

Capítulo 5

Equilibrio y oscilaciones

5.1. Energía potencial y equilibrio

5.1.1. Punto de equilibrio

La energía mecánica total de un cuerpo cuya fuerza total es conservativa tiene la forma

$$E_{\text{mec total}} = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) \quad (5.1.1)$$

y esta cantidad es fija durante toda la evolución del sistema, es decir, si se la calcula en cualquier momento de su historia se obtiene el mismo valor. La energía $E_{\text{mec total}}$ queda determinada por las condiciones iniciales.

En general el movimiento no puede extenderse en cualquier dirección arbitrariamente. Al despejar la magnitud de la velocidad:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E_{\text{mec total}} - U(\vec{r})} \quad (5.1.2)$$

que obviamente es real y positiva—se observa que en ningún momento la energía potencial U puede ser mayor que la energía total E . Si la partícula alcanza un punto en el cual se cumple que $E = U$, este es un punto con velocidad nula pero normalmente la fuerza

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \quad (5.1.3)$$

no lo es. El movimiento entonces se reinicia hacia puntos donde $E > U$.

» El gradiente de una función escalar cualquiera $h(\vec{r})$ siempre apunta en la dirección en que la función h crece más rápido, esto es, en la dirección en que su derivada es más grande y positiva. Por ejemplo si $h(x, y)$ es la función altura sobre el nivel del mar de la descripción de una zona de nuestra geografía en un mapa (plano XY), entonces ∇h apunta en la dirección en que la altura crece más rápido.

El gradiente de la función energía potencial apunta en la dirección en que crece la energía potencial con mayor derivada, pero como en (5.1.3) hay un signo menos, se concluye que la fuerza apunta en la dirección opuesta, en la dirección en que U decrece con mayor derivada.

Se llama punto de equilibrio a una posición \vec{r}_e en la cual la fuerza total es cero: $\nabla U(\vec{r}_e) = 0$. Para que el equilibrio sea *estable* se debe cumplir que al colocar en reposo a la partícula en un punto suficientemente cercano a \vec{r}_e , la partícula adquiera un movimiento oscilatorio en torno a ese punto.

5.1.2. Análisis unidimensional

En un caso unidimensional la energía potencial es una simple función $U(x)$ y la fuerza es $F = -dU/dx$. La fuerza apunta hacia la izquierda en los puntos en que U es creciente y apunta hacia la derecha en los puntos donde es decreciente.

En particular, en la vecindad de un mínimo x_e la fuerza que hay a la izquierda de este punto apunta hacia la derecha (también hacia x_e) y la fuerza que hay a la derecha de x_e apunta hacia la izquierda (o sea hacia x_e). Esto permite entender porqué un mínimo de U es un punto de equilibrio.

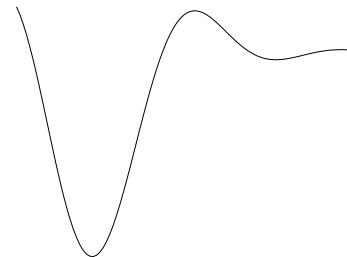


Figura 5.1: La energía potencial en un problema unidimensional puede presentar puntos de interés como mínimos y máximos.

Si una partícula está sometida a una fuerza total conservativa, se llama *punto de equilibrio estable* a un punto \vec{r}_e para el cual se cumple que:

(i) si la partícula es dejada en reposo en ese punto permanece en reposo en él; (ii) si se la deja en \vec{r}_e con una velocidad suficientemente pequeña, la

partícula oscila en torno a ese punto.

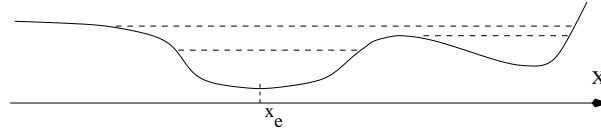


Figura 5.2: Ejemplo de función $U(x)$ con dos mínimos. Las líneas a trazos representan algunos valores posibles de la energía mecánica total. Puesto que (5.1.1) asegura que esta energía es siempre mayor (a lo sumo igual) a U entonces para los valores indicados de E el movimiento no puede extenderse indefinidamente en el eje x .

Como la fuerza total es conservativa, existe una energía potencial $U(x)$ y la fuerza total es $F = -dU/dx$. En las zonas donde U es creciente F es negativo (es decir, la fuerza apunta hacia la izquierda) y en las zonas donde U es decreciente, F es positivo. Esto muestra que si x_e es un mínimo de U la fuerza en una zona en torno a x_e apunta hacia x_e y es nula justo en x_e . Esto quiere decir que si se da como condición inicial $x(0) = x_e$ y una velocidad suficientemente pequeña, entonces la partícula va a ser frenada por la fuerza hasta que invierta el sentido de su movimiento. Debido a (5.1.1), en el punto x_1 en el cual la velocidad se hace cero se cumple que $E = U(x_1)$. En la figura 5.2 se puede ver gráficamente en qué puntos la partícula soltada desde x_e con la energía total indicada por línea de trazos, llega un punto en que su velocidad se hace cero—los *puntos de retorno*—y se devuelve. Para los tres valores de E indicados en la figura 5.2 el movimiento ocurre en una zona limitada del eje X . También se puede adivinar que si la energía es suficientemente alta el movimiento puede ser no acotado.

EJEMPLO: La energía potencial debida a la fuerza peso es mgz . Una pelota ideal rebotando *ad infinitum* contra el suelo puede modelarse con el potencial mgz para $z > z_0$ y con $\frac{k}{2}(z + z_0)^2$ para $z < z_0$ donde $z_0 = mg/(2k)$ representado en la figura 5.3. Dada una energía cinética inicial, la partícula tiene una energía total E fija para siempre y, como se ve en el diagrama, el movimiento es acotado entre un z_{\min} y una altura máxima.

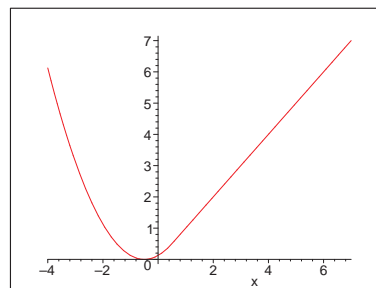


Figura 5.3: La energía potencial asociada a una partícula rebotando en un suelo se modela con $U = mgz$ para $z > z_0$ y con $U = \frac{k}{2}(z + z_0)^2$ para $z < z_0$ donde $z_0 = mg/(2k)$.

OTRO EJEMPLO: Un caso muy ilustrativo es el del péndulo plano formado por una vara rígida sin masa de largo R en cuyo extremo hay una masa puntual m .

La energía cinética como siempre es $K = \frac{1}{2}mv^2$ pero en este caso $v = R\dot{\phi}$. La energía potencial esencialmente es mgh y, como se ve de la figura 5.4, $h = R(1 - \cos\phi)$. El cero de energía potencial se ha escogido en el punto más bajo que tiene el recorrido de la masa m .

De aquí que la ecuación para la energía total conservada sea

$$E_{MT} = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2 + mgR(1 - \cos\phi) \quad (5.1.4)$$

que muestra que la energía potencial en este caso es $mgR(1 - \cos\phi)$ y cuya forma se puede apreciar en la figura 5.5.

Se puede comprobar que derivando (5.1.4) una vez con respecto al tiempo, se obtiene la conocida ecuación para el péndulo.

Y OTRO EJEMPLO MÁS: Consideremos un caso con energía potencial U dado por

$$U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \quad (5.1.5)$$

y x siempre positivo. Esta energía potencial,

representada en la figura 5.6 es divergente en el origen, tiene un único mínimo en $x_e = 2b/a$ y tiende a cero cuando x crece indefinidamente. Para cualquier valor negativo de la energía total el movimiento está acotado entre dos valores x_{\min} y x_{\max} , (puntos de retorno)

$$x_{\min} = \frac{a}{2|E|} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4|E|b}{a^2}} \right), \quad x_{\max} = \frac{a}{2|E|} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4|E|b}{a^2}} \right) \quad (5.1.6)$$

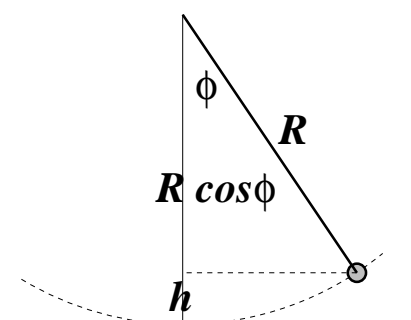


Figura 5.4: Un péndulo simple tiene la energía potencial planteada en (5.1.4).

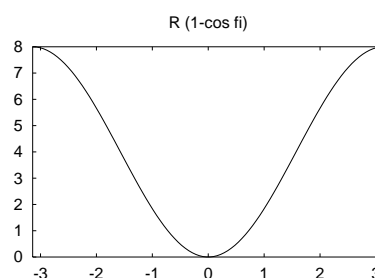


Figura 5.5: La energía potencial asociada al péndulo.

Cuando la partícula alcanza uno de estos valores extremos la velocidad se hace cero pero $dU/dx \neq 0$, es decir, la fuerza es no nula y la partícula tiene una aceleración que apunta alejándose del valor extremo. En una situación así, el movimiento consiste en ir y volver entre estos dos valores extremos de x . El movimiento es periódico pero en general es diferente a un movimiento armónico simple.

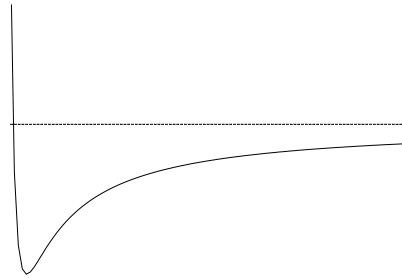


Figura 5.6: La energía potencial $-\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ tiene un solo mínimo, en $x = x_e = 2b/a$, y tiende a cero cuando $x \rightarrow \infty$.

En cambio, para cualquier valor positivo de la energía el movimiento tiene una cota inferior x_{\min} pero no tiene cota superior: una vez que la partícula adquiere velocidad hacia la derecha no cambiará más la dirección de su movimiento.

Si se escoge un punto cualquiera $x = x_0$ como posición inicial, ¿cuál es la mínima velocidad inicial para que la partícula logre tener un movimiento no acotado hacia la derecha? La respuesta se obtiene exigiendo que en el momento inicial (y siempre) la energía sea no negativa, es decir, $\frac{1}{2} m v_0^2 + U(x_0) \geq 0$, es decir,

$$v_0^2 \geq -\frac{2}{m} U(x_0). \tag{5.1.7}$$

En las zona en que $U(x_0)$ es positivo esta relación no es restricción alguna y la partícula escapa a infinito siempre; en cambio en la gran zona en que $U(x_0)$ es negativo (5.1.7) da una cota a la rapidez inicial. Esta cota inferior se denomina *velocidad de escape*. ◀

» Completamente en general la *velocidad de escape*—que depende de la posición inicial \vec{r}_0 —es la velocidad mínima necesaria para que la partícula pueda tener movimiento no acotado.

Para una función de energía potencial arbitraria $U(x)$ que tiende a un valor constante U_∞ cuando $x \rightarrow \infty$ la velocidad de escape en un punto x cualquiera está dada por

$$v_{\text{esc}}(x) = \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{U_\infty - U(x)}} \tag{5.1.8}$$

♣ *Determine el valor en metros por segundo de la velocidad para escapar de la atracción gravitacional de la Tierra partiendo desde el nivel del mar.*

5.1.2.1. Integración de caso conservativo unidimensional

La ecuación (5.1.2) unidimensional en un rango en que la velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

puede ser llevada a la forma integral

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (5.1.9)$$

válida, como se ha dicho, mientras la velocidad no cambie de signo. Esta es una solución formal de todos los problemas unidimensionales.

5.1.2.2. Caso sencillo en que la energía no se conserva

En lo anterior se ha explotado el análisis en el que las fuerzas son todas conservativas. Sin embargo si se toma el caso en que se agrega una fuerza constante no conservativa como es el caso del roce dinámico, también se tiene un gráfico de energía suficientemente sencillo para poder hacer un análisis fácil de interpretar.

Considérese el caso de un oscilador sobre un plano horizontal: $m\ddot{x} = -kx$ al que se agrega la fuerza de roce dinámico. Este roce apunta hacia la izquierda cuando el movimiento es hacia la derecha ($\dot{x} > 0$) y viceversa, es decir, $F_{\text{roce}} = -\varepsilon \mu mg$ donde ε es el signo de \dot{x} . Mientras el desplazamiento es hacia la derecha, la fuerza es negativa y el trabajo que esta fuerza no conservativa efectúa es proporcional a x . En efecto, de la ecuación de movimiento completa: $m\ddot{x} = -kx - \varepsilon \mu mg$ se puede integrar una vez para obtener

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -\frac{k}{2}x^2 - \varepsilon \mu mgx$$

que se puede escribir como

$$E_{MT}(t) = E_{MT}^{(0)} - \varepsilon \mu mgx(t)$$

Esta última relación describe la forma como la energía mecánica total inicial $E_{MT}^{(0)}$ va disminuyendo a medida que el sistema evoluciona.

♣ *Resuelva un caso específico para el cual pueda hacer un gráfico que ilustre la evolución $E_{MT}(t)$.*

5.1.3. Discusión avanzada: Tiempos de frenado en puntos de retorno

Estas notas no son necesarias para la comprensión de los capítulos posteriores, pero pueden aportar a la comprensión de ciertos temas avanzados de este capítulo.

Cuando se analiza la dinámica de una partícula usando diagramas de energía en casos unidimensionales o en tres dimensiones con conservación de momentum angular, surge el concepto de *punto de retorno*. Si la partícula tiene una energía constante E , los puntos de retorno son aquellos donde la energía potencial (o la energía potencial efectiva) se iguala a la energía $U(x^*) = E$. Al acercarse a un punto de retorno, la rapidez de la partícula se hace cada vez más pequeña hasta anularse en x^* . Una pregunta que surge es cuánto tiempo tarda la partícula en frenarse para luego rebotar y si ese tiempo es finito o infinito. La respuesta depende de las propiedades del punto de retorno.

5.1.3.1. Primer caso: El punto de retorno no corresponde a un máximo de la energía potencial

Se considera el caso representado en la figura 5.7, donde la partícula viaja hacia la derecha. Si x_0 es la posición inicial de la partícula, se puede determinar el tiempo que tarda en llegar a x^* utilizando la ecuación de la energía, donde se despeja la velocidad

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

que también se puede escribir como

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \frac{dx}{dt} = 1$$

Integrando la última expresión entre $t = 0$ y t^* , el instante de detención, y usando el teorema del cambio de variable, se tiene

$$\int_{x_0}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = t^*$$

Para calcular esta última integral se necesita conocer la forma explícita de la energía potencial. Sin embargo, es posible decir si es finita o no. Como x^* no corresponde a un máximo de la energía potencial, localmente $U(x)$ se puede aproximar por una línea recta $U(x) \approx E + U'(x^*)(x - x^*)$. Luego, si se consi-

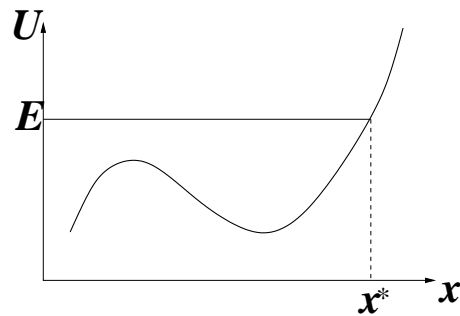


Figura 5.7: Cuando la posición de la partícula alcanza un punto en el cual la energía total coincide con la energía potencial, se tiene un punto x^* de retorno.

dera una distancia δ pequeña, se tiene que

$$t^* = \int_{x_0}^{x^*-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}} + \int_{x^*-\delta}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[-U'(x^*)(x-x^*)]}}$$

Haciendo el cambio de variable $y = x^* - x$ en la segunda integral se obtiene

$$\begin{aligned} t^* &= \int_{x_0}^{x^*-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}} + \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}U'(x^*)y}} dy \\ &= \int_{x_0}^{x^*-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}} + \sqrt{\frac{2m\delta}{U'(x^*)}}, \end{aligned}$$

que es un valor finito.

Luego, en el caso analizado, el tiempo que tarda la partícula en frenarse es finito.

5.1.3.2. Segundo caso: El punto de retorno es un máximo de la energía potencial

Al igual que en el caso anterior, hacemos una aproximación para la energía potencial cerca del punto de retorno. Como es un máximo, la aproximación correspondiente (serie de Taylor) da una parábola: $U(x) \approx E + U''(x^*)(x-x^*)^2/2$, con $U''(x^*) < 0$. De esta forma se tiene

$$\begin{aligned} t^* &= \int_{x_0}^{x^*-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}} + \int_{x^*-\delta}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[-U''(x^*)(x-x^*)^2/2]}} \\ &= \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}} + \sqrt{\frac{m}{-U''(x^*)}} \int_0^\delta \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

La última integral diverge, lo que muestra que en esta condición la partícula tarda un tiempo infinitamente grande en detenerse completamente.

Un ejemplo de esta última situación corresponde a un péndulo (barra rígida y masa en el extremo) que es soltado desde el reposo, con la partícula en la altura máxima. Demuestre que la partícula tarda un tiempo infinito en volver a la posición vertical. También tarda un tiempo infinito en despegarse de la cúspide.

5.2. Pequeñas oscilaciones en torno a un punto de equilibrio.

5.2.1. Oscilaciones 1D.

Consideremos el caso de una energía potencial $U(x)$ que tiene un mínimo en $x = x_e$. No tendrá importancia si U tiene además otros mínimos. Puesto que se trata de un mínimo, está garantizado que $(dU/dx)_{x=x_e} = 0$. Supondremos que el movimiento tiene una energía total levemente superior a $U(x_e)$, es decir, la energía cinética es siempre muy pequeña y la partícula permanece todo el tiempo muy cerca de $x = x_e$. El punto x_e tiene a ambos lados puntos de retorno muy cercanos. En tal caso, la expansión de $U(x)$ en torno a x_e que solo llega hasta la segunda derivada de la función puede ser una excelente aproximación para U ,

$$U(x) \approx U(x_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=x_e} (x - x_e)^2 \quad (5.2.1)$$

Esta energía potencial aproximada da como fuerza aproximada

$$F(x) = -k(x - x_e) \quad \text{con} \quad k = \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=x_e} \quad (5.2.2)$$

que es la fuerza de un resorte de largo natural x_e y constante elástica dada por la segunda derivada de U evaluada en el mínimo.

Se ha obtenido que un sistema mecánico cualquiera, cuando está cerca de una posición de equilibrio puede ser descrito como el movimiento de una masa unida a un resorte ideal. Esta aproximación es válida cuando el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio es pequeño. El estudio en detalle del movimiento de una partícula unida a un resorte describe, entonces, el movimiento de cualquier sistema mecánico cerca del equilibrio.

La ecuación de movimiento de la partícula cerca del punto de equilibrio es entonces

$$m\ddot{x} = -k[x - x_e], \quad \text{donde } x = x(t) \quad (5.2.3)$$

ecuación que fue estudiada en el capítulo 3, donde se obtuvo que el movimiento que resulta es una oscilación armónica en torno a x_e con una frecuencia característica dada por $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Luego, cuando una partícula se mueve en las cercanías de un punto de equilibrio, la fuerza puede ser aproximada por un resorte ideal y el movimiento que resulta es armónico simple. La frecuencia angular de oscilación en torno al punto de equilibrio estable está dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_e)}{m}} \quad (5.2.4)$$

que se llama la frecuencia de las pequeñas oscilaciones. Hay que notar que como x_e es un mínimo de la energía potencial (equilibrio estable), la segunda derivada es positiva de U , lo que garantiza que la raíz existe.

En algunas situaciones la derivada U'' en el punto de equilibrio es nula, resultando en oscilaciones no armónicas; por ejemplo, en el movimiento en torno al origen en el caso $U = ax^4$. Este caso, sin embargo, no se estudiará en este curso.

» Cuando una partícula se mueve muy cerca del punto en que U tiene un mínimo, $U = U_{\min}$, y la energía total es levemente superior a este valor U_{\min} , el movimiento de la partícula es aproximadamente un movimiento armónico simple en torno al punto de equilibrio.

El movimiento oscilatorio que ocurre en estas circunstancias se denomina *pequeñas oscilaciones* en torno a un punto de equilibrio.

5.2.1.1. Cuando la coordenada relevante no es una longitud

Si la energía de un sistema se expresa en términos de una coordenada que no es una longitud, como en,

$$E = \frac{\alpha}{2} \dot{\phi}^2 + U(\phi) \quad (5.2.5)$$

la ecuación dinámica, $dE/dt = 0$, aquí resulta ser $\ddot{\phi} = -\frac{1}{\alpha}U'$. Si $\phi = \phi_e$ es un punto de equilibrio estable, se cumple que $U'(\phi_e) = 0$ y $U''(\phi_e) > 0$ (condición de mínimo). La ecuación dinámica en una pequeña vecindad del mínimo en ϕ_e aproximadamente es $\ddot{\phi} \approx -\frac{1}{\alpha}U''(\phi_e)(\phi - \phi_e)$, que se reconoce como una ecuación de movimiento armónico simple con frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(\phi_e)}{\alpha}} \quad (5.2.6)$$

En este caso la prima indica $d/d\phi$.

5.2.1.2. Ejemplo de energía y pequeñas oscilaciones

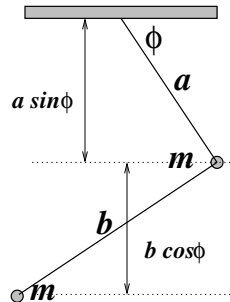


Figura 5.8: Dos partículas de masa m unidas por varas ideales (masa despreciable) de largos a y b y que forman un ángulo recto.

Para ilustrar varios de los conceptos recientes se analizará el caso de un péndulo que tiene dos masas en varas que forman un ángulo recto, como muestra la figura 5.8. Veremos cuál es el ángulo máximo si el sistema se suelta del reposo con $\phi = 0$. Veremos cuánto vale la velocidad angular cuando $\phi = \pi/2$ y finalmente veremos la frecuencia en el caso de pequeñas oscilaciones en torno al ángulo ϕ_e de equilibrio estático.

La energía del sistema es la suma K de las energías cinéticas más la suma U de las energías potenciales:

$$E = \frac{m}{2} (a\dot{\phi})^2 + \frac{m}{2} (\sqrt{a^2 + b^2}\dot{\phi})^2 - mga \sin \phi - mg(a \sin \phi + b \cos \phi)$$

- Si se suelta desde el reposo (esto es, $\dot{\phi} = 0$) con $\phi = 0$ la energía inicial es

$$E_{\text{ini}} = -mgb$$

y este es el valor que tendrá durante todo el movimiento.

El ángulo máximo lo alcanza en otro punto en el cual $\dot{\phi} = 0$. Se debe exigir que la energía es ese momento sea

$$-mg(2a \sin \phi + b \cos \phi) = -mgb$$

que tiene dos soluciones, una es la condición inicial $\phi = 0$ y la otra es para el máximo valor posible ϕ_M para el ángulo

$$\sin \phi_M = \frac{4ab}{4a^2 + b^2}$$

Para saber la velocidad angular cuando $\phi = \pi/2$ se vuelve a aplicar conservación de energía:

$$\frac{m}{2} (2a^2 + b^2) \dot{\phi}^2 - mg2a = -mgb$$

que implica

$$\dot{\phi}(\phi = \frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{2g(2a-b)}{2a^2+b^2}}$$

Este resultado no tiene sentido salvo cuando $2a \geq b$. Esto se debe a que si tal desigualdad no se obedece el péndulo nunca llega a $\phi = \pi/2$ a partir de la condición inicial escogida.

• Veamos ahora cuánto vale la energía si el sistema está en equilibrio estable. En tal situación $\dot{\phi} = 0$ y el sistema está en un mínimo de energía potencial. La derivada de la energía potencial con respecto a ϕ es

$$U' = -mg(2a \cos \phi - b \sin \phi)$$

que se anula cuando

$$\tan \phi_e = \frac{2a}{b}$$

y se comprueba que para este valor del ángulo la energía potencial, que es la energía total en el caso estático, vale

$$E_{\min} = -mg\sqrt{4a^2 + b^2}$$

Con lo visto en (5.2.6) resulta muy fácil determinar que en el presente ejemplo la frecuencia al cuadrado es

$$\omega^2 = \frac{g\sqrt{4a^2 + b^2}}{2a^2 + b^2}$$

5.2.2. Otra vez el péndulo simple

Ya se obtuvo en (2.3.13) que la ecuación del péndulo simple, como en la figura 5.9, es

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R} \sin \phi \quad (5.2.7)$$

Si esta ecuación se multiplica por $\dot{\phi}$, ambos lados de la ecuación son derivadas perfectas y se puede integrar desde un tiempo

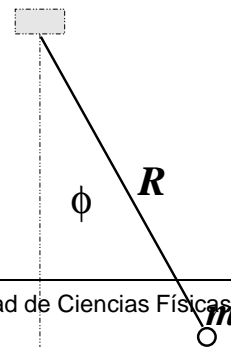


Figura 5.9: Péndulo simple.

inicial $t = 0$ hasta t arbitrario. Si se escoge $\phi(0) = \phi_0, \dot{\phi}(0) = 0$ se obtiene

$$\dot{\phi}^2(t) = \frac{2g}{R} (\cos \phi(t) - \cos \phi_0) \quad (5.2.8)$$

Se ha obtenido la velocidad angular $\dot{\phi}$ como función del ángulo ϕ . El péndulo comienza desde el reposo con amplitud $\phi = \phi_0$ y se mueve disminuyendo ϕ , pasando por el punto más bajo que corresponde a $\phi = 0$ y luego llega a $\phi = -\phi_0$. En ese recorrido se cumple la mitad del período T .

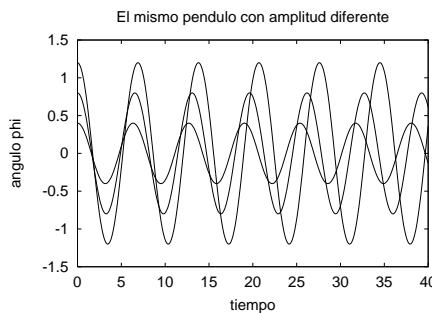


Figura 5.10: El péndulo tiene período diferente para diferentes amplitudes. La figura da $\phi(t)$ del mismo péndulo lanzado tres veces con velocidad inicial nula desde ángulos iniciales $\phi(0) = \phi_0$ diferentes.

En ese lapso $\frac{T}{2}$ la velocidad angular $\dot{\phi}$ es negativa por lo que se debe escribir

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2g}{R} (\cos \phi - \cos \phi_0)} \quad \text{con } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (5.2.9)$$

Para obtener la dependencia de ϕ en t es necesario integrar una vez más. Se integra desde $t = 0$ hasta un valor t menor a $\frac{T}{2}$ en el que ϕ toma el valor $\phi(t)$

$$\int_{\phi(t)}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{R}} t$$

La integral al lado izquierdo pertenece a una clase de integrales llamadas *elípticas* y el resultado no puede expresarse en términos de funciones elementales.

Si en la expresión anterior se escoge $t = \frac{T}{2}$, la integral angular es desde $-\phi_0$ hasta ϕ_0 y se tiene una relación entre el período T y la amplitud de la oscilación.

En la figura 5.10 se muestra gráficamente el resultado de integrar numéricamente la ecuación del péndulo en tres casos que tienen el mismo valor para $\sqrt{\frac{g}{R}}$, y que parten del reposo. Difieren en el valor de $\phi(0)$.

* * *

En general $\sin \phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 \pm \dots$, pero si el péndulo tiene oscilaciones de amplitud pequeña, el lado derecho de (5.2.7) puede aproximarse por $\sin \phi \approx \phi$ y la ecuación aproximada de movimiento es

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R}\phi \quad (5.2.10)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$. La solución de esta ecuación entonces es muy fácil de escribir.

5.2.3. Equilibrio y pequeñas oscilaciones en 2D

5.2.3.1. Generalidades

En dos o tres dimensiones la situación es más compleja que en una dimensión pues hay más casos posibles. En la figura 5.11 se representa una energía potencial $U(x,y)$ que tiene dos mínimos, es decir, dos puntos de equilibrio estable, un mínimo más profundo que el otro. Si esta superficie se cortara por un plano horizontal a alguna altura E se tendría la zona en la cual el movimiento puede darse ($E \geq U$). En la base de esta figura se puede ver las curvas de nivel las cuales representan precisamente curvas $U = \text{constante}$. Considérese, por ejemplo, la curva cerrada en torno al mínimo izquierdo que aparece en la base de la figura. Ella corresponde a un cierto valor $U = E_0$. La zona interior a esa curva cumple con $E_0 \geq$

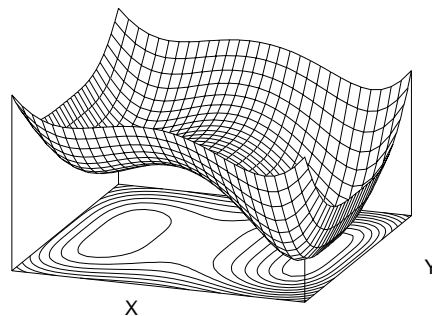


Figura 5.11: Ejemplo de la forma de una energía potencial $U(x,y)$ con dos puntos de equilibrio estable.

$U(\vec{r})$. Es decir, si la partícula tiene energía total E_0 y su posición inicial fue dada dentro de esta zona, el movimiento será todo el tiempo dentro de esta zona.

Hay otro punto interesante de esta energía potencial: es un punto entre los dos mínimos y él es un máximo en la dirección X y un mínimo en la dirección Y . A tales puntos se les llama *punto silla* y son puntos de equilibrio inestables.

No veremos en general la forma del movimiento armónico simple en el caso de una energía potencial $U(x,y)$ y tan solo se dice a modo de complementación cultural que es necesario considerar la matriz de valores $M_{ab} = \partial^2 U / \partial x_a \partial x_b$, se debe diagonalizar y estudiar sus autovalores.

Sin embargo, un caso simple ocurre en el movimiento en dos o tres dimensiones de una partícula unida a un resorte ideal. En este caso, la energía potencial tiene un sólo mínimo que es igual en todas las direcciones. Se tiene, entonces el oscilador armónico tridimensional.

La ecuación para un oscilador armónico tridimensional de largo natural nulo ubicado en el origen es

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -k\vec{r}(t) \quad (5.2.11)$$

Se trata de un problema con fuerza central, por tanto, como el momento angular respecto al centro de fuerza se conserva, el movimiento es plano, como se discutió en la sección 2.5. Todo el movimiento, entonces, ocurre en un plano, el que queda determinado por las condiciones iniciales. Conviene escoger al plano XY coincidiendo con el plano del movimiento. En tal caso la ecuación anterior se separa en dos ecuaciones independientes,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -kx(t) \\ m\ddot{y}(t) &= -ky(t) \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Cada una de estas dos ecuaciones tiene solución del tipo (3.2.6) con constantes determinadas por las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \sin(\omega_0 t) + B_1 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) &= A_2 \sin(\omega_0 t) + B_2 \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Si se da una posición inicial $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ y una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$, entonces se tiene cuatro condiciones para determinar a las cuatro constantes $A_1 \dots B_2$.

♠ Demuestre que (5.2.13) implica que la trayectoria en el plano XY es siempre una elipse con centro en el origen.

5.2.3.2. Un sistema oscilante doble y simétrico

Normalmente una ecuación con resorte se escribe en la forma $\ddot{x} = -\omega^2(x - d)$ donde d es el largo natural del resorte. Pero esta expresión se refiere al caso en que el origen coincide con el extremo fijo del resorte. Sin embargo si el origen se desplaza, la ecuación queda $\ddot{x} = -\omega^2(x - A)$ y A sencillamente es la posición de equilibrio estable de la partícula.

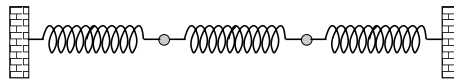


Figura 5.12: Dos masas unidas por un resorte y unidas a sendos resortes unidos a paredes laterales fijas

A continuación se verá el caso de dos partículas que están unidas como lo muestra la figura 5.12: hay un resorte entre ellas y además resortes a cada lado unidos a una partícula y una pared.

Se verá el caso simétrico: las dos masas son iguales y los dos resortes laterales son iguales. Si se toma el origen al centro, se denomina las posiciones de las partículas x_1 y x_2 y la frecuencia angular asociada a los resortes laterales es ω_0 y la del resorte central es ω_1 , entonces las ecuaciones son

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2(x_1 + L) + \omega_1^2(x_2 - x_1 - d) \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2(x_2 - L) - \omega_1^2(x_2 - x_1 - d) \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Si el resorte central desaparece ($\omega_1 = 0$), las ecuaciones son independientes y señalan que el valor de equilibrio de x_1 es $x_1 = -L$ y el de otro es $x_2 = L$ y cada una de ellas oscila con frecuencia angular ω_0 respecto a su posición de equilibrio.

Si los resortes laterales desaparecen ($\omega_0 = 0$), la diferencia de las dos ecuaciones da una ecuación para $x \equiv x_2 - x_1$ de la forma $\ddot{x} = -2\omega_1^2(x - d)$,

que indica que la configuración de equilibrio corresponde a que las partículas estén a distancia d y las oscilaciones en torno a esa distancia sea $\sqrt{2}\omega$. El factor $\sqrt{2}$ se origina en que la masa reducida del sistema doble sea $\mu = m/2$ y por tanto $\omega^2 = k_1/\mu = 2k_1/m$, esto es, $\omega = \sqrt{2}\omega_1$.

Para tratar en forma más limpia el problema planteado en (5.2.14) conviene desplazar las variables de modo que el sistema sea homogéneo. Un poco de álgebra muestra que conviene usar

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 - \frac{d\omega_1^2 + L\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\omega_1^2} \\ \dot{x}_2 &= y_2 + \frac{d\omega_1^2 + L\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}\end{aligned}\quad (5.2.15)$$

con lo que el sistema toma la forma

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{M} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\quad (5.2.16)$$

(nótese el signo menos), con

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_1^2 & -\omega_1^2 \\ -\omega_1^2 & \omega_0^2 + \omega_1^2 \end{pmatrix}\quad (5.2.17)$$

El primer vector propio es $\vec{e}_s = (1, 1)$ con autovalor

$$\omega_s^2 = \omega_0^2$$

y el segundo autovector es $\vec{e}_a = (1, -1)$ con autovalor

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 + 2\omega_1^2$$

Las letras s y a se refieren a las palabras *simétrica* y *antisimétrica*. En el primer caso las dos partículas se mueven en fase a la izquierda y derecha mientras que en el segundo se mueven siempre con velocidades de igual valor pero de signo opuesto (contrafase).

La solución general tiene la forma

$$\vec{y}(t) = (c_1 \sin \omega_s t + c_2 \cos \omega_s t) \vec{e}_s + (c_3 \sin \omega_a t + c_4 \cos \omega_a t) \vec{e}_a\quad (5.2.18)$$

donde, como ya se dijo,

$$\vec{e}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\quad (5.2.19)$$

5.2.3.3. Otro caso de doble oscilador

Un sistema de dos osciladores acoplados reducido a su mínima expresión usa partículas de igual masa, resortes de largo natural nulo y no se pone peso. Ver la figura que sigue. Las ecuaciones son

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= -\omega_2^2 (x_2 - x_1)\end{aligned}\quad (5.2.20)$$

Se puede usar una notación vectorial/matricial

$$\ddot{\vec{x}} = -\mathbf{M}\vec{x}$$

donde $\vec{x} = (x_1, x_2)$ y

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de \mathbf{M} son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \omega_2^2 + \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_2^4 + \omega_1^4} \\ \lambda_2 &= \omega_2^2 + \frac{\omega_1^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_2^4 + \omega_1^4}\end{aligned}$$

y los respectivos autovectores son

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_2^4 + \omega_1^4} \\ \omega_2^2 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} +\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_2^4 + \omega_1^4} \\ \omega_2^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Si se toma resortes iguales: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ la solución se ve un poco menos fea:

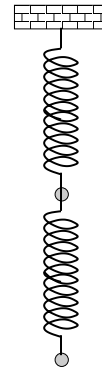
$$\lambda_{1,2} = \left(3 \pm \sqrt{5}\right) \frac{\omega^2}{2}$$

y los respectivos autovectores son

$$\vec{e}_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (1 \mp \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} \omega^2$$

Este ejemplo se puede extender agregándole largo natural a los resortes y la fuerza peso. En tal caso hay que hacer algo parecido a lo hecho en (5.2.15) (trasladar las variables de posición) para volver ecuaciones como las de (5.2.20).

La solución, como se ha visto, es un tanto fea.



5.2.3.4. Visión general del oscilador doble

Una vez que se hace el traslado de las dos variables dinámicas la ecuación toma la forma

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{M} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

donde la matriz \mathbf{M} es constante (no depende ni de las coordenadas ni del tiempo). Si se resuelve el problema de los dos valores y los dos vectores propios de la matriz \mathbf{M} de 2×2 ,

$$(\lambda_A, \vec{e}_A), \quad (\lambda_B, \vec{e}_B)$$

se puede escribir la solución general en la forma

$$\vec{y}(t) = \sum_{j=A,B} y_j(t) \vec{e}_j \quad (5.2.21)$$

La dependencia temporal está solamente en las funciones escalares $y_j(t)$ y los vectores \vec{e}_A y \vec{e}_B son independientes (uno no es proporsional al otro).

Reemplazando (5.2.21) en la ecuación inicial haciendo uso que los \vec{e}_j son autovectores de \mathbf{M} , se obtiene que

$$\sum_{j=A,B} \ddot{y}_j(t) \vec{e}_j = - \sum_{j=A,B} y_j(t) \lambda_j \vec{e}_j$$

y, puesto que los \vec{e}_j son linealmente independientes, se tiene que cumplir que $\ddot{y}_A(t) = -\lambda_A y_A(t)$ y que $\ddot{y}_B(t) = -\lambda_B y_B(t)$ que son ecuaciones que se sabe resolver y cuya solución general es

$$y_j(t) = \alpha_j \sin \sqrt{\lambda_j} t + \beta_j \cos \sqrt{\lambda_j} t \quad \text{con } j = A, B$$

Finalmente, entonces, la solución del problema es

$$\vec{y}(t) = \sum_{j=A,B} \left(\alpha_j \sin \sqrt{\lambda_j} t + \beta_j \cos \sqrt{\lambda_j} t \right) \vec{e}_j \quad (5.2.22)$$

que tiene la misma estructura que (5.2.18) con cuatro constantes arbitrarias que fijan las cuatro condiciones iniciales.

5.3. Oscilador forzado

5.3.1. La ecuación del oscilador forzado

En variadas ocasiones una partícula que se encuentra cerca de un punto de equilibrio estable es forzada externamente. El movimiento que resulta es en general complejo, dependiendo del tipo de fuerza externa que actúa y de la amplitud de ésta. Si la amplitud de la fuerza no es muy grande, entonces la partícula se alejará poco del punto de equilibrio estable, pudiéndose aplicar el formalismo de pequeñas oscilaciones. La fuerza externa puede ser de muchos tipos, pero un caso particularmente interesante corresponde al caso en que ésta depende explícitamente del tiempo. Un ejemplo cotidiano se da con un temblor que hace vibrar a los edificios en torno a su posición de equilibrio.

Consideremos una partícula de masa m en una dimensión que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa que viene de una energía potencial U el cual tiene un punto de equilibrio estable en x_e , más una fuerza que depende del tiempo pero no de la posición $F_e(t)$. Cerca del punto de equilibrio estable, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} = -k(x - x_e) + F_e(t)$$

donde

$$k = \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=x_e}$$

Como el movimiento natural (sin forzamiento) de la partícula es armónico, resulta natural estudiar el caso en que la fuerza externa también es armónica (sinusoidal). Diremos que la fuerza externa se puede escribir como $F_e(t) = kQ \sin(\omega t)$, donde Q mide la amplitud de la fuerza y ω es la frecuencia angular de la misma, que no necesariamente coincide con la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones.

La ecuación de movimiento que resulta es

$$m\ddot{x} = -k [x(t) - Q \sin(\omega t)] \quad (5.3.1)$$

donde por simplicidad se puso $x_e = 0$. Si $x_e \neq 0$, entonces basta con hacer el cambio de variables $y(t) = x(t) - x_e$ y se obtiene la misma ecuación.

5.3.2. Solución, resonancia y batido

Este tipo de ecuación lineal inhomogénea tiene la siguiente propiedad. Si dos funciones $\bar{x}(t)$ y $x(t)$ la satisfacen, entonces su diferencia,

$$y(t) \equiv x(t) - \bar{x}(t) \quad (5.3.2)$$

satisface la correspondiente ecuación homogénea

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) \quad (5.3.3)$$

cuya solución, como ya sabemos, es de la forma $y(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$.

A continuación se verá que existe una solución de (5.3.1), que se denominará $\bar{x}(t)$, que tiene la forma

$$\bar{x}(t) = D \sin \omega t \quad (5.3.4)$$

siempre y cuando D tenga un valor muy preciso. Puesto que $\ddot{\bar{x}} = -\omega^2 D \sin \omega t$, entonces al exigir que se satisfaga (5.3.1) se deduce que

$$D = \frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5.3.5)$$

y la solución $x(t)$ general es $x = y + \bar{x}$,

$$x(t) = \frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (5.3.6)$$

El primer término de la solución tiene frecuencia angular ω asociada a la *forzante* y tiene coeficiente fijo, mientras que el resto tiene la frecuencia ω_0 asociada al sistema masa-resorte (m, k). Se tiene una *resonancia* cuando la frecuencia ω es muy cercana a la frecuencia ω_0 .

La superposición de dos dependencias temporales con distinta frecuencia puede producir el fenómeno de *batido* que se ilustra en la figura 5.13: las funciones se suman y restan sucesivamente, produciendo una función con una envolvente de período mucho más largo que las funciones que lo componen.

Esta solución tiene una propiedad muy especial. El punto oscilante puede llegar a alejarse bastante de su posición de reposo debido al primer término en (5.3.6). Si se comienza a variar lentamente la frecuencia angular ω de

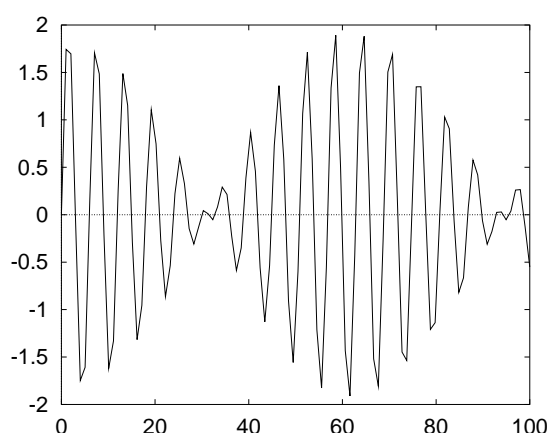


Figura 5.13: Un oscilador de frecuencia natural ω_0 forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω cercana a la frecuencia ω_0 muestra un comportamiento temporal en paquetes como se aprecia en la figura. Si dos cuerdas de guitarra se afinan a notas muy cercanas el sonido que resulta al tocarlas simultáneamente tiene esta propiedad que se llama de batido, claramente audible. Esta es una propiedad de la solución (5.3.6).

la forzante acercando ω a ω_0 , el coeficiente $\frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2}$ crece indefinidamente, permitiendo que la amplitud de las oscilaciones también crezca sin límite. La amplitud $\frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2}$ del término resonante cambia de signo cuando se pasa de $\omega < \omega_0$ a $\omega > \omega_0$.

En un sistema real este proceso tiene un límite porque, si bien para pequeñas oscilaciones (amplitud pequeña) un sistema puede comportarse como aquel que hemos estado describiendo, para amplitudes más grandes la ley de fuerza se hace notoriamente diferente y el sistema deja de comportarse en forma puramente elástica.

En particular, si a la solución (5.3.6) se le impone las condiciones genéricas: $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, las constantes A y B se determinan y toman la forma

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\omega_0^2 (v_0 - Q\omega) - \omega^2 v_0}{\omega_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega_0 t + Q \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

Si se toma el límite $\omega \rightarrow \omega_0$ se obtiene

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{Q}{2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t) \quad (5.3.7)$$

que es idéntica a la solución que se obtiene de resolver la ecuación inicial reemplazando primero ω por ω_0 . La solución (5.3.7) muestra en detalle la forma como la solución es a la larga dominada por el término $(Q/2) \omega_0 t \cos \omega_0 t$ que diverge en el tiempo.

El movimiento descrito por (5.3.6) es una primera forma de ver un fenómeno de enorme importancia práctica llamado *resonancia*. Cuando la frecuencia de una forzante ω coincide (o es muy parecida) a la frecuencia natural ω_0 del sistema, se produce una *resonancia*. Desde el punto de vista meramente matemático (5.3.6) es divergente si $\omega \rightarrow \omega_0$. En la práctica, como se discutirá más adelante, el sistema oscila mucho más fuertemente.

5.3.3. Ejemplos en la práctica

Este fenómeno se puede ver en numerosos ejemplos de la vida cotidiana.

- Cuando el ruido de un motor acelerando llega a una ventana, el vidrio suele, en un determinado momento, vibrar fuertemente. Esto se debe a que el panel de vidrio de esa ventana tiene una frecuencia natural de vibración y el ruido que llega a través del aire (ondas de compresión) actúa como forzante. La frecuencia del motor va variando, porque está acelerando, y en algún momento coincide con la frecuencia del panel.
- El movimiento de cabeceo de un barco tiene una frecuencia natural de oscilación. Si el barco se ve enfrentado a un oleaje suave que tiene la misma frecuencia, puede llegar a cabecear tan fuerte que podría hundirse. Hundimiento en día claro y tranquilo.
- Por lo compleja que es la estructura de un edificio, estos tienen varias frecuencias naturales de vibración. Si ocurriera que la frecuencia de un temblor coincide con alguna de las frecuencias naturales del edificio este se puede llegar a romper. Técnicas actuales permiten que esto no ocurra.
- En un camino irregular no muy duro las ruedas de los automóviles rebotan y luego golpean fuertemente al camino. La repetición de este proceso termina haciendo una superficie ondulada bastante regular que se conoce como *calamina*. Los vehículos que transitan sobre un

camino calaminado pueden entrar en resonancia y deben cambiar de velocidad para evitarlo.

5.3.4. Un ejemplo sencillo

Un ejemplo mecánico simple que presenta forzamiento ocurre cuando se considera el caso de un resorte unidimensional de largo natural nulo y en ausencia de gravedad, cuyo extremo A extremo oscila en torno al origen: $x_A(t) = Q \sin(\omega t)$ con frecuencia angular ω , en general, distinta a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

El resultado efectivo es que aparece un nuevo término de fuerza en la ecuación de movimiento, y es una fuerza oscilante que llamaremos *forzante*.

La ecuación de movimiento es $m\ddot{x} = -k(x(t) - x_A(t))$. Al reemplazar el movimiento del extremo se obtiene

$$m\ddot{x} = -k(x(t) - Q \sin(\omega t))$$

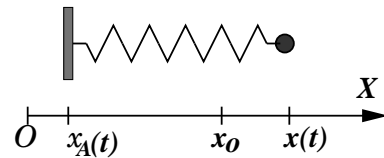


Figura 5.14: El punto A se mueve oscilando en torno al origen: $x_A = Q \sin(\omega t)$.

que es la ecuación ya vista del oscilador armónico forzado.

5.4. Oscilador amortiguado

Como se vio en las secciones anteriores, cualquier partícula cerca de un punto de equilibrio estable presenta oscilaciones armónicas con una frecuencia bien característica. En muchas ocasiones, además de las fuerzas conservativas que dan lugar a la energía potencial que presenta el punto de equilibrio estable, hay roce viscoso. Como sabemos, el roce viscoso tiende a frenar a las partículas y por lo tanto a disminuirles su energía. Si una partícula comienza su movimiento cerca de un punto de equilibrio estable x_e y además hay roce viscoso, parece natural esperar que haya oscilaciones en torno a x_e y al mismo tiempo que disminuya su energía, manteniéndose siempre cerca del punto de equilibrio. La situación real es más compleja pudiendo no haber oscilaciones del todo, pero como se verá, la partícula se mantiene cerca del punto de equilibrio.

De esta forma, la ecuación de movimiento que describe a una partícula cerca de un punto de equilibrio estable en presencia de roce viscoso es

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) \quad (5.4.1)$$

o equivalentemente

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (5.4.2)$$

donde

$$k = \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=x_e=0}$$

y se ha escogido el origen en la posición de equilibrio ($x_e = 0$). Nuevamente, si no fuese así, un cambio de variable permite obtener la ecuación anterior.

Para resolver este tipo de ecuaciones primero se plantea la ecuación algebraica $z^2 + \frac{c}{m}z + \omega_0^2$, cuyas raíces son $-\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$, que pueden ser complejas. En efecto, la naturaleza de las soluciones de (5.4.2) depende del signo de

$$\Delta = \left(\frac{c}{2m} \right)^2 - \omega_0^2 \quad (5.4.3)$$

Caso $\Delta > 0$: Este caso, denominado *caso sobreamortiguado*, la solución se puede escribir en general en la forma

$$x(t) = \left(A_1 e^{t\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} + A_2 e^{-t\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\frac{c}{2m}t} \quad (5.4.4)$$

El factor exponencial que está fuera del paréntesis domina y la función $x(t)$ decrece exponencialmente cuando el tiempo crece. Las constantes A_1 y A_2 se determinan cuando se conoce las condiciones iniciales. Compruebe que se cumple que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x_0}{2} + \frac{cx_0}{4m\sqrt{\Delta}} + \frac{v_0}{2\sqrt{\Delta}} \\ A_2 &= \frac{x_0}{2} - \frac{cx_0}{4m\sqrt{\Delta}} - \frac{v_0}{2\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

A pesar de su nombre, este sistema no oscila porque el efecto de la amortiguación es muy fuerte.

Caso $\Delta < 0$: En este caso los efectos de la amortiguación son menos intensos y el sistema oscila. La solución podría escribirse prácticamente en la misma forma que antes

$$x(t) = \left(A_1 e^{it\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} + A_2 e^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \right) e^{-\frac{c}{2m}t}$$

pero como la solución debe ser real para que tenga sentido, entonces las constantes A_1 y A_2 deben ser complejas. Al exigir que $x = x^*$ para todo t se deduce que $A_1 = A_2^*$. Para hacer explícita esta propiedad se cambia de notación,

$$A_1 = \frac{D}{2} e^{i\beta} \quad A_2 = \frac{D}{2} e^{-i\beta}$$

y entonces

$$x(t) = D e^{-\frac{c}{2m}t} \cos \left(t \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} + \beta \right) \quad (5.4.6)$$

solución que está representada en la figura 5.15.

Se aprecia que la frecuencia angular de oscilación en este sistema es

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (5.4.7)$$

que es una frecuencia menor que ω_0 . Si el coeficiente de viscosidad c aumenta la frecuencia ω_c disminuye aun más, es decir el período de oscilación $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ aumenta si c aumenta.

En este caso las dos constantes que deben ser fijadas una vez que se tiene las condiciones iniciales son D y β .

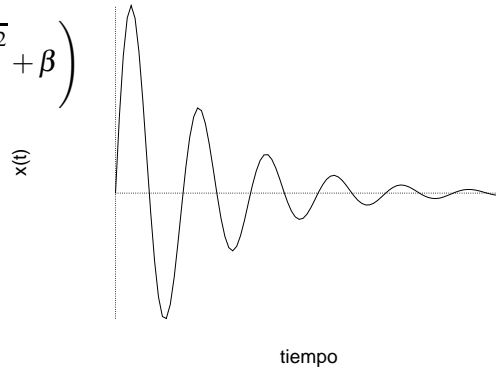


Figura 5.15: Las oscilaciones de un oscilador amortiguado van decreciendo con el tiempo, manteniendo su frecuencia tal como se describe en (5.4.6).

5.5. Oscilador forzado y amortiguado

Finalmente, consideramos el caso general de una partícula que se mueve en proximidad de un punto de equilibrio estable, donde además hay roce viscoso y una fuerza externa periódica. La ecuación que describe este movimiento es

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) + kQ \sin \omega t$$

que se escribe equivalentemente como

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 Q \sin \omega t \quad (5.5.1)$$

El último término es el que describe a la *forzante* periódica.

Tal como se comentó en la sección 5.3 estas ecuaciones lineales inhomogéneas tiene una solución general que se obtiene de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea (en este caso la del oscilador amortiguado sin forzar) más una solución particular de la ecuación inhomogénea.

Puesto que ya se conoce la solución general del oscilador amortiguado sin forzar solo resta calcular una solución de la ecuación inhomogénea (5.5.1). Ésta será obtenida a partir de suponer que existe solución $x(t)$ de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t - \delta) \\ &= A (\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

De donde es directo obtener que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \omega (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta) \\ \ddot{x}(t) &= -A \omega^2 (\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

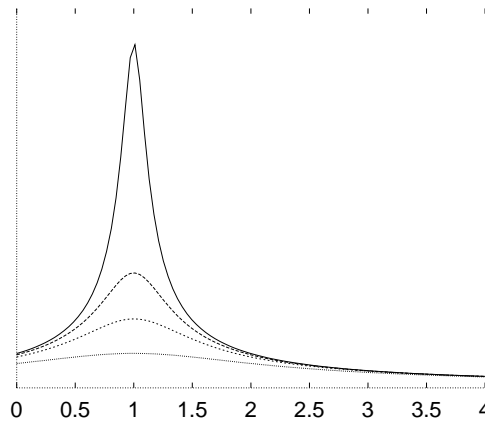


Figura 5.16: La amplitud $A(\omega)$, dada en (5.5.6), de un oscilador de frecuencia natural ω_0 , amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω (la forzante) muestra para diversos valores del parámetro de amortiguación q un máximo (resonancia) en $\omega = \omega_r$ (definido en (5.5.7)). Mientras menor el amortiguamiento mayor es la amplitud A .

En lo que sigue se va a usar un parámetro q para describir el amortiguamiento, en lugar de c . La relación, por definición es

$$q = \frac{c \omega}{m}$$

Al reemplazar estas expresiones en (5.5.1) se obtiene una ecuación que se factoriza en dos partes, una proporcional a $\cos \omega t$ y otra proporcional a $\sin \omega t$. Puesto que esta ecuación debe ser válida para todo tiempo, cada una de estas dos partes debe ser nula independientemente y se obtiene

$$q \cos \delta = (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta \quad (5.5.4)$$

$$\omega_0^2 Q = A [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + q \sin \delta] \quad (5.5.5)$$

De la primera de estas ecuaciones se despeja inmediatamente que

$$\tan \delta = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

y entonces

$$\sin \delta = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + q^2}}$$

$$\cos \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + q^2}}$$

Si el coeficiente de roce viscoso c se anula, es decir, $q = 0$, entonces el seno se anula y el coseno vale 1.

De (5.5.5) resulta (comparar con (5.3.5))

$$A = \frac{\omega_0^2 Q}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + q \sin \delta}$$

$$= \frac{\omega_0^2 Q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + q^2}} \quad (5.5.6)$$

y ahora se ve que el primer término en el denominador es siempre positivo tal como el segundo término.

Entonces la amplitud A nunca es divergente. Su forma, como función de ω , se muestra en la figura 5.16. La función A tiene un máximo cuando

$$\omega^2 = \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2 \left(\frac{c}{2m} \right)^2 \quad (5.5.7)$$

Esto contrasta con lo que ocurre con el oscilador forzado sin amortiguación donde la amplitud que resulta matemáticamente es divergente en la resonancia.

El valor de A en el punto $\omega = \omega_r$ es

$$A = \frac{\omega_0 Q m}{c} \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{4m^2}}} \quad (5.5.8)$$

que diverge en el caso de un oscilador forzado y no amortiguado, es decir, cuando $c \rightarrow 0$.

La solución general de la ecuación del oscilador forzado y amortiguado se expresa como la solución general de la ecuación homogénea más la solución particular recién obtenida. Suponiendo que no hay sobreamortiguación esta solución es

$$x(t) = D \cos \left(t \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} + \beta \right) \exp \left[-\frac{c}{2m} t \right] + \frac{\omega_0^2 Q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega c}{m}\right)^2}} \sin(\omega t - \delta) \quad (5.5.9)$$

La primera parte de esta expresión, que proviene de la ecuación lineal homogénea (oscilador no forzado), decrece con el tiempo en forma exponencial. A tiempos largos, entonces, la solución que domina sin competencia es la parte proporcional a $\sin(\omega t - \delta)$. A largo plazo la forzante impone totalmente la frecuencia de oscilación.

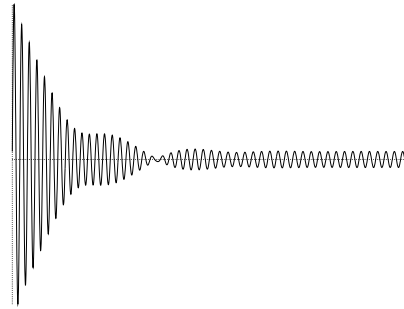
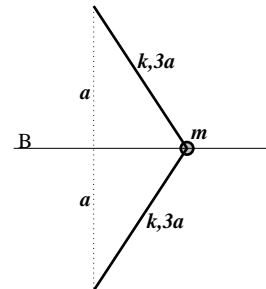


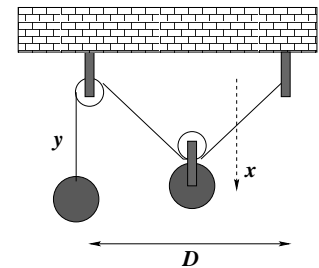
Figura 5.17: La función $x(t)$ de un oscilador de frecuencia natural ω_0 , amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω (la forzante) muestra un comportamiento inicial transitorio donde las dos frecuencias compiten, pudiendo haber batido en esta etapa. A tiempos largos el comportamiento es oscilatorio simple con la frecuencia ω de la forzante como se desprende de (5.5.9).

5.6. Problemas

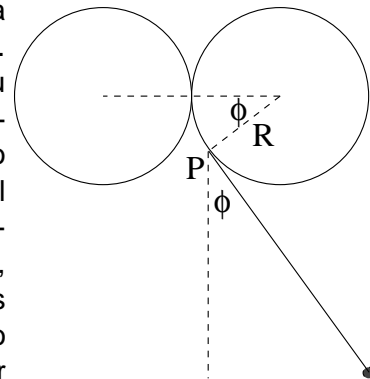
- 5.1 Una partícula P de masa m está sometida a la fuerza de dos resortes. Estos dos resortes de constantes elásticas $k_A = 2k$ y $k_B = k$ tienen largos naturales $3d$ y $2d$ respectivamente y tienen puntos fijos, como lo muestra la figura, en un punto A el primero y el segundo en un punto B verticalmente sobre él a distancia $6d$. Determinar las frecuencias a pequeñas oscilaciones verticales y a pequeñas oscilaciones horizontales.



- 5.2 El sistema de poleas sin roce que describe la figura tiene una masa colgante m_1 a la izquierda y la masa total al centro es m_2 . Dé a este sistema una geometría sencilla para la situación de equilibrio. Encuentre la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno a ese punto.



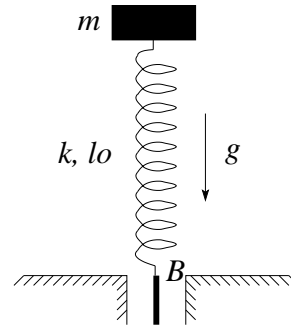
- 5.3 Se tiene un péndulo plano que consta de un hilo de largo D que tiene una partícula puntual de masa m en su extremo inferior. Pero no es un péndulo común porque su origen superior está en el punto de contacto entre dos circunferencias de radio R , como lo muestra la figura. Cuando el péndulo oscila se enrolla un poco en forma alternada en las dos circunferencias, de modo que su largo instantáneo no es D sino $(D - R\phi)$ y su centro instantáneo de giro es el punto P de tangencia (ver figura).



- Obtenga las ecuaciones escalares de movimiento, una de ellas sirve para determinar la tensión del hilo y la otra es la interesante.
- Escriba la energía cinética, $K(\phi, \dot{\phi})$ y la energía gravitacional $U(\phi)$.
- Demuestre que la exigencia de conservación de la energía mecánica, $dE/dt = 0$, conduce a la ecuación interesante de movimiento.
- Escriba la ecuación asociada a pequeñas oscilaciones.

5.4 Considere una partícula de masa m que está apoyada sobre un resorte de constante k y largo natural l_0 , bajo la acción de la gravedad. El punto B de donde se sostiene el resorte se encuentra en $t = 0$ al nivel de la mesa.

- a)** Encuentre la altura de equilibrio de la masa. **b)** En $t = 0$, cuando la masa está quieta y en la posición de equilibrio, el punto B comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de B puede ser descrito como $\vec{r}_B(t) = A_0 \sin(\omega t) \hat{j}$. Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa. **c)** Resuelva la ecuación de movimiento para las condiciones iniciales dadas. **d)** Manteniendo la amplitud A_0 fija, considere que la frecuencia ω es menor que la frecuencia de resonancia.



¿Cuál es la frecuencia máxima para que la masa nunca choque con la mesa?

5.5 Considere el movimiento de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza

$$\vec{F} = b (x(y^2 + z^2) \hat{i} + y(x^2 + z^2) \hat{j} + z(x^2 + y^2) \hat{k})$$

- a) Demostrar que esta fuerza es conservativa. b) Encontrar la energía potencial $U(x, y, z)$ asociada a esta fuerza, tal que sea nula en el origen. c) Si la partícula es soltada desde el origen con rapidez v_0 , determine la rapidez en un punto cualquiera (x_1, y_1, z_1) .

