

Capítulo 6

Inducción

6.1. Ley de Faraday-Lenz

6.1.1. La *fem* inducida

Por años Faraday hizo experimentos buscando la forma de producir electricidad a partir de un campo magnético. En 1831 logró lo que buscaba. En una disposición parecida al esquema de la derecha en la Fig. 6.1 logró ver que al conectar o desconectar una la batería del circuito primario

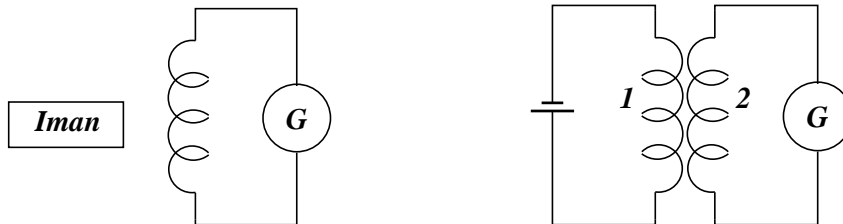


Figura 6.1: Si se mueve el imán en la figura de la izquierda o se desconecta la batería del circuito 1 en la figura de la derecha, aparece una corriente repentina en el circuito 2.

aparecía una corriente de corta duración en el secundario. A menudo se menciona a éste como el descubrimiento más importante que se puede mencionar en la prolífica vida de Faraday. En forma independiente Joseph Henry hizo el mismo descubrimiento al otro lado del Atlántico.

En la figura 6.1 se muestra dos situaciones en las que se observa inducción al detectar el paso de corriente con un galvanómetro G. (1) A la derecha se tiene una bobina *primaria*, conectada a una batería y una

bobina *secundaria* cerrada a través del galvanómetro. Cuando el circuito primario se cierra se detecta corriente en el secundario por un breve tiempo. Cuando el circuito primario es abierto vuelve a observarse brevemente una corriente en el secundario. (2) En el caso a la izquierda se tiene el mismo circuito secundario pero esta vez se detecta corriente en él cada vez que un imán es movido en las cercanías de la bobina secundaria.

Estas situaciones y otras pueden ser sintetizadas en una ley que es enunciada más abajo. Ella relaciona la variación del flujo magnético a través de un circuito, con la fuerza electromotriz \mathcal{E} que se induce en él. Más en general, si el flujo de campo magnético que atraviesa un circuito cambia en el tiempo aparece una *fem* en ese circuito. Este fenómeno se llama *inducción*.

Se llama fuerza electromotriz (*fem*) \mathcal{E}_Γ a la integral sobre el camino cerrado Γ ,

$$\mathcal{E}_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{E}_\Gamma \cdot d\vec{r} \neq 0 \quad (6.1.1)$$

En los capítulos anteriores nunca se tuvo un campo eléctrico que no fuese causado por la presencia de cargas. Esta es una situación nueva: el campo eléctrico tiene la propiedad novedosa de que su integral—en un camino cerrado—no se anula, es decir,

$$\nabla \times \vec{E} \neq 0 \quad (6.1.2)$$

La implicación inmediata de esto es que las integrales de camino $\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$ dependen del camino que se escoja y por lo tanto la noción de diferencia de potencial no puede sostenerse.

El flujo magnético a través de una superficie cualquiera ya fue definido en (4.2.11) y es

$$\Phi_S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (6.1.3)$$

El signo de $d\vec{S}$ está ligado al signo de $d\vec{r}$ por la regla de la mano derecha.

La *Ley de Faraday-Lenz* establece que,

$$\mathcal{E}_{\Gamma=\partial S} = -\frac{d\Phi_S}{dt} \quad (6.1.4)$$

Esta ley experimental puede ser llevada a una forma diferencial que corresponde a una de las ecuaciones de Maxwell. En efecto, el flujo en el lado derecho puede ser reemplazado por su definición y \mathcal{E} en el lado

izquierdo puede ser escrita como en (6.1.1), pero utilizando el teorema de Stokes esta es la integral de superficie del rotor del campo eléctrico,

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (6.1.5)$$

Puesto que la superficie S es arbitraria se obtiene otra de las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.1.6)$$

Puesto que el rotor del campo eléctrico no es nulo, el concepto de potencial usado tanto en electrostática como en el caso de corrientes continuas no puede seguir siendo válido. Sin embargo, si en la ecuación anterior se reemplaza \vec{B} por $\nabla \times \vec{A}$ se obtiene

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.1.7)$$

que muestra que, si bien el rotor de \vec{E} es no nulo, hay otra cantidad irrotacional, y por tanto existe un potencial escalar V asociado a esa cantidad. Se despeja entonces que,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla V(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (6.1.8)$$

El campo eléctrico que induce una variación de flujo magnético ocurre en cualquier medio y no necesariamente en un conductor.

Hay que subrayar que el concepto de *fem* inducida \mathcal{E} siempre está asociado a un camino cerrado el cual no tiene que tener una realización material. La aparición de este concepto está ligada al hecho que la integral (6.1.1) no se anula. Aunque es una cantidad que se mide en Volts, igual que las diferencias de potencial, es incompatible con el concepto de diferencia de potencial, que se basa en que a integral cerrada $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$ es nula.

6.1.2. El caso de una bobina ideal con corriente variable

Si se tiene una bobina ideal, infinita, radio a con corriente $I(t)$; ella produce un campo magnético $\vec{B}(t)$ tan solo en el interior y este es

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \hat{k} \quad \text{en} \quad \rho < a \quad (6.1.9)$$

y es nulo para $\rho > a$. Si se toma un camino cerrado, centrado en el eje del cilindro, y de radio ρ mayor que a , se tiene en él una fem

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

y como $\Phi = \mu_0 n I(t) \pi a^2$ entonces

$$-\mu_0 n \dot{I} \pi a^2 = E 2\pi \rho \implies \vec{E}(\rho > a) = -\frac{\mu_0}{2} n I \frac{a^2}{\rho} \hat{\phi} \quad (6.1.10)$$

que es no trivial pero tiene rotor nulo, lo que se necesita ya que \vec{B} afuera sea nulo.

Si se considera un camino circunferencial de radio $\rho < a$ se obtiene

$$-\mu_0 n \dot{I} \pi \rho^2 = E 2\pi \rho \implies \vec{E}(\rho < a) = -\frac{\mu_0}{2} n I \rho \hat{\phi} \quad (6.1.11)$$

cuyo rotor es

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\mu_0}{2} n \dot{I} \frac{\hat{k}}{\rho} \frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} = \mu_0 n \dot{I} \hat{k}$$

que calza con lo que implica (6.1.9).

El campo eléctrico es siempre en la dirección $\hat{\phi}$ y es continuo en $\rho = a$.

Consideremos el potencial vectorial

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} n I \rho \hat{\phi}, & \rho < a \\ \frac{\mu_0}{2} n I \frac{a^2}{\rho} \hat{\phi}, & \rho > a \end{cases} \quad (6.1.12)$$

Este potencial implica que el campo magnético para $\rho > 0$ es nulo porque \vec{A} es constante en esa zona. El campo para $\rho < a$ resulta igual al de (6.1.9).

Al calcular el campo eléctrico en la forma $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ se obtiene (6.1.10) cuando $\rho > a$ y (6.1.11) cuando $\rho < a$. Todo es consistente.

Lo notable de (6.1.10) es que existe un campo eléctrico inducido en una zona donde no hay campo magnético del todo. Podría, erradamente, pensarse que hay acción a distancia: el campo magnético que existe tan solo dentro de la bobina implica un campo eléctrico (6.1.10) arbitrariamente lejos de la bobina. Es el momento de darse cuenta que el potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ es un objeto físico que, en este ejemplo, es creado por la corriente en la bobina. El implica tanto las propiedades de \vec{B} como de \vec{E} .

6.1.3. Sobre relatividad

En relatividad (Lorentz 1904, Einstein 1905), si dos sistemas de referencia se mueven con velocidad relativa v como indica la figura, existe una relación entre coordenadas y tiempo de la forma

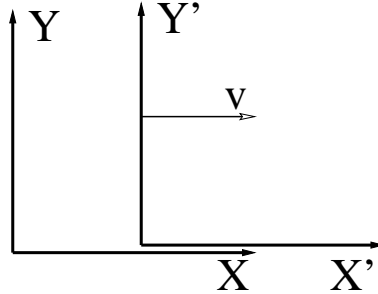


Figura 6.2: Dos sistemas de referencia con velocidad relativa v en la dirección X

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \end{aligned}$$

mientras $y' = y$ y $z' = z$, y donde $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. En este contexto las componentes de los campos \vec{E} y \vec{B} medidos en ambos sistemas de referencia se relacionan por

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma(E_y - \beta c B_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta c B_y) \\ B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z/c) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y/c) \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

mientras $E'_x = E_x$ y $B'_x = B_x$. Si tan solo interesan casos con velocidad v mucho menor que la de la luz se puede aproximar $\gamma \approx 1$.

Por ejemplo, si en un sistema de referencia $\vec{E} = 0$ y hay un campo magnético $\vec{B} = B_0 \hat{j}$, es decir, solo la componente B_y es no nula, entonces en el otro sistema de referencia se tiene que $E'_z \approx v B_0$.

Las transformaciones en el límite no relativista se reducen a

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B}' &= \vec{B} \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Las transformaciones, relativistas o no, muestran que los campos eléctrico y magnético no tienen existencia independiente. En el caso en que en

un sistema de referencia se tiene uno solo de ellos, en otro ambos estarán presentes. *No debe pensarse más en los campos eléctrico y magnético como dos entes independientes, sino que en el campo electromagnético* (\vec{E}, \vec{B}).

6.1.4. Campos y movimiento

La fuerza que un campo electromagnético ejerce sobre una carga q en $\vec{r}(t)$ con velocidad $\vec{v}(t)$ es la llamada *fuerza de Lorentz*

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}) \right) \quad (6.1.15)$$

El argumento \vec{r} en los campos es la posición de la carga q y, en general, depende del tiempo: $\vec{r}(t)$. Puede ocurrir que además los campos dependan del tiempo. La notación completa debiera ser, por ejemplo, $\vec{E}(\vec{r}(t), t)$.

Si se tiene un imán en reposo y por su vecindad se desplaza una partícula puntual con carga q que en el instante t tiene velocidad $\vec{v}_1(t)$ y no hay otro campo eléctrico que el de la propia partícula, la fuerza sobre ella es meramente $\vec{F} = q\vec{v}_1 \times \vec{B}$.

Si la misma situación es vista desde el sistema de referencia en que la partícula está en reposo, el imán se mueve con velocidad $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. La fuerza tiene que ser la misma, pero esta vez, la velocidad de la partícula es nula, por lo que al aplicar (6.1.15) el segundo término necesariamente es nulo. Esto implica que en este nuevo sistema de referencia sí hay un campo eléctrico, y este tiene que estar producido por el movimiento del imán.

Esto es precisamente lo que ya puede adivinarse observando la estructura de (6.1.6). La situación física recién descrita implica que en \vec{r} , donde está la carga q , hay un campo magnético que cambia en el tiempo (porque el imán se está moviendo) por lo que el lado derecho de (6.1.6) no se anula y de aquí que el lado izquierdo tampoco pueda ser nulo. Es decir, en la posición de la carga hay un campo eléctrico y, en este sencillo ejemplo, se expresa en la forma: $\vec{E} = -\vec{v}_2 \times \vec{B} = \vec{v}_1 \times \vec{B}$ para poder tener nuevamente la misma fuerza.

Si se vuelve al primer sistema de referencia no se detecta ningún campo eléctrico proveniente del imán. La conclusión es que los campos eléctricos y magnéticos son diferentes en distintos sistemas de referencia. La forma completa de relacionar el valor de los campos electromagnéticos en distintos sistemas de referencia se encuentra en libros de *Relatividad Especial*.

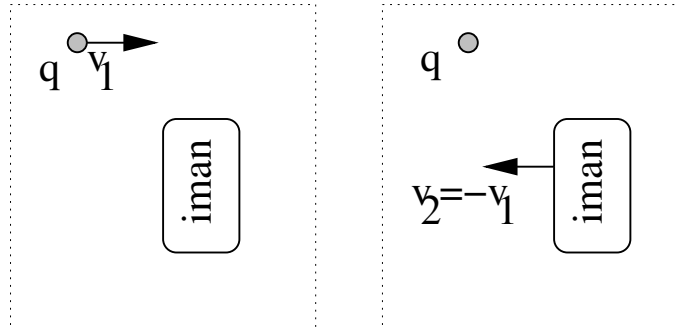


Figura 6.3: A la izquierda una carga se mueve cerca de un imán quieto. A la derecha un imán se mueve cerca de una carga quieta. Se trata de la misma situación vista desde dos sistemas de referencia.

En la expresión (6.1.1) para \mathcal{E} , que se dio más arriba, aparece \vec{E}_Γ en el integrando. Lo que se ha querido decir es que debe usarse el campo eléctrico $\vec{E}_\Gamma(\vec{r})$ evaluado en el sistema de referencia que acompaña al punto \vec{r} del camino Γ de integración.

Hay que atender a esta diferencia porque a menudo se utilizará caminos Γ que cambian con el tiempo. Se subraya que se necesitará saber que (en la aproximación no relativista)

$$\vec{E}_\Gamma = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (6.1.16)$$

donde \vec{E} y \vec{B} son los campos en el sistema de referencia del observador y \vec{v} es la velocidad del punto \vec{r} del camino Γ que se esté considerando. La expresión anterior debe reconocerse como (6.1.14).

La ecuación (6.1.6) es válida en cualquier sistema de referencia, pero la definición (6.1.1) es no local y es necesario reescribirla utilizando (6.1.16)

$$\mathcal{E}_\Gamma = \oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (6.1.17)$$

La primera integral puede ser convertida en una integral de superficie gracias al teorema de Stokes, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S}$ y esta última puede ser escrita como $-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ lo que permite finalmente escribir

$$\mathcal{E}_\Gamma = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{r}) \quad (6.1.18)$$

y en consecuencia

$$\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{r}) = \frac{d\Phi}{dt} \quad (6.1.19)$$

La definición de *fem* en (6.1.1) hace uso de un sentido de integración arbitrario. Una vez que se hace esa elección de sentido de integración queda fijado el *sentido positivo de recorrer* el camino Γ .

6.1.5. Ejemplo básico

El resultado anterior se ilustra con el circuito adjunto. Se trata de un camino Γ rectangular fijo excepto que su lado derecho se mueve con velocidad \vec{v} . La superficie (de dimensiones $b \times x(t)$) que encierra el rectángulo, es cruzada por un campo magnético que se escoge que sea oscilante:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) \sin \omega t \quad (6.1.20)$$

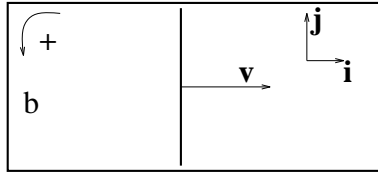


Figura 6.4: Un conductor en forma de U más una barra deslizante con velocidad v .

El flujo magnético Φ trivialmente es

$$\Phi = \int_0^{x(t)} dx \int_0^b dy \mathcal{B}_3(\vec{r}) \sin \omega t \quad (6.1.21)$$

y se puede calcular que la *fem* inducida, es decir, $-d\Phi/dt$ es

$$\begin{aligned} -\frac{d\Phi}{dt} &= -\int_0^{x(t)} dx \int_0^b dy \mathcal{B}_3(\vec{r}) \omega \cos \omega t \\ &\quad -v \int_0^b \mathcal{B}_3(\vec{r}) \sin \omega t dy \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Y debe compararse con lo que da (6.1.19) que consta de dos integrales, una contiene a $\partial \vec{B} / \partial t$ y la otra contiene a $\vec{B} \cdot \vec{v} \times d\vec{r}$. La primera conduce a calcular

$$\iint \omega \cos \omega t \mathcal{B}(\vec{r}) \cdot \hat{k} dx dy = \iint \omega \cos \omega t \mathcal{B}_3 dx dy \quad (6.1.23)$$

y la segunda es una integral sobre el circuito cerrado pero al tener a \vec{v} en su expresión, recibe contribución de la parte móvil y da

$$\int_0^b \sin \omega t \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) \cdot \hat{v} \times \hat{j} dy = \int_0^b \mathcal{B}_3(\vec{r}) \sin \omega t v dy \quad (6.1.24)$$

Las dos integrales sumadas dan lo que (6.1.19) establece.

6.1.6. Otros ejemplos

E1 Considérese un anillo de radio r_0 . Esta superficie plana está cruzada perpendicularmente por un campo magnético B_0 . El anillo tiene además dos varas radiales conductoras, una fija y la otra que rota con velocidad angular $\omega(t) = \dot{\alpha}(t)$ como indica la figura. Esto divide al área circular en dos partes A_1 y A_2 . Los respectivos flujos y *fem* inducidas son

$$\Phi_1 = \frac{B_0}{2} r_0^2 \alpha \Rightarrow \mathcal{E}_1 = -\frac{B_0}{2} r_0^2 \omega \quad (6.1.25)$$

$$\Phi_2 = \frac{B_0}{2} r_0^2 (2\pi - \alpha) \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{B_0}{2} r_0^2 \omega$$

Las dos *fem* suman cero porque el flujo total es constante.

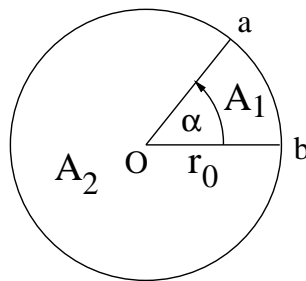


Figura 6.5: Una circunferencia conductora, más dos radios conductores, uno de ellos rota.

Si el anillo y los dos radios fuesen conductores (con resistencia), la corriente en el perímetro de A_1 sería en el sentido de los punteros del reloj, mientras que aquella en el perímetro de A_2 sería en el sentido opuesto. En el radio fijo la corriente sería hacia el centro en ambos casos, y en el radio móvil sería desde el centro hacia afuera. Por el circuito perímetro de A_j

circula una corriente I_j , por la parte común circula $I_1 + I_2$ y cada I_j satisface $\mathcal{E}_j = R_j I_j$, donde R_j es la resistencia en el perímetro se A_j .

E2 Si se tiene un anillo de radio a fijo atravesado por un campo uniforme pero variable en el tiempo, del tipo $\vec{B} = \vec{B}_0 \sin \omega t$, el flujo es $\Phi = B_0 \pi a^2 \cos \theta \sin \omega t$. La fem es $\mathcal{E} = -\omega B_0 \pi a^2 \cos \omega t$. Un transformador consta de un *primario* que produce un campo magnético oscilante, el cual induce en un *secundario* una fem .

E3 Si, en presencia de un campo magnético uniforme y de magnitud constante, hay un anillo de radio a rotando con velocidad angular constante $\omega = \dot{\alpha}(t)$, en torno a un diámetro que permanece fijo y ortogonal al campo magnético, el flujo a través del anillo es $\Phi = B_0 \pi a^2 \cos \omega t$ y la fem es $\mathcal{E} = \omega B_0 \pi a^2 \sin \omega t$ y un torque actúa sobre el anillo tratando de maximizar el flujo. Si la dirección del campo magnético se mantiene rotando, el anillo seguirá esa rotación. Es una de las formas como puede funcionar un motor eléctrico.

E4 Se tiene un circuito magnético en forma de un 8 cortado con una *fmm* en él. Por el *entrehierro* pasa un circuito rectangular horizontal que desciende con velocidad constante v . Se puede considerar que solo las caras opuestas de largo b están cortadas por un campo magnético uniforme de magnitud B_0 y que apunta como señala la figura.

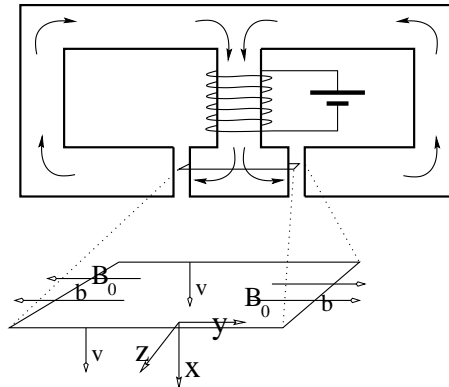


Figura 6.6: Una bobina con corriente induce un campo magnético en un núcleo magnético doble. Una espira rectangular (ampliada) desliza hacia abajo.

Se puede comprobar que sobre el circuito se induce una fem ,

$$\mathcal{E} = 2B_0 v b$$

Los otros dos lados del rectángulo no contribuyen.

Si se repasa lo que se dijo sobre la relación entre los campos en un sistema de referencia y en el otro se ve que precisamente en un sistema de referencia solo se tiene campo magnético y este apunta en la dirección Y y en el sistema móvil aparece un campo eléctrico en la dirección Z que permite entender la presencia de la *fem* inducida.

6.1.7. Circuitos con otros elementos

Si se conecta un condensador de capacidad C , con carga inicial Q_0 , con una resistencia R , como se muestra en la figura 6.7, el condensador se comienza a descargar debido a la corriente $I = \dot{Q}(t)$ que se establece. Si no hay flujo magnético a través del circuito, se cumple que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, y

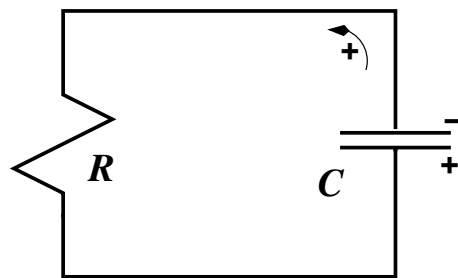


Figura 6.7: Un circuito RC. La figura indica la polaridad del condensador y el sentido de circulación que se escoge como positivo.

esta integral se desglosa en las caídas de potencial en ambos elementos,

$$\frac{Q}{C} + R\dot{Q} = 0 \quad (6.1.26)$$

Esta ecuación para $Q(t)$ tiene por solución

$$Q(t) = Q_0 \exp\left[-\frac{t}{RC}\right] \quad (6.1.27)$$

La carga del condensador decrece exponencialmente con el tiempo. El tiempo característico de esta descarga es $\tau = RC$.

Los signos con más en detalle: al integrar a lo largo del circuito, usando el sentido positivo que indica la Fig.6.7, el campo eléctrico dentro del condensador apunta de positivo a negativo, es decir, en la dirección escogida para integrar. Por esto la integral $\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$ da $+\frac{Q}{C}$. La corriente I en el formalismo no tiene un signo relevante, de modo que por definición la integral

del campo, en el sentido positivo escogido, se pone como RI . Físicamente la corriente va desde la placa positiva a la negativa, es decir, en el sentido negativo, lo cual es consistente con que $I = \dot{Q} < 0$.

Si el circuito es atravesado por un flujo magnético, lo consistente con lo anterior es definir $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ con $d\vec{S}$ apuntando hacia afuera de la figura (regla de la mano derecha). La fem, $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ tiene el signo que esto implica y la ecuación completa, en lugar de (6.1.26) es

$$\frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E} \quad (6.1.28)$$

Si al circuito anterior se le agregara, en serie al condensador y la resistencia, una batería, la ecuación tendría un término extra $\pm \mathcal{E}_0$ con el signo que corresponda a la forma en que sea conectada.

La configuración en el diagrama de la izquierda en la Fig.6.8 representa un circuito real que rodea un cilindro con un conductor perfecto y luego se cierra con una resistencia R vertical. Si en el interior del cilindro hay un

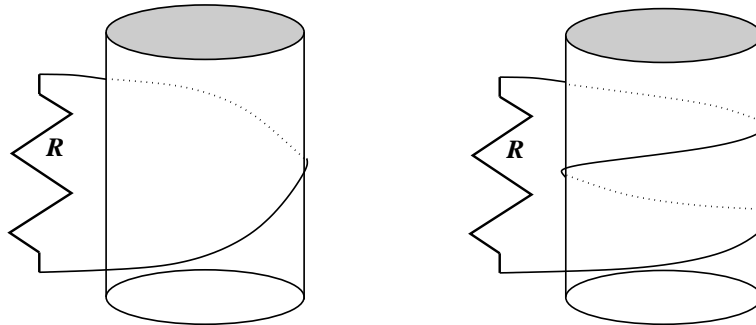


Figura 6.8: Si hay un campo magnético apuntando hacia arriba dentro del cilindro y creciendo en el tiempo, se deduce que hay un campo eléctrico inducido que, por el lado visible del cilindro, apunta hacia la izquierda.

campo magnético apuntando hacia arriba y creciendo en el tiempo, la fem inducida en el circuito implica que hay un campo eléctrico que apunta en la dirección $-\hat{\phi}$ y por lo tanto la corriente por la resistencia va hacia arriba y vale $I = \mathcal{E}/R$. Si el conductor diese dos vueltas, como en el diagrama de la derecha, el flujo por la superficie que se apoya en el conductor es el doble que antes y sigue valiendo $I = \mathcal{E}/R$ pero esta \mathcal{E} es el doble de

la anterior. Los signos descritos se pueden comprobar definiendo el flujo magnético con un $d\vec{S}$ hacia arriba o hacia abajo porque el sentido de \vec{E} no puede depender de las convenciones de signo.

6.1.8. No hay diferencias de potencial

Para ilustrar la inaplicabilidad del concepto de diferencia de potencial se considera un circuito, representado en la Fig.6.9, formado por dos resistencias R_1 y R_2 que se unen en los puntos A y B . Se supondrá que se tiene

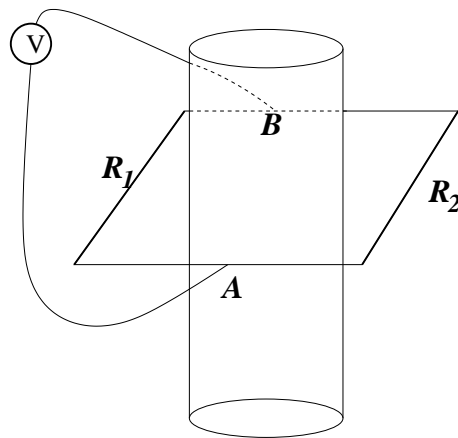


Figura 6.9: Existe un campo magnético variable solo dentro de un cilindro recto infinito. Alrededor de este cilindro se tiene un circuito rectangular con resistencias R_1 y R_2 en aristas opuestas. Se comprueba que un voltímetro mide una diferencia de potencial V , entre los extremos de las resistencias, que depende del lado en que está el voltímetro.

un campo magnético variable que es no nulo solamente por dentro de un tubo recto infinito que pasa entre las dos resistencias. El flujo a través del circuito es $\Phi(t)$ e induce una fem $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ y por lo tanto por las resistencias circula una corriente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} \quad (6.1.29)$$

La integral $\oint_{BVAR_1B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V - R_1 I$ es nula porque ese camino no encierra al flujo magnético variable. Al calcular $\oint_{BVAR_2B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V + R_2 I$ esta integral vale \mathcal{E} porque sí encierra al flujo. En ambos casos V es la caída en el voltímetro. Igualando las expresiones para V que hay en ambos casos se tiene $R_1 I = \mathcal{E} - R_2 I$ que equivale a (6.1.29).

Por lo tanto al conectar un voltímetro por el lado derecho de la figura a los puntos A y B los roles de R_1 y R_2 se intercambian y ahora se tiene que $V = R_2 I$ y que $V + R_1 I = \mathcal{E}$ y nuevamente se tiene (6.1.29). Pero debe observarse que los dos voltímetros conectados a los mismos puntos A y B marcan diferente según si la conexión se hace por la izquierda o la derecha, mostrando que entre A y B no se puede definir una diferencia de potencial.

6.1.9. En la práctica

Pero si no hay flujo magnético a través de un circuito Γ entonces se puede aplicar las leyes más usuales usadas al estudiar corrientes continuas.

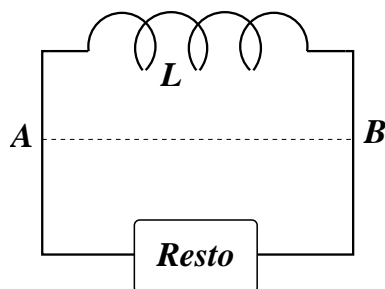


Figura 6.10: Hay veces que sí tiene sentido hablar de una diferencia de potencial.

Considérese en forma abstracta un circuito que consiste en una bobina L y el “resto”. Separamos el circuito con una línea ficticia AB , como en la Fig.6.10 para poder hablar de dos subcircuitos: LAB y $AB + \text{resto}$. Si por el segundo subcircuito no pasa flujo magnético alguno entonces $\oint_{AB + \text{resto}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ y en este subcircuito no hay problema con el concepto de diferencia de potencial y se puede usar las expresiones ya conocida de corriente continua para escribir las ecuaciones de esa parte del circuito. El camino cerrado LAB por otro lado, tiene asociada una *fem* \mathcal{E} que—para efectos de relacionarla con la otra parte del circuito—se puede pensar como una diferencia de potencial.

En lo que sigue siempre se supondrá que los campos magnéticos están dentro de las bobinas y en ningún otro lado. De esta manera a todo elemento del circuito (resistencias, condensadores) se les puede asociar diferencias de potencial sin ambigüedad. El tratamiento de las bobinas en estos circuitos es lo que se aprende en las secciones que siguen.

6.2. Autoinducción

Un circuito por el cual circula una corriente, crea un campo magnético el cual tiene un flujo a través de este mismo circuito: el *autoflujo*.

Puesto que el campo magnético es proporcional a la corriente que hay en el circuito, el autoflujo también lo es. Este autoflujo solo depende de la corriente y de la geometría del circuito. De aquí que

$$\Phi_{\text{autoflujo}} = LI, \quad (6.2.1)$$

y L es el *coeficiente de autoinducción*. L es una característica del circuito mismo y solo depende de su geometría multiplicado por un factor de permeabilidad magnética μ . Los signos están elegidos de modo que L es siempre una cantidad positiva. Los elementos de un circuito que poseen un coeficiente de autoinducción se les suele llamar *inductancias*.

La *fem* que un circuito induce sobre sí mismo, o *fem autoinducida* $\mathcal{E}_{\text{auto}}$, es

$$\mathcal{E}_{\text{auto}} = -\frac{d\Phi_{\text{auto}}}{dt} \quad (6.2.2)$$

Normalmente se trabaja con casos en que L es constante, de modo $\mathcal{E}_{\text{auto}} = -L\dot{I}$. En un circuito con corriente variable se induce una *fem* que hace variar la corriente. La *fem* inducida tiende a crear una corriente que se opone a la variación de I .

En el caso de un circuito eléctrico estándar se supone en general que todos los efectos magnéticos están confinados a las inductancias, es decir, se supone que no hay flujo magnético apreciable atravesando el circuito como un todo, por lo cual el circuito mismo no tiene *fem* inducida (la *fem* inducida existe localmente en las inductancias). Bajo esta hipótesis simplificada (es tan solo una aproximación a la realidad) la integral de camino $\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{r} = 0$ hecha a lo largo de todo el circuito, se supone nula. En este sentido se aplicará la segunda ley de Kirchhoff de ahora en adelante y en particular se habla de las *caídas de potencial* en condensadores y resistencias.

En uno de los problemas propuestos al final se pide demostrar que el coeficiente de autoinducción de una bobina cilíndrica ideal es

$$L = \mu n^2 \mathcal{V} \quad (6.2.3)$$

donde n es el número de espiras por unidad de longitud y \mathcal{V} es el volumen del interior de la bobina.

6.2.1. Circuito LC .

A continuación se resolverá la evolución temporal de un circuito que consta de un condensador con carga inicial $Q(0) = Q_0$ y que se cierra con una inductancia L . La corriente inicial es nula: $I(0) = 0$. En todo instante la

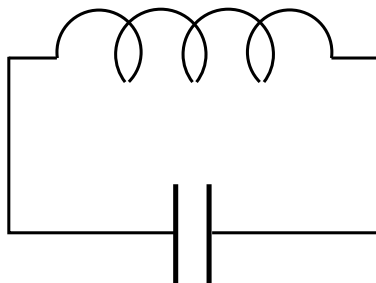


Figura 6.11: Un circuito ideal LC .

caída de potencial en el condensador está determinada por la carga del condensador y por su capacidad, $V(t) = Q(t)/C$, que se define positiva. Tan pronto el circuito se cierra el condensador comienza a descargarse, es decir, $Q(t)$ inicialmente es una función positiva y decreciente. Además aparece una corriente $I(t) = \dot{Q}(t)$ que es negativa porque Q es decreciente. Puesto que I comienza valiéndose cero la evolución al comienzo la llevará hacia valores cada vez más negativos. Por el momento se tiene entonces que $\dot{I} < 0$. La fuerza electromotriz que aparece en la inductancia es $\mathcal{E} = -L\dot{I}$ y, por lo que recién se ha dicho, inicialmente es positiva. La ecuación del circuito establece el equilibrio entre la diferencia de potencial en el condensador y la *fem* en la inductancia,

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{C} &= -LI \\ &= -L\dot{Q} \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Esta es la ecuación de un movimiento armónico simple. La solución con las condiciones iniciales ya dichas es:

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ I(t) &= -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

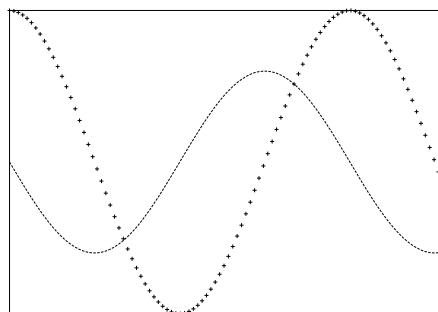


Figura 6.12: La carga $Q(t)$ (medida en Coulomb) representada con puntos y la corriente $I(t)$ (medida en Ampère) con línea continua.

El condensador se descarga después de un tiempo $t = T/4 = \pi\sqrt{LC}/2$ pero la corriente en ese instante tiene una magnitud $|I|_{\max}$. Transcurrido un tiempo total $T/2$ el condensador está otra vez con máxima carga, pero con polaridad invertida en relación a la original. En ese momento la corriente es nula y comienza el proceso de descarga en sentido opuesto. Y así el sistema continua oscilando con período T para siempre.

El hecho que oscile indefinidamente se debe a que el sistema, tal como fue definido, no da lugar a pérdidas de energía. La energía U_{tot} es una constante en el tiempo. En el momento inicial no hay corriente y entonces no hay campo magnético. Toda la energía se debe al condensador. Como se sabe esta es

$$U_{\text{tot}} = \frac{Q_0^2}{2C} \quad (6.2.6)$$

la que no debe ser confundida con la energía del condensador en cualquier instante posterior, la cual es: $U_C = Q(t)^2/2C$.

En un instante arbitrario la energía total está repartida entre la energía del condensador U_C y la energía U_L que hay en la inductancia L . Esta última energía se debe al campo magnético que hay en la inductancia, causado por el paso de la corriente $I(t)$. Es decir, U_L debe poder expresarse en función de I y de L y, por otro lado, tiene que valer $U_L(t) = U_{\text{tot}} - U_C(t)$. Se demuestra así que,

$$U_L(t) = \frac{1}{2}LI(t)^2 \quad (6.2.7)$$

Más tarde se verá que esta última expresión da la forma general que tiene la energía de una inductancia debida a su propio campo magnético y es válida también en el caso magnetostático, $I = \text{constante}$.

La analogía con una ecuación de mecánica que tiene (6.2.4) es un hecho que se aplica a otros circuitos que evolucionan en el tiempo. Es típico que L juegue el papel de la masa, los condensadores juegan el papel de fuerzas elásticas (resortes) y, como se verá, las resistencias asemejan fuerzas viscosas.

El párrafo anterior sirve para comprender que en los problemas electromagnéticos dependientes del tiempo el factor L juega un papel central. No tomarlo en cuenta es semejante a intentar resolver problemas de movimiento en mecánica borrando de las ecuaciones de Newton el término de masa por aceleración: $m\dot{v}$.

6.2.2. Circuito RL

Sea un circuito formado por una resistencia R , una batería cuya fem asociada es \mathcal{E}_0 y una bobina con coeficiente de autoinducción L . Todos los elementos están en serie y cualquier resistencia en la batería o en la bobina es absorbida en R . La fem neta en el circuito es $\mathcal{E}_0 - L\dot{I}$, que debe igualarse con la caída de potencial en la resistencia,

$$\mathcal{E}_0 - L\dot{I} = RI. \quad (6.2.8)$$

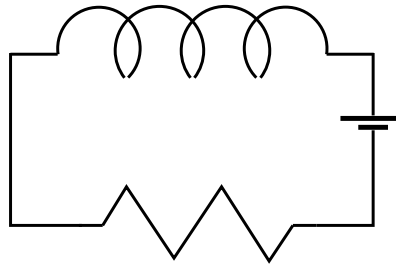


Figura 6.13: Un circuito RL con batería.

Esta ecuación es matemáticamente equivalente a la que se obtiene en mecánica para una partícula en presencia de una fuerza constante y una fuerza de amortiguación: $m\dot{v} = mg - cv$. El coeficiente L nuevamente juega el papel de la masa en la ecuación de mecánica y R es análogo al coeficiente de viscosidad.

La solución de la ecuación anterior es,

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - \exp \left[-\frac{Rt}{L} \right] \right) + I_0 \exp \left[-\frac{Rt}{L} \right] \quad (6.2.9)$$

Se observa que, sin importar cual sea el valor inicial de la corriente, esta tiende a un valor constante $I(\infty) = \mathcal{E}_0/R$. El circuito anterior tiene un tiempo característico

$$\tau = L/R \quad (6.2.10)$$

llamado el *tiempo de respuesta* del circuito. Para tiempos t mucho menores a τ la solución (6.2.9) toma la forma,

$$I(t) \approx I_0 + \left(\frac{\mathcal{E}_0 + I_0 R}{L} \right) t \quad (6.2.11)$$

En particular si $R = 0$ el tiempo de respuesta es infinito y (6.2.11) se convierte en una ecuación exacta:

$$I(t) = I_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{L} t \quad (6.2.12)$$

La corriente crece linealmente en forma indefinida. Esto se debe a la ausencia de un elemento disipativo como es la resistencia. La batería provee de más y más energía a un sistema que no pierde energía. Es el análogo al caso de una partícula sobre la cual sólo actúa una fuerza constante provocando una aceleración constante. Esta situación no es realista.

6.3. Inducción mutua

Considérese n circuitos Γ_k con corrientes $I_k(t)$ que producen sendos campos magnéticos $B_k(\vec{r})$. Sea Φ_{kj} el flujo del campo magnético \vec{B}_j del circuito j a través del circuito k y se denomina Φ_k al flujo total por ese circuito,

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^n \Phi_{kj} \quad (6.3.1)$$

La fem \mathcal{E}_k inducida en el circuito k es

$$\mathcal{E}_k = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -\sum_{j=1}^k \frac{d\Phi_{kj}}{dt} \quad (6.3.2)$$

Puesto que el campo B_j es proporcional a I_j entonces se tiene la proporcionalidad

$$\Phi_{kj} = M_{kj} I_j \quad (6.3.3)$$

A estos coeficientes M_{kj} se les denomina *coeficientes de inducción mutua*. En particular $M_{kk} = L_k$.

Teniendo en cuenta que el flujo (6.3.3) es una integral en el camino Γ_k del potencial vectorial A_j y recordando la expresión (4.2.10) (con $\vec{r}_0 = \infty$),

$$\vec{A}_j(\vec{r}_k) = \frac{\mu I_j}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}_j}{\|\vec{r}_k - \vec{r}_j\|} \quad (6.3.4)$$

se obtiene que

$$M_{kj} = M_{jk} = \frac{\mu}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{r}_j \cdot d\vec{r}_k}{\|\vec{r}_k - \vec{r}_j\|} \quad (6.3.5)$$

Viéndose, en particular, que

$$M_{kj} = M_{jk} \quad (6.3.6)$$

Los coeficientes de inducción mutua siempre tiene la forma de un factor geométrico multiplicado por μ .

Nótese que

$$M_{kj} = \frac{\Phi_{kj}}{I_j} = \frac{\Phi_{jk}}{I_k} \quad (6.3.7)$$

6.3.1. Ejemplo básico de inducción mutua

La figura adjunto muestra una recta que lleva corriente $I_1(t)$ y a un lado hay un conductor de forma rectangular de $a \times b$ a distancia c de la recta. El campo magnético que produce la corriente $I_1(t)$ es

$$\vec{B}_1(t) = \frac{\mu_0 I_1(t)}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

mientras que el elemento de superficie del área rectangular es $d\vec{S}_2 = -\hat{\phi} d\rho dz$, lo que permite obtener que

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= -\frac{\mu_0 I_1(t)}{2\pi} \int \frac{d\rho}{\rho} \int dz \\ &= I_1(t) \left(-\frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(\frac{a+c}{c}\right) \right) \end{aligned}$$

Se desprende que el coeficiente de inducción mutua es

$$M_{21} = -\frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$$

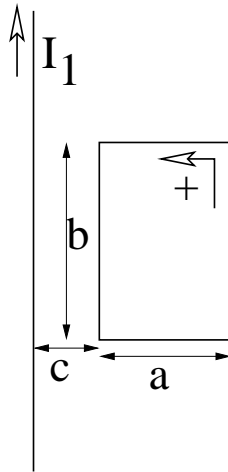


Figura 6.14: Una recta infinita conductora y un rectángulo conductor. Existe inducción mutua.

y la fem inducida en el circuito 2 (el rectángulo) es $\mathcal{E}_2 = -M_{21} \dot{I}_1 - L_2 \dot{I}_2$, pero acá se despreciará el término de autoinducción y escribimos

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(\frac{a+c}{c}\right) \dot{I}_1$$

Si la corriente I_1 está decreciendo, es decir $\dot{I}_1 < 0$, entonces $\mathcal{E}_2 < 0$ y eso implica que $I_2 < 0$. Esto último quiere decir que I_2 circula en la dirección opuesta a la que se tomó como positiva en la figura (circula en el sentido de los punteros del reloj). Usando la regla de la mano derecha se puede ver que el campo magnético \vec{B}_2 que produce esta corriente inducida penetra la figura en la superficie encerrada por el rectángulo, es decir, \vec{B}_1 y \vec{B}_2 se suman. Esto es la manifestación de una regla muy general:

El campo inducido apunta en dirección tal que se opone a la variación del campo primario.

En otras palabras, en lo anterior se ha comprobado que la corriente que se induce en el secundario (rectángulo) crea—en el área que encierra—un campo magnético \vec{B}_2 que aporta al flujo total de tal modo que tiende a contrarrestar el cambio del flujo magnético Φ_{21} . Otra forma de decirlo es que el campo magnético inducido se *opone* a la variación del campo magnético total.

La elección del signo de $d\vec{S}_2$ con el que se define el flujo magnético a través del secundario es arbitrario. Sin embargo una vez escogido ese signo, automáticamente se ha escogido el signo de la circulación en el secundario, es decir, queda definido qué se entiende por I_2 positiva o negativa.

6.3.2. Coeficiente de acoplamiento

Considérese dos bobinas cilíndricas ideales. La bobina mayor tiene lar-

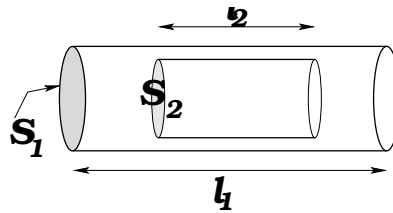


Figura 6.15: Una bobina totalmente dentro de otra.

go h_1 , sección S_1 y n_1 vueltas por unidad de largo y la bobina interior es (h_2, S_2, n_2) . El flujo del campo \vec{B}_1 , que es uniforme, a través de la bobina 2 es

$$\Phi_{21} = (\mu n_1 I_1) (S_2 n_2 h_2)$$

que implica que el coeficiente de inducción mutua es

$$M = \mu n_1 n_2 S_2 h_2$$

Nótese que $S_2 h_2$ es el volumen \mathcal{V}_2 de la bobina 2. Por otro lado, puesto que $n_a = N_a/h_a$, el coeficiente M puede ser reescrito como

$$M = \mu \frac{N_1 N_2 S_2}{h_1}$$

En particular, si se tiene dos bobinas ideales cilíndricas y rectas construidas sobre el mismo cilindro de largo h y sección A , $\mathcal{V} = hS$, idealmente se cumple (6.2.3)

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad (6.3.8)$$

y los L_k están dados por (6.2.3).

En general es fácil comprobar que siempre que se cumpla que $h_2 \leq h_1$ y que $S_2 \leq S_1$ se satisface que

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

La relación (6.3.8) no se logra en la práctica, de modo que el resultado práctico que relaciona las características del primario y secundario con M es

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

y a k se lo denomina *coeficiente de acoplamiento*.

6.3.3. Un transformador

Si se tiene un primario con corriente $I_1(t) = I_{10} \cos(\omega t)$ y un secundario que es un circuito cerrado con tan solo una inductancia L_2 y una resistencia R y tal que el acoplamiento con el primario es M , entonces la ecuación para la corriente $I_2(t)$ del secundario es,

$$-L_2 \dot{I}_2 - M \dot{I}_1 = R I_2(t) \quad (6.3.9)$$

que se traduce en,

$$L_2 \dot{I}_2 + R I_2 = \omega M I_{10} \sin(\omega t) \quad (6.3.10)$$

Su integración arroja:

$$I_2(t) = \left(I_{20} + \frac{M L_2 I_{10} \omega^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} \right) e^{-[Rt/L_2]} + \frac{\omega M I_{10}}{R^2 + \omega^2 L_2^2} [R \sin(\omega t) - L_2 \omega \cos(\omega t)] \quad (6.3.11)$$

El primer término describe un fenómeno transitorio y es solución de la ecuación homogénea asociada a (6.3.10). Por lo tanto el segundo término es por sí solo solución de (6.3.10). Esta última es la corriente en estado oscilante del régimen estacionario y representa a la corriente en el secundario de un transformador cuando éste tiene conectada una resistencia R . La caída de potencial en esta resistencia es $R I_2$, la cual es oscilante y su amplitud depende de R , L_2 y de ω . El potencial de salida que indica un transformador comercial es el límite de $R I_2$ cuando $R \rightarrow \infty$. Se comprueba que en el límite es:

$$V_2 = M I_{10} \omega \sin(\omega t) \quad (6.3.12)$$

Si el potencial de entrada se identifica con $V_1 = -L_1 \dot{I}_1$ y se considera el acoplamiento ideal (6.3.8) se obtiene

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1}{M} = \frac{n_1}{n_2} \quad (6.3.13)$$

Si las bobinas son del mismo largo el cociente anterior se puede identificar con el cociente entre el número de vueltas.

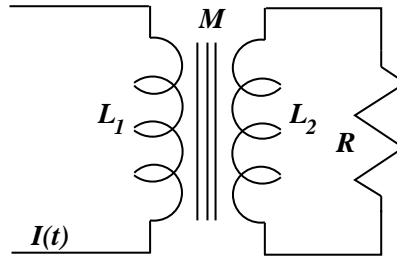


Figura 6.16: Un transformador

6.3.4. La “caída” en una inductancia

Ecuaciones como (6.2.4), (6.2.8) o (6.3.10) que describen la segunda ley de Kirchhoff en un circuito cerrado toman siempre la forma de la igualdad: *fem* neta igual a la suma de las caídas de potencial como pueden ser $\frac{Q}{C}$, RI u otras. El efecto de una inductancia aparece en el lado izquierdo con una forma genérica (6.3.2).

Un caso típico es (6.2.8). Lo que suele producir confusión es que si en esa ecuación, la fuente \mathcal{E}_0 es variable en el tiempo (como puede ser un dínamo que produce corriente alterna), se ha hecho costumbre escribir la *fem* autoinducida por un L al lado derecho, lo que obliga a escribir $+LI$ y se habla de la *caída* en la inductancia. Esto es un caso de abuso de conceptos y de lenguaje.

6.3.5. Dos circuitos LC acoplados por M

Considérese dos circuitos LC (L_1, C_1) y (L_2, C_2) cuyas inductancias están acopladas por un coeficiente de inducción mutua M . Cada circuito obedece una ecuación dinámica. Ellas son

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_1}I_1 + L_1\ddot{I}_1 + MI_2 &= 0 \\ \frac{1}{C_2}I_2 + L_2\ddot{I}_2 + MI_1 &= 0\end{aligned}$$

Una forma de resolverlas es haciendo los reemplazos $I_1 = I_{10}e^{i\omega t}$ y $I_2 = I_{20}e^{i\omega t}$. Se obtiene

$$\begin{aligned}I_{10} - L_1C_1\omega^2 I_{10} - MC_1\omega^2 I_{20} &= 0 \\ I_{20} - L_2C_2\omega^2 I_{20} - MC_2\omega^2 I_{10} &= 0\end{aligned}$$

que son dos ecuaciones lineales homogéneas acopladas, las que sólo pueden tener solución no trivial si el determinante de los coeficientes de I_{10} e I_{20} es nulo, es decir, si

$$\omega^4 (L_1 L_2 - M^2) C_1 C_2 - \omega^2 (L_1 C_1 + L_2 C_2) = -1$$

que implica

$$\omega^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm \sqrt{(L_1 C_1 + L_2 C_2)^2 - 4(L_1 L_2 - M^2) C_1 C_2}}{2(L_1 L_2 - M^2) C_1 C_2}$$

6.4. Potencia y energía magnética

Considérese primero un circuito sencillo aislado con coeficiente de autoinducción L . Se desea inducir una corriente desde $I = 0$ en $t = 0$ hasta un valor I en el instante t . Para ello se induce externamente una fem \mathcal{E} la que vence en todo instante a la fem autoinducida (6.1.4), es decir, la fem externa debe ser $\mathcal{E} = -\mathcal{E}_{\text{auto}}$. En otras palabras, si se quiere inducir desde cero una corriente I positiva y creciente ($\dot{I} > 0$), es necesario aplicar una fem positiva desde el exterior. La potencia que se le entrega al sistema es

$$\begin{aligned} P &= -\mathcal{E}_{\text{auto}} I \\ &= +L \frac{dI}{dt} I \\ &= \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} I^2. \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

La potencia es la tasa de cambio de la energía U del sistema, $P = \frac{dU}{dt}$. Integrando sobre el tiempo entre 0 y t se obtiene que la energía almacenada en una inductancia L por la cual circula una corriente I es

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \quad (6.4.2)$$

Segundo, razonando en forma análoga a lo anterior, para inducir corrientes I_1 e I_2 en un tiempo t en un sistema formado por dos circuitos con coeficientes de inducción: L_1 , L_2 y M es necesario aplicar una potencia P dada por

$$\frac{dU}{dt} = -\mathcal{E}_1 I_1 - \mathcal{E}_2 I_2 \quad (6.4.3)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -\frac{d}{dt}(\Phi_{11} + \Phi_{12}) \\ &= -L_1\dot{I}_1 - M\dot{I}_2\end{aligned}\quad (6.4.4)$$

y similarmente

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= -\frac{d}{dt}(\Phi_{22} + \Phi_{21}) \\ &= -L_2\dot{I}_2 - M\dot{I}_1\end{aligned}\quad (6.4.5)$$

con lo cual se obtiene que

$$\dot{U} = L_1I_1\dot{I}_1 + M(I_1\dot{I}_2 + I_2\dot{I}_1) + L_2I_2\dot{I}_2 \quad (6.4.6)$$

de donde se deduce que la energía que alcanza el sistema de dos circuitos acoplados al llegar a tener corrientes I_1 e I_2 respectivamente es

$$U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + MI_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \quad (6.4.7)$$

Finalmente, de lo anterior se puede adivinar que la energía almacenada por n circuitos por los que circulan corrientes $I_1 \dots I_n$ es,

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j M_{kj} I_j I_k \quad (6.4.8)$$

Se verá a continuación que esta energía puede ser expresada como una integral que contiene a los campos \vec{B} y \vec{H} y no se hace referencia a los coeficientes de inducción.

En (6.4.8) puede reconocerse que la suma sobre j de M_{kj} es la suma que se tiene en (6.3.1) cuando se hace uso de (6.3.3). Así (6.4.8) se transforma en

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k I_k \quad (6.4.9)$$

donde Φ_k es el flujo total que pasa por dentro del circuito k -ésimo. Pero este flujo puede ser escrito en la forma (6.3.4). Y como se trata del flujo *total*, debe usarse el potencial vectorial \vec{A} total. Además la corriente I_k puede ser escrita en la forma $\int \vec{J} \cdot d\vec{S}$, y así,

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \int \vec{J}(\vec{r}_k) \cdot d\vec{S} \oint \vec{A}(\vec{r}_k) \cdot d\vec{r}_k \quad (6.4.10)$$

Ahora se hace uso de la propiedad (3.3.10) que permite intercambiar los papeles de \vec{J} y de $d\vec{r}$, con lo cual ahora

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) d\mathcal{V} \quad (6.4.11)$$

En esta última expresión ya no aparece en forma explícita la suma sobre k . Esto es posible porque el dominio de integración \mathcal{V} se extiende a cualquier volumen que contenga al sistema de n circuitos. El integrando es no nulo tan solo en las zonas donde $\vec{J}(\vec{r})$ sea no nulo, esto es, en el volumen conductor de cada circuito. Cada una de estas zonas conductoras k da una contribución separada a (6.4.11), lo cual es una suma sobre todos los circuitos k .

Finalmente en (6.4.11) se hace uso de la forma diferencial de la ley circuital de Ampère (5.2.1) para reemplazar la densidad de corriente por $\nabla \times \vec{H}$. Integrando por partes y extendiendo el volumen de integración a *todo el espacio*, se obtiene

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) d\mathcal{V} \quad (6.4.12)$$

Esta es una forma muy general que expresa la contribución magnética a la energía total de un sistema electromagnético. Más adelante se podrá demostrar que la energía total de un sistema electromagnético está dada por la suma de dos contribuciones que son precisamente (2.2.11) y (6.4.12).

Para llegar a (6.4.12) se hizo uso de la ley circuital de Ampère, la cual es válida tan solo para el caso de corrientes continuas. Si las corrientes no son continuas la energía total tiene una contribución eléctrica, tal como se acaba de comentar. Esto se verá más adelante.

6.5. La corriente de desplazamiento

Obsérvese de (1.7.6) y (3.1.8) que por definición ρ_P y J_P satisfacen una ley de continuidad tipo (3.1.6), $\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_P = 0$. La densidad de corriente \vec{J}_M definida en (5.1.6) tiene divergencia nula, es decir, satisface en forma trivial una ley de continuidad, lo que puede también expresarse como $\rho_M \equiv 0$. Además, desde el punto de vista microscópico, la densidad de corriente total, J_T , es la suma

$$\vec{J}_T = \vec{J} + \vec{J}_P + \vec{J}_M \quad (6.5.1)$$

y satisface una ley de continuidad. Entonces \vec{J} también la satisface. Se tiene, entonces,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{J}_M = 0, \quad \frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_P = 0$$

En magnetostática se dedujo que $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$. Esta ecuación no puede ser universalmente cierta porque conduce a una contradicción. En efecto, si se toma la divergencia a ambos lados el lado izquierdo se anula (la divergencia de un rotor es siempre nula) y se deduce que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, lo que como se ha dicho más arriba, en general no es cierto.

Una de las contribuciones cruciales que Maxwell hizo a la comprensión de la electrodinámica fue darse cuenta de la forma de resolver este problema. Su hipótesis fue que

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.5.2)$$

Al término

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.5.3)$$

se lo llama *corriente de desplazamiento* ya que se construye con el vector de *desplazamiento eléctrico* \vec{D} .

Al tomar divergencia a ambos lados en (6.5.2) se obtiene $0 = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Conmutando la divergencia con la derivada y usando que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ se obtiene la ley de continuidad para la carga, lo que muestra que (6.5.2) es consistente.

6.6. Las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son:

- a) La ley de Coulomb diferencial (1.8.6), $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$.
- b) La ausencia de cargas magnéticas $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
- c) La forma diferencial de la ley de Faraday-Lenz (6.1.6).
- d) La forma diferencial de la ley de Ampère, modificada por Maxwell: (6.5.2).

es decir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \nabla \times \vec{H} - \vec{J}, & \nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\quad (6.6.1)$$

Las dos primeras ecuaciones implican la ley de continuidad de la carga.

Otra forma de escribir las ecuaciones de Maxwell, conocidas como ecuaciones de Maxwell en el vacío, es:

- La ley de Coulomb $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_T / \epsilon_0$.
- La ausencia de cargas magnéticas $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.
- La forma diferencial de la ley de Faraday-Lenz (6.1.6)
- La forma diferencial de la ley de Ampère modificada por Maxwell y escrita para el vacío,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_T + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.6.2)$$

Si los campos \vec{E} y \vec{B} son escritos en términos de los potenciales V y \vec{A} en las formas (4.2.6) y (6.1.8), entonces (1.8.6) y (6.1.6) se satisfacen en forma idéntica. Así entonces, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como ecuaciones para los potenciales \vec{A} y V .

La única forma como se puede perder energía electromagnética es por medio del efecto Joule. Esto permitirá obtener una expresión para la energía electromagnética en término de las ecuaciones de Maxwell recién enunciadas. La energía electromagnética disminuye tanto como potencia se disipa.

Si se multiplica escalarmente la ecuación (6.6.1a) con \vec{E} , se multiplica escalarmente (6.6.1c) con \vec{H} y esto se suma se obtiene,

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (6.6.3)$$

Pero como $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \equiv (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} - (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E}$ resulta

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (6.6.4)$$

Esta expresión se integra en un volumen \mathcal{V} arbitrario. La divergencia total que aparece al lado derecho puede ser transformada en una integral de

superficie sobre $\partial\mathcal{V}$. Al hacer tender esta superficie a infinito esta integral se anula porque los campos a grandes distancias decrecen en proporción inversa al cuadrado de la distancia. El otro término integral que aparece a la derecha se relaciona a la potencia consumida (efecto Joule), como se vio en (3.3.9).

Si no hay potencia consumida, la integral del lado derecho es nula y en el lado izquierdo se tiene una cantidad integral cuya derivada en el tiempo se anula. Esta se reconoce como la energía total *conservada* U del sistema electromagnético:

$$U = \int \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) d\mathcal{V} \quad (6.6.5)$$

Aun si hay potencia consumida el U anterior se interpreta como la energía electromagnética total. En el caso general esta energía disminuye, es decir tiene derivada negativa,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int \vec{J} \cdot \vec{E} d\mathcal{V} \quad (6.6.6)$$

Más en general (6.6.4) toma la forma de una ley de continuidad con lado derecho no nulo (fuente o sumidero)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (6.6.7)$$

donde u es la densidad de energía electromagnética y

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (6.6.8)$$

es conocido como el *vector de Poynting* y representa el *flujo de energía por unidad de área* del campo electromagnético, esto es, energía por unidad de área y de tiempo.

6.7. Problemas

- 6.1 Considere un rectángulo de dimensiones $a \times b$, con el lado a paralelo al eje X y el lado b paralelo al eje Y . El rectángulo se mueve con velocidad uniforme $\vec{v} = v\hat{i}$ en una zona del espacio que está cruzada por un campo magnético perpendicular al rectángulo y que solo depende de la coordenada x , $\vec{B} = B(x)\hat{k}$. Calcule separadamente los lados izquierdo y derecho de (6.1.19) para comprobar que esa relación es correcta.

- 6.2 Suponga que el rectángulo del problema anterior es conductor con resistencia R . La *fem* inducida implica una corriente I . Obtenga la fuerza necesaria para mantener al rectángulo con su velocidad uniforme y determine la potencia mecánica $P_M = \vec{F} \cdot \vec{v}$ para mantener tal movimiento. Por otro lado determine la potencia eléctrica $P_{el} = \mathcal{E}I$ disipada en la resistencia R . Compruebe que ambas potencias son iguales.
- 6.3 Considere un circuito Γ en forma de semicircunferencia de radio b y centro fijo en un punto \mathcal{O} . El circuito gira con velocidad angular uniforme ω en torno a \mathcal{O} manteniéndose siempre sobre el plano XY . El circuito es cruzado por un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{k}$. Determine la *fem* inducida en Γ .
- 6.4 Un circuito rectangular de $a \times b$ gira con velocidad angular constante ω , en torno a una de sus lados de largo b , el cual está fijo al eje Z . Hay un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{i}$ paralelo al eje X . Obtenga la *fem* inducida. Suponga que el rectángulo es conductor con resistencia total R . Obtenga la corriente $I(t)$ que se induce y obtenga también las fuerzas y torque que hay sobre el circuito.
- 6.5 Demostrar que el coeficiente de autoinducción de un bobina cilíndrica ideal con núcleo de permeabilidad μ está dada por (6.2.3) donde n es el número de espiras por unidad de longitud y \mathcal{V} es el volumen del interior de la bobina.
- 6.6 Considere una bobina ideal cilíndrica muy larga, de sección S y con núcleo de permeabilidad μ . Por el alambre de la bobina pasa una corriente $I(t)$. Demuestre (a) que por un camino Γ en forma de circunferencia centrada en el eje de la bobina y perpendicular a ese eje, existe una *fem* $\mathcal{E} = -\mu n S \dot{I}$. (b) Debido a (6.1.1) esto implica que afuera hay un campo eléctrico. A partir de (6.1.1) encuentre la forma explícita para este campo eléctrico \vec{E} . (c) Partiendo de la base que el potencial eléctrico V es nulo se tiene que $\vec{E} = -\frac{\partial A}{\partial t}$. (d) Obtenga entonces la expresión para \vec{A} . (e) Compruebe que se satisface que el flujo magnético a través del camino Γ (usado al comienzo de este enunciado) coincide con $\oint A \cdot d\vec{r}$.
- 6.7 Demuestre que el coeficiente de autoinducción de una bobina toroidal de N espiras, de sección rectangular, de radio interior a , radio exterior

b y altura h , con núcleo de permeabilidad μ vale

$$L = \frac{\mu h N^2}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (6.7.1)$$

- 6.8 De la expresión (6.7.1) demuestre que al considerar $b = a + c$ con c fijo y en el límite en que a es muy grande (largo de la bobina es $h = 2\pi a$), se recupera el coeficiente de autoinducción de la bobina recta, $L = \mu n^2 \mathcal{V}$.
- 6.9 Sin hacer más hipótesis que (6.5.2) y usando las definiciones básicas como las de \vec{D} en (1.8.4) y de \vec{H} en (5.1.15), (5.1.16), deduzca (6.6.2). Obtenga que \vec{J}_T es aquel dado en (6.5.1).
- 6.10 Se tiene dos inductancias con el mismo coeficiente de autoinducción L , acopladas por el coeficiente de inducción mutua M , conectadas en paralelo. Obtenga el coeficiente L_{eq} que representa a este sistema de dos bobinas acopladas.
- 6.11 El primario es un cable recto infinito, el secundario es una bobina toroidal de sección circular y resistencia R cuyo eje coincide con la línea del primario, (a) calcule el coeficiente de inducción mutua y (b) obtenga la carga total que circula por el secundario si la corriente en el primario a partir de $t = 0$ es $I_1(t > 0) = I_0 (\exp[-at] - 1)$.
- 6.12 Se tiene una bobina **B1** toroidal de sección circunferencial y N_1 vueltas. Totalmente dentro de **B1** hay una bobina toroidal de sección rectangular de radio interior a , radio exterior b y altura h de N_2 vueltas. Calcule el coeficiente de inducción mutua suponiendo que el campo magnético está en un material caracterizado por una permeabilidad μ .
- 6.13 Los rieles de un tren están eléctricamente aislados del suelo y aislados entre sí. Se los une con un voltímetro de resistencia muy grande R_2 . Cuando pasa un tren, a velocidad v_0 , se detecta una diferencia de potencial V . El efecto está relacionado con que el campo magnético de la tierra no es horizontal en esa zona y su componente vertical es de valor B_0 . Suponga que la resistencia de los rieles es despreciable y que la resistencia del tren es R_1 . Dé una expresión exacta para V y además calcule su valor límite cuando $R_2 \rightarrow \infty$.
- 6.14 Se tiene un circuito LC (datos L_1, C) como primario acoplado a un circuito LR (datos L_2, M, R) como secundario. Si inicialmente no hay

corriente alguna y la carga del condensador es $(Q_0, -Q_0)$ determine la carga total que pasa por la resistencia R del *secundario*.

- 6.15 Un disco de espesor h y radio $2a$ tiene un hueco circular centrado de radio a y conductividad g . Por el hueco pasa perpendicular al disco, una bobina cilíndrica muy larga de radio a y n vueltas por unidad de largo. Por la bobina circula una corriente $I(t) = ct$. Determine el potencial magnético \vec{A} ; la corriente total que circula por el disco; la potencia total disipada en el disco.

