

## Capítulo 5

# Propiedades magnéticas de la materia

### 5.1. Magnetización y el potencial $\vec{A}_M$

La materia reacciona ante la presencia de campos magnéticos porque los electrones—en una muestra de cualquier tipo de materia atómica—en sus orbitales constituyen pequeños circuitos con corriente sometido a fuerzas y torques. A nivel atómico existen normalmente momentos magnéticos  $\vec{m}$ . Ante la presencia de un campo magnético  $\vec{B}$  estos momentos magnéticos están sometidos a torques (4.4.8) que tienden a alinearlos con el campo magnético. No es fácil saber si el campo magnético que domina a nivel atómico es aquel producido por orbitales de electrones cercanos a un campo magnético aplicado externamente. Estas consideraciones más otras que escapan a una teoría clásica de la materia hacen bastante complejo predecir qué tipo de compuestos químicos reaccionan de tal o cual manera frente a un campo magnético externo.

Simplificando bastante el cuadro se puede decir que hay dos grupos muy importante de materiales: aquellos que tienen un  $\vec{m}$  nulo en ausencia de un campo magnético externo y los que tienen siempre un  $\vec{m}$  no nulo. En el primer tipo de materiales el efecto dominante de un campo magnético externo es reorientar los orbitales atómicos de tal modo que estos aparecen imitando *corrientes inducidas* y por lo tanto creando campos magnéticos que se oponen al campo magnético aplicado (*corrientes inducidas* es un concepto que se ve más adelante). El campo magnético total dentro de

este tipo de materia resulta menor al campo magnético aplicado. Tales materiales se denominan *diamagnéticos*. La gran mayoría de las sustancias que existen en la naturaleza son de este tipo. Por ejemplo: bismuto, cobre, carbón, mercurio, oro, plata, sodio, agua.

Otro tipo de materiales tiene  $\vec{m}$  a nivel atómico, los cuales tienden a orientarse en forma paralela al campo aplicado, y el resultado es que el campo magnético en el interior de estos materiales es mayor al campo aplicado. Son los materiales *paramagnéticos*. Ejemplos son: aluminio, manganeso, oxígeno, sodio, titanio, tungsteno, platino.

Hay un grupo aparte de materiales, los llamados *ferromagnéticos* tales como el hierro, níquel y cromo. Estos materiales pueden estar magnetizados, es decir, tienen dipolos magnéticos a nivel molecular y ellos tienden a estar ordenados en forma espontánea, por lo que son fuente de campo magnético (son imanes). Muchos materiales paramagnéticos sometidos a temperaturas suficientemente bajas suelen transformarse en ferromagnéticos.

Las propiedades magnéticas de la materia, entonces, están ligadas a las propiedades electrónicas a nivel atómico. Concretamente son las corrientes las responsables de tales propiedades, pero no son corrientes macroscópicas, sino aquellas que existen localmente a nivel molecular. Tales corrientes por sí solas son responsables que exista tanto densidades de corriente volumétricas  $\vec{J}$  como también corrientes de superficie  $\vec{K}$ . A continuación se verá que el potencial magnético  $\vec{A}$  producido por una distribución cualquiera de dipolos magnéticos puede ser escrito como (4.2.14) y (4.2.4).

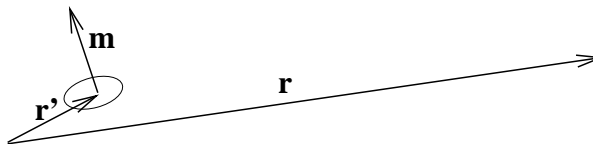


Figura 5.1: Interesa el potencial magnético en un punto lejano  $\vec{r}$  debido a un dipolo magnético  $\vec{m}$  ubicado en  $\vec{r}'$ .

El potencial vectorial en  $\vec{r}$  debido a un dipolo  $\vec{m}$  ubicado en  $\vec{r}'$  es aquel dado en (4.6.7)

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (5.1.1)$$

Puesto que el rotor de este potencial vectorial es nulo, el potencial puede

ser escrito en la forma

$$B_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla \phi_{\text{dip}} \quad (5.1.2)$$

donde

$$\phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (5.1.3)$$

El campo magnético que un dipolo lejos de él puede ser expresado como el gradiente de un potencial escalar, es decir, este campo magnético tiene rotor nulo (recordar que en general el rotor de  $\vec{B}$  es proporcional a una densidad de corriente). Esto es así porque, al ser un campo lejano, la corriente propia del dipolo es nula lejos de él.

Los pequeños momentos dipolares a nivel atómico permiten definir una densidad de dipolos magnéticos por unidad de volumen,  $\vec{M}(\vec{r})$  de tal manera que un pequeño volumen  $d\mathcal{V}$  tiene asociado un momento dipolar magnético  $d\vec{m}$  dado por

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}) d\mathcal{V}. \quad (5.1.4)$$

A esta cantidad  $\vec{M}(\vec{r})$  se la conoce como la *magnetización* del material.

De aquí que el potencial vectorial, debido a una distribución continua de dipolos magnéticos (materia), descrita por  $\vec{M}(\vec{r})$ , sea,

$$\begin{aligned} \vec{A}_M(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \times \frac{\vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M} \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

En esta última expresión se reconoce las formas (4.2.14) y (4.2.4), para el potencial vectorial proveniente de densidades de corriente volumétrica y superficial dadas por,

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}, \quad \vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}. \quad (5.1.6)$$

Estas densidades de corriente describen en forma suavizada los efectos de las corrientes a nivel atómico que son responsables de las propiedades magnéticas macroscópicas de la materia.

### 5.1.1. El campo magnético de la materia

En lo que sigue se calculará el campo magnético de la materia  $\vec{B}_M$ , es decir, el rotor  $\nabla \times \vec{A}_M$ . El campo  $\vec{B}_M$  en un punto  $\vec{r}$  particular de una muestra de materia puede entenderse como una superposición de dos campos: el campo  $\vec{B}_I(\vec{r})$  que produce la corriente microscópica local (es decir, se debe a la magnetización  $\vec{M}$  en ese mismo punto) y el campo neto  $\vec{B}_{II}(\vec{r})$  producido por las corrientes microscópicas de todo el resto de la materia, excepto la corriente en  $\vec{r}$  ya contabilizada en  $\vec{B}_I$ . Este último, entonces proviene de corrientes que son nulas en  $\vec{r}$  y debiera poder escribirse en la forma de gradiente de un potencial escalar, tal como en (4.6.10).

Si se toma la expresión de partida del potencial vectorial que se usó para terminar con (5.1.5), de ella se puede calcular inmediatamente el campo  $\vec{B}_M$ , producido por una distribución de dipolos magnéticos, calculando el rotor,

$$\vec{B}_M(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left( \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right) dV'.$$

Puesto que este rotor actúa solo sobre la dependencia en  $\vec{r}$  del integrando,  $\vec{M}$  es una constante para el rotor y se obtiene que el integrando puede ser escrito en la forma:

$$\vec{M}(\vec{r}') \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} - \left( \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

y entonces el campo magnético puede ser separado en dos partes:

$$\vec{B}_M(\vec{r}) = \vec{B}_I(\vec{r}) + \vec{B}_{II}(\vec{r}) \quad (5.1.7)$$

donde

$$\vec{B}_I = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' \quad (5.1.8)$$

$$\vec{B}_{II} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'.$$

La demostración de (4.3.1) implica que

$$\vec{B}_I(\vec{r}) = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) \quad (5.1.9)$$

que permite ver que  $B_I$  es la contribución de los dipolos locales al campo magnético que genera la materia.

Una integración por partes de la expresión para  $B_{II}$  lleva a demostrar que,

$$\vec{B}_{II}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi(\vec{r}). \quad (5.1.10)$$

La función escalar  $\varphi(\vec{r})$ , llamada el potencial escalar magnético, está dada por

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}' \quad (5.1.11)$$

y ya fue vista en (4.6.11).

Este potencial escalar asociado a  $\vec{B}_{II}$  es el efecto en el punto  $\vec{r}$  de todos los dipolos del resto de la muestra de materia y es del mismo tipo que (5.1.3).

En resumen se ha demostrado que

$$\vec{B}_M(\vec{r}) = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) - \mu_0 \nabla \varphi(\vec{r}). \quad (5.1.12)$$

### 5.1.2. El campo magnético total

Hasta aquí se ha calculado un campo magnético provocado únicamente por una distribución de dipolos magnéticos, es decir, por las corrientes moleculares  $\vec{J}_M$  y  $\vec{K}_M$ . Para tener una expresión más general debe agregarse un término que corresponda a la presencia corrientes eléctricas de conducción,  $\vec{J}$ , de modo que en ciertos momentos será necesario hablar de la corriente total

$$\vec{J}_T = \vec{J} + \vec{J}_M \quad (5.1.13)$$

De este modo, un campo magnético más general se escribe como

$$\vec{B} = \vec{B}_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}' \quad (5.1.14)$$

esto es

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}' + \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) - \mu_0 \nabla \varphi(\vec{r}). \quad (5.1.15)$$

El campo magnético general proviene tanto de corrientes macroscópicas (conducción)  $\vec{J}$  como de estos efectos propios de la estructura molecular, es decir,  $\vec{B}$  puede escribirse como

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (5.1.16)$$

donde

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}' - \nabla\phi(\vec{r}) \quad (5.1.17)$$

con  $\phi(\vec{r})$  dado en (4.6.10). El campo  $\vec{H}$  será denominado *intensidad magnética*, expresión que no es universal.

## 5.2. Nuevamente la ley circuital.

En magnetostática se cumple la ecuación  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_T$  donde, como ya se ha dicho,  $\vec{J}_T = \vec{J} + \vec{J}_M$  es la corriente total de magnetostática e incluye a la corriente macroscópica  $\vec{J}$  y la corriente  $\vec{J}_M$  definida en (5.1.6). Al reemplazar en esta ley a  $\vec{B}$  usando (5.1.16) se obtiene

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (5.2.1)$$

Tal como antes se pudo deducir la ley circuital (4.3.6) ahora de (5.2.1) se deduce

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\Gamma} \quad (5.2.2)$$

que es la ley circuital para corrientes macroscópicas. Como un caso particular de este resultado se tiene que la intensidad magnética en el interior de una bobina cilíndrica ideal (ver (4.1.12)) es

$$\vec{H}_{\text{bobina}} = nI \hat{k} \quad (5.2.3)$$

que depende tan solo del número de espiras por unidad de largo y de la corriente que circula por cada espira. El tipo que núcleo que haya no interesa. Esto permite concebir  $\vec{H}$  como variable básica.

El vector magnetización  $\vec{M}$  juega en magnetostática un papel semejante al que juega  $\vec{P}$  en electrostática. Así como en electrostática se tuvo que incorporar una ley empírica (1.9.1) que relaciona a  $\vec{P}$  con  $\vec{E}$ , acá también se

establece que para muchos materiales homogéneos, lineales e isotrópos se cumple que

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi \vec{H}(\vec{r}) \quad (5.2.4)$$

donde  $\chi$  es una cantidad adimensional llamada la *susceptibilidad magnética* del material. Esta cantidad puede ser positiva (materiales paramagnéticos) o negativa (materiales diamagnéticos). Los valores de  $\chi$  positivos o negativos para diferentes materiales son mucho menores que la unidad, típicamente de orden de  $10^{-3}$ . Puede tenerse materiales inhomogéneos, donde  $\chi$  depende de la posición.

Para los materiales dia- y paramagnéticos la propiedad (5.2.4) es válida y se puede escribir,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r}) \quad (5.2.5)$$

donde

$$\mu = \mu_0(1 + \chi) \quad (5.2.6)$$

es la *permeabilidad magnética* del material.

### 5.3. Condiciones de borde

Es de especial interés estudiar las condiciones de borde que se deben satisfacer en la superficie entre dos materiales magnéticos que satisfacen las propiedades lineales recién descritas y en los cuales hay corrientes de superficie. En tal caso se puede trabajar con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

De la primera de estas dos relaciones se desprende inmediatamente que la componente normal a la interfaz del campo  $\vec{B}$  es continua:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (5.3.2)$$

Para obtener una condición de borde de la segunda ecuación se usa la forma integral de la ley de Ampère,  $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\Gamma}$  en un pequeño camino de integración rectangular  $\Gamma$  (con aristas horizontales de largo  $b$ ) como muestra la figura 5.2. El lado izquierdo da  $b(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{i}$ . El lado derecho es la corriente total que implica el cruce de corriente proveniente tanto de densidad volumétrica  $\vec{J}$  como superficial (por la interfaz)  $\vec{K}$ :

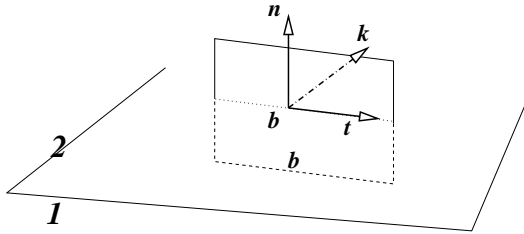


Figura 5.2: Camino rectangular perpendicular a la interfaz.

$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int \vec{K} \times \hat{n} \cdot d\vec{r}$  (hay que recordar la ecuación (3.1.9)). La primera integral, puesto que se trata de un circuito muy chico, puede escribirse en la forma  $\frac{1}{2}(\vec{J}_1 + \vec{J}_2) \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) bh$  que, al hacer tender  $h$  a cero, desaparece. La otra integral se reduce a  $b(\vec{K} \times \hat{n}) \cdot \hat{t}$ . La igualdad que se obtiene resulta (con  $h \rightarrow 0$ ):

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = (\vec{K} \times \hat{n}) \cdot \hat{t} = \vec{K} \cdot \hat{k} \quad \text{esto es} \quad H_{2t} - H_{1t} = \vec{K} \cdot \hat{k} \quad (5.3.3)$$

donde, como se ve en la figura  $\hat{k} = \hat{n} \times \hat{t}$ . Si en el miembro izquierdo de la igualdad se sustituye  $\hat{t}$  por  $\hat{k} \times \hat{n}$  se obtiene  $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{k} = \vec{K} \cdot \hat{k}$ . En esta última relación los vectores que, en ambos miembros de la igualdad, multiplican a  $\hat{k}$ , son vectores tangentes al plano interfacial, y puesto que  $\hat{t}$  (y por lo tanto  $\hat{k}$ ) definen cualquier dirección en el plano interfacial, se tiene que

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (5.3.4)$$

donde  $\hat{n}$  es la normal a la interfaz que apunta desde el medio 1 al medio 2.

### 5.3.1. Refracción del campo magnético

Si no hay densidad de corriente  $\vec{K}$  en la interfaz, la componente tangencial de  $\vec{H}$  es continua. En tal caso se puede deducir una relación entre los ángulos y las permeabilidades en forma semejante a como se hizo en electrostática.

Si se llama  $\theta_j$  al ángulo que forma  $\vec{B}$  con la normal a la superficie interfacial en el medio  $j$ , es directo obtener de las ecuaciones anteriores que

$$\begin{aligned} B_2 \cos \theta_2 &= B_1 \cos \theta_1 \\ \mu_1 B_2 \sin \theta_2 &= \mu_2 B_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (5.3.5)$$



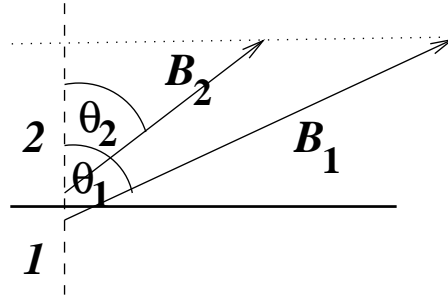


Figura 5.3: El campo magnético tiene la misma componente normal a ambos lados de la interfaz. En la figura  $\mu_1 > \mu_2$ .

y de aquí

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (5.3.6)$$

Se puede deducir de estas expresiones que el campo  $\vec{B}$  tiende a hacerse más intenso en el medio con mayor permeabilidad magnética. También se puede llegar a comprender que si se tiene un campo magnético uniforme en una zona vacía y se introduce un trozo paramagnético, el campo se deforma comportándose como si fuese atraído hacia el material y así un mayor flujo de campo pasa por dentro del material. Si el mismo experimento se hace con una muestra diamagnética ocurre lo inverso: el campo se deforma alejándose de la muestra y dentro de ella el campo es menos intenso.

La propiedad de los materiales paramagnéticos de atraer al campo magnético hacia su interior los hace candidatos para núcleos de dispositivos en los que se desee confinar al campo magnético a una geometría especial. Sin embargo, como veremos, los materiales que, por excelencia, cumplen esta labor son los ferromagnéticos. La razón es que la susceptibilidad  $\chi$  para un material paramagnético es muy pequeña, es decir,  $B/(\mu_0 H)$  es cercano a uno.

Muchas veces es necesario analizar casos en los cuales se cumple que  $\nabla \times \vec{H} = 0$ . Esta condición no es equivalente a que  $\vec{B}$  sea irrotacional ya que (5.2.4) no es cierta para todos los materiales. Si  $\vec{H}$  es irrotacional existe un potencial escalar asociado al que denotaremos  $\phi(\vec{r})$ ,

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) \quad (5.3.7)$$

Existe dos casos notables para los cuales este potencial escalar satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0 \quad \text{en casos especiales} \quad (5.3.8)$$

- Caso 1: si se cumple que  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  y puesto que la divergencia de  $\vec{B}$  es siempre nula, la relación (5.3.8) vale.
- Caso 2: si se cumple que  $\nabla \cdot \vec{M} = 0$  la relación (5.3.8) es cierta aun cuando (5.1.16) no lo sea.

## 5.4. Flujo magnético

Ya se definió en (4.2.11) la noción de flujo magnético

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{\Gamma=\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

como una medida de la cantidad de campo magnético que atraviesa una superficie arbitraria  $S$ . Puesto que la divergencia de  $\vec{B}$  es siempre nula este flujo no depende de la superficie misma. El flujo a través de dos superficies que tienen el mismo borde  $\Gamma$  tienen el mismo flujo.

Finalmente observemos que si se calcula el rotor de ambos miembros de la igualdad (5.2.5) se obtiene  $\nabla \times \vec{B} = \mu \nabla \times \vec{H} = \mu \vec{J}$  es decir,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (5.4.2)$$

a pesar de que al comienzo de esta sección se afirmó que  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_T$ . Esta última relación es siempre cierta mientras que (5.4.2) vale solo para materiales lineales y homogéneos. Así, para estos materiales especiales se cumple que  $\mu_0 \vec{J}_T = \mu \vec{J}$ . Además de (5.4.2) se desprende que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu I_{\Gamma} \quad (5.4.3)$$

que es aun otra forma de ver la ley circuital de Ampère en el caso de materiales lineales y homogéneos.

## 5.5. Ferromagnetismo

En los materiales ferromagnéticos la relación (5.2.4) cambia de significado, porque la respuesta del material es no lineal y, más aun, depende de la historia de la muestra. En estos casos es bueno considerar a  $\vec{H}$  como el campo independiente y estudiar el comportamiento:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{H}(\vec{r})) \quad (5.5.1)$$

de  $\vec{B}$  como función de  $\vec{H}$ . La razón para tomar  $\vec{H}$  como la cantidad independiente proviene de (5.2.3), donde se ilustra que  $\vec{H}$  depende directamente de la corriente que está bajo control del experimentador.

Si se toma una muestra ferromagnética con magnetización nula (no está magnetizada) y se la somete a los efectos de una intensidad magnética  $\vec{H}$  de magnitud creciente, con dirección y sentido fijos, se observa que el campo  $\vec{B}$  en la muestra también aumenta, para finalmente comenzar a hacerse cada vez más insensible al valor de la intensidad magnética  $\vec{H}$  aplicada. Llamando  $Z$  a la dirección que tiene el campo a lo largo de

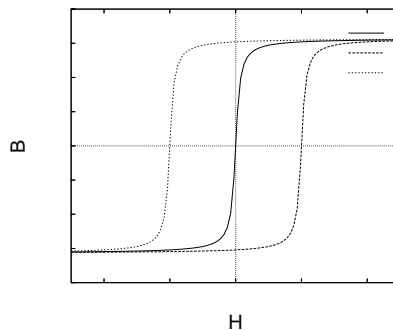


Figura 5.4: Histéresis de un material ferromagnético.

su propia dirección, se observa que dentro de estos materiales el campo magnético  $\vec{B}$  alcanza un valor máximo. En materiales ferromagnéticos el cociente

$$\frac{\mu_{\text{efectivo}}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial H_z}$$

puede valer varios miles (o incluso cientos de miles), lo que los hace materiales magnéticos únicos en aplicaciones tecnológicas. Esto quiere decir que el campo magnético en el interior de una bobina, puede ser cientos

de miles de veces más grande si se usa un buen material ferromagnético como núcleo con respecto a la bobina con núcleo vacío. Si en la misma muestra anterior se comienza a disminuir  $H_z$ , se observa que en el material  $B_z$  no recupera los valores que tuvo en el ascenso, sino que sistemáticamente  $B_z$  es mayor que aquel que se tuvo a la subida para el mismo valor de  $H_z$ . Cuando se llega a  $H_z = 0$  hay un campo magnético en el material: el material se ha magnetizado ( $\vec{M} \neq 0$ ). Si se continúa disminuyendo  $H_z$ , es decir, si  $H_z$  comienza a crecer apuntando en la dirección contraria,  $B_z$  irá disminuyendo y durante todo un intervalo de valores de  $H_z$  se tendrá que  $H_z$  y  $B_z$  apuntan en direcciones opuestas (se dice que  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  son vectores antiparalelos,  $\mu < 0$ ). Finalmente  $B_z$  se anula y si se sigue variando  $H_z$  en el mismo sentido,  $H_z$  y  $B_z$  vuelven a ser paralelos y se puede volver a tener una magnetización de saturación, solo que con el signo cambiado.

Si, a partir de ese último punto, se vuelve a variar  $H_z$  en el sentido de la primera etapa, se alcanza un momento en que  $H_z$  se hace cero y en ese punto la muestra tiene una magnetización permanente en el sentido opuesto al que tuvo anteriormente.

Estos ciclos  $H_z$ - $B_z$  se denominan *ciclos de histéresis*. Al efectuar uno de estos ciclos se gasta cierta energía en forma de calor la cual se relaciona al área cuyo perímetro es la curva cerrada  $H_z$ - $B_z$  correspondiente al ciclo que se estudia. Es un problema tecnológico encontrar materiales ferromagnéticos apropiados para funcionar como núcleos en circuitos con corriente alterna (e.g. en un transformador) que tengan curvas de histéresis que impliquen una pérdida mínima de energía. Tal es el caso del hierro dulce.

## 5.6. Circuitos magnéticos

A continuación se verá el concepto de circuitos magnéticos y el concepto asociado de *reluctancia*. La idea intuitiva se basa en la analogía con la ley de Ohm  $\mathcal{E} = RI$ . El lugar de la fem  $\mathcal{E}$  lo toma la fuerza magnetomotriz,  $fm$ , el análogo de la corriente es el flujo magnético  $\Phi$  y el de la resistencia lo toma la reluctancia  $\mathcal{R}$ .

Se verá que la fuerza magneto-motriz, ( $fm$ ) se identifica con  $NI$  (ver más adelante) y en circuitos magnéticos se puede usar leyes como las de Kirchhoff las que se deducen: la primera ley a partir de  $\nabla \cdot B = 0$  y la segunda de ley a partir de  $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = NI$ , donde  $NI$  es la  $fm$  (la corriente total) que pasa por una superficie que se apoya en  $\Gamma$ .

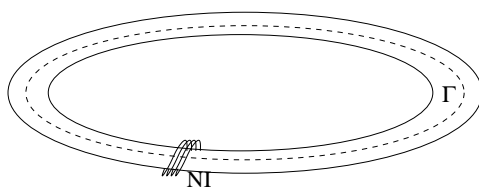


Figura 5.5: Hay una bobina enrollada en torno a un núcleo toroidal.

### 5.6.1. Ejemplo 1

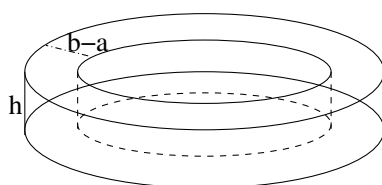


Figura 5.6: Núcleo toroidal con sección rectangular.

Consideremos una bobina toroidal de  $N$  vueltas, de sección rectangular de radio interno  $a$ , radio externo  $b$  y altura  $h$ . La ley circuital de Ampère permite obtener que la intensidad magnética en el interior de esta bobina es

$$\vec{H}(\rho, \phi) = \frac{NI}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

y el campo magnético, de acuerdo a (5.2.5), es  $\mu$  multiplicando a la expresión anterior. A partir de este  $\vec{B}$  se puede calcular el flujo  $\Phi$  de  $\vec{B}$  por una sección rectangular de la bobina (área  $(b-a)h$ ) y resulta:

$$\Phi = \frac{\mu NIh}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (5.6.1)$$

que se reescribe en la forma

$$NI = \left( \frac{2\pi}{\mu h \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right) \Phi. \quad (5.6.2)$$

El lado izquierdo,  $NI$ , es la característica de la bobina que se identifica con la  $fmm$  y el gran paréntesis de la derecha es, en este caso, la reluctancia  $\mathcal{R}$ . Se puede ver que si la sección de la bobina aumenta,  $\mathcal{R}$  disminuye y mientras mayor sea la permeabilidad magnética menor es la reluctancia.

### 5.6.2. Ejemplo 2

Consideremos una bobina toroidal de  $N$  vueltas con corriente  $I$ , de sección rectangular, radio interno  $a$ , radio externo  $b$ , altura  $h$  con un núcleo que en la zona  $0 \leq \phi \leq \alpha$  tiene permeabilidad magnética  $\mu_1$  y en el resto tiene permeabilidad

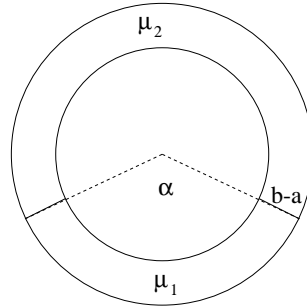


Figura 5.7: Un núcleo toroidal hecho con dos materiales diferentes.

magnética  $\mu_2$ . Se sabe que el campo magnético en el núcleo es de la forma de una constante  $c_0$  dividida por el radio  $\rho$  de coordenadas cilíndricas y la magnitud de la constante  $c_0$  no puede depender del medio porque el campo no sufre discontinuidad alguna al pasar de un medio al otro,  $\vec{B} = \hat{\phi} c_0 / \rho$ . La intensidad  $\vec{H}$  es diferente en ambos medios y la relación es  $\vec{H}_a = \vec{B} / \mu_a$  (medio  $a = 1$  ó  $a = 2$ ). Si se escoge un camino  $\Gamma$  de integración que es una circunferencia de radio  $\rho$ , concéntrica a toda la geometría y dentro del núcleo y se utiliza la ley circuital se obtiene,

$$H_1(\rho) \alpha \rho + H_2(\rho) (2\pi - \alpha) \rho = NI \quad (5.6.3)$$

En lo anterior  $H_a$  es la magnitud de  $\vec{H}$  en el medio  $a$  a distancia  $\rho$  del eje de simetría;  $\alpha \rho$  es el largo de la parte del camino  $\Gamma$  que está en el medio  $a = 1$  y  $(2\pi - \alpha) \rho$  es el largo de la parte de  $\Gamma$  que está en el medio  $a = 2$ .

La misma relación anterior se puede reescribir,

$$\left( \frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2} \right) \rho B(\rho) = NI \quad (5.6.4)$$

Usando con lo que se había dicho antes

$$\vec{B} = \frac{NI}{\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}} \frac{\hat{\phi}}{\rho} \quad (5.6.5)$$

El flujo de este campo a través de una sección cualquiera del núcleo es

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}} h \ln \left( \frac{b}{a} \right) \quad (5.6.6)$$

relación que se puede escribir como

$$(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)\Phi = NI \quad (5.6.7)$$

donde

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{\mu_1} \frac{\alpha}{h \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{1}{\mu_2} \frac{2\pi - \alpha}{h \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (5.6.8)$$

### 5.6.3. Ejemplo 3

Si el núcleo estuviese dividido en  $n$  zonas de permeabilidades  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , por todas estas zonas naturalmente pasa el mismo flujo  $\Phi$  determinado por una reluctancia equivalente,  $\mathcal{R}_{eq}$

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \dots + \mathcal{R}_n \quad (5.6.9)$$

porque se trata de reluctancias en serie. En este ejemplo las superficies entre dos medios son ortogonales al campo, de modo que la condición de borde que se usó fue la continuidad de las componentes normales de  $\vec{B}$ :  $B_{1n} = B_{2n} = \dots$

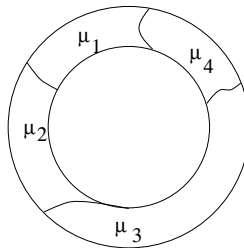


Figura 5.8: Un núcleo toroidal hecho con cuatro materiales diferentes.

### 5.6.4. Ejemplo 4

Consideremos el caso de la figura adjunta. Se tiene un núcleo en forma de 8 dividido en tres sectores con permeabilidades magnéticas  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\mu_3$  y reluctancias  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  y  $\mathcal{R}_3$  respectivamente. En cada una de estas tres partes los flujos magnéticos son  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  y  $\Phi_3$ . La ecuación circuital implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_2 \Phi_2 &= NI \\ \mathcal{R}_2 \Phi_2 - \mathcal{R}_3 \Phi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

Pero de la figura es obvio que además

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad (5.6.11)$$

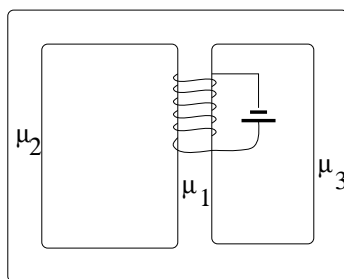


Figura 5.9: Un circuito magnético sencillo.

Con estas tres ecuaciones lineales se puede despejar que

$$\begin{aligned} NI &= \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} \Phi_1 \\ &= \mathcal{R}_{\text{tot}} \Phi_1 \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

donde  $\mathcal{R}_{\text{tot}}$  es la reluctancia total del sistema. Puesto que  $\mathcal{R}_1$  está en serie con el sistema de  $\mathcal{R}_2$  y  $\mathcal{R}_3$  y estas últimas están en paralelo, entonces es interesante estudiar  $\mathcal{R}_{23} \equiv \mathcal{R}_{\text{tot}} - \mathcal{R}_1$  para obtener la reluctancia equivalente a las dos reluctancias  $\mathcal{R}_2$  y  $\mathcal{R}_3$  en paralelo. Un mínimo de álgebra conduce a

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{23}} = \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} \quad (5.6.13)$$

## 5.7. Problema

- 5.1 Considere una bobina toroidal de sección rectangular de  $N$  espiras, por cada una de las cuales circula una corriente  $I$ . El radio interior de la bobina es  $a$  y el exterior es  $b$  y la altura es  $h$ . El núcleo de esta bobina es de un material inhomogéneo en tal forma que su permeabilidad magnética  $\mu$  depende tan solo del ángulo polar  $\theta$  y satisface

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + k \cos \theta \quad (5.7.1)$$

Determine la intensidad magnética  $\vec{H}$  en todo el interior de la bobina.