \int d^3 x \int \int d^3 p d^3 p' f_{\vec{p}}^{m\bar{s}}(x) \gamma^0 (n\omega_p) f_{\vec{p}'}^{n's'}(x) : c_s^{n\dagger}(\vec{p}) c_{p'}^{n'}(p') : \\ &= \sum_{n,s} \int d^3 p n\omega_p : c_s^n(p)^\dagger c_s^n(\vec{p}) : \\ &= \sum_s \int d^3 p \omega_p : (b_s^\dagger(\vec{p}) b_s(\vec{p}) - a_s(\vec{p}) a_s^\dagger(\vec{p})) : \end{aligned} \quad (1.3.42)$$

Esta expresión es análoga a (1.2.14) con la importante diferencia que ahora hay un signo menos en ella. Se quiere, tal como antes, definir el producto normal de modo que los cuantos partícula y antipartícula contribuyan positivamente a la energía. Esto induce a definir el producto normal fermiónico en la forma

$$: a_s a_s^\dagger := -a_s^\dagger a_s. \quad (1.3.43)$$

Además se desea que el producto normal no haga sino redefinir el cero de energía pero no cambie su carácter como operador, en otras palabras, la diferencia entre (1.3.42) y la misma expresión sin producto normal debe ser un *número clásico*, lo que exige de acuerdo a (1.3.43) que se cuantice con relaciones de anticonmutación.

Se postula entonces que

$$\{\psi(\vec{x}, t), \pi_\psi(\vec{x}', t)\} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.3.44)$$

$$\{\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}', t)\} = \{\pi_\psi(\vec{x}, t), \pi_\psi(\vec{x}', t)\} = 0 \quad (1.3.45)$$

La primera de estas relaciones puede escribirse más explícitamente

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{\alpha\beta} \quad (1.3.46)$$

o bien,

$$\{\psi(\vec{x}, t), \bar{\psi}(\vec{x}', t)\} = \gamma^0 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.3.47)$$

La conclusión de que el campo de Dirac tenga que ser cuantizado con anticonmutadores es un notable resultado físico, ya que implica que los estados cuánticos de n fermiones idénticos son *antisimétricos* y por lo tanto un tal sistema obedece la estadística de Fermi-Dirac, resultado conocido experimentalmente mucho antes de este desarrollo teórico.

A partir de (1.3.44) y (1.3.45) es fácil demostrar que las únicas relaciones de anticonmutación no nulas entre los operadores de creación y que aparecen en (1.3.39) están contenidas en,

$$\{a_s(\vec{p}), a_s^\dagger(\vec{p}')\} = \{b_s(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.3.48)$$

Finalmente se explota el hecho que el Lagrangiano (1.3.37) es invariante bajo transformaciones de gauge de primera especie para deducir que existe una corriente de Noether conservada.

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.3.49)$$

donde

$$j^\mu = -ie : \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \psi \right) : e : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : .$$

Lo que permite calcular el operador de carga

$$\begin{aligned} Q &= e \int d^3x j^0 \\ &= e \int d^3x : \psi \gamma^0 \psi : \end{aligned}$$

que después de un cálculo muy simple se reduce a

$$Q = e \sum_s \int d^3 p |b_s^\dagger(\vec{p}) b_s(\vec{p}) - a_s^\dagger(\vec{p}) a_s(\vec{p})| \quad (1.3.50)$$

con lo que nuevamente se demuestra que partícula y antipartícula poseen cargas iguales pero de signo opuesto.

— Problema : Demostrar que j^μ definido en (1.3.49) se conserva.

— Problema : Demostrar (1.3.50)

— Problema : Demostrar que $[j^\mu(x), j^\nu(x')]$ se anula cuando $(x - x')$ es tipo espacio y que

$$\partial^\mu \{ \theta(x_0 - y_0) j_\mu(x) j_\nu(y) + \theta(y_0 - x_0) j_\mu(y) j_\nu(x) \} = 0.$$

— Problema : comprobar que

$$\begin{aligned} c_s^n(\vec{p}) &= \int d^3 x \bar{f}_p^{ns}(x) \gamma_0 \psi(x) \\ c_s^{n\dagger}(p) &= \int d^3 x \bar{\psi}(x) \gamma_0 f_p^{ns}(x) \end{aligned} \quad (1.3.51)$$

— Problema : Calcular

$$\frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), j^\mu \psi(x)] - : \bar{\psi} \partial^\mu \psi : .$$

— Problema : Cuantizar el campo de Dirac correspondiente a partículas de masa nula (neutrino).

— Problema : Demostrar que \mathcal{L}_ψ es esencialmente real y que la teoría definida por \mathcal{L}_ψ es invariante bajo conjugación de carga.

1.3.3. Funciones invariantes asociadas al campo de Dirac.

Las relaciones generales de anticonmutación son fácilmente deducibles a partir de las relaciones de anticonmutación de los operadores de creación y destrucción dadas en (1.3.48), ellas son,

$$\begin{aligned} iS(x - x'; m) &\equiv \{ \psi(x), \psi(x') \} \\ &= \sum_{ns} \int d^3 p f_{\vec{p}}^{ns}(x) \bar{f}_{\vec{p}}(x') \end{aligned}$$

que con la ayuda de (1.3.41) y ?? se puede escribir como

$$\begin{aligned} &= \sum_n \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_p} (n \not{p} + m) n e^{-in p(x-x')} \\ &= \sum_n \frac{d^3 p}{2\omega_p} n (i p + m) e^{-in p(x-x')} \end{aligned}$$

que al comparar con la primera de las relaciones (1.2.18) se ve que se puede escribir como

$$= (i \not{\partial} + m)i\Delta(x - x'; m).$$

Si se separa $\psi(x)$ en su parte de destrucción $\psi^{(+)}(x)$ y su parte de creación $\psi^{(-)}(x)$ se puede definir además

$$\begin{aligned} S^+(x - x'; m) &= \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(x')\} \\ S^-(x - x'; m) &= \{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(x')\} \end{aligned}$$

Es fácil demostrar que

$$S^\pm(x) = (i \not{\partial} + m)\Delta^\pm(x).$$

Finalmente se define el propagador de Feynman para fermiones libres,

$$iS_F(x - x'; m) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle$$

donde el producto temporal para fermiones se define

$$T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') = \theta(x_0 - x'_0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') - \theta(x'_0 - x_0) \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x)$$

Se puede obtener que

$$iS_F(x) = \theta(x_0)S^+(x) - \theta(-x_0)S^-(x)$$

— Problema : Demostrar que se cumple que

$$S_F(x) = (i \not{\partial} + m)\Delta_F(x; m)$$

De esta última relación se obtiene una expresión integral para el propagador fermiónico a partir de (1.2.20),

$$\begin{aligned} S_F(x; m) &= \int d^4 P \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ipx} \\ &= \int d^4 P \frac{e^{-ipx}}{\not{p} - m + i\epsilon}. \end{aligned}$$

1.3.4. Las simetrías discretas \mathcal{P} , \mathcal{C} y \mathcal{T} en el caso de campos fermiónicos.

En forma análoga a como se hizo en §1.2.4 se va a definir aquí operadores de paridad, conjugación de carga y de inversión temporal que

actúan sobre los operadores de Fock asociados a los fermiones y además dejan invariante el vacío.

Se definirán operadores tales que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\psi(\vec{x},t)\mathcal{P}^{-1} &= \lambda_P P\psi(-\vec{x},t) \\ \mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} &= C\bar{\psi}^T(x) \\ \mathcal{T}\psi(\vec{x},+t)\mathcal{T}^{-1} &= T\psi(\vec{x},-t)\end{aligned}\quad (1.3.52)$$

donde las matrices de 4×4 P , C y T son unitarias y su expresión explícita será deducida más abajo. Los operadores \mathcal{P} , \mathcal{C} son unitarios mientras \mathcal{T} tiene las propiedades explicadas en (1.2.23) de ser antiunitario y antilineal.

El operador \mathcal{P} . Primero se deducirá la matriz P y luego se verá la acción de \mathcal{P} sobre los operadores de Fock. Se multiplica la ec. (1.3.25) por \mathcal{P} por la izquierda y por \mathcal{P}^{-1} por la derecha y luego se aplica (1.3.52),

$$\begin{aligned}0 &= (i\not{\partial} - m)\mathcal{P}\psi(\vec{x},t)\mathcal{P}^{-1} \\ &= (i\partial_0\gamma^0 + i\vec{\partial}\cdot\vec{\gamma} - m)P\psi(-\vec{x},t)\end{aligned}$$

Se cambia \vec{x} por $-\vec{x}$ y además se multiplica por P^{-1} por la izquierda,

$$= (iP^{-1}\gamma^0 P\partial_0 - iP^{-1}\vec{\gamma}P\cdot\vec{\partial} - m)\psi(x)$$

que al comparar con la ecuación de Dirac se ve que debe cumplirse que

$$P^{-1}\gamma^0 P = \gamma^0 \quad , \quad P^{-1}\vec{\gamma}P = -\vec{\gamma}$$

lo que determina a P salvo una fase que queda a libre elección,

$$P = \gamma^0$$

Con este resultado se puede imponer (1.3.52) a la forma (1.3.50) del campo,

$$\sum_{ns} \int d^3p \mathcal{P}c_s^n(\vec{p})\mathcal{P}^{-1}f_{\vec{p}}^{ns}(x) = \lambda_P \sum_{ns} \int d^3p c_s^n(\vec{p})\gamma^0 f_{\vec{p}}^{ms}(-\vec{x},t)$$

Con ayuda de (1.3.33) es fácil ver que

$$\gamma^0 f_{\vec{p}}^{ms}(x) = n f_{-\vec{p}}^{ms}(-\vec{x},t)$$

lo que se aprovecha para reemplazar en el lado derecho de nuestra ecuación y además las variables mudas \vec{p} y s son cambiadas a $-p$ y $-s$ lo que lleva a concluir que

$$\mathcal{P}c_s^n(\vec{p})\mathcal{P}^{-1} = \lambda_P n c_{+s}^n(-p)$$

Más explícitamente (ver (1.3.41)) esto es,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}b_s(\vec{p})\mathcal{P}^{-1} &= \lambda_p b_{+s}(-\vec{p}) \\ \mathcal{P}a_s^+(\vec{p})\mathcal{P}^{-1} &= -\lambda_p a_{+s}^+(-p)\end{aligned}$$

más las relaciones que se obtienen de las dos anteriores tomando el hermítico conjugado.

El operador \mathcal{C} . Esta transformación ya tiene que haber sido discutida en un curso de mecánica cuántica relativista. La idea es definir una transformación que transforme el campo dado en uno análogo pero que describa las partículas como antipartículas y vice versa. Lo usual es partir considerando la ecuación de Dirac con acoplamiento electromagnético minimal,

$$(i \not{\partial} - m - e \Lambda)\psi = 0 \quad (1.3.53)$$

lo que conduce a la ecuación

$$0 = \bar{\psi}(-i \not{\partial} - m - e \Lambda)$$

Trasponiendo

$$0 = (-i \not{\partial}^T - m - e \Lambda^T)\bar{\psi}^T$$

multiplicando por C

$$= (-iC \not{\partial}^T C^{-1} - m - eC \Lambda^T C^{-1})C\bar{\psi}^T$$

Ahora se exige que esta ecuación coincida con (1.3.53), lo que implica que

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu$$

lo que implica según (1.3.26) y (1.3.27) que C conmuta con γ^1 y γ^3 y anti-conmuta con γ^0 y γ^2 . Esto fija a la matriz C salvo una fase,

$$C = i\gamma^0\gamma^2$$

Se verá inmediatamente cuál es el efecto de C sobre los espinores de espacio de momento. Se demostrará que

$$C\bar{u}_s^{nT}(\vec{p}) = e^{i\alpha(p,s)}u_s^{-n}(\vec{p}) \quad (1.3.54)$$

donde α es una fase que no se determinará. Primero se demuestra que n cambia de signo. Se nota que

$$\not{p}C\bar{u}_s^{nT}(\vec{p}) = -C \not{p}^T \bar{u}_s^{nT}(\vec{p}) = -C(\bar{u}_s^n(\vec{p}) \not{p})^T = -nmC\bar{u}_s^{nT}(\vec{p})$$

Comparando con (1.3.34) se ve que efectivamente el lado izquierdo de (1.3.54) se comporta como un espinor u^{-n} . Ahora se ve que s permanece invariante.

$$\Sigma(s')C\bar{u}_s^{nT}(\vec{p}) = C\Sigma^T(s')\bar{u}_s^{nT}(\vec{p}) = C(\bar{u}_s^n(\vec{p})\Sigma(s'))^T = \delta_{ss'}C\bar{u}_s^{nT}(s)$$

con lo que (1.3.54) queda demostrado. Con este resultado ahora es muy fácil demostrar que (1.3.52) implica que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}b_s(\vec{p})\mathcal{C}^{-1} &= a_s(\vec{p})e^{i\alpha(p,s)} \\ \mathcal{C}a_s^\dagger(\vec{p})\mathcal{C}^{-1} &= b_s^\dagger(\vec{p})e^{i\alpha(p,s)}\end{aligned}$$

El operador \mathcal{T} . Recordando que este operador tiene un factor K que toma el complejo conjugado de las cantidades con que U conmuta, entonces al aplicar a la ecuación de Dirac la inversión temporal resulta,

$$\begin{aligned}0 &= (-i\partial^* - m)\mathcal{T}\psi(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} \\ &= (-i\partial^0\gamma^{0*} - i\vec{\partial} \cdot \vec{\gamma}^* - m)T\psi(\vec{x}, -t)\end{aligned}$$

cambiando t en $-t$ y multiplicando por T^{-1}

$$0 = (iT^{-1}\gamma^{0*}T\partial^0 - iT^{-1}\vec{\gamma}^*T \cdot \vec{\partial} - m)\psi(x)$$

Por comparación con la ecuación de Dirac resulta que debe cumplirse que

$$\begin{aligned}T^{-1}\gamma^{0*}T &= \gamma^0 \\ &\Rightarrow T^{-1}\gamma_\mu^*T = \gamma^\mu \Rightarrow T^{-1}\gamma_\mu^T T = \gamma_\mu \\ T^{-1}\vec{\gamma}^*T &= -\vec{\gamma}\end{aligned}$$

Esto nos permite fijar la matriz T en

$$T = i\gamma^1\gamma^3$$

En forma análoga a como se ha procedido en los casos anteriores se puede demostrar que

$$Tu_s^n(\vec{p}) = e^{i\beta_n(p,s)}(u_{-s}^n(-\vec{p}, -s))^* \quad (1.3.55)$$

donde la fase tiene la propiedad

$$\beta_n(p,s) = \pi + \beta_n(-\vec{p}, -s) \quad (1.3.56)$$

debido a que $T^2 = 1$. Con esto se demuestra ahora que

$$\begin{aligned}Ub_s(\vec{p})u^{-1} &= -e^{i\beta_+(p,s)}b_{-s}(\vec{p}) \\ Ua_s(\vec{p})u^{-1} &= -e^{i\beta_-(p,s)}a_{-s}(\vec{p})\end{aligned} \quad (1.3.57)$$

1.3.5. PCT

Un resultado considerado fundamental en teoría cuántica de campos es el llamado teorema \mathcal{PCT} . Este teorema afirma que una teoría cuántica de campos definida por una densidad lagrangeana tal que

- i) es local (todos los campos dependen del mismo x), está en orden normal, esto es, $\mathcal{L} := \mathcal{L}, \mathcal{L}$ es hermítica y es covariante bajo transformaciones de Lorentz propias;
- ii) la teoría está cuantizada en la forma usual que conecta spin y estadística : campos con spin entero se cuantizan con conmutadores y los de spin semientero con anticonmutadores.

Tal teoría es dejada invariante por la transformación combinada \mathcal{PCT} :

$$\mathcal{T} \mathcal{P} \mathcal{L}(x) \mathcal{P}^{-1} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(-\vec{x}, -t).$$

(Ver Bjorken y Drell, sec. 15.14).

— Problema : Demostrar las relaciones (1.3.55) (1.3.56) y (1.3.57).

Finalmente se recuerda del curso de mecánica cuántica relativista que bajo una transformación de Lorentz propia, los espinores $\psi(x)$ transforman según

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda) \psi(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1} x').$$

La matriz S es tal que

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

y los Λ satisfacen

$$\Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\sigma = g_\sigma{}^\nu = \delta_\sigma{}^\nu$$

— Problema : Demostrar que bajo transformaciones de Lorentz que incluyen se tiene que

$\psi \bar{\psi}$	es escalar
$\bar{\psi} \gamma_5 \psi$	es pseudoescalar
$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$	es vector
$\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$	es pseudovector
$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$	es tensor de segundo rango antisimétrico

donde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

1.4. Spin 1

1.4.1. Cuantización del campo vectorial real masivo.

El campo que deseamos cuantizar ahora está descrito por la siguiente densidad lagrangiana libre,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} : F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} : + \frac{1}{2} M^2 : A^\mu A_\mu : \quad (1.4.58)$$

donde

$$F^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - A^{\nu\mu} \quad (1.4.59)$$

De aquí se deduce la ecuación de campo

$$\partial_\lambda F^{\mu\lambda} + M^2 A^\mu = 0 \quad (1.4.60)$$

y puesto que $F^{\mu\nu}$ es antisimétrico se deduce que

$$(\square + M^2) A^\mu = 0 \quad (1.4.61)$$

implica solo si $M \neq 0$ que

$$A^\lambda{}_{,\lambda} = 0 \quad (1.4.62)$$

La ec. (1.4.62) muestra que de las cuatro componentes del campo sólo tres son independientes. Se escoge a las componentes A^i como las variables dinámicas sobre las cuales se aplicará el postulado de cuantización. Usando la notación usual

$$(\vec{E})^i = F^{0i} \quad \text{y} \quad (\vec{B})^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk} \quad (1.4.63)$$

entonces (1.4.59) y (1.4.60) se pueden escribir en la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -M^2 A^0 \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.4.64)$$

$$\partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = M^2 \vec{A} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \partial_t \vec{A} \quad (1.4.65)$$

Las primeras ecuaciones (1.4.64) serán consideradas como definiciones de A^0 y \vec{B} y las dos últimas como las ecuaciones dinámicas para las variables \vec{A} y \vec{E} . Esto cobra especial sentido si notamos que los campos conjugados canónicos de los \vec{A} son precisamente $-\vec{E}$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = F_{0i} = -E^i \quad (1.4.66)$$

Ahora se puede calcular la densidad Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= - : \vec{A} \cdot \vec{E} : - \mathcal{L}(x) \\ &= \frac{1}{2} : (\vec{E}^2 + M^2 \vec{A}^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + \frac{1}{M^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2) : \end{aligned} \quad (1.4.67)$$

Viéndose que es una suma de cuadrados y por lo tanto positiva semidefinida.

Para cuantizar el campo vectorial se postula

$$[A^i(\vec{x}, t), -E^j(\vec{x}', t)] = i\delta^{ij}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.4.68)$$

$$[A^i, A^j]_{t=t'} = [E^i, E^j]_{t=t'} = 0 \quad (1.4.69)$$

— Problema: A partir de (1.4.64), (1.4.68) y $i\dot{O}(t) = [O(t), H]$ aplicado a \vec{A} y \vec{E} demostrar (1.4.65) donde H está dado por la integral sobre todo el espacio de la densidad Hamiltoniana (1.4.67)

Para proseguir como en los casos anteriores se debe dar una expansión del campo A^μ en ondas planas. Puesto que los A^μ satisfacen la ecuación de Klein-Gordon (1.4.61) se puede encontrar soluciones ondas planas proporcionales a $\exp(\pm ipx)$ tales que $p^2 = M^2$. Una solución onda plana general de (1.4.61) es

$$\varepsilon^\mu e^{\pm ipx}, \quad p^2 = M^2 \quad (1.4.70)$$

pero además debe satisfacerse (1.4.62) lo que exige que

$$\varepsilon^\mu p_\mu = 0 \quad (1.4.71)$$

El cuadrivector no debe satisfacer otra restricción que (1.4.71), lo que nos permite encontrar tres ε^μ linealmente independientes para formar un conjunto completo de soluciones, a los que se designa ε_i^μ ($i = 1, 2, 3$) y que se escoge ortonormales,

$$\varepsilon_i^\mu \varepsilon_{j\mu} = -\delta_{ij}. \quad (1.4.72)$$

Obviamente se trata de cuadrivectores tipo espacio ya que son ortogonales a p^μ que es tipo tiempo. La forma más general de expresar ε_i^μ en términos de tres trivectores ortonormales \vec{n}_i es

$$\varepsilon_i^\mu(\vec{p}) = \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{n}_i}{M}, \vec{n}_i + \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}_i}{M(M + \omega)} \vec{p} \right)^\mu, \quad (\omega_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 = M^2) \quad (1.4.73)$$

que satisface

$$\sum \varepsilon_i^\mu(\vec{p}) \varepsilon_j^\nu(\vec{p}) = \frac{k^\mu k^\nu}{M^2} - g^{\mu\nu} \quad (1.4.74)$$

Desde ahora se adoptará la siguiente convención para la elección de los vectores \vec{n}_i :

$$\vec{n}_1 \text{ y } \vec{n}_2 \quad \text{perpendiculares a } \vec{p}, \text{ y } \vec{n}_3 \text{ paralelo a } \vec{p}$$

con lo que (1.4.73) se expresa en la forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^\mu(\vec{p}) &= (0, \vec{n}_i)^\mu \text{ para } i = 1, 2; \\ \varepsilon_3^\mu(\vec{p}) &= (|\vec{p}|/M, \frac{\omega_k \vec{p}}{M|k|})^\mu \end{aligned} \quad (1.4.75)$$

Con todo esto podemos definir un sistema completo de soluciones de onda plana de las ecuaciones (1.4.61) y (1.4.62),

$$f_{\vec{p}i}^{\mu n}(x) = \varepsilon_i^\mu(\vec{p}) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}}} e^{-inkx} = \varepsilon_i^\mu(\vec{p}) f_{\vec{p}}^n(x) \quad (1.4.76)$$

que satisfacen

$$\begin{aligned} (f_{\vec{p}i}^n, f_{\vec{p}'j}^{n'}) &= \varepsilon_i^\mu(\vec{p}) \varepsilon_{j\mu}(\vec{p}') \int d^3x f_{\vec{p}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}'}^{n'}(x) \\ &= -n \delta_{mm'} \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (1.4.77)$$

La expansión de $A^\mu(x)$ en términos del conjunto completo de soluciones de ondas planas dado en (1.4.77) es

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^\mu(\vec{p}) (a^i(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{i\dagger}(\vec{p}) e^{ipx}) \\ &= \int d^3p \sum_{i=1}^3 \left(a^i(\vec{p}) f_{\vec{p}i}^{\mu+}(x) + a^{i\dagger}(\vec{p}) f_{\vec{p}i}^{\mu-}(x) \right) \end{aligned} \quad (1.4.78)$$

Tomando sólo las componentes espaciales se tiene \vec{A} . Haciendo uso de (1.4.65) se tiene \vec{B}

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \left[\sum_{i=1,2} \vec{\varepsilon}_i(\vec{p}) (a^i(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{i\dagger}(\vec{p}) e^{ipx}) + \frac{\omega_p}{M} \frac{p}{|\vec{p}|} (a^3(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{3\dagger}(\vec{p}) e^{ipx}) \right] \quad (1.4.79)$$

$$\vec{E}(x) = i \int d^3p \sqrt{\frac{\omega_p}{2(2\pi)^3}} \left[\sum_{i=1,2} \vec{\varepsilon}_i(\vec{p}) (a^i e^{-ipx} - a^{i\dagger} e^{ipx}) + \frac{M}{\omega} \frac{p}{|\vec{p}|} (a^3 e^{-ipx} - a^{3\dagger} e^{ipx}) \right] \quad (1.4.80)$$

Invirtiendo se obtiene

$$a^i(\vec{p}) = \int d^3x e^{ipx} \sqrt{\frac{\omega_p}{2(2\pi)^3}} \left\{ \vec{\varepsilon}_i(\vec{p}) \cdot \vec{A}(x) - \frac{i}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \vec{\varepsilon}_i(\vec{p}) \cdot \vec{E}(x) \right\} \quad (1.4.81)$$

$$a^3(\vec{p}) = \int d^3x e^{ipx} \sqrt{\frac{\omega_p}{2(2\pi)^3}} \left\{ \frac{M}{\omega_p} \frac{p}{|\vec{p}|} \cdot \vec{A}(x) - \frac{i}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \frac{\omega_p}{M} \frac{\vec{p} \cdot \vec{E}(x)}{|\vec{p}|} \right\} \quad (1.4.82)$$

más las correspondientes expresiones hermíticas conjugadas.

Fácilmente se deduce ahora que al igual que con los campos anteriores los únicos conmutadores no nulos entre operadores de creación y destrucción son

$$[a^i(\vec{p}), a^{j\dagger}(\vec{p}')] = \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (1.4.83)$$

Como es de esperar también se deduce que

$$H = \sum_{i=1}^3 \int d^3p \omega_p \vec{p} a^{i\dagger}(\vec{p}) a^i(\vec{p}) \quad (1.4.84)$$

Ahora se está en condiciones de calcular el conmutador general

$$\begin{aligned} i\Delta^{\mu\nu}(x-x'; M^2) &= [A^\mu(x), A^\nu(x')] \quad (1.4.85) \\ &= \sum_{i,j} \int_{n,n'} d^3p d^3p' [a^{in}(\vec{p}), a^{jn'}(\vec{p}')] \varepsilon_i^\mu(\vec{p}) \varepsilon_j^\nu(\vec{p}') f_{\vec{p}}^n(x) f_{\vec{p}'}^{n'}(x') \end{aligned}$$

por el conmutador en la integral vale $n\delta_{n-n'}\delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$ lo que permite hacer uso de (1.4.74) y así deducir finalmente que

$$i\Delta^{\mu\nu}(x-x'; M^2) = -\left(\frac{\partial^\mu \partial^\nu}{M^2} + g^{\mu\nu}\right) i\Delta(x-x'; M^2) \quad (1.4.86)$$

— Problema: Demostrar que el propagador del campo vectorial masivo es

$$\begin{aligned} i\Delta^{\mu\nu}(x-x'; M^2) &= \langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(x')|0\rangle \\ &= -\left(\frac{\partial^\mu \partial^\nu}{M^2} + g^{\mu\nu}\right) i\Delta_F(x-x'; M^2) \\ &\quad + \frac{1}{M^2} g^{\mu 0} g^{\nu 0} g^{(4)}(x-x') \quad (1.4.87) \end{aligned}$$

1.4.2. Cuantización del campo electromagnético en el gauge de radiación

El campo electromagnético $A^\mu(x)$ tiene cuatro componentes y sin embargo existen solo dos grados de libertad; dos modos de polarización transversal linealmente independientes; no existe la posibilidad de una polarización

longitudinal como en el caso masivo. Este exceso de componentes trae dificultades al problema de cuantizar el campo electromagnético. Se verá dos formas de cuantizar el campo electromagnético que son matemáticamente equivalente en lo que a teoría como un todo respecta, pero que tienen aspectos superficiales diferentes. El método que se verá en esta sección parece más físico pero resulta más difícil de utilizar mientras que el método que se presenta en la próxima sección es menos intuitivo pero, por ser manifiestamente covariante, es muy cómodo.

Se parte de la densidad lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} : F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} : \quad (1.4.88)$$

donde $F^{\mu\nu}$ tiene la definición dada en (1.4.59) y las ecuaciones de campo son las mismas que (1.4.64) y (1.4.65) sólo que aquí $M = 0$. A diferencia del caso masivo se tiene ahora la invariancia de gauge

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) \quad (1.4.89)$$

que permite elegir en particular el gauge de radiación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{y} \quad A^0 = 0. \quad (1.4.90)$$

Con esta elección de gauge se tiene que tanto \vec{A} como \vec{E} son campos transversales. En efecto, todo campo vectorial $\vec{V}(x)$ puede ser escrito como suma de una parte transversal y otra longitudinal,

$$V = V_t + V_\ell \quad (1.4.91)$$

donde

$$\begin{aligned} V_t^i &= (\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\nabla^2}) V^j \\ V_\ell^i &= \frac{\partial^i \partial^j}{\nabla^2} V^j \end{aligned} \quad (1.4.92)$$

con

$$\frac{1}{\nabla^2} V(\vec{x}) \equiv - \int \frac{V(\vec{x}')}{4\pi \|\vec{x} - \vec{x}'\|} d^3x' \quad (1.4.93)$$

ya que cumple que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_t = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{V}_\ell = 0. \quad (1.4.94)$$

Vemos que la parte longitudinal es proporcional a la divergencia de \vec{V} y puesto que \vec{E} tiene divergencia nula (ecuaciones de Maxwell) y también \vec{A} (por elección del gauge) entonces se cumple que

$$\vec{E} = \vec{E}_t \quad , \quad \vec{A} = \vec{A}_t \quad (1.4.95)$$

De esta manera se logra describir los campos \vec{A} y \vec{E} con sólo dos componentes independientes ya que la componente longitudinal es siempre nula.

Es fácil ahora demostrar que el campo conjugado canónico de \vec{A}_t es $-\vec{E}$ con lo cual se obtiene la expresión para la densidad hamiltoniana,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= - : \vec{E}_t \cdot \vec{A}_t : - \mathcal{L}(x) \\ &= \frac{1}{2} : (\vec{E}^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2) :\end{aligned}\quad (1.4.96)$$

Parece natural a primera vista postular, para cuantizar, la relación de conmutación

$$[A_t^i(\vec{x}, t), -E_t^j(\vec{x}', t)] = i\delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (\text{imposible}) \quad (1.4.97)$$

sin embargo esto no es posible, ya que si se aplica el operador ∂_i a ambos lados se obtiene a la izquierda la divergencia de \vec{A} que es nula, mientras a la derecha se obtiene una derivada de la delta de Dirac que no es nula. Es por esto que no es posible hacer una cuantización canónica usual. Lo que se hace es exigir que a la derecha se tenga un *delta transversal de Dirac* en el sentido de (1.4.92), es decir, se postula,

$$[A_t^i(\vec{x}, t), -E_t^j(\vec{x}', t)] = (i\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\nabla^2})\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.4.98)$$

con lo que queda asegurado que la divergencia del lado derecho también es nula. Conjuntamente con (1.4.98) debe postularse como es usual, que

$$[A_t^i, A_t^j]_{t=t'} = [E_t^i, E_t^j]_{t=t'} = 0. \quad (1.4.99)$$

De aquí en adelante todo lo que sigue es semejante a los casos anteriores. Se expande \vec{A}_t solo en términos de los modos transversales de polarización $\vec{\epsilon}_1$ y $\vec{\epsilon}_2$ definidos en (1.4.75), con las funciones definidas en (1.4.76) recordando que en este caso la masa es nula y por lo tanto $\omega_p = |\vec{p}|$,

$$\vec{A}_t(x) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2|\vec{p}|(2\pi)^3}} \sum_{i=1,2} \vec{\epsilon}_i(\vec{p}) \left(a^i(\vec{p})e^{-ipx} + a^{i+}(\vec{p})e^{ipx} \right) \quad (1.4.100)$$

$$\vec{E}_t(x) = i \int d^3 p \sqrt{\frac{|p|}{2(2\pi)^3}} \sum_{i=1,2} \vec{\epsilon}_i(\vec{p}) \left(a^i(\vec{p})e^{-ipx} - a^{i+}(\vec{p})e^{ipx} \right) \quad (1.4.101)$$

que al invertir da

$$a^i(\vec{r}) = \int d^3 p \frac{\vec{\epsilon}_i(\vec{p})}{(2\pi)^{3/2}} \left(\sqrt{\frac{|p|}{2}} \vec{A}_t(x) - \frac{i}{\sqrt{2|p|}} E_t(x) \right) e^{ipx} \quad (1.4.102)$$

Con esta última expresión y su compleja conjugada se deduce que la única relación de conmutación no nula es

$$[a^i(\vec{p}), a^{j\dagger}(\vec{p}')] = \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (1.4.103)$$

Ahora se obtiene el Hamiltoniano en la forma usual y el conmutador general,

$$H = \sum_{i=1,2} \int d^3 p |\vec{p}| a^{i\dagger}(\vec{p}) a^i(\vec{p}) \quad (1.4.104)$$

y

$$[\vec{A}_i^i(x), \vec{A}_i^j(x')] = \left(\delta^{ij} - \frac{\delta^i \delta^j}{\nabla^2} \right) iD(x-x') \quad (1.4.105)$$

— Problema: demostrar que

$$D(x) \equiv \Delta(x; M^2 = 0) = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(x_0) \delta(x^2) \quad (1.4.106)$$

–Problema: demostrar (1.4.105).

1.4.3. Cuantización covariante del campo electromagnético.

Se acaba de ver la cuantización del campo electromagnético postulando las relaciones canónicas de conmutación estrictamente a los grados de libertad dinámicos. El precio ha sido perder la covariancia manifiesta que se desea en el formalismo. Por esto se ha ideado un procedimiento covariante de cuantización que se verá en esta sección y que es naturalmente el más usado cuando se trata de hacer cálculos prácticos.

La idea es tratar a las cuatro componentes A^μ en igual pie, como variables dinámicas y, sólo después de haber cuantizado, imponer en forma adecuada la restricción que caracteriza al gauge (covariante) de Lorentz. Para lograr esto es necesario elegir una densidad lagrangiana diferente a (1.4.88) puesto que aquella implica que el campo conjugado canónico de A^μ es $-F^{\mu 0}$ y, por lo tanto, A^0 tendría campo conjugado canónico nulo, siendo imposible su cuantización. Para poder tratar a los A^μ como variables canónicas independiente es necesario modificar las ecuaciones de Maxwell; el lagrangiano modificado es el *lagrangiano de Fermi*,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} : A^{\mu, \nu} A_{\mu, \nu} : \quad (1.4.107)$$

que da como ecuaciones de campo

$$\square A^\mu = 0 \quad (1.4.108)$$

que son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell $F_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ *tan solo en el gauge de Lorentz*. Esto se discutirá más adelante. Los grados extra de libertad así introducidos serán eliminados más adelante restringiéndose a un sector del espacio de Fock que se obtenga.

El campo conjugado canónico correspondiente a A^μ es

$$\pi_\mu = \frac{\partial}{\partial \dot{A}^\mu} = -A_{\mu,0} \quad (1.4.109)$$

por lo que se postula

$$[A^\mu(\vec{u}, t), \pi_\nu(\vec{x}', t)] = i g_\nu^\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.4.110)$$

junto con

$$[A^\mu, A^\nu]_{t=t'} = [\pi^\mu, \pi^\nu]_{t=t'} = 0. \quad (1.4.111)$$

Se nota inmediatamente que la densidad Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{A}^\mu \pi_\mu : -\mathcal{L} \\ &= -\frac{1}{2} : (\vec{\nabla} A^\mu \cdot \vec{\nabla} A_\mu + \dot{A}^\mu \dot{A}_\mu) : \end{aligned} \quad (1.4.112)$$

no tiene aspecto de ser positiva definida. En efecto no lo es.

Un conjunto completo de soluciones de la ecuación (1.4.108) está dado por

$$e_\lambda^\mu(\vec{p}) f_{\vec{p}}^n(x) \quad (1.4.113)$$

donde los $e_\lambda^\mu(\lambda = 0, 1, 2, 3)$ forman un conjunto ortonormal y completo en el espacio de dimensión $3 + 1$:¹

$$e_\lambda^\mu(\vec{p}) e_{\lambda'\mu}(\vec{p}) = g_{\lambda\lambda'} \quad (\text{ortonormalidad}), \quad (1.4.114)$$

$$e_\lambda^\mu(\vec{p}) g^{\lambda\lambda'} e_{\lambda'}^\mu(\vec{p}) = e_\lambda^\mu(\vec{p}) e^{\lambda\nu}(\vec{p}) = g^{\mu\nu} \quad (\text{completitud})$$

Si en un sistema de referencia arbitrario

$$e_0^\mu(\vec{p}) \equiv \eta^\mu, \quad \eta^2 = 1 \quad (1.4.115)$$

¹En lo sucesivo no se indicará explícitamente las sumas sobre λ

se escoge

$$e_3^\mu(\vec{p}) = \frac{p^\mu - (p\eta)\eta^\mu}{p\eta} \quad (1.4.116)$$

y normalmente se trabajará en el sistema de referencia en que

$$e_0^\mu(\vec{p}) = \eta^\mu = (1, \vec{0})^\mu \quad (1.4.117)$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} e_3^\mu(\vec{p}) &= (0, \frac{p}{|\vec{p}|})^\mu \\ e_\lambda^\mu(\vec{p}) &= (0, \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{p}))^\mu, \quad \lambda = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.4.118)$$

$$e_\lambda^\mu p_\mu = 0 \quad \text{si} \quad \lambda = 1, 2, \quad e_3^\mu p_\mu = -|\vec{p}|, \quad e_0^\mu p_\mu = |\vec{p}|$$

Con este conjunto completo de soluciones se hace la expansión,

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int d^3 p e_\lambda^\mu(\vec{p}) (a^\lambda(\vec{p}) f_{\vec{p}}^+(x) + a^{\lambda\dagger}(\vec{p}) f_{\vec{p}}^-(x)) \quad (1.4.119)$$

y se deduce que

$$\pi^\nu(x) = i \sum_{\lambda=0}^3 \int d^3 p |\vec{p}| e_\lambda^\nu(\vec{p}) (a^\lambda(\vec{p}) f_{\vec{p}}^+(x) - a^{\lambda\dagger}(\vec{p}) f_{\vec{p}}^-(x)) \quad (1.4.120)$$

que implica

$$a^{\lambda n}(\vec{p}) = i n e_\mu^\lambda(\vec{p}) \int d^3 x f_{\vec{p}}^{n*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x). \quad (1.4.121)$$

De lo anterior fácilmente se deduce que

$$[a^{\lambda n}(\vec{p}), a^{\lambda' n'}(\vec{p}')] = -n g^{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{-nn'} \quad (1.4.122)$$

equivalente

$$[a^\lambda(\vec{p}), a^{\lambda'\dagger}(\vec{p}')] = -g^{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [a^\lambda, a^{\lambda'}] = [a^{\lambda\dagger}, a^{\lambda'\dagger}] = 0 \quad (1.4.123)$$

El cálculo del conmutador general entre los campos es

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = -g^{\mu\nu} i D(x - x') \quad (1.4.124)$$

y el propagador de Feynman es

$$\begin{aligned} iD_F^{\mu\nu}(x - x') &= \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(x') | 0 \rangle \\ &= -i g^{\mu\nu} D_F(x - x') \\ &= -i g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (1.4.125)$$

— Problema: Demostrar (1.4.124) y (1.4.125). Nótase que las relaciones de conmutación entre los operadores de creación y destrucción (1.4.123) implican que el espacio de Fock tiene métrica indefinida. En efecto,

$$\langle 0|a^0(\vec{p})a^{0\dagger}(\vec{p}')|0\rangle = -\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.4.126)$$

y el Hamiltoniano que resulta es

$$H = \int d^3p |\vec{p}| (a^{1\dagger}(\vec{p})a^1(\vec{p}) + a^{2\dagger}(\vec{p})a^2(\vec{p}) + a^{3\dagger}(\vec{p})a^3(\vec{p}) - a^{0\dagger}(\vec{p})a^0(\vec{p})) \quad (1.4.127)$$

viéndose claramente que la energía no es positiva semidefinida. Los *fotones temporales* contribuyen con energías negativas y nada impide hasta ahora tener un estado con solo estos fotones y por lo tanto con $E < 0$. Ahora se verá que esta paradoja se resuelve eliminando los grado de sobra que presenta el formalismo: cuatro direcciones de polarización, existiendo físicamente solo dos.

Lo que ahora se hará es imponer la condición de Lorentz, es decir, restringir el espacio de Fock a aquel donde la condición de Lorentz se satisfaga. Nótase que imponer que los estados físicos satisfagan

$$\partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = 0 \quad \text{es imposible} \quad (1.4.128)$$

porque, por ejemplo.

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu A^\mu |0\rangle &= A_{,\mu}^{(-)\mu} |0\rangle \Rightarrow 0 = A_v^{(+)}(y) A_{,\mu}^{(-)\mu}(x) |0\rangle \\ &= \partial_\mu [A_v^{(+)}(y), A^{(-)\mu}(x)] |0\rangle = \partial_\nu D^{(+)}(y-x) |0\rangle \neq 0. \end{aligned} \quad (1.4.129)$$

Lo que se debe imponer es que los estados físicos cumplan

$$\partial_\mu A^{(+)\mu}(x) |\psi\rangle = 0 \quad (\text{condición de Gupta-Bleuler}) \quad (1.4.130)$$

En particular el estado vacío cumple trivialmente esta condición y además la condición de Lorentz se cumple entre estados físicos,

$$\langle \psi' | A_{,\mu}^\mu | \psi \rangle = 0. \quad (1.4.131)$$

Al imponer la condición (1.4.130) en más detalle se obtiene

$$\partial_\mu A^{(+)\mu}(x) |\psi\rangle = \int d^3p e_\lambda^\mu(\vec{p}) a^\lambda(\vec{p}) f_{\vec{p}}^+(x) (-ip_\mu) |\psi\rangle = 0 \quad (1.4.132)$$

Puesto que los $f_{\vec{p}}^n$ forman un conjunto ortonormal, esto implica que los coeficientes de estas funciones son cada uno separadamente nulos,

$$p_{\mu} e_{\lambda}^{\mu}(\vec{p}) a^{\lambda}(\vec{p}) |\psi\rangle = 0 \quad \forall \vec{p} \quad (1.4.133)$$

pero de (1.4.118) se desprende que $p_{\mu} e_1^{\mu}(\vec{p}) = p_{\mu} e_2^{\mu}(\vec{p}) = 0$ y además $p_{\mu} e_0^{\mu}(\vec{p}) = -p_{\mu} e_3^{\mu}(\vec{p}) \neq 0$, por lo tanto (1.4.133) implica que

$$(a^3(\vec{p}) - a^0(\vec{p})) |\psi\rangle = 0 \quad (1.4.134)$$

lo cual dice que los estados físicos se caracterizan por tener igual número de *fotones longitudinales* que de *fotones tipo tiempo*,

$$\langle \psi' | a^{3\dagger}(\vec{p}) a^3(\vec{p}) | \psi \rangle = \langle \psi' | a^{0\dagger}(\vec{p}) a^0(\vec{p}) | \psi \rangle \quad (1.4.135)$$

Esto último permite escribir el Hamiltoniano (1.4.104) en la forma

$$H = \sum_{\lambda=1,2} \int d^3 p |\vec{p}| (a^{\lambda\dagger}(\vec{p}) a^{\lambda}(\vec{p})) \quad (1.4.136)$$

que coincide con (1.4.84).

Brevemente se menciona que

$$\mathcal{P} A_{\mu}(\vec{x}, t) \mathcal{P}^{-1} = A^{\mu}(-\vec{x}, t) \quad (\mu \uparrow^{\mu}), \quad (1.4.137)$$

$$\mathcal{C} A^{\mu}(x) \mathcal{C}^{-1} = -A^{\mu}(x), \quad (1.4.138)$$

$$\mathcal{T} A_{\mu}(\vec{x}, t) \mathcal{T}^{-1} = A^{\mu}(\vec{x}, -t), \quad (\mu \uparrow^{\mu}). \quad (1.4.139)$$

Capítulo 2

Interacciones

2.1. Acoplamiento electromagnético minimal

Históricamente la primer teoría cuántica de campos estudiada fue electrodinámica, entendida principalmente como la interacción de fotones y electrones. Es una teoría extraordinariamente precisa y exitosa aún cuando matemáticamente no es del todo estética. Buena parte de las aplicaciones prácticas que se hagan en el curso serán electrodinámica cuántica. Por ahora la veremos solo como un ejemplo de los tantos casos de interacción que se pueden definir.

Se ha inventado muchas interacciones entre campos cuánticos, pero pocos tienen una motivación tan bella como el llamado *acoplamiento electromagnético minimal*.

Supongamos que tenemos una densidad lagrangiana \mathcal{L}_0 función de un cierto campo ϕ y sus primeras derivadas $\phi_{,\mu}$ de modo que \mathcal{L}_0 es invariante bajo la transformación de gauge de primera especie

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger \quad (2.1.1)$$

y similares transformaciones para las derivadas. El campo ϕ puede ser cualquier tipo de campo no hermítico: escalar, espinor, etc. La invariancia se expresa en la forma,

$$\mathcal{L}_0(\phi, \phi_{,\mu}) = \mathcal{L}_0(e^{i\alpha} \phi, e^{i\alpha} \phi_{,\mu}). \quad (2.1.2)$$

La transformación de fase (2.1.1) es la misma en todos los puntos x . El concepto de campos e interacciones locales, sin embargo, está asociado con una propagación hacia puntos vecinos y *sin* influencia alguna a

distancia. La transformación de simetría (2.1.1) es contraria al concepto de localidad y es plausible tratar de investigar la posible invariancia de una teoría modificada bajo transformaciones de gauge de segunda especie: $\exp(i\alpha(x))$, donde $\alpha(x)$ es una función arbitraria de x . Notamos inmediatamente que

$$\phi_{,\mu} \rightarrow (e^{i\alpha(x)}\phi)_{,\mu} = e^{i\alpha(x)}\phi_{,\mu} + i\alpha_{,\mu}e^{i\alpha(x)}\phi$$

por lo que ya no se tendrá una invariancia de $\mathcal{L}_0(\phi, \phi_{,\mu})$. Si queremos forzar a que exista una invariancia bajo estas transformaciones locales debemos cambiar el segundo argumento de \mathcal{L}_0 , de modo que el nuevo objeto $\nabla_\mu\phi$ sí tenga la ley de transformación indicada en (2.1.2),

$$\nabla_\mu\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\nabla_\mu\phi \quad (2.1.3)$$

A ∇_μ le llamaremos por esto, *derivada covariante* o *derivada de gauge*. Lo más sencillo es suponer que la derivada covariante tiene la forma $\partial_\mu + \Gamma_\mu$ donde el segundo término transforma bajo el grupo de Lorentz como un cuádrivector. Es claro que (2.1.3) garantiza, a partir de (2.1.2), la invariancia de

$$\mathcal{L}_0(\phi, \nabla_\mu\phi) \quad (2.1.4)$$

bajo transformaciones de gauge de segunda especie. Escribamos

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x) \quad (2.1.5)$$

y exijamos que (2.1.3) se cumpla, lo cual nos dará la ley de transformación de los A_μ bajo el grupo local de gauge,

$$\nabla'_\mu\phi' = (\partial_\mu + ieA'_\mu)\phi' = e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$$

Al reemplazar ϕ' por $\exp(i\alpha(x))\phi$ se deduce trivialmente que

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (2.1.6)$$

que es la típica transformación de gauge permitida por la teoría de Maxwell. La teoría original del campo ϕ se ha convertido en una teoría con un campo adicional $A^\mu(x)$. Para que la teoría sea completa se agrega a \mathcal{L}_0 un término libre para el campo $A_\mu(x)$ que sea invariante bajo el grupo local de gauge (salvo una cuádrivergencia). El acoplamiento que así se obtiene entre el campo ϕ y A^μ se denomina *acoplamiento electromagnético minimal*.

Ejemplo 1:

$$\mathcal{L} =: \bar{\psi}(i\partial - m)\psi : - \frac{1}{2} : A^{\mu,\nu}A_{\mu,\nu} - e : \bar{\psi} A\psi : \quad (2.1.7)$$

Este es el caso de electrodinámica cuántica. Si agregáramos un término $g : \psi \sigma^{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu}$: ya no se trataría de acoplamiento minimal. Experimentalmente no existe evidencia alguna que exista un acoplamiento extra de este último tipo.

Las ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned} (i \not{\partial} - m)\psi &= e : A \psi : \\ \square A^\mu &= e : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

De aquí se deduce fácilmente que existe

$$\partial_\mu \Gamma^\mu = 0 \quad (2.1.9)$$

$$j^\mu = e : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi :$$

Para poder cuantizar esta teoría de campos interactuando es necesario imponer la condición de Lorentz a la Gupta-Bleuler. Tenemos sin embargo el problema de que como los campos no son libres, no satisfacen la ecuación homogénea de Klein-Gordon y por lo tanto no se pueden escribir como superposición de ondas planas con amplitud independientes del tiempo y no existe una parte de creación y otra de destrucción. Esto parecería impedir la imposición de (1.4.130) pero no ocurre así porque la aplicar el operador ∂_μ sobre la ecuación (2.1.8) para A^μ se obtiene, gracias a (2.1.9), que

$$\square \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (2.1.10)$$

lo que sí permite escribir $A_{,\mu}^\mu$ como superposición de ondas planas aún cuando esto no se pueda hacer con el campo mismo.

La cuantización se logra entonces postulando (1.3.44), (1.3.45) (1.4.110), (1.4.111) y (1.4.130) y además que campos diferentes y sus derivadas conmutan a *tiempos iguales*:

$$0 = [\psi, A^\mu]_{t=t'} = [\psi, \dot{A}^\mu] = \text{etc} \quad (2.1.11)$$

Hacemos notar que puesto que el término de interacción en (2.1.7) no tiene derivadas las expresiones para los campos conjugados canónicos resultan ser las mismas ya obtenidas en el caso de campos libres.

Es interesante también darse cuenta que los campos pueden siempre expandirse formalmente en términos de ondas planas, solo que las amplitudes dependerán del tiempo. Si se usa estas expansiones para $t = 0$ en las

relaciones de conmutación canónicas (RCC) se obtendrá las *mismas relaciones de conmutación* que las obtenidas para los operadores de creación y destrucción. Sin embargo ya no cabrá la interpretación de antes puesto que tales operadores no crean autoestados del Hamiltoniano. Además a partir de estos operadores y sus RC para $t = 0$ no es posible obviamente deducir las RC generales de los campos ni tampoco se podrá escribir H como una simple suma de las contribuciones de cada estado de una partícula.

Mencionamos también que suele ser útil considerar un término adicional en (2.1.7) de la forma

$$e : \bar{\pi}(x) \lambda^{ext}(x) \psi(x) : \quad (2.1.12)$$

donde A_μ^{ext} es un campo externo clásico y no cuantizado. Esta aproximación puede ser usada en presencia de una fuente macroscópica de campo electromagnético o aún en el caso de un solo protón, que es mucho más pesado que los electrones.

Ejemplo 2: Si se aplica el concepto de acoplamiento minimal a la densidad lagrangiana del campo escalar complejo (1.2.15) obtenemos,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi^0 + ie : A^\mu (\phi \phi_{,\mu}^\dagger - \phi_{,\mu} \phi^\dagger) : + e^2 : A_\mu A^\mu \phi \phi^\dagger : - \frac{1}{y} A_{\mu,\nu} A^{\mu,\nu} \quad (2.1.13)$$

Este acoplamiento es de tipo derivativo (contiene derivadas) y además la corriente conservada esta vez es

$$j_\mu = ie : (\phi_{,\mu}^\dagger \phi - \phi_{,\mu} \phi^\dagger) : + 2e : A_\mu \phi^\dagger \phi : \quad (2.1.14)$$

por lo que el acoplamiento *no es de la forma* $j_\mu A^\mu$ sin embargo la ecuación de campo para A^μ es

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (2.1.15)$$

lo que permite imponer, tal como en el ejemplo anterior, la condición de Lorentz en la forma (1.4.130). Esto es un fenómeno general cuando existe acoplamiento minimal, la ecuación para A^μ es de la forma (2.1.15) donde j^μ es la corriente conservada. La cuantización se lleva a cabo en la forma usual postulando las RCC a tiempos iguales. Hay que tener presente que los campos conjugados canónicos correspondientes a ϕ y ϕ^\dagger no tienen la misma expresión que en el caso libre. Esto se debe al acoplamiento derivativo. Por ejemplo,

$$\pi_\phi = \dot{\phi}^+ - ieA^0 \phi^+.$$

— Problema: Encontrar la expresión del Hamiltoniano de interacción en este último ejemplo y comprobar que

$$\mathcal{H}_I \neq -\mathcal{L}_I \quad (2.1.16)$$

Los términos extra que tiene el \mathcal{H} de interacción con respecto al lagrangiano de interacción se llaman *términos dependientes de la normal*. Este nombre tiene que ver con el hecho que esos términos dependen usualmente de una componente cero, la componente normal al espacio de las componentes espaciales.

— Problema: Demostrar totalmente en general que si se tiene una teoría de campos cargados acoplados minimalmente con el campo electromagnético entonces se cumple que

$$\square A_\mu = j_\mu. \quad (2.1.17)$$

De paso ver que j_μ es proporcional a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu}$.

2.2. Algunos acoplamientos no-electromagnéticos sencillos

a) Nucleones con piones neutros.

Experimentalmente la paridad de los piones es $P = -1$ entonces el término de interacción más simple que se puede escribir y que no viole simetría de paridad es,

$$\mathcal{L}_I = ig : \bar{\psi} \gamma_5 \psi \phi : \quad (2.2.18)$$

donde ϕ es un campo escalar real, es decir, describe partículas de spin cero y carga nula, mientras ψ es un campo que describe partículas de spin 1/2. Este acoplamiento presenta muchas analogías con el acoplamiento electromagnético que aparece en (2.1.7).

Otro término de interacción entre estas partículas podría ser

$$\mathcal{L}_I = f : \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \partial^\mu \phi : \quad (2.2.19)$$

A este nivel existe una libertad muy grande para inventar términos de interacción. En (2.2.18) pudo, por ejemplo, escribirse en vez de $\gamma_5 \phi$,

$$\phi^{2n}, \quad \gamma_5 \phi [2n+1], \quad e^{ig\gamma_5} \phi - 1, \quad \frac{\gamma_5 \phi}{1-\lambda \phi^2} \quad (2.2.20)$$

Los dos últimos casos dan origen a lagrangianos no polinómicos.

b) Nucleones con mesones vectorialmente neutros.

Si la paridad de los mesones es negativa, entonces puede escribirse

$$\mathcal{L}_I = g : \bar{\psi} A \psi : \quad (2.2.21)$$

c) Otros acoplamientos.

$$: \phi_{,\mu} \phi A^A :, \quad : (\phi_{,\mu}^\dagger - \phi^\dagger \phi_{,\mu}) A^\mu \quad (2.2.22)$$

etc.

2.3. Definiciones y notación alrededor del concepto de isospin

Cuando se descubre nuevas leyes de conservación y/o nuevas simetrías en el mundo de las partículas elementales se incorporan nuevas restricciones sobre los posibles términos de interacción que podamos inventar. En 1932 Heisenberg introdujo el concepto de isospin en física nuclear, el que luego fue generalizado a partículas elementales. La idea surgió de observar la notable similitud entre el protón y el neutrón: mismo spin, casi igual masa, y fuerza nuclear que no distingue entre estas dos partículas. Las pequeñas diferencias eran atribuibles a otra interacción, la electromagnética. Heisenberg sugirió considerar al protón y al neutrón como dos estados de un mismo objeto: el *nucleón*. Estos dos estados debían pensarse como los dos estados del electrón de “spin-up” y “spin-down” y, tal como las interacciones entre electrones que no dependen del spin, las nucleares no distinguen entre estos dos estados: las fuerzas nucleares no distinguen entre los dos estados de *isospin* del nucleón. Así como el momento angular tiene asociada el álgebra de momento angular,

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k \rightarrow SO(3)$$

también se le asocia al concepto de isospin el álgebra de isospin,

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k \rightarrow SU(2). \quad (2.3.23)$$

El isospín pasa a ser un grado de libertad interno en el mismo sentido que el spin lo es. El nucleón tiene dos estados de isospín: p y n que corresponden a isospín total $1/2$, con $I_3 = +1/2$ y $-1/2$ respectivamente. Se dice

$I_3 =$	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$+1/2$	$+1$	$3/2$
$S = 0$		π^-		π^0		π^+	
			K^-		K^0		
				η			
$S = 1$		ρ^-		ρ^0		ρ^+	
				(ω, ϕ)			
		A_1^-		A_1^0		A_1^+	
$S = 1/2$			n		p		
				Λ			
		Σ^-		Σ^0		Σ^+	
$S = 3/2$	Δ^-		Δ^0		Δ^+		Δ^{++}
				Ω^-			

Figura 2.1: Estados de spin e isospin

que p y n forman un doblete de isospín. En general podrá haber partículas de isospín total I que forman un multiplete de multiplicidad $(2I + 1)$, cuyos miembros tendrán todos carga eléctrica diferente como se verá después. El concepto de isospín, sin embargo, solo tiene sentido mientras corresponda a una simetría y esto solo ocurre en las llamadas interacciones fuertes.

Multipletes de isospín se muestran en la figura 2.1.

La multiplicidad $(2I + 1)$ define la dimensión de la RI de $SU(2)$ en la cual están clasificados los estados correspondientes de isospín. Las matrices que representan a los operadores I_i para $I = 1/2$ y 1 son

$$I_i(1/2) = \frac{1}{2} \tau_i \quad (\text{matrices de Pauli}) \quad (2.3.24)$$

$$I_i^{(1)} = E_i \quad \text{donde} \quad (E_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \quad (2.3.25)$$

Nótese que los valores propios de I_3 en los dos casos anteriores son $1/2$, $-1/2$ y 1 , 0 , -1 respectivamente. En general el campo de una partícula de isospín I tendrá un índice de isospín para indicar los campos de cada miembro del multiplete. Convencionalmente estas componentes de isospín se escribirán en una columna y estos “campos columna” transformarán bajo $SU(2)$ según

$$U(\vec{a})\phi = e^{i\vec{a}\cdot\vec{I}}\phi, \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad (2.3.26)$$

donde los a_i son los parámetros de la transformación.

A) El campo de un nucleón se escribe como un doblete de isospín,

$$N(x) = \begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} \quad (\text{isoespín}) \quad (2.3.27)$$

cada componente es a sus vez un espinor de Dirac de cuatro componentes de spin.

Para formar escalares será también necesario introducir \bar{N} ,

$$\bar{N}(x) = N^\dagger \gamma_0 = (\bar{N}_1, \bar{N}_2). \quad (2.3.28)$$

El espinor $N(x)$ transforma infinitesimalmente como sigue,

$$N \rightarrow N' \approx \left(1 + \frac{i}{2} \delta \vec{a} \cdot \vec{\tau}\right) N$$

y entonces

$$\delta N(x) = +\frac{i}{2} \delta \vec{a} \cdot \vec{\tau} N(x) \quad (2.3.29)$$

y correspondientemente

$$\delta \bar{N}(x) = -\frac{i}{2} \bar{N}(x) \vec{\tau} \cdot \delta \vec{a}. \quad (2.3.30)$$

De aquí resulta trivialmente que

$$\delta(\bar{N} \tau_i N) = +\varepsilon^{ijk} \delta a_k \bar{N} \tau_j N. \quad (2.3.31)$$

B) Los tres piones, por tener spin cero son descritos por campos escalares. Los piones cargados son descritos por un solo campo escalar complejo y el pion neutro por un campo escalar hermítico. Es conveniente convertir el campo complejo en dos campos reales en la forma definida en (1.2.16) y llamar al campo real correspondiente a π^0 por ϕ_3 con lo cual podemos definir el *isovector* (real)

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{isovector}) \quad (2.3.32)$$

que transforma según

$$\vec{\phi}' = e^{i\vec{a} \cdot \vec{E}} \vec{\phi} \quad (2.3.33)$$

que implica, debido a (2.3.25), que

$$\delta\phi_i = \varepsilon^{ijk} \delta a_k \phi_j, \quad (2.3.34)$$

Es a menudo útil trabajar con el campo “matricial”

$$F = \vec{\phi} \cdot \vec{\tau} \quad (2.3.35)$$

cuya ley de transformación, inducida por (2.3.34) es

$$F' = e^{\frac{i}{2}\vec{a}\cdot\vec{\tau}} F e^{-\frac{i}{2}\vec{a}\cdot\vec{\tau}}. \quad (2.3.36)$$

Los parámetros de las transformaciones (2.3.33) y (2.3.36) no están concetados trivialmente, pero para transformaciones infinitesimales coinciden.

— Problema: Demostrar que (2.3.36) implica (2.3.34).

La transformación infinitesimal (2.3.34) es la que corresponde a todo isovector, como es el caso en (2.3.31) y también el caso de, por ejemplo, el campo

$$\vec{\Sigma}(x) = \begin{pmatrix} \Sigma_1(x) \\ \Sigma_2(x) \\ \Sigma_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^+ + \Sigma^-}{\sqrt{2}} \\ i \frac{\Sigma^+ - \Sigma^-}{\sqrt{2}} \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.37)$$

teniéndose entonces que bajo $SU(2)$

$$\delta\Sigma_i = \varepsilon^{ijk} \delta a_k \Sigma_j \quad (2.3.38)$$

Aquí las componentes no son reales puesto que se trata de espinores, pero bajo $SU(2)$ transforman como componentes de un vector, es decir, transformaciones reales.

2.4. Lagrangianos invariantes bajo $SU(2)$.

En esta sección sólo veremos un ejemplo, con el cual esperamos que la idea general quedará ilustrada. El ejemplo consistirá en construir un lagrangiano para los campos de piones y nucleones que sea invariante bajo $SU(2)$. Primero veamos cómo se escribe las partes libres en forma manifiestamente invariante bajo $SU(2)$.

El lagrangiano para los tres piones libres consiste de un lagrangiano para un campo escalar complejo, el que da la parte libre para los dos piones cargados y luego un lagrangiano de un campo real ϕ_3 que describe al

pion neutro,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\pi &= (\phi_{,\mu}^\dagger \phi'^\mu - \mu^2 \phi^\dagger \phi) + \frac{1}{2}(\phi_{3,\mu} \phi_3'^\mu - \mu^2 \phi_3^2) \\
&= \frac{1}{2}(\phi_1'^\mu \phi_{1,\mu} + \phi_2'^\mu \phi_{2,\mu} - \mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)) + \phi_{3,\mu} \phi_3'^\mu - \mu^2 \phi_3^2 \\
&= \frac{1}{2}(\vec{\phi}_{,\mu} \vec{\phi}'^\mu - \mu^2 \vec{\phi}^2).
\end{aligned} \tag{2.4.39}$$

Primero se hizo uso de (1.2.16) y luego de (2.3.32).

Para los nucleones es aún más simple,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_N &= \bar{\Psi}_p(i \not{\partial} - m)\Psi_p + \bar{\Psi}_n(i \not{\partial} - m)\Psi_n \\
&= \bar{N}(i \not{\partial} - m)N
\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

donde $N(x)$ es el isoespinor definido en (2.3.27).

Por cada uno de estos dos lagrangianos libres se tiene una corriente conservada de Noether como consecuencia de la invariancia bajo $SU(2)$. Estas corrientes transforman como cuadvectores bajo el grupo de Lorentz y como isovectores bajo $SU(2)$. En general ellas se definen a través de ¹

$$J_k^\mu = - \sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\mu}} \frac{\delta \phi_A}{\delta a_k} \tag{2.4.41}$$

donde los a_k son los tres parámetros que definen las transformaciones de $SU(2)$. Con \mathcal{L}_π se calcula,

$$\pi J_k^\mu = - \sum \frac{\partial \mathcal{L}_\pi}{\partial \phi_{i,\mu}} \frac{\delta \phi_i}{\delta a_k} = -(\phi_i'^\mu)(\epsilon^{ijk} \phi_j) = -(\vec{\phi}'^\mu \times \vec{\phi})_k. \tag{2.4.42}$$

Del mismo modo

$$N J_k^\mu = - \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}_N}{\partial N_{a,\mu}} \frac{\delta N_a}{\delta a_k} = -(i\bar{N}_a \gamma^\mu) \left(\frac{1}{2} \tau_k N\right)_a = \frac{1}{2} \bar{N} \gamma^\mu \tau_k N \tag{2.4.43}$$

Ahora corresponde construir términos de interacción que también sean $SU(2)$ - invariantes. El ejemplo más sencillo de término de interacción que aquí puede darse es,

$$\mathcal{L}_{N\pi} = ig \bar{N} \gamma_5 \vec{\tau} N \cdot \vec{\phi} = ig \bar{N} \gamma_5 F N \tag{2.4.44}$$

— Problema: Verificar que $\delta \mathcal{L}_{N\pi} = 0$ para una transformación infinitesimal de $SU(2)$. Además escribir explícitamente este lagrangiano de interacción en términos de los campos ϕ (complejo), $\phi_3 = \phi_0$, Ψ_p y Ψ_n .

¹Si \mathcal{L} depende de $\nabla_\mu \phi_A$ en lugar de $\phi_{A,\mu}$ entonces debe calcularse $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi_A}$ en (2.4.41)

El lagrangiano completo para esta teoría de interacciones nucleares es entonces

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{\pi N} \quad (2.4.45)$$

y la corriente de isospín es

$$\vec{J}^\mu = {}_\pi \vec{J}^\mu + {}_N \vec{J}^\mu \quad (2.4.46)$$

ya que al no haber términos con derivadas en la interacción, no hay contribución de esta parte a la corriente total. La cantidad conservada en el tiempo es el isospín total,

$$\vec{I} = \int d^3x \vec{J}^0 \quad (2.4.47)$$

Otro posible candidato para lagrangiano de interacción es

$$\mathcal{L}'_{N\pi} = ig \bar{N} \gamma_5 \gamma^\mu F'^{\mu} N \quad (2.4.48)$$

pero en este caso la corriente tendría un término extra.

Existen dos grupos uniparamétricos más que dejan invariante a (2.4.45) y que tiene gran importancia física. El primero corresponde a la simetría asociada con la conservación de la carga eléctrica y consiste en cambiar de fase todos los campos de partículas cargadas simultáneamente:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^\dagger \rightarrow \phi'^\dagger = e^{-i\alpha} \phi^\dagger, \quad \psi_p \rightarrow \psi_p' = e^{i\alpha} \psi_p \quad (2.4.49)$$

Los campos correspondientes a partículas neutras son dejados invariantes bajo este grupo. El segundo grupo uniparamétrico corresponde a una ley de conservación que hasta hoy parece estrictamente válida: la conservación del número bariónico. El “número bariónico” es un número cuántico que acarrear todos los fermiones conocidos que participan en las llamadas interacciones fuertes y es +1 ó -1. Para los bosones $B = 0$. La simetría asociada consiste en cambiar de fase a aquellos campos que acarrear número bariónico, en este caso, los protones y neutrones,

$$\psi_p \rightarrow \psi_p' = e^{i\beta} \psi_p, \quad \psi_n \rightarrow \psi_n' = e^{i\beta} \psi_n. \quad (2.4.50)$$

Hasta aquí entonces el grupo de simetría de \mathcal{L} es $SU(2)_I \times U(1)_{Q^e} \times U(1)_B$.

Asociado con estas dos últimas simetrías también existen dos corrientes, la corriente eléctrica y la corriente bariónica. Veamos cuales son sus formas explícitas usando nuevamente (2.4.41) donde ahora se toma

como último factor la variación del campo con respecto a los parámetros del grupo que se esté considerando. Puesto que tenemos un acoplamiento no derivativo las corrientes provendrán solamente de las partes libres y entonces podemos deducirlas separadamente para π y N .

Para $U(1)_Q$ se tiene

$$\begin{aligned}
 j_\pi^\mu &= - \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\pi}{\partial \phi_{,\mu}} \frac{\delta \phi}{\delta \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_\pi}{\partial \phi_{,\mu}^\dagger} \frac{\delta \phi^\dagger}{\delta \alpha} \right] \\
 &= [(\phi^{\dagger,\mu})(i\phi) + (\phi'^\mu)(-i\phi^\dagger)] \\
 &= i(\phi'^\mu \phi^\dagger - \phi^{\dagger,\mu} \phi) \\
 &= \frac{i}{2} \left\{ (\phi_1 - i\phi_2)'^\mu (\phi_1 + i\phi_2) - h.c. \right\} = - \left\{ \phi_1'^\mu \phi_2 - \phi_2'^\mu \phi_1 \right\}
 \end{aligned}$$

de donde

$$j_\pi^\mu = -(\vec{\phi}'^\mu \times \vec{\phi})_3. \quad (2.4.51)$$

La corriente eléctrica asociada al protón es

$$\begin{aligned}
 j_N^\mu &= - \frac{\partial \mathcal{L}_N}{\partial \psi_{p,\mu}} \frac{\delta \psi_p}{\delta \alpha} = -i\bar{\psi}_p \gamma^\mu (i\psi_p) = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p = \frac{1}{2} \bar{N} \gamma^\mu \frac{1 + \tau_3}{2} N \\
 &= \frac{1}{2} \bar{N} \gamma^\mu \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right) N
 \end{aligned} \quad (2.4.52)$$

Fácilmente se demuestra también que para $U(1)_B$

$$\begin{aligned}
 \pi J^\mu(B) &= 0 \\
 N J^\mu(B) &= \bar{N} \gamma^\mu N
 \end{aligned} \quad (2.4.53)$$

De donde se deduce que

$$J^\mu(Q) = \vec{J}_3^\mu + \frac{1}{2} J^\mu(B) \quad (2.4.54)$$

o, integrando la componente temporal sobre todo el espacio

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} B \quad (2.4.55)$$

— Problema: Demostrar que si se toma la interacción (2.4.48) en vez de (2.4.44) la ecuación (2.4.54) continua siendo válida y por lo tanto (2.4.55) también lo es.

La relación (2.4.55), válida para el sistema nucleones piones, no es universalmente válida. A las partículas que por primera se observó que

violaban esta ley se las llamó “extrañas” y se inventó un nuevo número cuántico, S ó “extrañeza”, de modo que debía cumplirse que

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S) = I_3 + Y/2. \quad (2.4.56)$$

Con el tiempo se descubrió que este nuevo número cuántico era siempre conservado en las interacciones fuertes, lo que llevó a su completa incorporación al language de la física de partículas. Más tarde se decidió cambiarlo por el concepto de hipercarga (Y). Después de varios intentos fallidos se llegó el año 1961 a concebir un nuevo grupo de simetría para dar cuenta de este nuevo número cuántico y las leyes que de él y los números cuánticos ya conocidos surgían. Este fue el grupo $SU(3)$ de Gell-Mann y Ne’eman. No veremos lagrangianos invariantes bajo este grupo de ocho parámetros.

2.5. Acoplamiento universal (Yang-Mills) del mesón ρ

En el estudio experimental de interacciones entre piones y nucleones se ha observado que el mesón ρ (isospín 1) juega un papel muy importante y además se ha podido comprobar que la constante de acoplamiento de ρ con piones y nucleones es prácticamente la misma. Esto lleva a hablar del acoplamiento “universal” del mesón ρ en analogía con el acoplamiento universal electromagnético, esto es, la constante de acoplamiento del fotón con cualquier partícula cargada es la misma: e . La universalidad del acoplamiento electromagnético está íntimamente ligado a la conservación de la corriente eléctrica. Yang y Mills se propusieron entonces buscar un acoplamiento de ρ a piones y nucleones a través de una corriente conservada, y esta corriente debía ser la corriente de isospín. Antes de considerar la interacción de ρ con piones y nucleones debía encontrarse un acoplamiento de ρ con sí mismo, ya que a diferencia del fotón que es neutro, el mesón ρ acarrea isospín. Será esto lo que veremos primero.

Los tres mesones ρ tienen spin uno, por lo que son descritos por campos vectoriales: de acuerdo a lo visto en §2.3 la descripción de ρ se hará con un campo cuadvectorial e isovectorial.

$$\vec{A}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{\rho^+}^\mu + A_{\rho^-}^\mu) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{\rho^+}^\mu - A_{\rho^-}^\mu) \\ A_{\rho^0}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^\mu \\ A_2^\mu \\ A_3^\mu \end{pmatrix} \quad (2.5.57)$$

El lagrangiano libre para este triplete de mesones ρ es

$$\mathcal{L}_\rho^0 = -\frac{1}{4}\vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{M^2}{2}\vec{A}^\mu \cdot \vec{A}_\mu. \quad (2.5.58)$$

La ecuación de campo libre que resulta de aquí es

$$-\vec{F}^{\mu\nu},_{\nu} = M^2\vec{A}^\mu \quad (2.5.59)$$

y la corriente de isospín calculada según (2.4.41) es

$$\vec{J}_0^\mu = -\vec{F}^{\mu\nu} \times \vec{A}_\nu. \quad (2.5.60)$$

el producto cruz es en el espacio de isospín. El subíndice cero indica que ésta es la corriente de isospín proveniente del lagrangiano *libre* del mesón ρ . En analogía con electromagnetismo donde se tiene que $F_V^{\mu\nu} = e j^\mu$ y j^μ es conservada, nosotros buscaremos una ecuación del tipo

$$-\vec{F}^{\mu\nu},_{\nu} = M^2\vec{A}^\mu - g\vec{J}^\mu \quad (2.5.61)$$

donde \vec{J}^μ sea una corriente conservada de isospín. Lograremos esto en varias etapas. Primero hagamos notar que el lado izquierdo de (2.5.59) es $D_\nu(\partial\mathcal{L}_\rho^0/\partial\vec{A}_{\mu,\nu})$ mientras el lado derecho es $\partial\mathcal{L}_\rho^0/\partial\vec{A}_\mu$.

Veamos qué modificación deberíamos hacer a \mathcal{L}_ρ^0 para que en el lado derecho aparezca el término adicional $-g\vec{J}_0^\mu$, donde esta corriente es aquella dada por (2.5.60). Es claro que a (2.5.58) debe agregársele un término

$$\mathcal{L}_\rho^1 = -\frac{g}{2}\vec{F}^{\mu\nu} \times \vec{A}_\nu \cdot \vec{A}_\mu. \quad (2.5.62)$$

Este término, sin embargo, es derivativo, por lo cual la corriente conservada (2.4.41) ya no coincide con (2.5.60), sino que tiene un término extra

$$\vec{J}_1^\mu = -\sum_1 \frac{\partial\mathcal{L}_\rho^1}{\partial A_{V,\mu}^i} \frac{\delta A_V^i}{\delta a} = -g\vec{A}^\rho \times (\vec{A}^\mu \times \vec{A}_\rho). \quad (2.5.63)$$

Debe entonces agregarse también este término al lado derecho de (2.5.61) lo cual exige un nuevo cambio en el lagrangiano. El nuevo término que debe agregarse es

$$\mathcal{L}_\rho^2 = -\frac{g^2}{4}(\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu) \cdot (\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu) \quad (2.5.64)$$

el que modifica la expresión de la corriente conservada ya que no tiene términos derivativos. Veamos qué se ha obtenido como resultado de este proceso. El lagrangiano libre más los términos de autointeracción dan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\rho &= \mathcal{L}_\rho^0 + \mathcal{L}_\rho^1 + \mathcal{L}_\rho^2 \\ &= -\frac{1}{4}\vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2\vec{A}^\mu\vec{A}_\mu - \frac{g}{2}\vec{F}^{\mu\nu} \times \vec{A}_\nu \cdot \vec{A}_\mu - \frac{g^2}{4}(\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu) \cdot (\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu)\end{aligned}\quad (2.5.65)$$

y la corriente conservada de isospín es

$$\rho\vec{J}^\mu = \vec{J}_0^\mu + \vec{J}_1^\mu = -\vec{F}^{\mu\nu} \times \vec{A}_\nu + g(\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu) \times \vec{A}_\nu \quad (2.5.66)$$

que se escribe

$$\rho\vec{J}^\mu = -\vec{f}^{\mu\nu} \times \vec{A}_\nu \quad (2.5.67)$$

donde

$$\vec{f}^{\mu\nu} = \vec{F}^{\mu\nu} - g(\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu). \quad (2.5.68)$$

Notamos que con esta última definición la corriente es formalmente igual a (2.5.60) solo que en vez de $F^{\mu\nu}$ se tiene $f^{\mu\nu}$. Es interesante que el lagrangiano (2.5.65) también es formalmente el mismo que (2.5.58). En efecto, es fácil ver que

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4}\vec{f}^{\mu\nu} \cdot \vec{f}_{\mu\nu} + \frac{M^2}{2}\vec{A}^\mu \cdot \vec{A}_\mu \quad (2.5.69)$$

—Problema: Encontrar la ecuación de campo proveniente de \mathcal{L}_ρ y demostrar que la corriente isotópica conservada (2.4.41) coincide con (2.5.67).

La ecuación de campo es de la forma (2.5.61) solo que aparece $f^{\mu\nu}$ en lugar de $F^{\mu\nu}$. Puesto que $f^{\mu\nu}$ también es antisimétrico y puesto que la corriente es por construcción conservada, entonces al aplicar ∂_μ a la ecuación de campo se deduce que

$$\vec{A}_{,\mu}^\mu = 0 \quad (2.5.70)$$

tal como en el caso libre (visto en (1.4.62)).

Ahora debemos completar el programa de Yang y Mills escribiendo los términos de interacción de ρ con los piones y nucleones. La idea es que la ecuación debe seguir siendo de la forma

$$-\vec{f}_{,\nu}^{\mu\nu} = M^2\vec{A}^\mu - g\vec{J}^\mu \quad (2.5.71)$$

solo que ahora \vec{J}^μ debe ser la corriente isotópica conservada debido tanto al mesón ρ como a los piones y nucleones. Lo obvio es introducir en el lagrangiano, junto a \mathcal{L}_π y \mathcal{L}_N términos $-g_\pi \vec{J}_0^\mu \cdot \vec{A}_\mu$ y $-g_N \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu$ donde estas corrientes están dadas por (2.4.42) y (2.4.43). La corriente ${}_N \vec{J}^\mu$ no nos acarrea ningún problema, pero la corriente ${}_\pi \vec{J}_0^\mu$, como se aprecia en (2.4.42), tiene derivadas del campo $\vec{\phi}$ del pion, de modo que al agregar este término al lagrangiano la expresión de la corriente isotópica debida al pion cambia deduciéndose que el término extra es,

$${}_\pi \vec{J}_1^\mu = -g(\vec{\phi} \times \vec{A}^\mu) \times \vec{\phi} \quad (2.5.72)$$

que exige en el lagrangiano el correspondiente término $-g_\pi \vec{J}_1^\mu \cdot \vec{A}^\mu$ con lo que se tiene finalmente el lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_\rho - \frac{g}{2} \vec{N} \vec{A} \cdot \vec{\tau} N + g \vec{\phi}'^\mu \times \vec{\phi} \cdot \vec{A}_\mu \\ & - g^2 \left[(\vec{\phi} \times \vec{A}^\mu) \times \vec{\phi} \right] \cdot \vec{A}_\mu + i g' N \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\phi} N \end{aligned} \quad (2.5.73)$$

donde los tres primeros términos en (26.16) están definidos en (2.4.39), (2.4.40) y (2.5.69). De modo se ha podido ilustrar cómo a partir de primeros principios y el conocimiento experimental de que $g_{NN\rho} = g_{\pi\pi\rho}$ se determina en forma bastante rígida cuál es el lagrangiano del sistema total. Esta extraordinaria “deducción” de un lagrangiano ha conducido a formular una “filosofía” más general, la que bosquejamos en la sección que sigue.

El acoplamiento de ρ con π , N y ρ es de la forma $\vec{J}_\mu \cdot \vec{A}^\mu$ con

$$J_\mu = {}_\rho J_\mu + {}_N J_\mu + {}_\pi J_\mu$$

viéndose así que es un acoplamiento universal.

2.6. Campos de medida, de gauge o de Yang-Mills.

La forma como el campo electromagnético fue introducido en §2.1 puede ser generalizada al caso en que hay invariancia del Lagrangiano con respecto a un grupo de Lie de varios parámetros.

Supongamos que se tiene una teoría dada por

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\Phi_{A,\mu}) \quad (2.6.74)$$

que es invariante bajo un grupo de transformaciones globales V_0

$$\Phi \rightarrow \Phi' = V_0 \Phi \quad (2.6.75)$$

esto es,

$$\mathcal{L}_0(\Phi_A, \Phi_{A,\mu}) = \mathcal{L}_0(V_0 \Phi)_A, (V_0 \Phi_{,\mu} A) \quad (2.6.76)$$

donde los Φ_A ($A = 1, 2, 3, \dots, N$) son cualquier tipo de campos, escalares; espinoriales, etc. Los V_0 son matrices de $N \times N$ que representan al grupo de transformaciones *de gauge* de primera especie, en el sentido que V_0 mezcla las diferencias componentes de los campos pero sin afectar a las coordenadas.

La ley de transformación (2.6.75) infinitesimalmente puede escribirse en la forma

$$\Phi' = (1 + i\delta a^k G_k) \Phi \quad (2.6.77)$$

o bien

$$\delta \Phi = i\delta a^k G_k \Phi \quad (2.6.78)$$

donde los G_k ($k = 1, 2, \dots, g$) son los generadores del grupo de gauge G y los a^k son los parámetros del grupo que fijan la transformación particular. Como es sabido los generadores expanden un álgebra real cuyo producto es el conmutador,

$$[G_i, G_j] = iC_{ij}^k G_k \quad (\text{suma sobre } k). \quad (2.6.79)$$

Las constantes de estructura C_{ij}^k son reales (para más detalles y propiedades, ver el capítulo sobre álgebra de Lie del “curso de grupos”).

El teorema de Noether garantiza que, a causa de esta simetría de dimensión g , existen g corrientes conservadas,

$$\partial_\mu J_k^\mu = 0 \quad (2.6.80)$$

$$J_k^\mu = - \sum_{A=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi_A} \frac{\delta \phi_A}{\delta a^k} = -i \sum_{A=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \phi_A} (G_k \phi)_A \quad (2.6.81)$$

(antes de la obtención de (2.6.81) se debe tomar derivada con respecto a $\phi_{A,\mu}$ en lugar de $\nabla_\mu \phi_A$ es equivalente).

Exploremos ahora la posibilidad de modificar la teoría original de modo que resulte una nueva teoría *localmente invariante* bajo G ,

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = V(x)\Phi(x) \quad (2.6.82)$$

donde para un x fijo los $V(x)$ satisfacen las leyes del grupo G . La dificultad en lograr invariancia del Lagrangiano surge naturalmente de su segundo argumento, el que no transforma en la forma correcta, sino que,

$$\Phi_{,\mu}(x) \rightarrow \Phi'_{,\mu}(x) = V(x)\Phi_{,\mu}(x) + V_{,\mu}\Phi(x) \quad (2.6.83)$$

El término que molesta es el último término en (2.6.83). Tal como en el caso electromagnético buscamos la posibilidad de definir una derivada covariante de la forma ²

$$\nabla_\mu \Phi = (\partial_\mu + igA_\mu) \Phi \quad (2.6.84)$$

de modo que

$$\nabla'_\mu \Phi' = V \nabla_\mu \Phi \quad (2.6.85)$$

De este modo se tiene asegurado que $\mathcal{L}_0(\Phi_A, (\nabla_\mu \Phi)_A)$ sea invariante bajo el grupo local G . Al reemplazar la forma explícita (2.6.84) de la derivada covariante en (2.6.85) se deduce que es necesario que el *campo de gauge* A_μ transforme de acuerdo con,

$$A'(x) = V(x)A(x)V(x)^{-1} + \frac{i}{g}V_{,\mu}V^{-1}. \quad (2.6.86)$$

Evidentemente A_μ no representa un solo campo y como se ve de (2.6.86) transforma como una matriz de $N \times N$. La derivada covariante obliga a introducir tantos campos de gauge como subgrupos de un parámetro tiene G , es decir, g campos de gauge. Por esto es conveniente escribir A_μ en la forma

$$A_\mu = G_k A_\mu^k. \quad (2.6.87)$$

— Problema: escribir la ley de transformación infinitesimal de los A_μ^k .

Para completar la teoría debe agregarse un término que represente la parte libre (energía cinética) de los campos de gauge. Utiyama (Phys. Rev. 101, 1597 (1956)) ha demostrado que las variables adecuadas para escribir el Lagrangiano libre son los $F^{\mu\nu}$ definidos por

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu} - ig[A^\mu, A^\nu] = \nabla^\nu A^\mu - \nabla^\mu A^\nu \\ \text{o bien, } F_k^{\mu\nu} &= A_k^{\mu,\nu} - A_k^{\nu,\mu} + gC_{ij}^k A_i^\mu A_j^\nu \end{aligned} \quad (2.6.88)$$

— Problema : Demostrar que los $F^{\mu\nu}$ transforman de acuerdo a

$$F'^{\mu\nu} = V F^{\mu\nu} V^{-1} \quad (2.6.89)$$

Con ellos es posible construir, por ejemplo,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_k^{\mu\nu} F_{k\mu\nu} \quad (2.6.90)$$

²Más propiamente la derivada covariante tiene en general la forma $\partial_\mu + ig_1 A_\mu + ig_2 B_\mu + \dots$ con tantos términos g_i como factores en los que se pueda descomponer el grupo: $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_r$.

o cualquier otro lagrangiano para los campos de gauge que sea invariante bajo el grupo. El lagrangiano total sería entonces

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\Phi_A, (\nabla_\mu \Phi_A)) + \mathcal{L}_G(F^{\mu\nu}). \quad (2.6.91)$$

Como ya se ha visto en la cuantización covariante en electrodinámica no es estrictamente necesario que \mathcal{L}_G sea invariante bajo el grupo, pero la teoría que se obtenga debe ser, en lo que a observables se refiere, invariante de gauge.

Ya se habrá observado que no han aparecido términos de masa para los campos de gauge, que serían de la forma $M^2 \vec{A}_\mu \cdot \vec{A}_\mu$. Estos términos son incompatibles con la invariancia local de gauge de la teoría (invariancia de gauge de segunda especie) por lo que normalmente no se agregan. En una teoría globalmente invariante como fue en el caso de la sección anterior no hubo problema en que tales términos aparecieran. Esto no significa que los mesones vectoriales que describen los A^μ de (2.6.91) sean de masa física nula; existen al menos dos mecanismos que les permitirían adquirir una masa finita. Ellos son, masa adquirida como autoenergía pura (que se trata mucho más adelante) o bien, a través de un fenómeno que no estudiaremos y que se le conoce con el nombre de “rompimiento espontáneo de la simetría”.

— Problema: Aplique el método explicado en esta sección al lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{\pi N}$ definido en §2.4 y demuestre que se obtiene (2.5.73) con la sola diferencia que no aparece un término de masa para el mesón ρ , tal como se explica en un párrafo de más arriba. Sólo considere las transformaciones de $SU(2)_I$.

Ya tenemos entonces que el acoplamiento electromagnético es del tipo Yang-Mills descrito en esta sección, como también lo es el acoplamiento del mesón ρ en interacciones fuertes. Sólo quedarían las interacciones débiles y las gravitacionales. Las interacciones débiles pueden ser descritas de este mismo modo como modelos como el de Weinberg-Salam (1967) pero que aquí no veremos. Veamos en cambio un ejemplo muy sencillo.

Ejemplo: Los campos vectoriales hasta aquí entran como campos de gauge (o Yang-Mills) a través de la derivada covariante, pero ellos mismos podrían dar origen a la incorporación de nuevos campos de gauge que como veremos, no son vectoriales - si el lagrangiano que se tenga con ciertos A^μ y B_μ de gauge ya introducidos deja invariante los productos $A^\mu B_\mu$. Tales

transformaciones - por el momento globales - podrían ser

$$\begin{aligned} A'^{\mu} &= W_V^{\mu} A^{\nu} \\ B'_{\mu} &= (W^{-1})_{\mu}^{\nu} B_{\nu} \end{aligned} \quad (2.6.92)$$

de modo que en efecto,

$$A'^{\mu} B'_{\mu} = A^{\mu} B_{\mu}. \quad (2.6.93)$$

Tal invariancia se cumple con cualquier matriz W real de 4×4 , o sea que este grupo de invariancia es el grupo $GL(4, \mathbb{R})$ de 16 parámetros. Como generadores de este grupo pueden escogerse las matrices G_{ρ}^{σ} cuyos elementos de matriz son

$$(G_{\rho}^{\sigma})_{\nu}^{\mu} = i \delta_{\rho}^{\mu} \delta^{\sigma \nu} \quad (2.6.94)$$

y los campos de gauge que se introducen al imponer simetría local son los

$$\Gamma_{\mu} = G_{\rho}^{\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \quad (2.6.95)$$

en notación análoga a (2.6.87), lo que representan $4 \times 16 = 64$ grados de libertad. Si el grupo fuese de 10 parámetros, como es el caso del grupo de Poincaré, entonces los $\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$ tendrían que representar sólo $4 \times 10 = 40$ componentes independientes, lo que también se logra si se exige que $\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}$

— Problema: Demostrar que $F_k^{\mu}{}_{\nu}$ definido en (2.6.88) y que aquí podría denotarse por $R_{\rho\sigma\nu}^{\mu}$ coincide formalmente con el tensor de Riemann-Christoffel. Previo debe deducirse las constantes de estructura de álgebra de los G_{ρ}^{σ} dados explícitamente en (2.6.88).

Las transformaciones (2.6.93) al hacerse locales pueden ser identificadas con

$$W_V^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (W^{-1})_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \quad (2.6.96)$$

que es el grupo de transformaciones generales de coordenadas utilizado en relatividad general.

Capítulo 3

Teoría de Perturbaciones

3.1. En el cuadro de interacción

Hasta ahora hemos trabajado en el cuadro de Heisenberg, en el que se cumple (1.2.4) y las ecuaciones de campo pueden ser reemplazadas por las relaciones de conmutación más las ecuaciones de evolución de Heisenberg,

$$i\dot{\phi}(x) = [\phi(x), H], \quad (3.1.1)$$

como fue ilustrado en el primer problema en §(1.4.1).

En forma integrada ellas son un caso particular de (1.2.3),

$$\phi(\vec{x}, 0) = e^{-iHt} \phi(\vec{x}, t) e^{iHt} \quad (3.1.2)$$

Los vectores de estado $|a\rangle$ en este cuadro son independientes del tiempo.

Definimos operadores de campo en el cuadro de Schrödinger por

$$\phi^s(\vec{x}) = e^{-iHt} \phi(x) e^{iHt} \quad (3.1.3)$$

y los correspondientes vectores de estado son,

$$|a; t \rangle^s = e^{-iHt} |a \rangle. \quad (3.1.4)$$

De este modo los campos son independientes del tiempo, mientras los estados evolucionan en el tiempo de acuerdo a la ecuación de Schrödinger

$$i\partial_t |a; t \rangle^s = H |a; t \rangle^s. \quad (3.1.5)$$

Evidentemente el Hamiltoniano en ambos cuadros es el mismo puesto que H no depende del tiempo y $H^s = H(t = 0)$.

Más conveniente resulta trabajar en el cuadro de interacción, donde tanto los campos como los vectores de estado dependen del tiempo,

$$\phi^{\text{int}}(\vec{x}, t) = U(t)\phi(\vec{x}, t)U^{-1}(t) = e^{iH_0(0)t}\phi^s(\vec{x})e^{iH_0(0)t} \quad (3.1.6)$$

$$|a; t\rangle = U(t)|a\rangle = e^{iH_0(0)t}|a; t\rangle^s$$

donde

$$U(t) = e^{iH_0(0)t}e^{-iHt} = (U(t))^{\dagger-1}. \quad (3.1.7)$$

En lo anterior H_0 denota el Hamiltoniano libre, esto es, el Hamiltoniano total menos el Hamiltoniano de interacción,

$$H_0(t) = H - H_I^H(t). \quad (3.1.8)$$

Puesto que H no conmuta en general con sus partes H_0 y H_I entonces éstos tienen - debido a (3.1.1), una dependencia no trivial en el tiempo. Pero estos operadores satisfacen (3.1.2) entonces

$$H_0(t=0) = H_0^s = e^{-iHt}H_0(t)e^{iHt}. \quad (3.1.9)$$

Denotaremos por $H_I(t)$ al término de interacción en el cuadro de interacción

$$H_I(t) = U(t)(H - H_0(t))U^{-1}(t) = e^{iH_0^s t}(H - H_0^s)e^{-iH_0^s t}. \quad (3.1.10)$$

Veamos ahora la ecuación de evolución de los vectores de estado en este cuadro.

$$\begin{aligned} i\partial_t |a; t\rangle &= i\partial_t(e^{iH_0^s t}e^{-iHt})|a\rangle \\ &= -e^{iH_0^s t}(H_0^s - H)(e^{-iH_0^s t}e^{iH_0^s t})e^{-iHt}|a\rangle \\ &= H_I(t)U(t)|a\rangle \\ &= H_I(t)|a; t\rangle \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

De donde se ve que la dependencia temporal de los estados está determinado por el Hamiltoniano de interacción en el cuadro de interacción. Por otro lado la dependencia temporal de los operadores está determinado por el Hamiltoniano libre $H_0^s = H_0^{\text{int}}$. En efecto, aplicando $i\partial_t$ a la expresión de ϕ^{int} dada en (3.1.6) se obtiene directamente que

$$i\dot{\phi}^{\text{int}}(x) = [\phi^{\text{int}}(x), H_0^s]. \quad (3.1.12)$$

Ahora, puesto que la conexión entre cualesquiera dos cuadros es a través de una transformación unitaria, entonces las RCC son las mismas para todos los campos. Esto, más el hecho que los campos en el cuadro de interacción satisfacen una ecuación de Heisenberg (3.1.12) con el Hamiltoniano

libre en este cuadro, implica que los campos en el cuadro de interacción son *campos libres*.

Todo lo dicho hasta aquí para los campos también debe entenderse válidos para los campos conjugados canónicos, π_ϕ .

— Problema: Demostrar que (3.1.12) más la correspondiente relación para π_ϕ , más RCC, más la expresión (1.2.5) para el Hamiltoniano libre implican que ϕ satisface la ecuación de Klein Gordon.

3.2. El operador de desplazamiento temporal $U(t, t')$.

Prácticamente todo lo que se verá en esta sección es materia de un curso inicial de mecánica cuántica.

El operador $U(t, t')$ se define de modo que

$$|a; t\rangle = U(t, t') |a; t'\rangle. \quad (3.2.13)$$

Recordando que $|a; t\rangle = U(t) |a\rangle$ es elemental deducir que

$$U(t, t') = U(t)U^{-1}(t'). \quad (3.2.14)$$

Propiedades de este operador son

- a) $U(t, t) = 1$
- b) $U(t, t')U(t', t'')$
- c) $U(t, t')U(t', t) = 1$
- d) $U^{-1}(t, t') = U^\dagger(t, t')$

Además se deduce una ecuación diferencial para este operador a partir de (3.1.11),

$$i\partial_t U(t) |a\rangle = H_I(t) U(t) |a\rangle \quad (3.2.15)$$

que vale para todo estado $|a\rangle$, por lo que puede considerarse como una igualdad entre operadores. Una vez escrita esa igualdad entre operadores, ésta puede ser multiplicada por $U^{-1}(t')$ obteniéndose

$$i\partial_t U(t, t') = H_I(t) U(t, t') \quad (3.2.16)$$

A esta ecuación diferencia para el operador de desplazamiento se le agrega como condición de borde su propiedad,

$$U(t, t) = 1 \quad (3.2.17)$$

con lo que podemos escribir la ecuación integral para U equivalente a (??),

$$U(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1, t'). \quad (3.2.18)$$

Por iteración se integra obteniéndose

$$U(t, t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \cdots \int_{t'}^t dt_n (H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)) \quad (3.2.19)$$

donde el operador T es el producto ordenado temporalmente en la forma usual. Se acostumbra a describir esta expresión como un "exponencial",

$$U(t_2, t_1) = T \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_2} H_I(t) dt \right) \quad (3.2.20)$$

y, recordando que los Hamiltonianos de interacción con los que nosotros estaremos tratando provienen de una densidad Hamiltoniana de interacción, entonces

$$U(t_2, t_1) = T \exp \left[-i \int dt \int d^3x \mathcal{H}_I(x) \right]. \quad (3.2.21)$$

Hacemos notar que la ordenación temporal $T \mathcal{H}_I(t_1) \cdots \mathcal{H}_I(t_n)$ es invariante ya que

$$[\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(x')] = 0 \quad \text{para} \quad (x - x')^2 < 0. \quad (3.2.22)$$

Estaremos particularmente interesados en la evolución dinámica de nuestros estados desde el remoto pasado hasta el remoto futuro bajo la suposición que la interacción efectiva solo toma lugar durante un lapso finito. Esto es lo que se denomina un proceso de choque y desparramo. Tal evolución formalmente se escribe,

$$|a; +\infty\rangle = U(+, -\infty) |a; -\infty\rangle = S |a; \infty\rangle. \quad (3.2.23)$$

Este operador S así definido es el llamado *operador de scattering*. Para calcular amplitudes de probabilidad de transición en un proceso de scattering introduciremos la llamada *condición adiabática*. Se supone que los estados en el remoto pasado y en remoto futuro pueden identificarse con estados

libres, es decir, con autoestados del Hamiltoniano libre H_0^s . De modo que la amplitud de probabilidad que un estado inicial ($t = -\infty$), $|a\rangle$, autovector de H_0^s devenga después de un proceso de colisión (de interacción) en el estado $|b\rangle$, autovector de H_0^s para $t = +\infty$ es

$$S_{ba} = \langle b | S | a \rangle \quad (3.2.24)$$

donde S está dado por,

$$S = T \exp(-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x)) \quad (3.2.25)$$

Es necesario hacer aquí algunos comentarios. Al usar directamente los autoestados de un Hamiltoniano libre para calcular los elementos de matriz de S traerá ciertos problemas, ya que tales estados corresponden a ondas planas, las que por definición no están localizadas. Además los estados de ondas planas son no-normalizables. Lo correcto sería usar paquetes de ondas, pero eso complica los cálculos sin aportar nada físicamente interesante. Una vez manejados los infinitos que acarrearán las ondas planas, es mucho más fácil trabajar con ellas. Otro punto sobre el que debe comentarse es la restricción que nos impone la condición adiabática. Al haber reemplazado los estados asintóticos $|a; \pm\infty\rangle$ por autovectores del Hamiltoniano libre hemos automáticamente suprimido la posibilidad de describir procesos con estados ligados porque si bien el Hamiltoniano total puede tener autoestados que corresponden a estados ligados esto no puede ocurrir con el Hamiltoniano libre.

Todo lo que se ha hecho en las dos últimas secciones depende de la separación del Hamiltoniano total en una parte libre y otra de interacción. Esto se hizo en (3.1.8) sin comentarios. Esta separación, sin embargo, es un asunto muy delicado en teoría cuántica de campos. Como se verá más adelante, la teoría implica que todas las partículas tienen autoenergías provenientes de autointeracciones y esto tiene por efecto modificar la masa de las partículas llegándose así al problema de resolver si la parte libre es realmente libre, si, por ejemplo, el término de masa corresponde a la parte libre o a la de interacción. En esta primera parte del curso se hará la separación más ingenua (3.1.8), lo que nos permitirá ganar suficiente experiencia como para luego entrar en la discusión más profunda de la separación (3.1.8). Tal discusión profunda se llama teoría de renormalización.

3.3. Teorema de Wick.

Como se ha visto, el operador de scattering S , dado por (3.2.25), se expande en una suma de productos temporales del tipo

$$T \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \cdots \mathcal{H}_I(x_n). \quad (3.3.26)$$

El teorema de Wick nos enseña a escribir productos temporales de campos como suma de ciertos productos normales de los mismos campos. Con esto se podrá expandir al operador S en suma de productos normales, lo que facilita enormemente el cálculo de sus elementos de matriz. Veamos primero el caso del producto temporal de dos campos arbitrarios,

$$\begin{aligned} T(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)) &= T(\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-) \\ &= \phi_1^+\phi_2^+ + T\phi_1^+\phi_2^- + T\phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^- \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

pero ¹

$$T\phi_1^+\phi_2^- = \theta_{12}\phi_1^+\phi_2^- \pm \theta_{21}\phi_2^-\phi_1^+ = \theta_{12} [\phi_1^+, \phi_2^-]_{\mp} \pm \phi_2^-\phi_1^+ \quad (3.3.28)$$

y similarmente

$$T\phi_1^-\phi_2^+ = \phi_1^-\phi_2^+ - \theta_{21} [\phi_1^-, \phi_2^+]_{\mp}. \quad (3.3.29)$$

De donde se obtiene que

$$\begin{aligned} T(\phi_1\phi_2) &= : \phi_1\phi_2 : + \theta_{12} [\phi_1^+, \phi_2^-]_{\mp} - \theta_{21} [\phi_1^-, \phi_2^+]_{\mp} \\ &= : \phi_1\phi_2 : + \langle 0 | T(\phi_1\phi_2) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

independiente de si los campos son bosónicos o fermiónicos. En adelante usaremos la notación

$$\phi(x_1)\phi(x_2) \equiv \langle 0 | T\phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle : \quad (\text{contracción}) \quad (3.3.31)$$

y en general, se debe entender que

$$: \phi_1\phi_2 \cdots \phi_n \cdots \phi_p \cdots \phi_q \cdots \phi_z : := \pm \phi_2\phi_p\phi_n\phi_q : \phi_1 \cdots \phi_z : \quad (3.3.32)$$

donde el \pm se determina según cuantas trasposiciones de campos fermiónicos fueron necesarias para ubicar a los campos $\phi_2\phi_p$ etc. fuera del producto normal.

¹Por θ_{12} debe entenderse $\theta(x_1^\circ - x_2^\circ)$. Además los signos superiores valen si se trata de campos bosónicos y los inferiores si los campos son fermiónicos.

Teorema de Wick: El producto temporal de n campos es igual al producto normal de estos campos, más la suma de los productos normales donde se ha hecho una contracción entre cualesquiera dos de los campos, más la suma de los productos normales con dos contracciones entre cualesquiera dos parejas de campos etc.:

$$\begin{aligned}
 T\phi_1\phi_2\phi_3\cdots\phi_n = & : \phi_1\cdots\phi/n :^+ \\
 & + \div\phi_1\phi_2\phi_3\cdots\phi_n : + : \phi_1\phi_2\phi_3\cdots\phi_n : + \cdots + : \phi_1\cdots\phi_{n-1}\phi_n : + \\
 & + : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\cdots\phi_n : + \cdots \\
 & + \cdots \\
 & \vdots
 \end{aligned}
 \tag{3.3.33}$$

= producto normal + suma productos normales con una contracción + suma productos normales con dos contracciones + \cdots hasta agotar las posibles contracciones.

En el caso de tres campos, por ejemplo,

$$T\phi_1\phi_2\phi_3 = : \phi_1\phi_2\phi_3 : + : \phi_1\phi_2\phi_3 : + : \phi_1\phi_2\phi_3 : + : \phi_1\phi_2\phi_3 : \tag{3.3.34}$$

Notemos que las únicas contracciones no nulas son aquellas que se hacen entre un campo y su conjugado de carga, esto es, entre ϕ y ϕ^\dagger para un campo de Dirac, entre A^μ y A^ν cuando se trata de un campo vectorial real etc. Esto es así porque la contracción es un valor de espectación en el vacío (VEV) y para que sea no nulo un campo debe destruir lo que el otro campo ha creado.

3.4. La matriz S en electrodinámica.

En esta sección y algunas de las que siguen se analiza la matriz de scattering de electrodinámica según la expresión general (29.12). La expresión del Hamiltoniano de interacción en este caso es

$$\mathcal{H}_I(x) = e : \bar{\psi}(x)A(x)\psi(x) : . \tag{3.4.35}$$

Debe tenerse calro que estamos trabajando en el cuadro de interacción y por lo tanto estos campos son libres.

Expandiendo S hasta el término de orden e^2 se obtiene,

$$S = 1 - ie \int d^4x T(\bar{\psi}(x)A(x)\psi(x)) \frac{e^2}{2!} \int d^4x \int d^4y T((\bar{\psi}(x)(A(x)\psi(x)))(\bar{\psi}(y)(A(y)\psi(y)))) + \cdots \tag{3.4.36}$$

Términos a los que denotaremos $S^{(0)} = 1, S^{(1)}, S^{(2)}$ y que analizaremos haciendo uso del teorema de Wick.

Veamos primero que el término de primer orden es simplemente

$$s^{(1)} = -ie \int d^4x : \bar{\psi}(x)A(x)\psi(x) : \quad (3.4.37)$$

y no hay término con contracción ya que éste es nulo. En efecto,

$$: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) := \langle 0|T : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) : |0 \rangle = \gamma_{\alpha\beta}^\mu S_{F\alpha\beta}(0) = 0 \quad (3.4.38)$$

ya que de (17.8a) con $x = 0$ se ve que la parte del integrando proporcional a \not{p} es idénticamente nula por razones de simetría y la parte proporcional a m si bien es divergente, es proporcional $\delta_{\alpha\beta}$ y entonces $Tr\gamma^\mu = 0$ da (31.4). Este resultado tiene implicaciones sobre todo lo que sigue, ya que muestra que las contracciones en términos superiores de (31.2) entre $\bar{\psi}(x)$ y $\psi(x)$ con el mismo argumento x son idénticamente nulas. Es además obvio que una contracción entre dos campos de distinto tipo también es idénticamente nula, como se explicó al final de # 30.

Con lo anterior podemos estar seguros que los términos que contribuyen a $S^{(2)}$ en una expansión a la Wick son,

$$\begin{aligned} S^{(2)} = \frac{e^2}{2!} \int d^4x \int d^4y [& (\bar{\psi} A\psi)_x (\bar{\psi} A\psi)_y + : (\bar{\psi} A\psi)_x (\bar{\psi} A\psi)_y : + : (\bar{\psi} A\psi)_x (\bar{\psi} A)_y + \\ & + : (\bar{\psi} A\psi)_x (\bar{\psi} A\psi)_y : + : (\bar{\psi} A\psi)_x (\bar{\psi} A\psi)_y : \\ & + : (\bar{\psi} A)_x (\bar{\psi} A\psi)_y : \\ & + : (\bar{\psi} A\psi)_x (\bar{\psi} A\psi)_y + : (\bar{\psi} A\psi)_x (\bar{\psi} A\psi)_y : \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

Las únicas contracciones que aparecen son

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0 \rangle = iS_F(x-y) \quad (3.4.40)$$

$$\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0 \rangle = iD_F^{\mu\nu}(x-y). \quad (3.4.41)$$

Cada uno de los términos en (31.5) son productos normales lo que nos permite hacer ciertas afirmaciones generales sobre cuáles de ellos contribuyen en el cálculo de elementos de matriz dados del operador S . En el cálculo de $\langle b|S|a \rangle$ sea N_a el número de fermiones (electrones + positrones) en el estado $|a \rangle$ y N_b en número de fermiones en el estado $|b \rangle$ y $N = N_a + N_b$; entonces contribuirán a este elemento de matriz aquellos productos normales de la expansión de S que tenga a lo más N campos de Dirac no

contraídos. En efecto, si hay más de N entonces cada producto normal tendrá N_1 de creación a la izquierda (y que aniquilan hacia ese lado) y N_2 productos de destrucción a la derecha (idem) lo que da cero, puesto que necesariamente $N_1 > N_a$ o $N_2 > N_b$: Igual razonamiento puede hacerse para fotones o en otras teorías para cualquier otro tipo de campos también. En general se tiene que:

En el cálculo de elementos de matriz del operador S solo contribuyen aquellos productos normales que tienen a lo más tantos campos no contraídos como cuantos de ese mismo tipo haya en total entre los estados inicial y final.

Para el caso de los fotones existe una restricción adicional. Puesto que se trata de partículas de paridad negativa, la diferencia de número de fotones entre los estados $|a\rangle$ y $|b\rangle$ debe ser par y en electrodinámica entonces solo pueden contribuir los términos de orden para de $S : S^{(0)}, S^{(2)}, S^{(4)}, \dots$

Ahora definiremos una notación diagramática para representar productos normales como aquellos que aparecen en (31.5). Primero asociamos a un electrón una flecha de izquierda a derecha (sentido del tiempo) y a un positrón una flecha en el sentido contrario. Aquella parte del campo de Dirac que tiene operadores de creación le asociamos una línea que nace en un punto x (argumento del campo) y se prolonga hacia la derecha (sentido del tiempo) con una flecha que indica si se trata de un electrón o un positrón. Al revés, el punto x se ubica en el extremo derecho si se trata de una parte de destrucción:

$$\left. \begin{array}{l} \psi^{(-)}(x) : x \leftarrow e^+(\text{crea}) \\ \psi^{(+)}(x) : \rightarrow_x e^-(\text{destr.}) \end{array} \right\} \psi(x) \uparrow \quad (3.4.42)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}^{(-)}(x) : x \rightarrow e^-(\text{crea}) \\ \bar{\psi}^{(+)}(x) : \leftarrow_x e^+(\text{destr.}) \end{array} \right\} \bar{\psi}(x) \downarrow \quad (3.4.43)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_\mu^{(-)}(x) : x \rightarrow \gamma(\text{crea}) \\ A_\mu^{(+)}(x) : \leftarrow_x \gamma(\text{destr.}) \end{array} \right\} A_\mu \uparrow \quad (3.4.44)$$

y consistentemente

$$\left. \begin{array}{l} \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle : x \leftarrow_y \\ \langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle : 0 > : x \leftrightarrow_y \end{array} \right\} \quad (3.4.45)$$

Entonces los términos de (31.5) son

Si unimos ahora el criterio enunciado en (31.7) con los diagramas (31.10) vemos que solo contribuyen a los elementos de matriz de S aquellos términos correspondientes a diagramas cuyas "líneas externas" (campos no contraídos) puedan tener asociadas partículas de los estados inicial o final. Así, por ejemplo, al scattering $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ contribuyen el término segundo en (31.10), pero no contribuyen los términos 1°, 3°, 4° y 7°. Los términos 5° y 6° sí contribuyen, pero lo hacen para modificar la autoenergía del electrón y no para tomar parte en la interacción entre los dos electrones. Los diagramas sin líneas externas, como el 8°, serán discutidos más adelante. Tampoco tomaremos en cuenta por el momento los diagramas de autoenergía ya que ellos corresponden a un capítulo sobre *renormalización*.

3.5. Scattering Compton.

En esta sección calcularemos la amplitud de probabilidad de transición para el scattering elástico $e^- \gamma$. En el estado inicial se tiene un electrón con momento \vec{p} y espín s y un fotón con momento \vec{k} y polarización λ . El estado final está similarmente caracterizado con variables "primaz" queremos calcular

$$(\vec{k}', \lambda'; \vec{p}', s' | S | \vec{k}, \lambda; \vec{p}, s) = (|1 + S^{(2)} + \dots|) \quad (3.5.46)$$

$$= \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') + (|S^{(2)}|) + \dots \quad (3.5.47)$$

Definimos el operador hermítico amplitud de probabilidad de transición T a través de

$$S = 1 - iT \quad (3.5.48)$$

con lo que podemos escribir

$$i(|T^{(2)}|) = \frac{e^2}{2} \int d^4x \int d^4y (| : (\bar{\psi} A \psi)_x (\bar{\psi} A \psi)_y : + : (\bar{\psi} A \psi)_x (\bar{\psi} A \psi)_y : |) \quad (3.5.49)$$

intercambiando el nombre de las variables mudas x, y en el segundo término y además trasponiendo el orden de los dos paréntesis se obtiene que primero y segundo término son iguales, por lo que podemos escribir

$$= e^2 \int d^4x \int d^4y (| : \bar{\psi}^{(-)} A \psi)_x (\bar{\psi} A \psi^{(+)}_y : |) \quad (3.5.50)$$

Además se ha señalado explícitamente que sólo contribuyen aquellas partes de los campos de Dirac no contraídos relativos al electrón (creación y destrucción) ya que las partes correspondientes al positrón no contribuyen por razones análogas a aquellas que permitieron deducir (31.7). El próximo paso en nuestro cálculo consiste en expandir los campos en ondas planas en la forma usual ya vista en el Capítulo II. Se obtiene,

$$i(|T^{(2)}|) = e^2 \sum d^4 x \int d^4 y \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 (| : b_{s-2}^+(\vec{p}_2) a^{\lambda_2 n_2}(\vec{k}_2) a^{\lambda_1 m_1}(\vec{k}_1) b_{s_1}(\vec{p}_1 : |) x \quad (3.5.51)$$

$$\begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ n_1 & n_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \quad (3.5.52)$$

$$f_{\vec{k}_2}^{n_2}(x) f_{\vec{k}_1}^{n_1}(y) e_{\lambda_2}^\mu(\vec{k}_2) e_{\lambda_1}^\nu(\vec{k}_1) \bar{f}_{\vec{p}_2} + s_2(x) \gamma^\mu i S_F(x-y) \gamma^\nu f_{\vec{p}}^{+s_1}(y) \quad (3.5.53)$$

Es claro que los operadores $a^{\lambda n}$ deben ser uno de creación y otro de destrucción, de modo que sólo hay contribución con $n_1 = n - n_2$. Las dos posibilidades $n_1 = \pm 1$ dan origen a dos términos una vez que se calcula la acción de los operadores de creación y destrucción sobre los estados inicial y final. Luego se puede hacer trivialmente las cuatro integrales de momento debido a las deltas de Dirac que han aparecido y también todas las sumas pueden hacerse, obteniéndose,

$$= e^2 d^4 x \int d^4 y \left[f_{\vec{k}}^-(x) f_{\vec{k}}^+(y) e_{\lambda'}^\mu(\vec{k}') e_{\lambda}^\nu(\vec{k}) \bar{f}_{\vec{p}'}^{+s'}(x) \gamma_\mu i S_F(x-y) \gamma_\nu f_{\vec{p}}^{+s}(y) + \quad (3.5.54)$$

$$+ f_{\vec{k}'}^+(x) f_{\vec{k}}^-(y) e_{\lambda}^\nu(\vec{k}) e_{\lambda'}^\mu(\vec{k}') \bar{f}_{\vec{p}'}^{+s'}(x) \gamma_\nu i S_F(x-y) \gamma_\mu f_{\vec{p}}^{+s}(y) \right] \quad (3.5.55)$$

Ahora se hace uso explícito de la forma integral (17.8) para el propagador fermiónico para poder calcular las integrales sobre x, y obteniéndose

$$\begin{aligned} &= e^2 \int d^4 q e_{\lambda'}^\mu(\vec{k}') e_{\lambda}^\nu(\vec{k}) \left[\delta^{(4)}(k' + p' - q) \delta^{(4)}(q - k - p) \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma_\mu \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} \gamma_\nu u_s(\vec{p}) + \right. \\ &\quad \left. + \delta^{(4)}(p' - k - q) \delta^{(4)}(k' + q - p) \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma_\nu \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} \gamma_\mu u_s(\vec{p}) \right] \frac{m}{(2\pi)^6 \sqrt{4\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} \omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \\ &= \frac{m}{(2\pi)^6 \sqrt{4\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} \omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \not{p}^{(4)}(p + k - p' - k') M(k' \lambda', p' s'; k \lambda, p s) \quad (3.5.56) \end{aligned}$$

donde la llamada “amplitud invariante de Feynman” es

$$M(';) = e^2 \bar{u}' \left[\not{\epsilon}' \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \not{\epsilon}_\lambda + \not{\epsilon}_\lambda \frac{i}{\not{p} - \not{k}' - m + i\epsilon} \not{\epsilon}' \right] u \quad (3.5.57)$$

Arriba se ha usado la notación

$$u' = u_{s'}(\vec{p}'), \not{\epsilon}' = e_{\lambda'}^\mu \gamma_\mu \quad \text{etc.} \quad (3.5.58)$$

Es posible simplificar algo lo anterior pasando los factores $\not{\epsilon}$ o $\not{\epsilon}'$ que están al lado derecho hacia el lado izquierdo,

$$\frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \not{\epsilon}_\lambda u(\vec{p}) = i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} \not{\epsilon}_\lambda u(\vec{p}) = -i \not{\epsilon}_\lambda \frac{\not{p} + \not{k} - m}{(p+k)^2 - m^2} u(\vec{p}) = \quad (3.5.59)$$

$$= -i \not{\epsilon}_\lambda \frac{\not{k}}{(p+k)^2 - m^2} u(\vec{p}) \quad (3.5.60)$$

donde se ha utilizado que $(\not{p} + \not{k}) \not{\epsilon}_\lambda = -\not{\epsilon}_\lambda (\not{p} + \not{k})$. En general habría un término extra al lado derecho $2e_{\lambda}^\mu (p_\mu + k_\mu)$ pero $e_{\lambda}^\mu k_\mu = 0$ para $\lambda = 1, 2$ y $e_{\lambda}^\mu p_\mu = 0$ en el sistema en referencia que $p = (m, 0)$

Una permutación similar puede demostrarse para el segundo término y entonces la amplitud invariante de Feynman puede escribirse,

$$M(';) = e^2 \bar{u}' \left[\not{\epsilon}' \not{\epsilon} \frac{-i \not{k}}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \not{\epsilon} \not{\epsilon}' \frac{-i \not{k}'}{(p-k')^2 - m^2 + i\epsilon} \right] u. \quad (3.5.61)$$

Los denominadores de los propagadores además son

$$(p+k)^2 - m^2 = 2pk \quad (3.5.62)$$

y

$$(p-k')^2 - m^2 = -2pk' \quad (3.5.63)$$

puesto que p^2 y $k^2 = 0$.

— Problema 32.1: Calcular a segundo orden $(k' \lambda' | iT | k \lambda)$ sin calcular la última integral de momento que se obtiene. Discutir su convergencia.

— Problema 32.2: Hacer con todo detalle los cálculos de esta sección.

3.6. Reglas de Feynman y el scattering Moller.

La forma usual de calcular los elementos de matriz de iT de orden n consiste en dibujar todos los diagramas de Feynman posibles de n vértices que tengan como líneas externas al lado izquierdo las que correspondan a las partículas presentes en el estado inicial y que tengan como líneas externas al lado derecho las que corresponden al estado final y luego asociar a cada uno de estos diagramas expresiones como los términos en (32.5) usando las reglas de Feynman que se detallan más abajo. Cada una de las líneas de los diagramas debe tener asociado un cuadrimomento, además las líneas externas tienen un índice de spin o de polarización y los vértices tienen cada uno un índice relativista.

A continuación detallamos los factores que entran en la expresión correspondiente a un diagrama de Feynman por cada una de sus líneas y vértices.

Para escribir la expresión completa correspondiente a un diagrama se sigue el orden de las líneas fermiónicas en el sentido inverso a las flechas de un extremo al otro lado de cada una de las líneas.

$$\omega_p = (p^2 + m^2)^{1/2} \quad (3.6.64)$$

$$\omega_k = |\vec{k}| \quad (3.6.65)$$

Los γ_μ son aquellos ya mencionados de los vértices.

— Problema 33.1: Obtener las reglas de Feynman con el lagrangiano de interacción (23.1).

Como una ilustración calculemos la amplitud de scattering Moller ($e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$). No es difícil imaginarse que los diagramas que intervienen a segundo orden son

$$p_1 s_1 q_1 s'_1 \quad p_1 s_1 q_2 s'_2 \quad (3.6.66)$$

$$p_2 s_2 q_2 s'_2 \quad p_2 s_2 q_1 s'_1 \quad (3.6.67)$$

El signo relativo menos se debe a que ellos difieren en el orden relativo de los dos electrones finales. La expresión para el elemento de matriz de iT es

$$(q_1 s'_1 q_2 s'_2 | iT | p_1 s_1 p_2 s_2) = e^2 \int d^4 k \frac{i}{k^2 + i\epsilon} [\bar{u}'_2 \gamma_\mu u_2 \bar{u}'_1 \gamma_\nu u_1 \delta^4(q_2 - p_2 - k) \delta^4(k - p_1 + q_1)] \quad (3.6.68)$$

	Cálculo de $i \delta^{(4)}(p_i - p_f)M$	Cálculo de $i(T)$
Líneas Externas		
\rightarrow	$\vec{u}_s(p)$	$\sqrt{(m/2pi)^3 \omega_p}$
\leftarrow	$v_s(p)$	”
\rightarrow	$u_s(p)$	”
\leftarrow	$\vec{v}_s(p)$	”
	$e_\lambda^\mu(\vec{k})$	$[(2\pi)^3 2\omega_k]^{-1/2}$
VERTICES:	$-ie \delta^{(4)}$	(cons. de mom.) γ_μ
Líneas Internas (Propagadores)		
\rightarrow	$\int d^4q \dots$	$\frac{i}{q-m+i\epsilon} \dots$
	$-ig^{\mu\nu} \int d^4k \dots$	$(k^2 + i\epsilon)^{-1} \dots$
Líneas Fermiónicas Cerradas		
	$-\int Tr \left[\frac{i}{q_1-m} \gamma_{\mu_1} \frac{i}{q_2-m} \gamma_{\mu'_c} \right] d^4q_1 \cdot d^4q_n$	

Cuadro 3.1: aqui falta

$$-\bar{u}'_2 \gamma_\mu u_1 \bar{u}'_1 \gamma^\mu u_2 \not{p}^4 (q_2 - p_1 - k) \delta^4(k - p_2 + q_1) \left] \frac{m^2}{(2\pi)^6 (\omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2)^{1/2}} \right. \quad (3.6.69)$$

que integrando sobre k se reduce a

$$= \frac{m^2}{(2\pi)^6 (\omega_1 \omega_2 \omega_1 \omega_2)^{1/2}} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) M(q_1 s'_1, q_2 s'_2; p_1, p_2 s_2) \quad (3.6.70)$$

donde

$$M = ie^2 \left[\frac{\bar{u}'_1 \gamma_\mu u_1 \bar{u}'_2 \gamma^\mu u_2}{(p_1 - q_1)^2 + i\varepsilon} - \frac{\bar{u}'_2 \gamma_\mu u_1 \bar{u}'_1 \gamma^\mu u_2}{(p_1 - q_2)^2 + i\varepsilon} \right] \quad (3.6.71)$$

— Problema 33.2: Dibujar todos los diagramas conexos correspondientes al scattering Moller en el cuarto orden, separando aquellos que tienen contribuciones de autoenergía.

— Problema 33.3: Modificar el Hamiltoniano de interacción electrodinámico para incluir también la interacción electrodinámica de los protones. Dibujar los diagramas de cuarto orden del scattering electrón protón.

— Problema 33.4: En base a las reglas de Feynman calcular el elemento de matriz de iT correspondiente a la aniquilación electrón-positrón con la producción de dos fotones. El cálculo es solo hasta el segundo orden.

— 33.5: Deducir la amplitud de Moller sin usar las reglas de Feynman.

3.6.1. Sección eficaz y razón de decaimiento.

A partir de un elemento de matriz general del operador T se puede definir la amplitud invariante de Feynman por medio de

$$T_{ba} = \langle b | T | a \rangle = (\Pi_i t_i^F) (\Pi_i t_i^B) M_{ba} \delta^{(4)}(P_a - P_b) \quad (3.6.72)$$

donde

$$t_i^B = ((2\pi)^3 2\omega_i)^{-1/2} \quad \text{y} \quad t_i^F = (m/(2\pi)^3 \omega_i)^{1/2} \quad (3.6.73)$$

y los productos abarcan a todas las partículas externas: bosones y fermiones (el caso de fermiones de masa nula, neutrinos, debe tratarse aparte).

La probabilidad de transición por unidad de volumen y de tiempo debe calcularse como $|T_{ba}|^2/VT$ donde V y T son el volumen y tiempo totales

(infinitos). Al calcular el cuadrado de T_{ba} se tiene el cuadrado de una delta de Dirac, lo que en genral no tiene sentido, pero aquí interpretamos como sigue,

$$\delta^{(4)}(p) \delta^{(4)}(p) = \delta^{(4)}(0) \quad (3.6.74)$$

y además

$$\delta^{(4)}(0) = \lim_{P \rightarrow 0} \int d^4x e^{-iPx} = \int d^4x = VT (\infty) \quad (3.6.75)$$

De aquí resulta entonces que la probabilidad de transición por unidad de volumen y tiempo es

$$(\Pi_i t_i^F)^2 (\Pi_i t_i^B)^2 \delta^{(4)}(P_a - P_b) |M_{ba}|^2 \quad (3.6.76)$$

expresión que ahora tiene perfecto sentido.

A partir de aquí es posible definir en particular la sección eficaz para el caso en que el estado inicial conste de dos partículas y también la razón de decaimiento de una partícula inestable (estado inicial con una sola partícula). No veremos el detalle de cómo se llega a justificar estas expresiones.

La sección eficaz diferencial del proceso $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4 + \dots + p_N$ es

$$d\sigma = (2\pi)^6 v^{-1} d^3p_3 d^3p_4 \dots d^3p_N (\Pi_i t_i^F)^2 (\Pi_i t_i^B)^2 |M_{ba}|^2 \delta^{(4)}(P_a - p_b) \quad (3.6.77)$$

donde v es la "velocidad relativa" entre las partículas incidentes

$$v = ((p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2)^{1/2} / \omega_1 \omega_2 \quad \text{con } \vec{p}_1 / \vec{p}_2 \quad (3.6.78)$$

Si escribimos $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ entonces v puede escribirse en la forma

$$v = p_1 |\omega_2 - a\omega_1| / \omega_1 \omega_2 \quad (3.6.79)$$

En particular si $a = 0$ entonces

$$v = p_1 / \omega_i \text{ (sist. de lab.)} \quad (3.6.80)$$

$$v = 1 \text{ (sist. lab. con } m_1 = 0) \quad (3.6.81)$$

y si se trata del sistema centro de momento (c.m.) entonces $a = -1$ y

$$v = (\omega_1 + \omega_2) p_1 / \omega_1 \omega_2. \text{ (c.m.)} \quad (3.6.82)$$

Para calcular una sección diferencial $d\sigma/d\Omega$ se debe integrar sobre todos los momentos finales excepto uno de ellos del que solo se integra su módulo, es decir, de la descomposición

$$d^3p = p^2 dp d\Omega \quad (3.6.83)$$

se integra solo dp mientras $d\Omega$ se pasa dividiendo al otro lado. Además el factor $|M_{ba}|^2$ debe entenderse como la suma de los módulos cuadrados de amplitudes con diferentes orientación de spin y polarizaciones finales y como el promedio sobre el valor inicial de estas mismas variables discretas. Estas sumas y promedios se hacen solo sobre aquellas variables que no se están observando en el experimento; las otras quedan fijas. Por ejemplo ahora ilustraremos el uso de (34.3) para los scattering Compton y Moller y en el primero dejaremos fijos los índices de polarización del fotón pero en ambos procesos promediaremos sobre los espines de los electrones iniciales y sumaremos sobre los espines de los electrones finales.

En el caso de un decaimiento espontáneo, el estado inicial consta solo de la partícula inestable, la cual decae en $N - 1$ partículas que aparecen en el estado final. En forma análoga a la definición de la sección eficaz se define el recíproco de la vida media:

$$\Gamma = \tau^{-1} = (2\pi)^3 \int d^3 p_2 \cdots \int d^3 p_N (\Pi t_i^F)^2 (\Pi t_i^B)^2 |M_{ba}|^2 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \quad (3.6.84)$$

Si existe más de un modo de decaimiento se definen vidas medias parciales.

— Problema 34.1: Demostrar que la vida media del lepton $\mu \rightarrow e + \nu$ que se deduce a partir del Hamiltoniano de interacción

$$I = \frac{G}{\sqrt{2}} \{ \bar{\psi}_{\nu\mu} \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \psi_\mu \bar{\psi}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \psi_{\nu e} + \text{hermítico conj.} \} \quad (3.6.85)$$

resulta ser

$$\tau_\mu^{-1} = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (3.6.86)$$

Este problema resultará bastante largo porque primero debe cuantizarse un campo de Dirac de masa nula (el caso de los neutrinos) y luego debe calcularse la amplitud de decaimiento a partir de la definición misma de la matriz S dada en (29.12). El valor experimental de la constante G es

$$G = (1,03 \pm 0,003) 10^{-5} m_p^{-2} \quad (3.6.87)$$

donde m_p es la masa del protón.

3.6.2. Sección eficaz diferencial en el scattering Compton.

El cálculo lo haremos en el sistema de laboratorio del electrón inicial por lo que $v = 1$ en (34.3). La aplicación directa de esta fórmula nos da

$$d\sigma = (2\pi)^6 d\Omega \int k'^2 dk' \int d^3 p' ((2\pi)^6 4\omega\omega')^{-1} ((2\pi)^6 m\omega_{p'})^{-1} m^2 \frac{1}{2} \sum |M_{ba}|^2 \delta(k+p-k'-p') \quad (3.6.88)$$

donde se ha usado la notación

$$\omega = \omega_k, \omega' = \omega_{k'}, \omega_p = m(\text{sist. lab.}), \quad (3.6.89)$$

Además como $|\vec{k}'| = \omega'$ y puesto que la integral sobre \vec{p}' se puede hacer en forma trivial, entonces podemos escribir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m}{(4\pi)^2} \int \omega'^2 d\omega' (\omega\omega'\omega_{p'})^{-1} \delta(E-E') \left(\frac{1}{2} \sum |M_{ba}|^2\right) \quad (3.6.90)$$

donde E y E' son las energías totales inicial y final. Para hacer esta integral cambiaremos de integral sobre ω' a integral sobre E' lo cual requiere que determinemos $d\omega'/dE'$. Esto lo hacemos a partir de

$$E' = \omega' + \omega_{p'} = \omega' + (m^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos \theta)^{1/2} \quad (3.6.91)$$

donde θ es el ángulo entre \vec{k} y \vec{k}' .

Al derivar con respecto a E' a ambos lados se obtiene inmediatamente que

$$d\omega'/dE' = \omega_{p'} / (\omega_{p'} + \omega' - \omega \cos \theta). \quad (3.6.92)$$

Es posible eliminar θ de esta expresión si consideramos que $(p+k-k')^2 = m^2$ implica que

$$\omega' = m\omega / (m + \omega - \omega \cos \theta). \quad (3.6.93)$$

De aquí resulta que

$$d\omega'/dE' = \omega' \omega_{p'} / n\omega. \quad (3.6.94)$$

Reemplazando este resultado en (35.1) se obtiene directamente que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{7}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{2} \sum |M_{ba}|^2\right) \quad (3.6.95)$$

Ahora el problema consiste en determinar el valor explícito del último factor en (35.2) a partir de la amplitud dada en (32.10). Lo que queremos es calcular el módulo cuadrado de la amplitud, promediando sobre la orientación del spin inicial y sumando sobre la del final, esto es,

$$k = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |M(p's', k'\lambda'; k\lambda)|^2 \quad (3.6.96)$$

Veamos que muy en general esto se reduce al cálculo de una traza,

$$\begin{aligned}
 2K &= \sum_{ss'} \bar{u}_{s'} B u_s \bar{u}_s \gamma_0 B^\dagger \gamma_0 u_{s'} \\
 &= \sum_{s'} \bar{u}_{s'} B \Lambda^+(p) \bar{B} u_{s'} \\
 &= \sum_{s'} u_{s'} \beta \bar{u}_{s'} \alpha (B \Lambda^+(p) \bar{B}) \alpha \beta \\
 &= \text{Tr}(B \Lambda^+(p) \bar{B} \Lambda^+(p'))
 \end{aligned} \tag{3.6.97}$$

donde se ha usado la notación $\bar{B} = \gamma_0 B^\dagger \gamma_0$

Haciendo uso ahora de (32.10) y (32.11) para el caso en que $pk = m\omega$ podemos escribir que

$$K = \frac{e^4}{4m^2} \frac{1}{2} \text{Tr}(\not{a} \Lambda^+(p) \not{a} \Lambda^+(p')) \tag{3.6.98}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \not{a} &= \not{a}' - \not{k}/\omega + \not{a}' \not{k}'/\omega' \\
 &= \not{a}' - \not{a}' + 2ee' \not{k}/\omega
 \end{aligned} \tag{3.6.99}$$

donde a_μ se define como

$$a_\mu = k'_{\mu} / \omega' - k_\mu / \omega \tag{3.6.100}$$

que, por supuesto, no es un cuadrivector; vemos que se cumple que

$$a_0 = 0. \tag{3.6.101}$$

Es fácil demostrar que

$$a^2 = -\vec{a} \cdot \vec{a} = 2(\vec{k} \cdot \vec{k}' - \omega\omega') / \omega\omega' \tag{3.6.102}$$

pero como, a partir de $\vec{k} - \vec{k}' = \vec{p}'$ se deduce que

$$\vec{k} \cdot \vec{k}' = \omega\omega' - \omega m + \omega' m \tag{3.6.103}$$

por lo cual

$$a^2 = -2m(\omega - \omega') / \omega\omega' \tag{3.6.104}$$

Además, de la misma forma como se obtuvo (36.6) se obtiene que

$$\gamma_0 \not{a} \gamma_0 = \not{a}' - \not{a}' + 2ee' \not{k}/\omega \tag{3.6.105}$$

Reemplazando (35.6) y (35.10) en (35.5) se obtiene

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} (e^2/2m)^2 \text{Tr}\{(\not{a}' - \not{a}' + 2ee' \not{k}/\omega) \Lambda^+(p) (\not{a}' - \not{a}' + 2ee' \not{k}/\omega) \Lambda^+(p')\} \\
 &= \frac{1}{2} (e^2/2m)^2 \text{Tr}(A + B + C)
 \end{aligned} \tag{3.6.106}$$

$$TrA = Tr(\not{\epsilon} \not{\epsilon}' \not{a}(\not{p} + m) \not{a} \not{\epsilon} \not{\epsilon}'(\not{p}' + m))/4m^2 \quad (3.6.107)$$

pero en el sistema de laboratorio \not{p} anticonmuta con $\not{\epsilon}$, $\not{\epsilon}'$ y \not{a} , luego

$$\begin{aligned} &= Tr((- \not{p} + m) \not{\epsilon} \not{\epsilon}' \not{a} \not{a} \not{\epsilon}' \not{\epsilon}(\not{p} + \not{k} - \not{k}' + m)) \\ &= 2m(\omega - \omega')Tr((\not{p} - m)(\not{p} + \not{k} - \not{k}' + m))/4m^2\omega\omega' \\ &= (\omega - \omega')Tr(\not{p}(\not{k} - \not{k}'))/2m\omega\omega' \end{aligned} \quad (3.6.108)$$

Similar se demuestra que

$$\begin{aligned} TrB &= (e'e')^2Tr(\not{k}(\not{p} + m) \not{k}(\not{p}' + m))/m^2\omega^2 \\ &= 8(e'e')^2(1 - kk'/m\omega), \\ TrC &= 8(kk')(e'e')^2/m\omega. \end{aligned} \quad (3.6.109)$$

Con estos resultados se calcula que

$$K = (e^2/2m)^2((\omega - \omega')^2/\omega\omega' + 4(e'e')^2). \quad (3.6.110)$$

Este resultado es ahora reemplazado en la expresión para la sección eficaz diferencial obtenida en (35.2), lo que nos da finalmente,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 (e^2/2m)^2 \{(\omega - \omega')^2/\omega\omega' + 4 [e_{\lambda\mu}(\vec{k})e_{\lambda'\mu'}^*(\vec{k}')]^2\}^2 \quad (3.6.111)$$

fórmula que se conoce con el nombre de fórmula de Klein-Nishina.

Diversos comentarios sobre el significado y límites particulares de esta fórmula pueden ser encontrados, por ejemplo, en el libro de Muirhead, Sec. 11.1.

- Problema 35.1: Deducir en detalle (35.11) a partir de (35.5).
- Problema 35.2: Deducir en forma análoga la sección eficaz diferencial para

- a) el caso de la aniquilación de un par electrón en dos fotones y
- b) el caso de la creación de un par electrón positrón por el choque de dos fotones.

3.6.3. Sección eficaz diferencial en el caso del scattering Moller.

Hacemos uso de la fórmula general (34.3) integrando sobre los momentos finales excepto que la parte angular de uno de ellos no es integrada y

además sumamos sobre las posibles direcciones del spin final de ambos electrones y promediamos sobre los spines iniciales.

$$d\sigma = (2\pi)^6 v^{-1} d\Omega \int q_1^2 dq_1 \int d^3 q_2 \frac{m^4}{E^2 E'^2 (2\pi)^{12}} K (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \quad (3.6.112)$$

y v en el sistema c.m., donde haremos el cálculo, vale

$$v = 2Ep/E^2 = 2p/E; \quad (3.6.113)$$

p representa el valor común de los cuatro momentos externos (módulo del trivector), E es la energía inicial de cada uno de los electrones

$$E^2 = m^2 + p^2 \quad (3.6.114)$$

E' es la energía de cada uno de los electrones finales y

$$K = \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |M|^2. \quad (3.6.115)$$

M es la amplitud de scattering Moller determinada en la Sec. 33, ec. (33.3).

Haciendo uso de la misma técnica que permitió determinar (35.4) a partir de (35.3) se obtiene que

$$K = (e^4/4) \left[\frac{Tr[\gamma_\mu \wedge^+(p_1) \gamma_\mu \wedge^+(q_1)] Tr[\gamma_\mu \wedge^+(p_2) \gamma^\nu \wedge^+(q_2)]}{(p_1 - q_1)^4} + \quad (3.6.116)$$

$$\frac{Tr[\gamma_\mu \wedge^+(p_2) \gamma_\nu \wedge^+(q_1)] Tr[\gamma^\nu \wedge^+(q_2) \gamma^\mu \wedge^+(p_1)]}{(p_1 - q_2)^4} + \quad (3.6.117)$$

$$\left. \frac{2Tr[\gamma_\mu \wedge^+(p_1) \gamma_\nu \wedge^+(q_1) \gamma^\mu \wedge^+(p_2) \gamma^\nu \wedge^+(q_2)]}{(p_1 - q_1)^2 (p_1 - q_2)^2} \right] \quad (3.6.118)$$

$$= (e^4/4 [A/()^4 + B/()^4 + 2C/()^2()^2]) \quad (3.6.119)$$

donde A, B y C son las respectivas cantidades en (36.5)

A continuación damos las expresiones covariantes de estas tres cantidades y también la forma que ellas toman en el c.m. en función de p y el

ángulo de scattering θ ,

$$\begin{aligned}
 A &= (2/m^4)(2m^2(m^2 - p_1q_1) + (p_1p_2)^2 + (p_1q_2)^2) \\
 &= (4/m^4)(2p^4 + 2p^4 \cos \frac{4\theta}{2} + m^4 + 2p^2m^2 + 2m^2p^2 \cos \theta) \\
 B &= (2/m^4)(2m^2(m^2 - p_1q_2) + (p_1p_2)^2 + (p_1q_1)^2) \\
 &= (4/m^4)(2p^4 + 2p^4 \sin \frac{4\theta}{2} + m^4 + 2m^2p^2 - 2m^2p^2 \cos \theta) \\
 C &= (-2/m^4)(m^2(m^2 - p_1q_1 - p_1p_2 - p_2q_2) + (p_1p_2)^2) \\
 &= (-2/m^4)(4p^4 - m^4).
 \end{aligned} \tag{3.6.120}$$

Arriba se ha hecho uso de las expresiones de las relaciones en el centro de momento

$$\begin{aligned}
 p_1q_1 &= p_2q_2 = E^2 - p^2 \cos \theta \\
 p_1p_2 &= q_1q_2 = E^2 + p^2 \\
 p_1q_2 &= q_1p_2 = E^2 + p^2 \cos \theta
 \end{aligned} \tag{3.6.121}$$

además

$$\begin{aligned}
 (p_1 - q_1)^2 &= -4p^2 \sin \frac{2\theta}{2} \\
 (p_1 - q_2)^2 &= -4p^2 \cos \frac{2\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{3.6.122}$$

con todo esto se obtiene

$$K = \frac{e^4}{4p^4m^4} \left(\frac{4(E^2 + p^2)^2}{\sin^4 \theta} - \frac{8E^4 - 4E^2m^2 - m^4}{\sin^2 \theta} + p^4 \right) \tag{3.6.123}$$

y puesto que (36.1) implica que

$$d\sigma/d\Omega = [m^4/(4\pi E)^2]K \tag{3.6.124}$$

entonces la sección eficaz diferencial para el scattering Moller es

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{4E^2p^4} \left(\frac{4(E^2 + p^2)^2}{\sin^4 \theta} - \frac{8E^4 - 4E^2m^2 - m^4}{\sin^2 \theta} + p^4 \right) \tag{3.6.125}$$

— Problema 36.1: Demostrar (36.5) - (36.9) y obtener así (36.14).

— Problema 36.2: Encontrar la sección eficaz diferencial para el caso del scattering Bhabha ($e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$).

— Problema 36.3: Calcular la sección eficaz diferencial para el scattering electrón protón.

3.6.4. Sobre el problema de las autoenergías.

El hecho que los elementos de matriz del operador de scattering S entre estados de una partícula sean diferentes de la unidad, e.g.,

$$S|p, s\rangle \neq |p, s\rangle, \tag{3.6.126}$$

pareciera indicar que estos estados no son estables ya que no es sino el operador que nos da la evolución de un estado desde el remoto pasado hasta el remoto futuro (ver (29.10)). Es algo fundamental, para una teoría de este tipo, sin embargo, exigir que en lugar de (37.1) se tenga una igualdad. Esto tiene que ser así para cualquier partícula que no sufre decaimiento, ya que al considerar el estado de una sola partícula estamos impidiendo cualquier interacción. La desigualdad en (37.1) se debe a la existencia de las contribuciones de autoenergía. La solución de la presente paradoja será dada a través del proceso de renormalización que veremos más adelante. Lo que veremos en el capítulo sobre renormalización es que es necesario redefinir la masa de las partículas absorbiendo en ellas los términos de autoenergía.

Esto, sin embargo no es posible en el caso del fotón el que tiene masa nula antes y después del proceso de renormalización, por lo tanto debemos discutir este caso con especial cuidado. A cualquier orden la autoenergía del fotón es (Prob. 32.1)

$$(k\lambda|iM|k\lambda) = e^2 e_\lambda^\mu(\vec{k}) e_\lambda^\nu(\vec{k}) \Pi_{\mu\nu}(k) \quad (3.6.127)$$

donde $\Pi_{\mu\nu}$ es a segundo orden esencialmente la transformada de Fourier de

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(x,y) = (0|T(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)_x(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)_y|0) \quad (3.6.128)$$

que está muy relacionado a

$$(0|T(j_\mu(x)j_\nu(y))|0). \quad (3.6.129)$$

Demostraremos que $\Pi_{\mu\nu}$ es necesariamente de la forma

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)C(k^2), \quad (3.6.130)$$

con lo que se prueba que (37.2) es *idénticamente nulo* ya que $k^2 = 0$ y además $e_\lambda^\mu(k)k_\mu = 0$.

Con este propósito definimos

$$\Pi_{\mu\nu}^1(k) = \Pi_{\mu\nu}(k) - \Pi_{\mu\nu}(0) \quad (3.6.131)$$

que obviamente tiende a cero cuando $k \rightarrow 0$. A segundo orden se tiene que

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(0) &= \int d^4p Tr(\gamma_\mu \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon}) \\ \Pi_{\mu\nu}^1(k) &= \int d^4p Tr(\gamma_\mu \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}) \end{aligned} \quad (3.6.132)$$

Al último propagador le aplicamos la identidad

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} - \dots \quad (3.6.133)$$

$$(\not{p} - m + i\varepsilon - \not{k})^{-1} = (\not{p} - m + i\varepsilon)^{-1} + (\)^{-1} \not{k} (\)^{-1} + \dots \quad (3.6.134)$$

lo que permite escribir (37.7b) en forma de una serie cuyo primer término es (37.7a), mientras los que siguen tienen un factor p extra en el denominador siendo así lo más linealmente divergentes, mientras (37.7a) es cuadráticamente divergente. Esto nos permite asegurar que la divergencia cuadrática de $\Pi_{\mu\nu}(k)$ está toda en $\Pi_{\mu\nu}(0)$ y no en $\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k)$. Puesto que $\Pi^{(1)}(k)$ es un tensor, tendrá necesariamente la forma

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k) = k^2 C(k^2) g_{\mu\nu} + D(k^2) k_\mu k_\nu \quad (3.6.135)$$

Con C y D regulares para $k^2 = 0$ para asegurar que (37.8) se anule para $k = 0$. Por otro lado $\Pi_{\mu\nu}(0)$ es una constante, de modo que solo puede tener la forma

$$\Pi_{\mu\nu}(0) = A g_{\mu\nu} \quad (3.6.136)$$

Se tiene además, debido a (37.3) y (37.4), que la conservación de la corriente eléctrica (invariancia de gauge), $\partial^\mu j_\mu = 0$, implica que

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0 \quad (3.6.137)$$

con lo que podemos escribir

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = A g_{\mu\nu} + k^2 C(k^2) g_{\mu\nu} + D(k^2) k_\mu k_\nu \quad (3.6.138)$$

con la condición, proveniente de (37.10),

$$k_\mu (A + k^2 C(k^2) + k^2 D(k^2)) = 0 \quad (3.6.139)$$

que para $k^2 = 0$ con $k \neq 0$ implica que $A = 0$ (lo cual no es cierto a segundo orden!!). y por lo tanto (37.12) implica, cuando $k^2 \neq 0$ que

$$C(k^2) = -D(k^2) \quad (3.6.140)$$

lo que termina de demostrar que (37.5) es cierto.

El hecho que la constante A no se anule a segundo orden y más aún, corresponde a una integral divergente, reabre el problema de la estabilidad del estado de un fotón. El problema ha sido discutido con más cuidado por K. Johnson (1961), Nuclear Physics **25**, 431.

3.6.5. Transiciones vacío-vacío: $\langle 0|S|0 \rangle$

De acuerdo a (31.7) los únicos diagramas que contribuyen en este caso son aquellos que no poseen líneas extremas como es el caso del último diagrama en (31.10). Estos diagramas no dependen de variable dinámica alguna, ya que todas son integradas, por lo que ellos son simples constantes. Por esto

$$\langle 0|S|0 \rangle = c \quad (3.6.141)$$

una vez que se han sumado todos los órdenes en teoría de perturbación. Hacemos notar que cada una de las contribuciones es una integral divergente. Por otro lado, tenemos la condición física de que el estado vacío debe ser estable, y por lo tanto la acción de S sobre él puede a lo más cambiarle la fase

$$S|0 \rangle = e^{i\lambda} |0 \rangle \quad (3.6.142)$$

ya que S es un operador unitario. Esto nos permite identificar a c con este factor de fase.

Cada vez que queramos calcular la amplitud de un cierto proceso de scattering notaremos que aparecerán por cada diagrama abierto (*con* líneas externas) una infinidad de posibilidades en que este mismo diagrama está siendo multiplicado por alguno de los diagramas cerrados. Por ejemplo, el término $(\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi)$ da origen al diagrama (uno solo pero disconexo) que indica la figura. El mismo diagrama abierto puede aparecer multiplicado por cualquiera de los diagramas que contribuyen en (38.1), de tal modo que es posible sacar como factor común a este diagrama abierto, el que es multiplicado por toda la serie cuya suma es $\exp(i\lambda)$. Lo que se ha demostrado entonces es que las partes disconexas cerradas de un diagrama contribuyen en un cambio de fase global y ella no afecta los cálculos de probabilidades de transición y de secciones eficaces.

Si escribimos el operador S como $S = cS'$ entonces S' es el operador en cuyo cálculo de elementos de matriz se omite la inclusión de diagramas cerrados. El factor c no juega ningún papel físico y de ahora en adelante será ignorado,

$$S' = \frac{S}{\langle 0|S|0 \rangle} \quad (3.6.143)$$

3.6.6. Interacción con un campo electromagnético externo

Consideremos el caso en que a un lagrangiano libre de Dirac se le agrega el término de interacción,

$$\mathcal{H}_{int}(x) = e : \bar{\psi}(x) A^{ext}(x) \psi(x) : \quad (3.6.144)$$

que describe el acoplamiento de los electrones con un campo electromagnético aplicado externamente y que por no ser una variable dinámica, no es un campo cuántico. Evidentemente la presencia de un campo externo destruye la invariancia de Poincaré por lo que ya no se tendrá conservación de momento lineal, energía y momento angular.

A diferencia del caso puramente cuántico, el elemento de matriz

$$(p', s' | S | p, s) \quad (3.6.145)$$

esta vez tiene una contribución proveniente de $S^{(1)}$,

$$\begin{aligned} (p', s' | iT^{(1)} | p, s) &= ie \int d^4x (p', s' | : \bar{\psi}(x) : | p, s) A_{\mu}^{ext}(x) \\ &= ie \int d^4x \bar{f}_{p'}^{+s'}(x) \gamma^{\mu} f_p^{+s}(x) A_{\mu}^{ext}(x) \\ &= \frac{iem}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\omega_{p'} \omega_p}} \left\{ \int d^4x e^{-i(p-p')x} A_{\mu}^{ext}(x) \right\} \bar{u}_{s'}(p') \gamma^{\mu} u_s(p) \\ &= \frac{iem}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\omega_{p'} \omega_p}} \tilde{A}_{\mu}^{ext}(p-p') \bar{u}_{s'}(p') \gamma^{\mu} u_s(p) \end{aligned} \quad (3.6.146)$$

Notemos que en esta amplitud no aparece un delta de Dirac, lo cual, como ya se explicó, se debe a la inexistencia de conservación del cuadrimomento. Si el campo es estático, por ejemplo, entonces debe haber conservación de la energía. Es fácil ver que esto es así ya que al no haber dependencia en t en el campo externo la integral sobre t para obtener (39.2) da efectivamente un delta de energía. Similar análisis lleva a concluir que si el campo es homogéneo (solo depende de t) entonces hay conservación de momento lineal.

El libro de Bjorken y Drell trae también un caso inverso, el de un campo electromagnético cuántico que interactúa con una corriente externa no cuántica, (Sec. 17.10 de ese libro).

— Problema 39.1: Calcular la sección eficaz de scattering correspondiente a la amplitud (39.2) y compararla con la que se obtuvo en el problema 36.3 en el límite en que la masa del protón tiende a ∞ .

Es posible considerar órdenes más altos, pero entonces no solo influye el campo electromagnético externo sino también el campo electromagnético que rodea al electrón (llamado campo de radiación) y que es el

campo cuántico $A^\mu(x)$ de la electrodinámica cuántica ya tratado. Se tiene, por ejemplo, que una corrección a la amplitud recién calculada es representada por el diagrama.

— Problema 39.2: Calcular la amplitud asociada a (39.3) y discutir la convergencia de la integral que se obtiene. ¿Es invariante de gauge el resultado obtenido? Recuérdense que nosotros estamos en el gauge de Lorentz, pero eso no impide que exista aún la posibilidad de hacer un cierto tipo de cambio de gauge.

3.6.7. Electrodinámica escalar.

En esta sección discutiremos aspectos básicos de la teoría correspondiente a la interacción de un campo de Dirac con un campo pseudoescalar real definida por el término de interacción.

$$\mathcal{H}_I(x)ig : \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\phi(x) :, \quad (3.6.147)$$

Esta teoría permite definir una teoría de perturbaciones descrita por gráficos idénticos a los de electrodinámica, con la diferencia que las líneas fotónicas son reemplazadas por las líneas mesónicas

$$(3.6.148)$$

y en los cálculos de amplitud el papel jugado por los γ^μ es tomado por γ_5 . Es tan similar una teoría a con la otra que, a pesar que (40.1) no tiene ningún interés físico se la utiliza en reemplazo de ED para ilustrar algunos aspectos de esta última. Naturalmente la ausencia de índices relativistas hace esta nueva teoría en el cálculo detallado y se le suele denominar por estas razones, "electrodinámica escalar". Aquí no hay diferencia importante en la operatoria si la masa del mesón pseudoescalar es nula o no. La Teoría con masa del mesón pseudoescalar es nula o no. La teoría con masa nula es simplemente el límite de aquella con masa distinta de cero. La carencia de invariancia de gauge en esta teoría tiene importancia y es esto lo que no permite llevar la analogía a todos los aspectos de electrodinámica.

A las reglas de Feynman de ED dadas en #33 habría que agregar:

Línea externa : factor 1 : factor $((2\pi)^3 2\omega_k)^{-1/2}$

Línea interna ... $i(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)^{-1}$

Vértice

$$g\gamma_5 \delta^{(4)}() \quad (3.6.149)$$

— Problema 40.1: Demostrar sin hacer uso de las reglas de Feynman que la amplitud invariante a segundo orden correspondiente al scattering mesón - electrón.

$$M = g^2 \bar{u}_{s'}(p') \gamma_5 \left[\frac{i}{\not{k} + \not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - \not{k}' - m + i\epsilon} \right] \gamma_5 u_s(p) \quad (3.6.150)$$

Dibuje los correspondientes diagramas de Feynman y verifique que (40.3) se obtiene a partir de esos diagramas al hacer uso de (40.2).

Capítulo 4

Renormalización

4.1. Sobre el significado de la renormalización.

Suele decirse que renormalización es la técnica para deshacerse de los infinitos que aparecen normalmente en una teoría de campos. Esto, literalmente tomado, es falso, o al menos es incompleto. Toda teoría cuántica de campos debe someterse al proceso de renormalización independientemente de si en ella hay divergencias o no. Nosotros haremos pocas referencias a los infinitos en lo que sigue para que resalte claramente la profunda razón física que obliga a renormalizar. Puesto que en nuestro tratamiento general manipularemos expresiones sin discutir si son finitas o no podría pensarse que en la práctica podrían surgir ambigüedades en el significado de estas operaciones. Efectivamente esto es así, pero es posible evitar tales ambigüedades introduciendo un apropiado “cut-off” en las integrales en espacio de momento, lo que puede hacerse en forma invariante de Lorentz e invariante de gauge por medio, por ejemplo, del método de los “reguladores” (lo que no veremos). Queremos dejar claro entonces que es posible definir en forma relativamente rigurosa todas las operaciones matemáticas que hagamos.

Puede ocurrir, sin embargo, que aún una vez aplicado el método de renormalización la teoría final (renormalizada) tenga infinitos asociados con cantidades que representan observables. En tal caso se dice que la teoría es “no renormalizable”.

La necesidad de renormalizar surge del hecho que i) la separación a priori que se hace de la densidad lagrangiana o del hamiltoniano en una parte libre y otra de interacción no es la correcta debido a que al existir

autointeracciones las masas físicas resultan ser diferentes de las masas “desnudas” que aparecen en el Lagrangiano. La supuesta parte libre, entonces, no es tal ya que no tiene el coeficiente correcto en el término de masa. Esto además tiene por efecto que los autoestados de H_0 no sean estados físicos (no tienen la masa correcta) y por lo tanto los elementos de matriz S tampoco son las amplitudes que físicamente deba interesarnos. Es necesario usar los autoestados de un correcto Hamiltoniano libre, para calcular las amplitudes físicas. ii) La constante de acoplamiento que aparece en el Lagrangiano también resulta no corresponder a la observada debido a la existencia de correcciones de vértice que existen en la teoría y iii) además la normalización de los campos debe ser modificada para que los elementos de matriz del operador de scattering den en forma directa las amplitudes de interés físico.

Llegar a escribir la teoría en términos de las cantidades observables y llegar a hacer la correcta separación del hamiltoniano en una parte libre y otra de interacción es lo que debe entenderse como proceso de renormalización.

Puesto que vamos a renormalizar denotaremos por ψ° , ϕ° y A_μ° a los campos antes de renormalizar y m_0 , μ_0 , g_0 , e_0 las masas y constantes de acoplamiento antes de renormalizar (desnudas).

Los lagrangianos que usaremos serán principalmente

$$\mathcal{L}_1 =: \bar{\psi}^\circ (i \not{\partial} - m_0) \psi^\circ + \frac{1}{2} : (\phi_{,\mu}^\circ \phi^{\circ,\mu} - \mu_0^2 \phi^{\circ 2}) : - i g_0 : \bar{\psi}^\circ \gamma_s \psi^\circ \phi^\circ : \quad (4.1.1)$$

$$\mathcal{L}_2 =: \bar{\psi}^\circ (: \not{\partial} - m_0) \psi^\circ : - \frac{1}{2} : A_{\mu,\nu}^\circ A^{\circ,\mu,\nu} : - e_0 : \bar{\psi}^\circ A^\circ \psi^\circ : \quad (4.1.2)$$

Se verá al final que estos lagrangianos no-renormalizados son matemáticamente iguales a los correspondientes lagrangianos renormalizados solo que en la forma renormalizada las cantidades físicas (o renormalizadas) son explícitas y la separación en parte libre y de interacción es diferente, dando origen a una teoría de perturbaciones diferente.

La renormalización va a tener su fundamento físico en exigencias “naturales”, como podría ser, por ejemplo,

$$(1_{\text{partic.A}} | S | 1_{\text{partic.A}}) = 1 \quad (4.1.3)$$

Es más fácil y cómodo, sin embargo, tomar otras como las exigencias básicas y demostrar (4.1.3) como una consecuencia de ellas. Nishijima, en su libro, utiliza (4.1.3) como punto de partida (Nishijima, “Particles and Fields”).

4.2. La masa desnuda y la masa física del mesón.

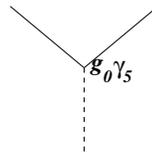
En la sección anterior adelantamos que la masa que aparece en el lagrangiano no corresponde a la masa física (observable). Definamos

$$\begin{aligned}\delta\mu^2 &= \mu_0^2 - \mu^2 \\ \delta m &= m_0 - m\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

El primer lagrangiano se escribe ahora en la forma.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = & \left[\bar{\psi}^\circ (i \not{\partial} - m) \psi^\circ + \frac{1}{2} (\phi_{,\mu}^\circ \phi^{\circ,\mu} - \mu^2 \phi^{\circ 2}) \right] : \\ & - : \left[ig_0 \bar{\psi}^\circ \gamma_5 \psi^\circ \phi^\circ + \frac{1}{2} \delta\mu^2 \phi^{\circ 2} + \delta m \bar{\psi}^\circ \psi^\circ \right] : \end{aligned}\quad (4.2.7)$$

El primer paréntesis representa al lagrangiano libre, ya que tiene las masas físicas (en realidad aquí hay más sutilezas) y el segundo paréntesis cuadrado es el término de interacción. Notamos que a diferencia de la teoría de perturbaciones fenomenológicas aquí existe, aparte del vértice usual



y también los vértices

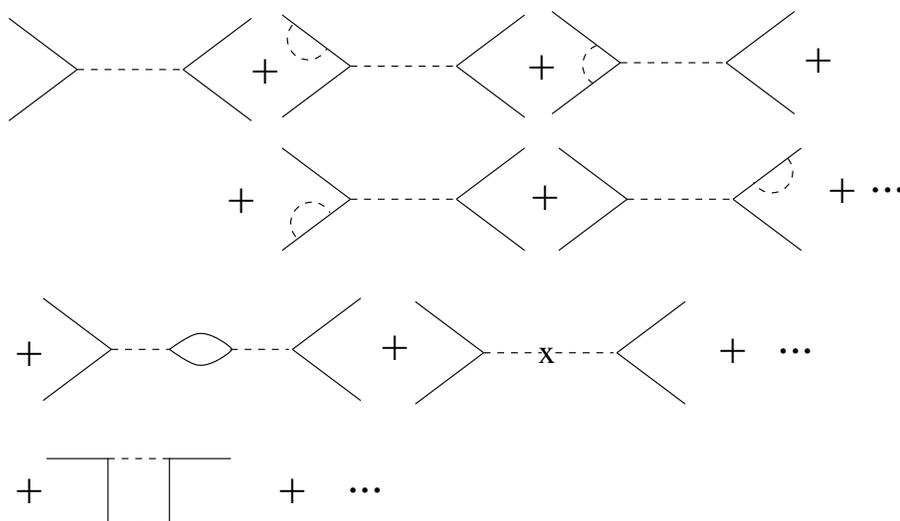
$$\frac{1}{2} \delta\mu^2 \phi^{\circ 2} \quad \text{y} \quad i\delta m \bar{\psi}^\circ \psi \quad (4.2.8)$$

se se representan por

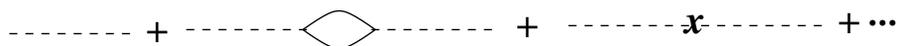


respectivamente.

Los tipos de gráficos que ahora puede hacerse es mayor que antes. Los gráficos de la amplitud del scattering fermión - fermión son,

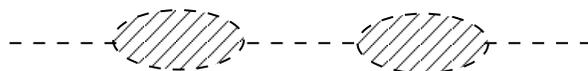


Los diagramas que contribuyen a definir la posición del polo (4.1.4) son de la forma

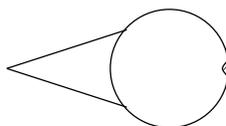


Son aquellos gráficos que entre los dos vértices tienen solo *un* propagador mesónico y correcciones de orden superior a éste. La suma infinita de ellos da el propagador “vestido”, $i\Delta_F^{\prime}$ y, por razones físicas ya explicadas, debe tener un polo en $k^2 = \mu^2$, la posición correspondiente a la masa física del mesón escalar. Se verá que esto determina el corrimiento de masa $\delta\mu^2$.

Para efectuar formalmente la suma de todos los diagramas que contribuyen al propagador vestido se clasifican los diagramas de autoenergía del mesón en aquellos que son de la forma



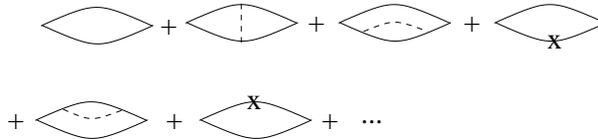
a los que llamamos *reductibles*, ya que pueden ser separados en dos partes con solo cortar un propagador mesónico interno. Los que no pueden ser así separados en dos los llamados *irreductibles* y los representamos por



y algebraicamente se denotarán por

$$ig_0^2\Pi(k) \tag{4.2.9}$$

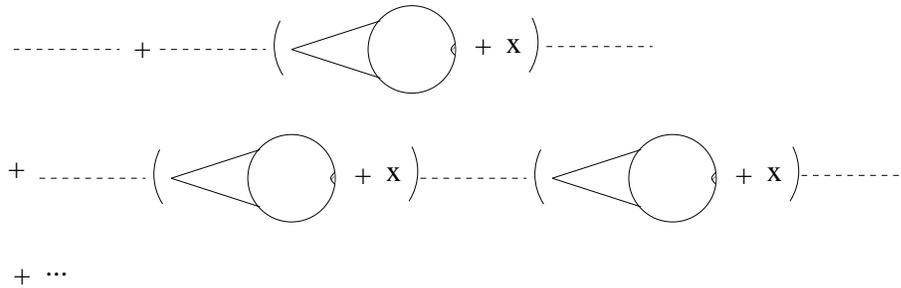
(suma de casi todos los diagramas irreducibles) y los primeros que contribuyen a esta suma son



El único diagrama irreducible de autoenergía no incluido arriba es

$$\frac{i}{2}\delta\mu^2 = x \tag{4.2.10}$$

Es obvio, por las definiciones dadas, que todo gráfico reducible puede ser representado como una cadena de diagramas irreducibles unidos por propagadores mesónicos. De aquí que la suma que define al propagador mesónico vestido puede ser representada gráficamente por



que se escribe

$$\begin{aligned} i\Delta_F^\circ &= i\Delta_F + i\Delta_F \left[ig_0^2\Pi^\circ + \frac{1}{2}\delta\mu^2 \right] i\Delta_F + i\Delta_F \left[ig_0^2\Pi^\circ + \frac{1}{2}\delta\mu^2 \right] i\Delta_F [\%] i\Delta_F + \dots \\ &= i\Delta_F + i\Delta_F \left[ig_0^2\Pi^\circ + \frac{1}{2}\delta\mu^2 \right] i\dot{\Delta}'_F \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

de donde

$$\begin{aligned} i\dot{\Delta}'_F &= \frac{i\Delta_F}{1 - i\Delta_F \left[ig_0^2\Pi^\circ + \frac{1}{2}\delta\mu^2 \right]} \\ &= \frac{i}{k^2 - \mu^2 + g_0^2\Pi^\circ(k^2) + \frac{1}{2}\delta\mu^2} \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Puesto que por definición de μ el polo debe estar en μ^2 entonces

$$\frac{1}{2}\delta\mu^2 = -g_0^2\Pi^\circ(\mu^2). \quad (4.2.13)$$

Se ve que la definición de la masa observable determina el corrimiento de masa (desnuda) debido a efectos de autointeracción.

xxxxxxxxx LO QUE SIGUE NO HA SIDO REVIDADO xxxxxxxxxxx

Si se hace una expansión formal de la función invariante $\Pi^\circ(k^2)$ en torno al valor $k^2 = \mu^2$, entonces el residuo de este propagador vestido pero sin renormalizar, no es simplemente i sino que es

$$\lim_{k^2 \rightarrow \mu^2} (k^2 - \mu^2)\dot{\Delta}_{F'}(k^2) = \frac{i}{1 + g_0^2\Pi^{\circ'}(\mu^2)} \equiv Z_\phi$$

donde

$$\Pi^\circ(k^2) = \Pi^\circ(\mu^2) + (k^2 - \mu^2)\Pi^{\circ'}(\mu^2) + (k^2 - \mu^2)^2\Pi_c^0(k^2).$$

Definimos como propagador renormalizado

$$i\Delta'_F(k^2) = Z_\phi^{-1}i\dot{\Delta}'_F(k^2)$$

ya que éste sí tiene un residuo i tal como el propagador desnudo $i\Delta_F =$
 --- El propagador (4.2.12) puede también ser escrito en la forma

$$i\Delta^{\circ'}_F(k^2) = \frac{i}{(k^2 - \mu^2)[1 + g_0^2\Pi^\circ(\mu^2) + (k^2 - \mu^2)\Pi_0^\circ(k^2)]}$$

y es el factor que en la amplitud global (cerca del polo) representa la línea mesónica entre los dos vértices principales de la amplitud bajo consideración. Puesto que el residuo del propagador vestido sin renormalizar no es i esto modifica el residuo del polo de la amplitud pero que veremos este no es el único factor que modifica ese residuo, de modo que aún no estamos en condicione de definir la relación entre la constante de acoplamiento g_0 y la constante de acoplamiento observable..

Demostremos ahora que globalmente se cumple que

$$(\vec{k}'|\vec{S}|\vec{k}) = \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}).$$

La suma de todos los diagramas irreducibles (como los anteriores) que permite la teoría los denotamos por

$$ig_0^2 \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p}) =$$

excepto por el diagrama que no es del tipo (43.3),

$$i\delta m = X.$$

Tal como se dedujo la expresión (42.7) para el caso del mesón escalar aquí se puede deducir que

que podemos escribir en la forma

$$iS_{F'}^{\circ}(\not{p}) = iS_F(\not{p}) \left[i\delta m + ig_0^2 \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p}) \right] iS_{F'}^{\circ}(\not{p}).$$

o bien

$$iS_{F'}^{\circ}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m + \delta m + g_0^2 \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p})}.$$

Por definición de masa física del fermión el polo del propagador está en $\not{p} = m$ y por lo tanto

$$\delta m = -g_0^2 \overset{\circ}{\Sigma}(m)$$

Si ahora se expande la función matricial invariante $\overset{\circ}{\Sigma}(\not{p})$ en torno a $\not{p} = m$

$$\overset{\circ}{\Sigma}(\not{p}) = \overset{\circ}{\Sigma}(m) + (\not{p} - m) \overset{\circ}{\Sigma}^1(m) + (\not{p} - m)^2 \overset{\circ}{\Sigma}^2(\not{p})$$

entonces (43.7) puede ser escrito como sigue

$$iS_{F'}^{\circ}(\not{p}) = \frac{i}{(\not{p} - m) \left[1 + g_0^2 \overset{\circ}{\Sigma}^1(m) + g_0^2 (\not{p} - m) \overset{\circ}{\Sigma}^2(\not{p}) \right]}.$$

Tal como en el caso escalar aquí se tiene que el residuo del propagador vestido no es igual que el residuo del propagador desnudo sino que es

$$Z_2 = \frac{1}{1 + g_0^2 \overset{\circ}{\Sigma}^1(m)}$$

y por lo tanto definimos el propagador vestido renormalizado

$$iS'_F(\not{p}) = Z_2^{-1} iS_{F'}^{\circ}(\not{p}).$$

— Problema (43.11): Calcular $\Sigma^\circ(\not{p})$ a segundo orden. Hacer la descomposición (43.9) y discutir la convergencia de las tres palabras de esta descomposición. Demostrar en particular que

$$\Sigma^\circ(m) = -\frac{3m}{16\pi^2} \log \frac{\infty}{m^2}.$$

Es fácil ahora demostrar que se cumple la condición de estabilidad del estado de un fermión,

$$(p's|S|ps) = \delta_{s's} \delta^{(3)}(\vec{p}' - p)$$

En efecto, la suma de todos los diagramas a que da origen el lado izquierdo a través de teoría de perturbación es

$$\delta_{s's} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') + \rightarrow - (X + + \rightarrow - (X \rightarrow - (X + \rightarrow + \dots$$

pero

$$\rightarrow - (x + \rightarrow - = \bar{u}_s(p) (i\delta m + ig_0^2 \Sigma^\circ(\not{p})) u_s(p)$$

Como se trata de un fermión libre entonces $p^2 = m^2$ y además por tener una función de \not{p} entre esponsor $u(p)$ entonces podemos poner $\not{p} = m$ lo que determina que estos términos extras sean todos nulos debido a (43.8) y por lo tanto (43.14) se cumple.

4.4. Renormalización del vértice.

cuando consideramos todas las correcciones radiativas a amplitudes como (41.4) o (41.5) no solamente debemos tomar en cuenta las correcciones a los propagadores intermedios sino además las correcciones de vértice. En la próxima sección veremos que también las líneas externas deben ser renormalizadas. Puesto que no deseamos contar dos veces las mismas correcciones si queremos una teoría renormalizada consistente entonces debemos tomar en cuenta en esta sección solamente las correcciones *propias de vértice*. Los diagramas *propios* de vértices son, el vértice desnudo mismo y todos aquellos diagramas que tengan exactamente tres "puntos externos", puntos que no podrán estar conectados al resto del diagrama a través de un subdiagrama de autointeracción. Ejemplos de diagramas propios de vértice:

Ejemplos de diagramas impropios de vértice:

La suma de todos los diagramas propios de vértice se denota por

$$\begin{aligned} g_0 \Gamma_5^\circ(q, p) &= \\ &= g_0 \gamma_5 + g_0^3 \Lambda_5^\circ(q, p) \end{aligned}$$

Esto es,

$$\Gamma_5^\circ(q, p) = \gamma_5 + g_0^2 \Lambda_5^\circ(q, p)$$

Aclaremos que aquí se está definiendo la función de vértice general, o sea fuera de la “capa de masa” (off-shell) de modo que el cuadrado de ninguno de los tres momentos externos es necesariamente igual a la masa de la partícula libre correspondiente.

La función de vértice aquí definida es un pseudoescalar de Lorentz por lo que necesariamente es de la forma

$$\Gamma_5^\circ = \gamma_5 [1 + f(\not{q}, \not{p}, q^2, p^2, (p-q)^2)]$$

donde f es una función invariante matricial de 4×4 . Al calcular una amplitud como (41.4) a todo orden, las correcciones de vértice tendrán por efecto reemplazar los factores $g_0 \bar{u} \gamma_5 u$ por

$$\bar{u}(q) g_0 \Gamma_5^\circ(q, p) u(p).$$

En este último caso se tiene que $q^2 = p^2 = m^2$ y además podemos hacer actuar \not{p} a la derecha de \not{q} a la izquierda, dando m por lo que nos queda

$$(44,7) = \bar{u}(q) g_0 \gamma_5 [1 + g_0^2 h^0 \{(p-q)^2\}] u(p)$$

donde h^0 es una función escalar que solo depende de $(p-q)^2$. En particular en la posición del polo de la amplitud, para $(p-q)^2 = \mu^2$. En particular en la posición del polo de la amplitud, para $(p-q)^2 = \mu^2$ la contribución de (44.7) = (44.8) al residuo de este polo es

$$g_0 (1 + g_0^2 h^0(\mu^2)) \bar{u}(q) \gamma_5 u(p) = Z_1^{-1} g_0 \bar{u}(q) \gamma_5 u(p)$$

Al lado derecho hemos escrito la contribución que da el orden más bajo y una constante de proporcionalidad Z_1 que juega el papel de constante de renormalización del vértice. De (44.9) se puede ver directamente que

$$Z_1 = \frac{1}{1 + g_0^2 h^0(\mu^2)}$$

y se define la función de vértice renormalizada como

$$\Gamma_5(q, p) = Z_1 \Gamma_5^\circ(q, p).$$

Una manera de resumir lo que se ha dicho de (44.7) a (44.10) es que

$$\bar{u}(q) \Gamma_5^\circ(q, p) u(p) = Z_1^{-1} \bar{u}(q) \gamma_5 u(p)$$

para $(p - q)^2 = \mu^2$ y $p^2 = q^2 = m^2$

Para obtener ahora una descomposición de Γ_5 similar a (44.5) definimos primero

$$\Lambda_{5c}^\circ(q, p) = \Lambda_5^\circ(q, p) - \gamma_5 h^\circ(\mu^2)$$

y además definimos

$$g^2 \Lambda_{5c}(q, p) = Z_1 g_0^2 \Lambda_{5c}^\circ(q, p)$$

Aquí, por primera vez hacemos entrar el valor de constante de acoplamiento física en una definición aunque en forma totalmente formal. Por (44.5), (44.11) y (44.14) es obvio que

$$\Gamma_5(q, p) = \gamma_5 + g^2 \Lambda_{5c}(q, p).$$

— Problema 44.1: Escribir la integral correspondiente a $\Lambda_5^\circ(q, p) = \Delta$, de ella determinar la integral correspondiente a $h^\circ(p - q)^2$ y en particular (44.10). Encontrar también una expresión integral para Λ_{5c} (definida en (44.14) discutir su convergencia.

4.5. Renormalización de las líneas externas, de los campos y de la constante de acoplamiento.

Al estudiar las correcciones radiativas a todo orden de una amplitud de scattering debe considerarse los propagadores vestidos, los vértices vestidos y además las correcciones radiativas que afectan a las líneas externas, correcciones que no han sido tomadas en cuenta en las secciones anteriores. Toda línea externa está unida a un diagrama en un vértice y este vértice debe ahora considerarse vestido, entonces, por ejemplo, una línea fermiónica externa unida a un vértice vestido se representa en la forma (hacia el resto del diagrama).

Claramente se ve que contribuyen de la forma

no son considerados en (45.1) ya que los diagramas de vértice son propios. (Si los vértices no fuesen “propios” entonces cada vez que tubiéramos un propagador vestido, uniendo dos vértices también vestidos, entonces estaríamos contabilizando más de una vez las mismas correcciones). Veamos cual es la expresión de la suma de todos los diagramas de la forma (45.2) en término de cantidades ya definidas. No es difícil ver que esta suma es

$$\begin{aligned} &= (\dots)[1 + iS_{F'}^\circ(\not{p})ig_0^2\Sigma^\circ(\not{p}) + i\delta miS_{F'}^\circ(\not{p})]u(p) \\ &= (\dots)\left(1 + i\frac{ig_0^2(\not{p}-m)[\Sigma^{\circ 1}(m) + (\not{p}-m)\Sigma^{\circ 2}(\not{p})]}{(\not{p}-m)[1+g_0^2\Sigma^{\circ 1}(m) + g_0^2(\not{p}-m)\Sigma^{\circ 2}(\not{p})]}\right)u(p) \\ &= (\dots)\left(1 + \frac{0}{0}\right)u(p) \end{aligned}$$

Vemos que al tener un espinor $u(p)$ a la derecha debe reemplazarse \not{p} por m en todas partes, lo que indetermina el factor corrector para la línea externa espinorial. No hay proceso de límite sencillo que nos permita hacer sentido de (45.4). Algo similar ocurre en el caso de las líneas externas mesónicas.

El resultado correcto y que no demostraremos es que

$$= (\dots)\{Z_2^{1/2}u(p)\} = Z_2^{1/2}$$

y también que

$$----- (= (\dots)\{Z_\phi^{1/2}\} = Z_\phi^{1/2} ----- ($$

Al considerar juntos (43.12) y (45.6) notamos que por cada propagador fermiónico vestido (en un diagrama de Feynman) debemos escribir un factor $iS_{F'}^\circ = Z_2 iS_F$ y por cada línea externa debe escribirse un factor $Z_2^{1/2}u(p)$ o bien $Z_2^{1/2-2}u(p)$ lo que hace natural redefinir las reglas de Feynman con *campos renormalizados* de modo que lo anterior sea un resultado automático. Definimos

$$\psi(x) = Z_2^{-1/2}\psi^\circ(x) \quad (\text{c. De Heisenberg})$$

Entonces

$$\begin{aligned} iS_{F'} &= \langle 0|T\psi\bar{\psi}|0\rangle \\ &= Z_2^{-1}\langle 0|T\psi^\circ\bar{\psi}^\circ|0\rangle \\ &= Z_2^{-1}iS_{F'}^\circ \quad \text{que es(43,12)} \end{aligned}$$

y además las líneas externas son

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi^\circ|ps\rangle &= \langle 0|Z_2^{+1/2}\psi|ps\rangle \\ &= Z_2^{1/2}(m/(2\pi)^3\omega_p)^{1/2}e^{-ipx}u_s(p). \end{aligned}$$

En forma análoga se define también el mesónico renormalizado

$$\phi(x) = Z_\phi^{-1/2} \phi^0(x).$$

Ahora estamos en condiciones de decir cuál es el residuo del polo de la amplitud (41.4) a todo orden para poder identificar la constante de acoplamiento física. El propagador contribuye al residuo con un factor iz_ϕ^{+1} , cada vértice con un factor g_0 (44.12) = $Z_1^{-1} g_0 \bar{u} \gamma_5 u$ y cada línea externa con un factor $Z^{+1/2}$. Todo esto nos da la ecuación

$$ig^2 = iZ_\phi^{+1} Z_1^{-2} Z_2^{-2} g_0^2$$

obteniéndose la relación entre la constante de acoplamiento desnuda y la constante de acoplamiento física,

$$g = Z_1^{-1} Z_2 Z_\phi^{1/2} g_0.$$

el mismo resultado se obtiene si en vez de la amplitud (41.4) nos basamos en la amplitud (41.5) ya que cerca del polo esa amplitud a todo orden es aproximadamente

$$(Z_\phi^{1/2})(Z^{1/2} \bar{u})(Z_1^{-1} g_0 \gamma_5) \frac{iZ_2}{\not{p} - m} (Z_1^{-1} g_0 \gamma_5)(Z_2^{1/2} u)(Z_\phi^{1/2})$$

y al hacer el reemplazo (45.12) ella tiene efectivamente el polo que predice (41.5).

Agregamos además que de (44.11) y (45.12) se desprende que

$$g_0 \Gamma_5^\circ = Z_2^{-1} Z_\phi^{-1/2} g \Gamma_5$$

— Problema 45.1: Deducir (45.6) a segundo orden en teoría de perturbaciones.

4.6. Amplitudes renormalizada

En una teoría renormalizada considerada a todo orden una amplitud invariante (con más de tres líneas externas) se calcula como la suma de todos los diagramas que no tengan correcciones de vértice ni de autointeracción y donde cada línea externa es un propagador vestido ($i\Delta_F^\circ$ o bien

$iS_F^{\circ'}$), cada vértice es un vértice vestido $g_0\Gamma_5^{\circ}$ y las líneas externas son representadas por $Z_\phi^{1/2}$ si la línea es mesónica y por $Z_2^{1/2}u$ o bien $Z_2^{1/2}\bar{u}$ si la línea externa es fermiónica. No es difícil convencerse que estas reglas son equivalentes a sumar todos los posibles diagramas de Feynman que contribuyen a esa amplitud.

Veamos cómo estas reglas pueden ser cambiadas por otras mucho más simples y físicamente más atractivas, las que se enuncian en términos de cantidades renormalizadas solamente y sin ningún factor Z presente en forma explícita. Primero notemos que si un diagrama cualquiera de Feynman de orden V tiene

V vértice

M líneas mesónicas externas

F líneas fermiónicas externas

m líneas mesónicas internas

f líneas fermiónicas internas

entonces se cumple que

$$f = V - F/2 \quad \text{y} \quad m = \frac{1}{2}(V - M).$$

El diagrama de Feynman tiene, muy simbólicamente, la siguiente expresión,

$$(Z_2^{1/2}\bar{u})^{F/2}(g_0\Gamma_5^{\circ})^V(iS_{F'}^{\circ})^{V-F/2}(Z_2^{1/2}u)^{F/2}(i\Delta_{F'}^{\circ})^{(V-M)/2}(Za_\phi^{1/2})^M$$

que, escrito en términos de los propagadores y función de vértices renormalizados se convierte en una expresión sin factor Z ,

$$= (\bar{u})^{F/2}(g\Gamma_5)^V(iS_{F'})^{V-f/2}(u)^{F/2}(i\delta_{F'})^{(V-M)/2}(1)^M.$$

Es decir, exactamente la misma amplitud se calcula escribiendo

$g\Gamma_5$	por cada vértice
$iS'F$	por cada propagador fermiónico
$i\Delta'_F$	por cada propagador mesónico
$\bar{u}, \text{ ó } u$	por cada línea fermiónica externa
+1	por cada línea mesónica externa

Estas reglas permiten ver claro que la teoría global (todo orden) y la teoría fenomenológica, al más bajo orden significativo se comportan en forma semejante en la vecindad de los polos de las amplitudes que causan los estados intermedios, virtuales de una sola partícula.

Es muy importante darse cuenta que en estos gráficos no se consideran factores de correcciones de vértice ni de autoenergía, puesto que ellas ya están siendo tomadas en cuenta al usar funciones de vértice y propagadores vestidos.

En una teoría renormalizable se tiene por definición, que la(s) función(es) de vértice y los propagadores renormalizados están libres de divergencias y las amplitudes, calculadas con las reglas (46.3) resultan finitas. Puesto que en los observables no aparecen los factores Z (constantes de renormalización) no es necesario exigir que ellas sean finitas y en la práctica ellas resultan normalmente cantidades divergentes. Lo notable es que todas las divergencias de una teoría renormalizable son absorbidas por las constantes de renormalización.

En el cálculo de la suma de todos los diagramas que contribuyen al propagador vestido no es posible aplicar las reglas (46.3) lo que impide que los factores de renormalización Z puedan cancelarse exactamente en estos gráficos. Esto lo veremos en la sección que sigue.

— Problema 46.1: Demostrar que la sumar las correcciones radiativas del scattering fermión hasta el cuarto orden, se obtiene una amplitud finita: sectionAutoenergías renormalizadas y expresión para los Z_s .

En la fórmula de cada uno de los propagadores (mesónico y fermiónico) aparecen los términos de autoenergía

$$ig_0^2 \Pi^\circ(k^2) = \quad y \quad ig_0^2 \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p}) =$$

Nosotros definiremos las correspondientes funciones de autoenergía renormalizadas basándonos en lo siguiente. Un propagador desnudo que termina en un “globo”, como es el caso en (47.1), puede ser reemplazado por el correspondiente propagador vestido (no renormalizado aún) unido al “globo” *amputado* en ese punto (un globo siempre representa una suma de diagramas y se entiende por globo amputado en un punto a aquel para el cual ninguno de los diagramas que contribuye tiene un subdiagrama de autoenergía uniendo a es punto con el resto del diagrama). Esto se denota por

De aquí entonces que

$$\begin{aligned}
ig_0^2 \Pi^\circ(k^2) &= \\
&= -Tr \int d^4 p g_0 \gamma_5 iS_{F'}^\circ(\not{p}) g_0 \Gamma_5^\circ(p, p-k) iS_{F'}^\circ(\not{k}-\not{p}) \\
&= -Tr \int d^4 p Z_1 Z_2^{-1} Z_\phi^{-1/2} g \gamma_5^{iZ_2} S'_F Z_2^{-1} Z_\phi^{-1/2} g \Lambda_5 iZ_2 S'_F \\
&= -Z_1 Z_\phi^{-1} Tr \int d^4 p g \gamma_5 iS'_F g \Lambda_5 iS'_F \\
&\equiv Z_1 Z_\phi^{-1} i g^2 \Pi(k^2)
\end{aligned}$$

Del mismo modo que en (47.3) se define funciones renormalizadas asociadas a cada una de las funciones de la expansión de Π° que aparece en (42.11), con los mismos factores Z que (47.3),

$$g_0^2 \Pi^{\circ 1} = Z_1 Z_\phi^{-1} g^2 \Pi^1 \quad \text{y} \quad g_0^2 \Pi_c^\circ = Z_1 Z_\phi^{-1} g^2 \Pi_c$$

una deducción similar a (47.3) conduce a definir

$$ig_0^2 \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p}) = Z_1 Z_2^{-1} i g^2 \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p})$$

y aquí también definimos

$$g_0^2 \overset{\circ 1}{\Sigma}(\not{p}) = Z_1 Z^{-1} g^2 \overset{1}{\Sigma}(\not{p}) \quad \text{y} \quad g_0^2 \overset{\circ 2}{\Sigma}(\not{p}) = Z^{-1} Z_2^{-1} g^2 \overset{2}{\Sigma}(\not{p})$$

Si ahora reemplazamos (47.3) en la fórmula para Z (42.10), entonces obtenemos una fórmula implícita, que al ser despejada da

$$Z_\phi = 1 - Z_1 g^2 \Pi^1(\mu^2).$$

Similarmente al reemplazar (47.6) en (43.11) se obtiene

$$Z_2 = 1 - g^2 Z_1 \overset{1}{\Sigma}(m).$$

Además se deduce que

$$\frac{Z_\phi}{2} \delta \mu^2 = -Z_1 g^2 \Pi(\mu^2) \quad , \quad Z_2 \delta m = -Z_1 g^2 \overset{1}{\Sigma}(m)$$

— Problema 47.1: Demostrar que

$$i\Delta'_F(k^2) = \frac{i}{(k^2 - \mu^2)[1 + (k^2 - \mu^2)Z_1 g^2 \Pi_c(k^2)]}$$

y que

$$iS'_F(\not{p}) = \frac{i}{(\not{p} - m)[1 + (\not{p} - m)Z_1 g^2 \Sigma^{(2)}(\not{p})]}$$

La no desaparición de los factores de renormalización de los propagadores renormalizados es un reflejo del hecho que los diagramas de autoenergía (47.1) tienen un vértice ya que esto significaría contar dos veces las mismas contribuciones. Esto obedece a un principio general que dice que si se considera un diagrama particular que, contribuyendo a un “diagrama global”, entonces no debe haber ambigüedad sobre a qué parte del diagrama global contribuye este subdiagrama de autoenergía o propio de vértice.

Todo el proceso de renormalización que hemos estado viendo se aplica mutatis mutandis a electrodinámica cuántica. En particular los siguientes cambios son necesarios:

$$\begin{array}{ll} \phi^\circ & \dot{A}_\mu \\ \mu^2 & 0 \\ Z_\phi & Z_3 \\ i\gamma_5 & \gamma_\mu \\ \Gamma_5^\circ & -i\Gamma_\mu^\circ \\ g_0 & e_0 \\ g & e \\ & \text{etc.} \end{array}$$

Además ya se vió el corrimiento de masa del fotón es idénticamente nula (Sec. 37) debido a la invariancia de gauge. Ahora veremos un resultado que es propio de electrodinámica cuántica (QED), la identidad de Ward.

4.7. La identidad de Ward en QED.

En esta sección justificaremos la llamada identidad de Ward, la que establece que

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} [S_F^{\circ 1}(\not{p})]^{-1} = \Gamma_\mu^\circ(p, p)$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p}) = i\Lambda_\mu^\circ(p, p).$$

Con este fin copiamos directamente de (43.7) y (47.12) que

$$\left[S_F^\circ(\not{p}) \right]^{-1} = \not{p} - m + \delta m + e_0^2 \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p})$$

Si reemplazamos (48.2) en esta última fórmula se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[S_F^\circ(p) \right]^{-1} = \gamma_\mu + ie_0^2 \Lambda_\mu^\circ(p, p) = \Gamma_{m\mu}^\circ(p, p)$$

que es la función de vértice, tal como se indica en (48.1) ya que al usar (47.12) en (44.4) se obtiene $-ie_0 \Gamma_\mu^\circ(q, p) = -ie_0 \gamma_\mu + e^3 \Lambda_\mu^\circ(q, p)$, por lo cual da (48.4).

Para poder clacular la derivada de la contribución más baja a Σ° es necesario conocer la derivada del propagador desnudo. Es fácil demostrar, a partir de la identidad

$$S_F(p-k)S_F(p-k)^{-1} = 1$$

que

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} iS_F(p-k) = -iS_F(p-k)(-i\gamma_\mu)iS_F(p-k).$$

Esta igualdad puede interpretarse diciendo que el efecto de la derivada sobre el propagador es “quebrar” al propagador en dos de ellos con un vértice (factor $-i\gamma_\mu$) separándolos. Entonces al derivar la contribución más baja a Σ° se obtiene,

$$ie_0^2 \frac{\partial}{\partial p^\mu} \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p}) \cong \frac{\partial}{\partial p^\mu} e_0^2 \int d^4k (-i\gamma_\nu) iS_F(p-k) (-i\gamma^\nu) iD_F(k^2)$$

o sea

$$ie_0^2 \frac{\partial}{\partial p^\mu} \overset{\circ}{\Sigma}(\not{p}) \cong - \int d^4k (-i\gamma_\nu) iS_F(p-k) (-i\gamma_\mu) iS_F(p-k) (-i\gamma^\mu) iD_F(k^2)$$

que comparamos con la contribución más baja a $\Lambda_\mu^\circ(p, p)$. Esta contribución es

$$e_0^3 \Lambda_\mu^\circ(q, p) \cong \int d^4k (-ie_0 \gamma_\nu) iS_F(q-k) (-ie_0 \gamma_\mu) iS_F(p-k) (-ie_0 \gamma^\nu) iD_F(k^2)$$

de donde

$$e_0^2 \Lambda_\mu^\circ(p, p) \cong \int e_0^2 d^4 k (-i\gamma_\nu) iS_F(p-k) (-i\gamma_\mu) iS_F(p-k) (-i\gamma^\nu) iD_F(k^2)$$

Al comparar (48.6) con (48.7) vemos que efectivamente la identidad de Ward (48.2) se cumple al más bajo orden. Pictóricamente esto se representa por

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}$$

lo cual sigue directamente de la interpretación que se dió de la igualdad (48.5). Esto ahora lo podemos aplicar al orden siguiente y se puede llegar a demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \\ i[$$

Cada uno de los cuatro paréntesis redondos en el lado derecho corresponde a la derivada de uno de los cuatro términos en el lado izquierdo.

Ahora aceptemos que una demostración similar existe para todos los órdenes del desarrollo perturbativo y asídamos por demostrada la identidad de Ward.

Un resultado particular que se obtiene de esta identidad es la igualdad entre la constante de renormalización del electrón y la del vértice, lo que tiene una interesante implicación física. Para demostrar esto tomemos la identidad de Ward en su forma (48.1) en la vecindad de $\not{p} = m$ y por lo tanto $p^2 = m^2$. Encerramos la identidad de Ward entre espinores $\bar{u}(p)$ y $u(p)$. En el lado izquierdo tenemos que el propagador vestido es aproximadamente

$$S_F^{\circ 1}(p) = \frac{Z_2}{\not{p} - m}$$

y por lo tanto

$$\bar{u}(p) \frac{\partial}{\partial p^\mu} [S_F^\circ(p)]^{-1} u(p) = Z_2^{-1} \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p)$$

Por otro lado, el lado derecho da, debido al análogo en electrodinámica de (44.12), que

$$\bar{u}(p) \Gamma_\mu^\circ(p, p) u(p) = Z_1^{-1} \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p).$$

Puesto que esto debe ser igual a (48.10), debido a la identidad de Ward, entonces concluimos que

$$Z_1 = Z_2.$$

Esta igualdad surge de la identidad de Ward y por lo tanto de la invariancia de gauge que posee ED, por lo que es una propiedad conectada con el hecho que la masa del fotón es nula.

De la relación entre la constante de acoplamiento (45.12) y la relación que aquí se ha demostrado sigue que

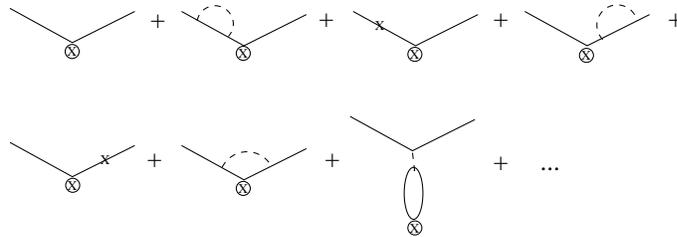
$$e = Z_3^{1/2} e_0,$$

resultado de gran importancia. El dice que la renormalización de la carga eléctrica solo depende de la constante de renormalización del fotón - que es el intermediario de todas las interacciones electromagnéticas - y no depende de la constante de renormalización del fermión particular que se esté considerando (electrón, protón, etc.) como pudo esperarse de (45.12) ni tampoco depende del vértice particular. Esto implica que la igualdad de las cargas desnudas debido al acoplamiento minimal ahora se extiende a la igualdad de las cargas físicas que según la teoría cuántica global son observadas. Esto no ocurre por ejemplo, en una teoría de interacción entre piones y nucleones que es invariante bajo $SU(2)$. Las constantes desnudas de acoplamiento entre los dos nucleones y los piones son las mismas, pero una vez vestida la teoría ellas son diferentes, ya que no habiendo una identidad de Ward en esta teoría es (45.12) la relación que se aplica.

4.8. Renormalización del campo externo.

Consideremos la renormalización en presencia de un campo externo. Para esto estudiaremos la amplitud $(p's'|S|ps)$ en presencia de un campo externo a todo orden en el campo de radiación pero a primer orden en el campo externo. A primer orden esta amplitud ya fue calculada en §3.6.6. Los primeros términos que contribuyen son

$$(p's'|ST|ps) = \tag{4.8.14}$$



Vemos que hay i) correcciones propias de vértice, ii) correcciones de las líneas externas y iii) correcciones de autoenergía entre el campo externo y el vértice del problema. La amplitud vestida entonces tendrá un factor $Z_2^{1/2}$ por cada línea externa; en lugar del factor $ie\gamma_\mu$ por el vértice ahora debemos poner $ie_0\Gamma_\mu^\circ(q, p)$; y las correcciones de autoenergía mencionadas más arriba tienen como efecto “vestir” al campo externo, lo que hace necesaria su renormalización. Estas correcciones son,

$$1 + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots =$$

$$\left(1 + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \right)$$

$$= \frac{D_{F'}^\circ}{D_F}$$

Con lo anteriormente dicho podemos escribir la amplitud correspondiente a (4.8.14)

$$\langle p's' | iT | ps \rangle = Z_2 \frac{m}{(2\pi)^3 (\omega_p \omega_q)^{1/2}} \bar{u}(q) ie_0 \Gamma^{\circ\mu}(q, p) u(p) \frac{D_{F'}^\circ(p-q)}{D_F(p-q)} A^{\circ \text{ext}}(p-q)$$

Al reemplazar por cantidades renormalizadas nos queda

$$= \frac{iem}{(2\pi)^3 (\omega_p \omega_q)^{1/2}} \bar{u}(q) \Gamma^\mu(q, p) u(p) \frac{D_{F'}(p-q)}{D_F(p-q)} (Z_3^{1/2} A_\mu^{\circ \text{ext}}(p-q)) \quad (4.8.15)$$

Lo cual hace natural definir el campo externo renormalizado como

$$Z_3^{1/2} A_\mu^{\circ \text{ext}} = A_\mu^{\text{ext}}$$

La amplitud renormalizada que hemos escrito en (4.8.15) está libre de divergencias, puesto que QED pertenece a las teorías renormalizables. Es interesante entonces ver cuál es la diferencia entre la amplitud al más bajo orden (en §3.6.6) y la amplitud aquí obtenida, considerando, por ejemplo,

correcciones sólo hasta el orden indicado explícitamente en los diagramas (4.8.14). Habrá algunas diferencias entre ambos acoplamientos. En particular la interacción corregida muestra que el momento magnético no es exactamente igual al predicho por la ecuación de Dirac ($g = 2$) sino que levemente diferente a este valor. Esto es lo que se denomina momento magnético anómalo del electrón. El momento magnético del electrón según la ecuación de Dirac es

$$\mu = -\frac{e}{2m}$$

y la corrección que se obtiene al tomar en cuenta los diagramas que aparecen en (4.8.14) es

$$\Delta\mu = -\frac{e^3}{(8\pi^2)2m}$$

Otro cálculo que es posible hacer es la corrección a los niveles del átomo de hidrógeno que da la ecuación de Dirac. Según esta última ecuación los niveles energéticos del átomo de hidrógeno dependen solo del número cuántico principal n y del momento angular total j , por lo tanto los niveles $2s_{1/2}$ y $2p_{1/2}$ coinciden. Si se hace las correcciones renormalizando al próximo orden significativo resulta una pequeña diferencia energética entre ambos niveles. Esta diferencia había sido medida por Lamb (1947) antes que se diera una explicación teórica ("Lamb shift") pero ese mismo año Bethe logró manipular las divergencias de la teoría dando así origen a la teoría de la renormalización la que comenzó a desarrollarse a partir de ese momento. El cálculo de Bethe coincide extraordinariamente bien con el resultado experimental.