

Capítulo 2

Electrostática y conductores

2.1. Conductores

2.1.1. Propiedades generales

Sin entrar en detalles microscópicos, un conductor es un material (dieléctrico) que posee cargas libres de moverse en su volumen. Estas cargas se desplazan (corriente eléctrica) tan pronto se aplica un campo eléctrico.

Electrostática es el estudio de cargas y campos bajo la condición que los campos no varíen en el tiempo, ni haya corrientes. En electrostática no hay movimiento de cargas, no hay corrientes. Así, bajo la presencia de un campo eléctrico, las cargas en un conductor se mueven hasta que se ubican de tal manera que el movimiento de cargas desaparece. Esto es posible sólo si el campo eléctrico en el interior del conductor se hace exactamente cero,

$$\vec{E}_{\text{interior}} = \vec{0} \quad (2.1.1)$$

El lapso durante el cual las cargas se reubican para dar campo interior nulo escapa a los marcos de lo que es la electrostática.

Dentro de cada elemento de volumen de un conductor la carga neta es nula porque de lo contrario ellas producirían campo en el interior. En situaciones electrostáticas, un conductor cargado tiene todo su exceso de cargas en la superficie. Dicho de otra manera, $\rho = 0$ ya que $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ y si $\rho \neq 0$, el campo no podría ser nulo.

Si el campo en el interior es nulo entonces el potencial en el interior de un conductor tiene un valor único: el conductor es un *volumen equipoten-*

cial.

En particular, *la superficie de un conductor es una superficie equipotencial*. Por lo tanto, de la superficie de un conductor cargado nace un campo que es perpendicular a esa superficie. La ley de Gauss puede aplicarse a un cilindro infinitesimal con eje perpendicular a la superficie y se demuestra que el campo en una vecindad infinitesimal al conductor tiene un valor totalmente determinado por la densidad superficial de cargas en ese punto:

$$\vec{D}(\text{infinitesimalmente cerca a la superficie conductora}) = \sigma_\ell \hat{n} \quad (2.1.2)$$

que es equivalente a decir que

$$\begin{aligned} \vec{E}(\text{muy cerca a la superficie conductora}) &= \frac{\sigma_\ell}{\epsilon} \hat{n} \\ &= \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \hat{n} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

tal como ya fue obtenido en (1.10.6).

AFIRMACIÓN 1. Si un conductor cargado (carga total Q) tiene un hueco interior totalmente rodeado de materia conductora), entonces la carga se distribuye exclusivamente en la superficie externa.

AFIRMACIÓN 2. Si un conductor carga (carga Q), pero hueco como el anterior, contiene una carga q en la cavidad interna (ver Fig. 2.1), entonces aparece una densidad de carga en la superficie interior cuya integral da exactamente $-q$ y en la superficie externa aparece otra densidad de carga, cuya integral es $Q + q$.

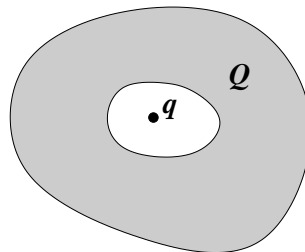


Figura 2.1: Conductor con carga total Q que tiene un hueco que contiene una carga q

AFIRMACIÓN 3. Si se tiene un conductor hueco y neutro y una carga puntual q fuera del conductor, se induce una densidad de carga en la superficie externa (cuya integral es cero) pero el campo en el hueco interior es idénticamente nulo.

Este último fenómeno suele ser denominado *blindaje electrostático*.

CONTACTO A TIERRA. Se dice que un conductor finito está en *contacto a tierra* si su diferencia de potencial con infinito es nula.

2.1.2. Ejemplo ilustrativo

Se tiene una placa conductora de ancho δ que separa a dos medios semiinfinitos con constantes dieléctricas ϵ_A el de abajo y ϵ_B el de arriba (ver Fig. 2.2). Su superficie inferior la llamamos 1 y a la superior la llamamos 2. La placa está cargada (carga libre) pero no se sabe el valor de $\sigma_{\ell 1}$ ni de $\sigma_{\ell 2}$ sino tan solo el total

$$\sigma_{\ell} = \sigma_{\ell 1} + \sigma_{\ell 2} \quad (2.1.4)$$

Gracias a (2.1.3) se sabe que el campo eléctrico en los material A y B es

$$\vec{E}_A = -\frac{\sigma_{\ell 1}}{\epsilon_A} \hat{k}, \quad \vec{E}_B = \frac{\sigma_{\ell 2}}{\epsilon_B} \hat{k} \quad (2.1.5)$$

A partir de estos campos se puede calcular los respectivos vectores \vec{P} y con ellos

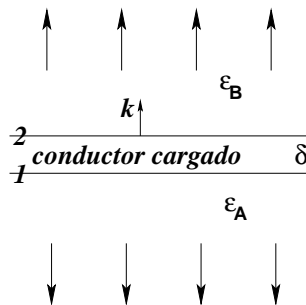


Figura 2.2: Una placa conductora cargada que separa dos medios aislantes.

se obtiene las densidades superficiales de polarización

$$\sigma_{P1} = -\frac{\epsilon_A - \epsilon_0}{\epsilon_A} \sigma_{\ell 1}, \quad \sigma_{P2} = -\frac{\epsilon_B - \epsilon_0}{\epsilon_B} \sigma_{\ell 2} \quad (2.1.6)$$

Las densidades de carga en cada una de las dos superficies es la suma de la densidad de carga libre y de polarización. Si sumamos las expresiones que ya sabemos se obtiene

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon_0 \sigma_{\ell 1}}{\epsilon_A}, \quad \sigma_2 = \frac{\epsilon_0 \sigma_{\ell 2}}{\epsilon_B} \quad (2.1.7)$$

Con estas densidades de carga total en las caras 1 y 2 de la placa se puede calcular el campo eléctrico que ellas implican en el interior del conductor. Resulta que tal campo es proporcional a $\sigma_2 - \sigma_1$, y como el campo debe ser cero (interior de un conductor) se deduce que $\sigma_1 = \sigma_2$. Usando (2.1.7) lo anterior implica

$$\epsilon_B \sigma_{\ell 1} = \epsilon_A \sigma_{\ell 2}$$

Combinando esta expresión con (2.1.4) se logra deducir que

$$\sigma_{\ell 1} = \frac{\epsilon_A \sigma_{\ell}}{\epsilon_A + \epsilon_B}, \quad \sigma_{\ell 2} = \frac{\epsilon_B \sigma_{\ell}}{\epsilon_A + \epsilon_B}$$

con lo que se ha logrado dar una solución en base a los datos $\epsilon_A, \epsilon_B, \sigma_{\ell}$. De esto es directo, por ejemplo, que el campo eléctrico a ambos lados tenga la misma magnitud pero distinto signo:

$$\vec{E}_B = -\vec{E}_A = \frac{\sigma_{\ell}}{\epsilon_A + \epsilon_B} \hat{k}$$

pero si se usa la notación $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ es muy fácil demostrar que

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\ell}}{\epsilon_A + \epsilon_B}$$

lo que conduce a ver que se ha reobtenido (1.2.6). Nótese que σ es toda la carga por unidad de superficie que tiene la placa, esto es, $\sigma = \sigma_{\ell 1} + \sigma_{P1} + \sigma_{\ell 2} + \sigma_{P2}$.

Teniendo esta solución se puede comprobar que

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\ell 1}}{\epsilon_A}, \quad \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\ell 2}}{\epsilon_B}$$

que ilustra, esta vez con densidades superficiales, el comentario que se hizo bajo (1.9.3).

Demuestre, con los resultados anteriores, que

$$\frac{\sigma_{\ell}}{\epsilon_A + \epsilon_B} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

donde $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

2.1.3. Otro ejemplo (un condensador)

Consideremos una situación semejante a la anterior, pero esta vez se tiene dos placas conductoras infinitas paralelas con cargas de igual magnitud y signo opuesto. Las cuatro superficies las denominamos desde abajo hacia arriba 1, 2, 3 y 4. La carga por unidad de superficie es σ en la placa inferior y $-\sigma$ en la superior, es decir,

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma_3 + \sigma_4 = -\sigma$$

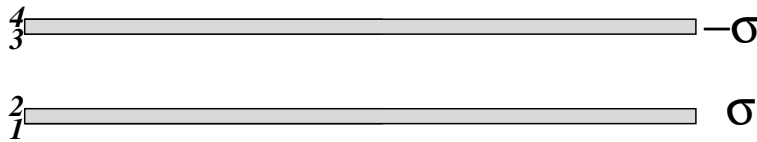


Figura 2.3: Dos placas conductoras con cargas opuestas.

La exigencia de que el campo eléctrico sea nulo en el interior de los dos conductores lleva a dos condiciones más:

$$\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma = 0, \quad \sigma + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

Estas cuatro ecuaciones dan como solución que

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0, \quad \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma \quad (2.1.8)$$

Esto significa que la carga de estas placas se concentra únicamente en las caras enfrentadas, es decir, en la cara inferior (3) de la placa de arriba y en la cara superior (2) de la placa de abajo. Para obtener este resultado en ningún momento se necesitó el valor de las constantes dieléctricas de los distintos medios.

Sistemas, como el actual, formado por dos conductores con carga de igual magnitud y signo opuesto se llaman condensadores y serán analizados en general a partir de §2.6.

2.1.4. Ecuación de Poisson. Unicidad de la solución

Si se tiene un conjunto de N conductores cargados interesa poder determinar la función potencial eléctrico. Puede adivinarse que $V(\vec{r})$ depende de las cargas Q_k de cada conductor y de la configuración geométrica del sistema. Normalmente se usará la convención $V(\infty) = 0$. El problema consiste en resolver la ecuación de Poisson con condiciones de borde que correspondan al sistema en estudio, es decir,

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(\vec{r}) &= -\rho(\vec{r})/\epsilon \\ V(S_k) &= V_k \quad (k = 1 \dots N) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

donde S_k representa la superficie del k -ésimo conductor, y V_k es el valor del potencial en la superficie de él.

Demostraremos que la solución a este problema es *única* si se adopta alguna convención como que $V(\infty) = 0$. Con el objetivo de hacer esta demostración se supone que existen dos soluciones $V_1(\vec{r})$ y $V_2(\vec{r})$, es decir ambas funciones satisfacen el sistema de ecuaciones (2.1.9). Se define entonces la función diferencia,

$$\phi(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) - V_2(\vec{r})$$

y la idea es demostrar que ϕ es idénticamente nula. Para ello conviene notar que ϕ satisface un sistema semejante a (2.1.9) pero con lados derechos nulos,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\vec{r}) &= 0 \\ \phi(S_k) &= 0 \quad (k = 1 \dots N) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Si se define, $\vec{F}(\vec{r}) = \phi(\vec{r})\vec{\nabla}\phi$ se observa que $\nabla \cdot \vec{F} = (\vec{\nabla}\phi)^2$, es decir, la divergencia de \vec{F} es no negativa. Si se hace la integral de la divergencia de \vec{F} en un volumen \mathcal{V} , el teorema de Gauss permite convertir la integral en una integral de superficie de \vec{F} mismo. Si el volumen \mathcal{V} se toma arbitrariamente grande, de modo que su superficie se aleje indefinidamente, la integral de superficie es nula porque \vec{F} decrece cerca de infinito al menos como r^{-3} . En efecto, todo potencial de una fuente finita decrece cerca de infinito como $1/r$ (ver (1.5.8)), lo que implica que \vec{F} decrece como ya se ha dicho.

Pero si la integral es nula, y lo que se está integrando es el cuadrado de la divergencia de ϕ , necesariamente se tiene que cumplir que $\nabla\phi = 0$ en todas partes, lo que implica que ϕ es constante. Y como se sabe que ϕ es cero sobre la superficie de cada uno de los conductores, entonces ϕ es una función idénticamente nula, es decir, (2.1.9) tiene una sola solución.

Si se plantea $\nabla^2 V(\vec{r}) = -\rho/\epsilon$ dentro de un volumen acotado \mathcal{V} y se da una condición de borde en $S = \partial\mathcal{V}$ del tipo $V(S)$ es una función dada, el problema tiene solución única dentro del volumen y nada puede decirse sobre el potencial fuera de la zona \mathcal{V} .

2.1.5. Ejemplo sobre continuidad del potencial

Un condensador formado por dos planos infinitos tiene $V = V_0$ abajo y $V = 0$ arriba. El espacio intermedio, de alto $2a$, tiene la mitad de abajo

rellena con material con ϵ_1 y el de arriba tiene ϵ_2 . Debiera ser claro que el potencial solo puede depender de z y puesto que no hay carga en el espacio intermedio ahí debe satisfacerse $\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$. De aquí que en las dos zonas el potencial tiene que ser lineal en z ,

$$V_1 = A + Bz \quad V_2 = C + Dz$$

Hay exactamente cuatro condiciones que determinan estas cuatro constantes:

$$V_1(0) = V_0, \quad V_1(a) = V_2(a), \quad V_2(2a) = 0, \quad \epsilon_1 \frac{dV_1}{dz}(a) = \epsilon_2 \frac{dV_2}{dz}(a)$$

La segunda es la condición de continuidad y la última es la condición (1.10.4) de continuidad de la componente normal de \vec{D} cuando no hay carga en la interfaz. Estas relaciones implican

$$A = V_0 \quad B = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{V_0}{a} \quad C = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} 2V_0 \quad D = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{V_0}{a}$$

esto es,

$$V_1 = \left(1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{z}{a}\right) V_0, \quad V_2 = \left(\frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{z}{a}\right) V_0$$

2.2. Energía electrostática

2.2.1. Energía como función de cargas y potenciales

La energía potencial asociada a un par de partículas cargadas q_1 y q_2 es,

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}} \quad (2.2.1)$$

Similarmente, la energía asociada a tres partículas es,

$$U_{123} = U_{12} + U_{23} + U_{31} \quad (2.2.2)$$

donde al lado derecho aparecen funciones como la que se escribió en (2.2.1) para cada uno de los tres pares que se pueden formar. En ambos casos se ha considerado el cero de energía potencial a distancia infinita.

Si se trata de un sistema de N partículas cargadas, el resultado es,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j(\neq i)=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}} \quad (2.2.3)$$

El factor $1/2$ es necesario porque la doble suma está contando dos veces cada pareja y la condición $j \neq i$ en la suma interior evita que se considere la energía potencial de una partícula debido a su propio campo (lo que daría un infinito ya que $r_{ii} = 0$).

De (1.4.7), puede verse que el potencial de todas las N partículas, excepto por la i -ésima, evaluado en la posición de la i -ésima partícula es

$$V_i = \sum_{j(\neq i)=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}} \quad (2.2.4)$$

(se ha tomado con \vec{r}_0 en infinito) lo que implica que

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (2.2.5)$$

Esta es la energía de un conjunto discreto de N cargas puntuales. El resultado puede ser generalizado a distribuciones continuas reemplazando la suma por una integral sobre la distribución y reemplazando q_i por un elemento de carga dq ,

$$U = \frac{1}{2} \int V(\vec{r}') dq(\vec{r}'), \quad (2.2.6)$$

ver (1.2.3)

Naturalmente que en general una fuente puede ser una mezcla de un conjunto discreto de cargas puntuales y de distribuciones continuas, por lo que la energía electrostática debe ser escrita como una suma de las expresiones (2.2.5) y (2.2.6).

Si, en particular, se tiene un sistema que solo consta de N conductores cargados, su energía es la semisuma de integrales de productos $V_k \sigma_k$, donde k es el índice que se usa para numerar los conductores. Puesto que en la superficie de cada conductor el potencial es constante (no depende del punto de la superficie), los factores V_k pueden ser escritos fuera de cada una de las N integrales, lo que finalmente da que,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N V_k Q_k. \quad (2.2.7)$$

2.2.2. Energía como función de los campos

Consideremos el caso en que se tiene una fuente que consta de un volumen finito \mathcal{V} dentro en el cual hay una distribución de carga libre $\rho(\vec{r})$, y un conductor con superficie S_c (volumen \mathcal{V}_c) con densidad de carga libre $\sigma(\vec{r})$. La energía de este sistema es

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') d\mathcal{V}' + \int_{S_c} \sigma(\vec{r}') V(\vec{r}') dS' \right). \quad (2.2.8)$$

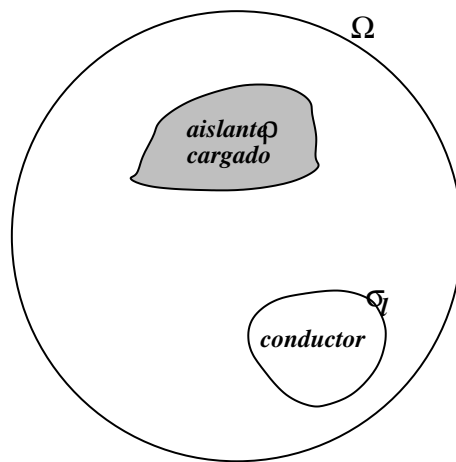


Figura 2.4: Ω es una enorme esfera que encierra a un aislante cargado y a un conductor cargado.

La primera de estas dos integrales, que se denotará I_1 , puede hacerse sobre una región arbitraria que contenga al volumen \mathcal{V} —y que no contenga al conductor cargado—ya que la densidad de carga volumétrica es nula fuera de \mathcal{V} . Conviene integrar I_1 sobre una región $\Omega - \mathcal{V}_c$: una región esférica Ω con un hueco que corresponde al volumen del conductor. El centro de esa esfera está en un punto arbitrario de \mathcal{V} y con radio R que se hará finalmente tender a infinito.

Más precisamente el hueco dentro de esta esfera—que no forma parte de Ω —está definido por una superficie \bar{S}_c que rodea al conductor infinitesimalmente cerca sin llegar a tocarlo. Es decir el borde de Ω está formado por dos superficies cerradas disjuntas.

Para trabajar el integrando de I_1 se reemplaza la densidad ρ por la divergencia del campo del desplazamiento eléctrico, usando (1.8.5). De

modo que el integrando tiene el producto $V(\vec{r}') \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}')$. Se hace uso de la identidad,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (V\vec{D}) &= \vec{D} \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \vec{D} \\ &= -\vec{E} \cdot \vec{D} + V \nabla \cdot \vec{D} \end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad se hizo uso de (1.4.4). De modo que I_1 se puede escribir como,

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega - \mathcal{V}_c} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \nabla \cdot (V\vec{D})) d\mathcal{V}' \quad (2.2.9)$$

La primera integral se va a convertir, en el límite final, en una integral sobre todo el espacio, incluido si se quiere, el interior de S_c , ya que ahí el campo eléctrico es nulo. La segunda integral es una integral de volumen de una divergencia, lo que permite usar el teorema de Gauss para reducirla a una integral de superficie. Pero la superficie de $\Omega - \mathcal{V}_c$ es claramente separable en dos porciones: la superficie esférica exterior $\partial\Omega$ y la superficie interior que podemos identificar con la superficie del conductor, \mathcal{S}_c . La integral sobre $\partial\Omega$ se hace cero en el límite (el integrando decrece como r^{-3}). La integral sobre \mathcal{S}_c es muy sencilla porque $V(\vec{r}')$ sobre \mathcal{S}_c tiene un valor fijo, lo que permite tomar este valor fuera de la integral, quedando por calcular una integral del tipo $\int \vec{D} \cdot d\vec{S}$, que es una integral de flujo. El $d\vec{S}$, sin embargo, apunta hacia afuera de la región $\Omega - \mathcal{V}_c$, es decir, hacia adentro del conductor, lo que da finalmente un signo menos y así, esa última integral da, debido a la ley de Gauss (1.8.4), la carga total del conductor Q_c ,

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\int \vec{E} \cdot \vec{D} d\mathcal{V}' - V_c Q_c \right) \quad (2.2.10)$$

La otra contribución a la energía que hay en (2.2.8) es una integral sobre la superficie S , en la cual el potencial vale siempre V_c , por lo que puede ser escrito fuera de la integral, quedando por hacer una integral de la densidad de carga σ en toda la superficie, lo que da Q_c . Así, entonces, se ve que la última integral de (2.2.8) se cancela con el último término de I_1 . En resumen, se ha obtenido que,

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d\mathcal{V}, \quad (2.2.11)$$

integral que se hace sobre todo el espacio. La densidad de energía electrostática entonces es

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (2.2.12)$$

2.3. Condensadores

Se entiende por condensador un sistema de dos conductores A y B con cargas $Q_A = +Q$ y $Q_B = -Q$. La característica más interesante de un condensador es su *capacidad*, definida por

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.3.1)$$

donde V es la diferencia de potencial que existe entre ellos:

$$V = V_{AB} = V_A - V_B > 0 \quad (2.3.2)$$

La carga que aparece en la definición de C es la carga que hay propiamente en el conductor, es decir, es carga libre.

De lo anterior, la energía de un condensador es,

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \quad (2.3.3)$$

Por definición C es una cantidad positiva. Lo usual es construir los condensadores con conductores que enfrentan una gran área separada por una distancia muy pequeña. Esto garantiza que prácticamente toda la densidad de carga esté en las caras enfrentadas y por lo tanto, que casi todo el campo eléctrico esté concentrado en el volumen que queda entre esas dos caras cargadas. Así, la densidad de energía de un condensador está principalmente en ese volumen.

A continuación se demostrará que la capacidad efectivamente es una cantidad que no depende de la carga Q del condensador. Con este propósito se estudiará la forma como varía la energía de un condensador cuando la carga de éste es aumentada: $Q \rightarrow Q + dQ$. Puesto que al aumentar la carga la magnitud del campo eléctrico aumenta, entonces (ver (2.2.11)), la energía aumenta: $dU > 0$.

Para aumentar la carga se quita al conductor A una carga $-dQ$, esto es $Q_A = Q \rightarrow Q - (-dQ)$. Esa carga, sobre la que hay una fuerza eléctrica de atracción hacia A , es llevada por un agente externo (por ejemplo, una batería) hacia el conductor B . El trabajo del agente externo se efectúa por medio de una fuerza externa \vec{F}_{ext} que en todo momento se opone a la fuerza electrostática $\vec{F}_e = dQ\vec{E}$, es decir, $\vec{F}_{\text{ext}} = -dQ\vec{E}$. El trabajo dW es el cambio de energía $dU = dW$,

$$dU = + \int_A^B dQ \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

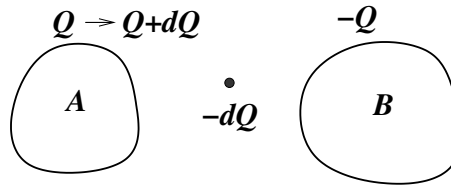


Figura 2.5: Al sacar carga $-dQ$ del conductor A este pasa de tener carga Q a tener carga $Q+dQ$.

$$\begin{aligned}
 &= VdQ && \text{que se reescribe:} \\
 &= \left(2\frac{dQ}{Q}\right) \left(\frac{1}{2}QV\right) \\
 &= \left(2\frac{dQ}{Q}\right)U && (2.3.4)
 \end{aligned}$$

Esto es,

$$\frac{dU}{U} = 2\frac{dQ}{Q} \quad (2.3.5)$$

Al integrar se obtiene $\ln(U) = 2\ln(Q) + \ln(\lambda)$, donde $\ln(\lambda)$ es el nombre que se le da a la *constante* de integración. Puesto que es constante, no depende de la variable de integración Q , y así, se ha demostrado que $U = \lambda Q^2$, donde λ es independiente de Q . Al comparar esto con (2.3.3) se reconoce que $\lambda = 1/2C$, lo que muestra que la capacidad de un condensador no depende de la carga Q sino que es una propiedad intrínseca del condensador, esto es, depende de su geometría y la constante dieléctrica, ϵ .

EJERCICIO 2.3-1. Calcule la capacidad de un condensador de caras planas paralelas de área enfrentada A y a distancia d , suponiendo que los efectos de borde son despreciables, esto es, el campo eléctrico entre las placas se supone uniforme. Demuestre que ésta es,

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad (2.3.6)$$

EJERCICIO 2.3-2. Calcule la capacidad de un condensador que consta de dos conductores cilíndricos concéntricos de radios a y b y de altura h despreciando los efectos de borde. Demuestre que,

$$C = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln(b/a)} \quad (2.3.7)$$

EJERCICIO 2.3-3. Calcule la capacidad de un condensador que consiste en dos esferas concéntricas de radios a y b ($b > a$) y demuestre que,

$$C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b - a} \quad (2.3.8)$$

Nótese que las capacidades siempre resultan proporcionales a ϵ y a un factor con dimensiones de longitud.

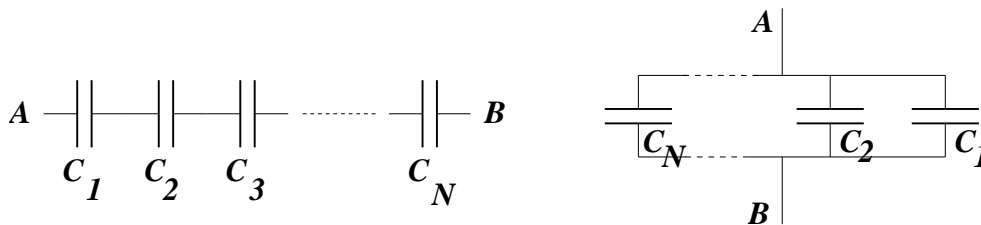


Figura 2.6: Condensadores en serie y en paralelo respectivamente.

EJERCICIO 2.3-4. Demuestre que las expresiones para las capacidades equivalentes de una serie de condensadores conectados en serie o en paralelo (ver fig.2.6) son

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{\text{eq}}} &= \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_N} && \text{conectados en serie} \\ C_{\text{eq}} &= C_1 + \dots + C_N && \text{conectados en paralelo} \end{aligned}$$

2.4. Energía y fuerzas entre conductores cargados

La energía de un conjunto de N conductores cargados (se usa que $V(\infty) = 0$) es,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k V_k \quad (2.4.1)$$

donde V_k es el valor del potencial sobre el k -ésimo conductor. La energía del sistema cambia si varían las cargas, o los potenciales o ambos,

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (V_k dQ_k + Q_k dV_k) \quad (2.4.2)$$

Sobre cada uno de estos conductores está actuando una fuerza de naturaleza eléctrica que se calculará a continuación. Se supondrá que los conductores permanecen normalmente en reposo debido a que existe alguna fuerza no eléctrica que los mantiene fijos.

Si por un instante se deja que el k -ésimo conductor modifique su posición en un $d\vec{r}_k$ por efecto de la fuerza electrostática \vec{F}_k que está actuando sobre él, la energía del sistema cambia en

$$dU = \nabla_k U \cdot d\vec{r}_k \quad (2.4.3)$$

El subíndice k en ∇_k quiere decir que se toma el gradiente de U derivando con respecto a las coordenadas del conductor k .

Se estudiará dos casos: (a) conductores aislados, es decir, $dQ_j = 0$ para todo j y (b) conductores cuyos potenciales permanecen constantes, $dV_j = 0$.

(a) **Conductores aislados.** En este caso el sistema efectúa un trabajo mecánico (positivo) dW al desplazar al conductor k , lo cual lo hace perder energía: $dU < 0$. Ese trabajo es,

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k \\ &= -dU \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Al comparar las dos expresiones para dU se obtiene directamente que,

$$\vec{F}_k = -\nabla_k U \quad (2.4.5)$$

(b) **Conductores con potenciales fijos.** Esta situación podría darse interconectando los conductores con baterías, cuidando que no haya circuitos cerrados que provoquen la existencia de corrientes eléctricas. Además se conecta una batería entre uno de los conductores y *tierra*. Las baterías aseguran que las diferencias de potencial permanezcan fijas y la batería a tierra asegura que uno de los conductores tenga potencial fijo. Eso basta para que todos los potenciales queden fijos.

Esta vez el cambio de energía dU que experimenta el sistema se debe a dos razones: i) la fuerza \vec{F}_k efectúa un trabajo que implica una pérdida de energía para el sistema y ii) las baterías trabajan para mantener fijos los potenciales. Aun así, (2.4.2) se reduce a

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i dQ_i \quad (2.4.6)$$

La pérdida de energía debido al trabajo mecánico es, igual que en el caso anterior,

$$(dU)_{\text{Mec}} = -\vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k \quad (2.4.7)$$

La determinación de la variación de la energía debido al trabajo de las baterías requiere de un análisis un poco más delicado.

Conviene pensar primero en un sistema de tan solo dos conductores con $V_A - V_B$ fijo. Supongamos que, debido a un pequeño movimiento de uno de los conductores, el conductor A pierde una cantidad $-dQ_{AB}$ de carga, es decir, $Q_A \rightarrow Q_A - (-dQ_{AB}) = Q_A + dQ_{AB}$ y que la carga de B cambia en $Q_B \rightarrow Q_B + dQ_{BA}$. Debido a que la carga se conserva,

$$dQ_{AB} = -dQ_{BA} \quad (2.4.8)$$

El trabajo que efectúa la batería en acarrear $-dQ_{AB}$ de A a B es

$$\begin{aligned} dW_{\text{bat}} &= \int_A^B dQ_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= dQ_{AB}(V_A - V_B) \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Esta es la cantidad de energía que el sistema toma de las baterías ($dW_{\text{bat}} = dU_{\text{bat}}$). La energía total que el sistema toma de las baterías es una superposición de expresiones como (2.4.9) sumando sobre todas las parejas de subsistemas de dos conductores,

$$\begin{aligned} (dU)_{\text{bat}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_i - V_j) dQ_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_i dQ_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_j dQ_{ji} \\ &= \sum_{i,j} V_i dQ_{ij} \\ &= \sum_i V_i dQ_i \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

El factor $1/2$ en la primera igualdad toma en cuenta que cada pareja es contada dos veces. En el segundo paso se hizo uso de (2.4.8). En el último paso se utilizó la relación que expresa el cambio total de carga que experimenta en conductor i , es

$$dQ_i = \sum_j dQ_{ij} \quad (2.4.11)$$

De aquí que el cambio total de energía del sistema sea,

$$\begin{aligned} dU &= (dU)_{\text{Mec}} + (dU)_{\text{bat}} \\ &= -\vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k + \sum_i V_i dQ_i \\ &= -\vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k + 2dU \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

La última igualdad se debe a (2.4.6). De aquí se despeja que

$$dU = \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k \quad (2.4.13)$$

que se compara con (2.4.3) para obtener que,

$$\vec{F}_k = \nabla_k U \quad (2.4.14)$$

Es interesante observar que esta expresión difiere del resultado (2.4.5) del caso anterior sólo en el signo. Pero sería falso concluir que un sistema de conductores $(Q_1, V_1), (Q_2, V_2), \dots, (Q_N, V_N)$ implica fuerzas de signo contrario sobre el conductor k solo por el hecho de tener cargas fijas (conductores aislados) o potenciales fijos (conductores interconectados con baterías). Lo contrario es lo correcto, en ambos casos la fuerza es exactamente la misma a pesar de las apariencias.

Por ejemplo, la energía de un condensador plano es,

$$U = \frac{xQ^2}{2A\epsilon} \quad (2.4.15)$$

donde x es la distancia entre las placas. Si Q permanece constante la fuerza es,

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{Q^2}{2A\epsilon} \quad (2.4.16)$$

Pero si es V el que permanece constante, conviene hacer el reemplazo,

$$V = \frac{xQ}{A\epsilon} \quad (2.4.17)$$

obteniéndose,

$$U = \frac{\epsilon AV^2}{2x} \quad (2.4.18)$$

y esta vez debe calcularse,

$$F = +\frac{dU}{dx} = -\frac{\epsilon AV^2}{2x^2} \quad (2.4.19)$$

Si se compara ambas expresiones para la fuerza se puede constatar que se obtiene una identidad.

2.5. Integración numérica de la ecuación de Poisson

2.5.1. Caso unidimensional

Recordemos que la noción de primera derivada de una función V proviene de considerar el límite de

$$V' \sim \frac{V(x+\varepsilon) - V(x)}{\varepsilon} \quad \text{o bien} \quad \frac{V(x) - V(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (2.5.1)$$

Similarmente la segunda derivada se puede expresar como la diferencia de primeras derivadas,

$$V'' \sim \frac{\frac{V(x+\varepsilon)-V(x)}{\varepsilon} - \frac{V(x)-V(x-\varepsilon)}{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{V(x+\varepsilon) - 2V(x) + V(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} \quad (2.5.2)$$

Si se quisiera integrar numéricamente la ecuación diferencial ordinaria $V'' = p(x)$ en el intervalo $[a, b]$ con condiciones de borde $V(a) = V_a$ y $V(b) = V_b$ se procede como sigue. Se divide el intervalo $[a, b]$ en N partes iguales de largo ε , de tal modo que $\varepsilon N = b - a$. La coordenada de cada punto discreto es $x_k \equiv a + k\varepsilon$ de tal modo que $x_0 = a$ y $x_N = b$. Los únicos valores de V que se va a determinar son los $V_k \equiv V(x_k)$ y las condiciones de borde $V_0 = V_a$ y $V_N = V_b$ son datos.

Se escribe la igualdad $V_{k+1} - 2V_k + V_{k-1} = p_k \varepsilon^2$ y se despeja V_k :

$$V_k = \frac{1}{2} (V_{k+1} + V_{k-1} - \varepsilon^2 p_k)$$

y se escribe un programa que tiene dos rutinas. La rutina de inicialización le asocia a V_k (con $k = 1, \dots, N-1$) valores al azar (sí, ¡al azar!), mientras que a los valores en los bordes se les da los datos V_a y V_b . La rutina de cálculo es un *ciclo* que visita ordenadamente los puntos interiores y cambia el valor actual de V_k por el que resulta de la expresión de arriba.

Se puede demostrar que este procedimiento siempre converge a la solución, independiente de los valores aleatorios asociados a los V_k inicialmente. Pero ¿cuando detener el *ciclo*? Una forma razonable puede ser la siguiente. En cada pasada por todos los puntos interiores que van modificando los valores de V_k se calcula $S = \sum_k V_k^2$. El *ciclo* puede terminar cuando la diferencia entre el valor actual de S y el anterior es menor que alguna cantidad muy pequeña.

Si su programa va mostrando en pantalla el gráfico V_k versus k después de cada pasada podrá ver cómo los valores aleatorios iniciales rápidamente son cambiados por otros que van convergiendo a la solución.

2.5.2. Dimensiones mayores

Si se desea resolver un problema semejante pero en dos o tres dimensiones entonces el volumen en el cual se quiere calcular V se cuadrícula en dos dimensiones y se divide en cubos en tres dimensiones. Se ve que los puntos se caracterizan por dos o tres enteros: x_{ij} en dos dimensiones y x_{ijk} en tres dimensiones.

Para ser más preciso trabajemos el caso bidimensional de la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = p(x,y) \quad (2.5.3)$$

la que nos lleva a la versión discreta,

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{ij}}{\varepsilon} - \frac{V_{ij} - V_{i-1,j}}{\varepsilon} + \frac{V_{i,j+1} - V_{ij}}{\varepsilon} - \frac{V_{ij} - V_{i,j-1}}{\varepsilon} = p_{ij} \quad (2.5.4)$$

y que permite despejar

$$V_{ij} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - \varepsilon^2 p_{ij}) \quad (2.5.5)$$

A continuación se presenta un pseudocódigo que permite obtener el potencial en 2D dentro de un cuadrado con coordenadas (0,0) y (10,10) con las siguientes condiciones de borde. El potencial en el perímetro cuadrado es nulo, en el trazo desde (3,4) hasta (7,4) vale $V = 8$ y en el trazo desde (3,6) hasta (7,6) vale $V = -8$. Se trabajará el caso $p(x) \equiv 0$

```
N          = 100
epsilon = 0.1
/*****Inicializacion*****/
for i=0 to 100
  { for j=0 to 100
    V[i,j] = numero aleatorio entre -1 y 1
  }
for i=0 to 100 do
  { V[i,0] = 0.0
    V[i,10] = 0.0
    V[0,i] = 0.0
    V[10,i] = 0.0
  }
```

```

for i=30 to 70 do
{ V[i,40] = 8.0
  V[i,60] = -8.0
}
/*****Loop*****/
/** Tan pronto calcula cada V[i,j] puede ejecutar una      **/
/** instruccion tipo pintar_pixel(i,j,color=entero(8+V[i,j]) **/
/** que coloca en el sitio [i,j] de la pantalla un color   **/
/** que varia segun el valor del potencial.                 **/

iter = 0
while (iter<1000) do
{ for i=1 to 29 do
  { for j=1 to 99 do
    { V[i,j] = 0.25*(V[i+1,j]+V[i-1,j]+V[i,j+1]+V[i,j-1])
      V(70+i,j) = 0.25*(V(i+71, j)+V(i+69,j)+V(i+70,j+1) + V(i+70,j-1))
    }
  }
  for i=30 to 70 do
  { for j=1 to 39 do
    { V[i,j] = 0.25*(V[i+1,j]+V[i-1,j]+V[i,j+1]+V[i,j-1])
      V(i, j+60) = 0.25*(V(i+1,j+60) + V(i-1,j+60)+V(i,j+61)+V(i,j+59))
    }
    for j=41 to 59 do
      V[i,j] = 0.25*(V[i+1,j]+V[i-1,j]+V[i,j+1]+V[i,j-1])
    }
  }
  iter = iter + 1
}

```

Se puede hacer variantes a este problema. Casos interesantes son:

- (1) Ponga $V = 0$ en todo el perímetro del cuadrado de 10×10 y defina un objeto con carga uniforme en un área que podría ser un rectángulo entre los puntos (2,2) y (6,4). Es decir, define un $\rho_{ij} = \rho_0$ tal que la integral de esta función constante en toda el área dé un valor total de carga dado, $Q = 1$. Obtener los V_{ij} .
- (2) Otra variante permite ir variando aleatoriamente los valores ρ_{ij} de tal forma que la integral $\int \rho dS$ permanezca fija, pero, se retrocede el cambio si la energía aumenta (la integral de ρV). Este proceso lleva a un mínimo de energía que está asociado a un caso muy notable y la forma del potencial tiene algo muy particular. ¡Interprete!

2.6. Problemas

2.1 Considere un sistema donde distintos medios están separados por superficies esféricas de radios $a < c < b < g$. Al centro hay una carga q en una cavidad vacía de radio a . Entre los radios a y c hay material dieléctrico aislante caracterizado por ϵ_A , entre c y b el medio es conductor con carga total Q y entre b y g el material dieléctrico aislante está caracterizado por ϵ_B . Más

allás de g la constante dieléctrica vale ϵ_g . Las únicas cargas del sistema son las ya mencionadas q y Q . Determine \vec{E} , \vec{P} y \vec{D} en todas partes y obtenga las densidades totales de polarización en cada superficie esférica.

- 2.2 Si el espacio entre dos cilindros conductores coaxiales muy largos (radios a y b , $a < b$) estuviese lleno con un material dieléctrico, ¿cómo tendría que depender la constante dieléctrica de la distancia ρ al eje para que la magnitud del campo $\|\vec{E}\|$ fuera independiente de ρ ? ¿Cuál es la densidad volumétrica de polarización?
- 2.3 Dos placas conductoras rectangulares muy grandes nacen de una misma recta y forman un ángulo θ_0 . En el espacio entre ellas hay dos materiales dieléctricos caracterizados por ϵ_1 y ϵ_2 separados por una superficie rectangular que también nace de la misma recta y forma ángulos θ_1 y θ_2 con los planos conductores (naturalmente $\theta_1 + \theta_2 = \theta_0$). Si se tiene una diferencia de potencial V_0 entre las placas conductoras, determine las distintas densidades de carga que aparecen en la geometría.
- 2.4 El espacio entre dos esferas concéntricas conductoras (con cargas Q y $-Q$ y radios a y b respectivamente), está lleno con dos materiales dieléctricos, caracterizados por ϵ_1 y ϵ_2 , separados por un plano ecuatorial. Determinar la diferencia de potencial entre ambas esferas.
- 2.5 Los aislantes pierden su calidad de tales cuando son sometidos a los efectos de un campo eléctrico que sobrepasa una magnitud crítica E_R (campo de ruptura). Se desea construir un cable coaxial constituido por un cable cilíndrico de radio interno $a = 3[\text{mm}]$, un cable externo (cilindro hueco de radio interior $b = 5[\text{mm}]$) y, entre ellos, en forma concéntrico se desea poner dos materiales caracterizados por $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$ (interno) y $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ (externo). Se sabe que $E_R = 24000[\text{Volt/metro}]$ para ambos materiales. Determine el valor óptimo del radio de la superficie interfacial entre ambos dieléctricos para que la diferencia de potencial entre los conductores pueda ser la mayor posible sin que se produzca ruptura. (Rsp:4.5mm)
- 2.6 Considere un sistema de simetría cilíndrica compuesto de un alambre rectilíneo infinito con densidad de carga λ_0 uniforme rodeado de un cilindro de radio a de material dieléctrico con constante dieléctrica ϵ_a , a su vez rodeado de un cilindro conductor de radio exterior c el cual, finalmente, está rodeado de un cilindro dieléctrico de radio exterior b y de constante dieléctrica ϵ_b . El cilindro conductor está cargado; su carga es λ_1 por unidad de longitud. Determine el campo eléctrico en todas partes y la densidad de carga total en las tres interfaces.