Apéndice A

Operadores diferenciales

A.1. Los conceptos de gradiente, divergencia y rotor

Sobre el concepto de gradiente. Si $f(\vec{r})$ es una función escalar, entonces su gradiente, en coordenadas cartesianas es,

$$\nabla f(\vec{r}) = \hat{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{A.1}$$

Si la función f depende solo de la magnitud de $\vec{r}$, es decir, $f(\vec{r}) = f(r)$ entonces

$$\nabla f(r) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{df}{dr}. \tag{A.2}$$

Entre los puntos (x,y,z) y $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ la función f varía,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z, \tag{A.3}$$

como lo muestra un simple desarrollo de Taylor de la función en torno al punto (x,y,z) y puesto que como,

$$\Delta\vec{r} = \hat{\imath}\Delta x + \hat{\jmath}\Delta y + \hat{k}\Delta z \tag{A.4}$$

entonces,

$$\Delta f = \nabla f \cdot \Delta\vec{r}. \tag{A.5}$$

El lado derecho es *la variación de $f(\vec{r})$ a lo largo de $\Delta\vec{r}$.*

Si se considera una esfera infinitesimal alrededor del punto $P_0 = (x,y,z)$ y se calcula la variación de f entre P_0 y cada punto sobre la pequeña esfera, se denomina P_M al punto sobre la esfera para el cual dicha variación toma un valor máximo. Puesto que ∇f evaluado en P_0 es un vector fijo, es obvio que la variación máxima ocurre cuando ∇f es un vector paralelo al vector $\Delta\vec{r}$ que va desde P_0 hasta P_M.

En conclusión, *el gradiente de una función arbitraria f es un vector que siempre apunta en la dirección en que la función crece más rápido.*

A partir del punto P_0 también existe la dirección hacia la cual la función disminuye más rápido, la que es exactamente opuesta a la anterior. Entre P_M y este otro punto hay una curva sobre la esfera que corresponde a puntos en que la función no varía. La existencia de dichos puntos es transparente si en A.5 se considera todas las direcciones para las cuales $\Delta\vec{r}$ es perpendicular al vector fijo ∇f. En otras palabras, *el anillo de puntos alrededor de P_0 que corresponde a puntos de variación nula de la función f define un disco que es perpendicular a ∇f.*

La unión de todos estos discos infinitesimales define la superficie sobre la cual la función tiene un valor constante, es la superficie *iso-f*. Si, por ejemplo, f representa la temperatura en cada punto de un cierto cuerpo que no está en equilibrio térmico, entonces a cada punto P le está asociada una dirección del gradiente de la temperatura y por P pasa una superficie de temperatura constante: una isoterma. De todo lo dicho se desprende que el plano tangente a una superficie isoterma es perpendicular al gradiente calculado en el punto de tangencia.

Se recuerda que

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A). \tag{A.6}$$

Esta integral no depende del camino que se escoja para ir de A a B lo que implica que la integral de un gradiente sobre un camino cerrado es nula,

$$\oint \nabla f \cdot d\vec{r} = 0 \tag{A.7}$$

Flujo. Se define el flujo de una función vectorial $\vec{D}(\vec{r})$ a través de una superficie $\mathscr{S}$ como la integral,

$$\Phi = \int_{\mathscr{S}} \vec{D} \cdot d\vec{\mathscr{S}} \tag{A.8}$$

donde $d\vec{\mathscr{S}} = \hat{n}d\mathscr{S}$, y $\hat{n}$ es el vector unitario normal a la superficie y $d\mathscr{S}$ el elemento infinitesimal escalar de superficie. Normalmente la superficie $\mathscr{S}$ es abierta y finita, pero también puede ser una superficie cerrada o bien una superficie abierta infinita. El signo del flujo Φ depende del signo convencional que se escoja para $\hat{n}$. En el caso de las superficies cerradas es estándar tomar $\hat{n}$ apuntando hacia afuera.

A una función vectorial cualquiera, y que conviene que sea llamada *campo vectorial* se la puede representar por *líneas de campo*. Basta con pasar por cada punto del espacio un trazo infinitesimal en la dirección del campo. Así, la línea de campo que pasa por un punto P cualquiera es una curva que pasa por P tal que su tangente, en cualquier otro punto Q de la curva, apunta en la misma dirección que el campo en ese punto. A las líneas se les da el sentido del campo. Suelen llamarse *fuentes* a los puntos del espacio de los que nacen o mueren líneas de campo.

La idea de flujo a través de una superficie está vagamente asociada a la cantidad de líneas que atraviesan la superficie.

Teorema de Gauss. El flujo de una función vectorial $\vec{E}(\vec{r})$ a través de una superficie cerrada $\mathscr{S}$, borde de un volumen $\mathscr{V}$, es igual a la integral de la divergencia $\nabla \cdot \vec{E}$ sobre todo el volumen:

$$\oint_{\partial\mathscr{V}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathscr{S}} = \int_{\mathscr{V}} \nabla \cdot \vec{E}\, d\mathscr{V} \ . \tag{A.9}$$

Se ha usado la notación que expresa que una superficie $\mathscr{S}$ es el borde de un volumen $\mathscr{V}$ escribiendo $\mathscr{S} = \partial\mathscr{V}$.

Del teorema anterior se puede desprender que la divergencia de una función vectorial, calculada en un punto P, es proporcional al límite del flujo de lo que sale menos lo que entra a través de una superficie esférica infinitesimal en torno a P e inversamente proporcional

al volumen. Cabe esperar que la divergencia de un campo vectorial es no nula solo en aquellos puntos que son fuente.
Un corolario inmediato es que si en toda una región del espacio se tiene que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, entonces el flujo de $\vec{B}$ a través de cualquier superficie cerrada contenida en esa región es nulo. En particular esto implica que las líneas de campo no tienen ni comienzo ni fin dentro de esa región, o la atraviesan de un lado a otro, o son líneas cerradas dentro de la región.
Circulación. Se llama circulación del campo vectorial $\vec{E}$ por el camino cerrado Γ a la integral,

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \tag{A.10}$$

El signo de la circulación está ligado al signo con que se escoja recorrer a la curva cerrada Γ.
Teorema de Stokes. La circulación de un campo vectorial $\vec{E}$ por una curva cerrada Γ es igual al flujo del rotor de $\vec{E}$ a través de cualquier superficie diferenciable $\mathscr{S}$ cuyo borde coincida con Γ.

$$\oint_{\partial\mathscr{S}=\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathscr{S}} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{\mathscr{S}} \,. \tag{A.11}$$

Los signos escogidos para recorrer la curva $\Gamma = \partial\mathscr{S}$ y para $d\vec{\mathscr{S}}$ deben ser consistentes con la regla de la mano derecha.
Conclusiones:
a) Si el rotor de un campo vectorial $\vec{F}$ es nulo en toda una región del espacio, entonces

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{A.12}$$

no depende del camino, dentro de la región, que se escoja para ir de A a B.
b) En esas condiciones, además, está garantizada la existencia de una función escalar $U(\vec{r})$ tal que $\vec{F}$ es igual a la divergencia de U. Debe recordase de Mecánica, que U no es única sino que está definida a partir de $\vec{F}(\vec{r})$ salvo por una constante aditiva.

A.2. Los operadores en coordenadas curvilíneas

Gradiente en coordenadas cilíndricas

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\phi}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{A.13}$$

Gradiente en coordenadas esféricas

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{A.14}$$

Divergencia en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{A.15}$$

Divergencia en coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \tag{A.16}$$

Rotor en coordenadas cilíndricas

$$\nabla\times\vec{A} = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{k}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \tag{A.17}$$

Rotor en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} \quad = \quad & \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial \sin\theta A_\phi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) + \frac{\hat{\theta}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\sin\theta\, A_\phi)}{\partial r}\right) \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\end{aligned} \tag{A.18}$$

Laplaciano en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A.19}$$

Laplaciano en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{A.20}$$

A.3. Expresiones útiles

Basta demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\right) = -\frac{x-x'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\right) = -\frac{3(x-x')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^5} \tag{A.21}$$

para demostrar

$$\nabla\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} = 0 \tag{A.22}$$

y también

$$\nabla'\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = -\nabla\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} \tag{A.23}$$

Apéndice B

Condiciones de Borde en Electromagnetismo

Se verá las ecuaciones de borde que deben satisfacer campos $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$ y $\vec{H}$ que satisfacen las ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{D} &= \rho & \text{(B.1)}\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 & \text{(B.2)}\\ \nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{(B.3)}\\ \nabla\times\vec{H} &= \vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial y} & \text{(B.4)} \end{aligned}$$

Las condiciones de borde relacionan los valores de los campos en puntos de la superficie de contacto entre dos medios (una superficie interfacial o *interfaz*) tomando el límite hacia la interfaz desde un medio y desde el otro.
Se aplica la ley de Gauss a un pequeño cilindro de sección A cuyo eje es perpecdicular a la interfaz y cada mitad de su altura h está en cada medio. De (B.1) y (B.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \oint\vec{D}\cdot d\vec{S} &= A\sigma_\ell & \text{(B.5)}\\ \oint\vec{B}\cdot d\vec{S} &= 0 & \text{(B.6)} \end{aligned}$$

donde σ_ℓ es la densidad de carga libre en la interfaz en el lugar donde corta el cilindro. La carga encerrada no cambia si se modifica la altura h del cilindro. El flujo, por lo tanto no depende del tamaño del manto del cilindro sino tan solo de sus dos tapas, las cuales tienen normales $\pm\hat{n}$, entonces en el límite de un cilindro muy pequeño

$$\begin{aligned} (\vec{D}_2-\vec{D}_1)\cdot\hat{n} &= \sigma_\ell \\ (\vec{B}_2-\vec{B}_1)\cdot\hat{n} &= 0 & \text{(B.7)} \end{aligned}$$

Para obtener condiciones de borde asociadas a las ecuaciones de Maxwell con rotor se integra a lo largo de un pequeño rectángulo perpendicular a la interfaz, con dos caras paralelas a la interfaz y que penetra ambos medios, como se muestra en la figura adjunta. El teorema de Stokes relaciona integral con el flujo que pasa por el interior del rectángulo. Con las ecuaciones (B.3) y (B.4) se obtiene

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{\partial \Phi_M}{\partial t} \tag{B.8}$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{r} = I+\frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \tag{B.9}$$

donde I es la corriente de conducción que pasa el ractángulo mientras que Φ_M y Φ_D son los flujos de los campos $\vec{B}$ y $\vec{D}$ a través de esa misma superficie. Estos flujos son proporcionales a la área que encierra el rectángulo.
Al tomar el límite en que este rectángulo se encoje a un punto las contribucines de los términos de los flujos Φ_i se hace cero. de modo que solo contribuye la parte de la integral correspondiente a la parte tangencial a la interfaz y entonces en el límite las condiciones de borde son

$$(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\times n = 0 \tag{B.10}$$

$$(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\times n = \vec{K} \tag{B.11}$$

donde $\vec{K}$ es la densidad de carga de superficie.

Vale la pena considerar en forma separada la condición de borde que emerge de la ecuación de continuidad de la corriente eléctrica,

$$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{B.12}$$

Se integra sobre un pequeño rectángulo tal como se hizo algo más arriba. De la misma manera el lado izquierdo se recude finalmente a la diferencia de las componentes normales de la corriente multiplicada por la sección A del cilindro mientras que el lado derecho arroja en el límite la derivada con respecto a t de la densidad de carga superficial multiplicada por A. De todo esto se obtiene

$$(\vec{J}_2-\vec{J}_1)\cdot\hat{n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{B.13}$$