A: CINEMATICA

A.1.- Una partícula se mueve de forma tal que la magnitud del vector posición $\vec{r}$ es constante. Demostrar que la velocidad de la partícula es perpendicular a $\vec{r}$. Interprete geométricamente este resultado.

A.2.- Al destapar una botella de champaña el corcho sale disparado verticalmente hacia arriba tardando t_o segundos en caer hasta la altura inicial. Determine la velocidad con que el corcho salió de la botella. (desprecie el roce con el aire).

A.3.- Se deja caer una pelota de goma desde una altura h sobre el suelo. La rapidez con que la pelota rebota es una fracción f $(f \leq 1)$ de la rapidez con que la pelota impacta el suelo. Calcule la distancia total recorrida por la pelota hasta su detención y el tiempo que tarda en hacerlo.

A.4.- Desde un ascensor de carga cae accidentalmente un paquete cuando el ascensor se encuentra a una altura h del suelo, moviéndose hacia arriba. Si el ascensor mantiene una rapidez constante v_o determine a que altura se encuentra el ascensor cuando el paquete llega al suelo.

A.5.- La aceleración de un bloque que se mueve a lo largo del eje x se expresa como

$$\vec{a} = k\sqrt{x}$$

Donde k es una constante positiva. Tanto la rapidez v como el desplazamiento x son nulos para $t=0$. Determine la aceleración, velocidad y posición del bloque en un instante t cualquiera.

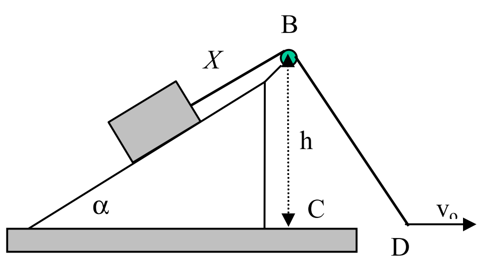
A.6.- Una partícula que se desplaza en un medio viscoso a alta velocidad, experimenta una fuerza de freno que es proporcional al cuadrado de la rapidez. Como resultado de lo anterior, la aceleración que experimenta la partícula cuando se mueve en línea recta en ese medio, a lo largo del eje x se expresa como

$$\vec{a} = -kv^2\hat{r}$$

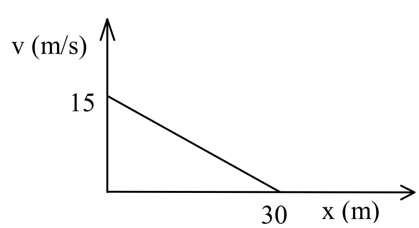
Donde k es una constante. Suponiendo que para $t = 0$ se tiene que $x=0$ y $v=v_o$ determine:

a) rapidez de la partícula en función de la posición x.
b) rapidez de la partícula en función del tiempo.

A.7.- Una caja se desplaza hacia arriba sobre un plano inclinado que tiene una pendiente α (ver figura) como resultado de tirar del extremo D de la cuerda con una rapidez constante v_o a lo largo de la línea CD, a partir del punto C. Determine la rapidez de la caja en cualquier instante t, en función de h, v_o y t.



(Prob. A.7)



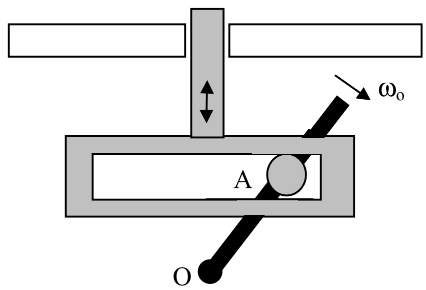
(Prob. A.8)

A.8.- El gráfico de la figura muestra la rapidez de una partícula que se desplaza en línea recta, en función de su posición en el eje x. Demuestre que la partícula nunca llega a la posición $x=30$ m. ¿Cuál es la aceleración de la partícula en x = 18m?

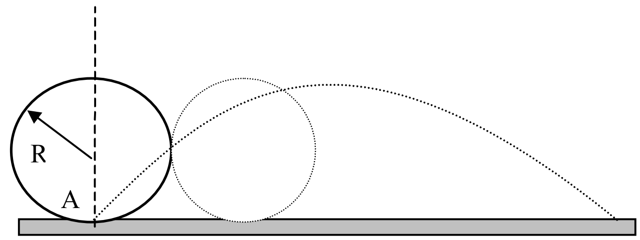
A.9.- Una partícula se mueve a lo largo de un círculo de radio b. Sí la velocidad de la partícula varía en el tiempo según $v(t)=A\,t^2$ ¿Para qué valor, o valores del tiempo el vector aceleración forma un ángulo de π/4 con el vector velocidad ?

A.10.- Encontrar el radio de curvatura (en función del tiempo) de la trayectoria que se asocia a la siguiente función itinerario: $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}t^2$, si los vectores constantes **b** y **c** son ortogonales.

A.11.- El mecanismo que se muestra en la figura adjunta transforma un movimiento de rotación en uno lineal de traslación. El vástago A, fijo en la barra OA se encuentra a una distancia d de O y desliza en la ranura a medida que el brazo OA gira a una tasa constante de ω_o radianes por segundo, en el sentido indicado por la flecha. Como consecuencia de este movimiento la barra se mueve verticalmente. Describa el movimiento de la barra vertical y en particular determine su aceleración cuando $\theta=30°$.



(Prob. A.11)



(Prob. A.12)

A.12.- Un disco circular de radio R rueda sin resbalar a lo largo del eje x con rapidez constante v_o como se indica en la figura. Para $t=0$ el punto A, en el borde externo del disco, coincide con el origen. determine expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración del punto A.

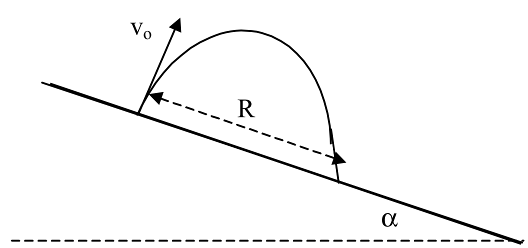
A.13.- Una partícula se mueve con rapidez constante v_o a lo largo de una trayectoria parabólica definida por la ecuación $y = cx^2$, donde c es una constante positiva. Encuentre expresiones para la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ cuando la partícula se encuentra en la posición $(x_o, y_o=cx_o^2)$.

A.14.- Una partícula se mueve con rapidez constante v_o. a lo largo de la espiral $\rho = A\, e^{k\theta}$ Determine:

a) vector velocidad en función de ρ y θ
b) vector aceleración en función de ρ y θ
c) demuestre que en todo instante el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad.
d) encuentre el ángulo θ y la velocidad angular en función del tiempo.

A.15.- Se lanza una pelota en dirección perpendicular a una superficie inclinada (que forma un ángulo α con la horizontal) de modo que cuando rebota lo hace con una rapidez v_o. Determine la distancia R donde la pelota golpea nuevamente la superficie inclinada.

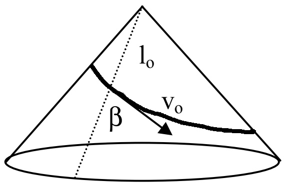
(Prob. A.15)



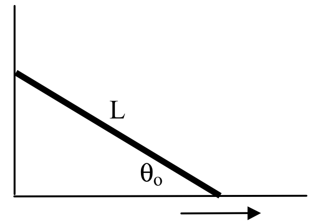
A.16.- Usando el mismo cañón, se lanzan en forma sucesiva dos proyectiles, el primero con un ángulo de alza θ_1 y luego el otro con un ángulo θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$). Si la rapidez de los proyectiles a la salida del cañón es v_o y los dos proyectiles llegan simultáneamente al blanco localizado a una distancia R, determine los ángulos de lanzamiento y el intervalo de tiempo transcurrido entre los dos disparos.

A.17.- Una partícula describe una trayectoria circular de radio R. El arco que recorre en función del tiempo (t) está descrito por la ecuación $s = R\ ln\ (1 + \alpha t)$ donde α es una constante positiva. Calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración en función del tiempo.

A.18.- Una partícula se mueve con rapidez constante v_o sobre la superfície de un cono recto de semiángulo α de modo que la trayectoria que describe forma un ángulo β constante con la generatriz del cono. La partícula inicia su movimimento a una distancia l_o del vértice del cono. Determine la ecuación de la trayectoria de la partículal, utilizando un sistema de coordenadas esféricas con origen en el vértice de cono.



(Prob. A.18)

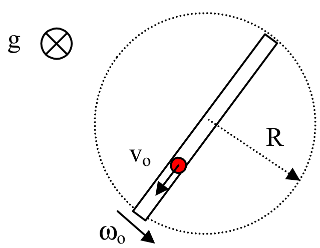


(Prob. A.19)

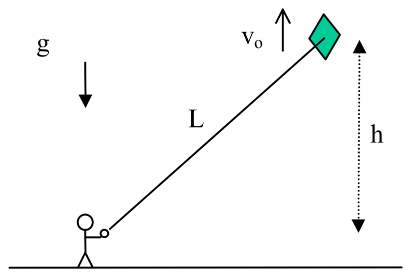
A.19.- Una escalera de largo L apoyada en una pared, como se indica en la figura, desliza sobre la superficie horizontal. En su caída y cuando forma un ángulo θ_o con la superficie horizontal, el extremo inferior de la escalera se mueve con una rapidez v y una aceleración a. Determine, para ese instante, la velocidad y aceleración del extremo superior de la escalera.

A.20.- Una partícula se mueve por el interior de un tubo de largo $2R$ que gira con una velocidad angular constante ω_o . La partícula inicia su movimiento desde el punto medio del tubo desplazándose por su interior con una rapidez constante v_o respecto al mismo. Determine:

a) el radio de curvatura de la trayectoria descrita, en función del tiempo
b) la distancia recorrida por la partícula desde que inicia su movimiento hasta que llega al extremo del tubo.



(Prob. A.20)



(Prob. A.21)

A.21.- Un niño está elevando un volantín. En un cierto instante éste se encuentra a una altura h sobre la posición del carrete y sube verticalmente con una rapidez v_o. Si en ese instante se han desenrrollado L metros de hilo, determine con que velocidad angular gira el carrete cuyo diámetro r_o.

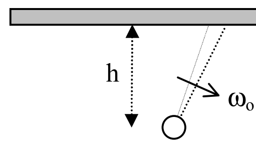
A.22.- Una partícula recorre una trayectoria dada por la ecuación $\rho = 10\ (\cos\theta + 1)$, en forma tal que $\theta = (\pi t)/50$. Haga un gráfico de la trayectoria y encuentre expresiones para la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.

A.23.- Un ventilador de techo, con aspas de largo L, gira con una velocidad angular constante ω_o. Las vibraciones en las aspas provocan que el extremo de las mismas describan un movimiento vertical de modo que el desplazamiento depende del ángulo de giro en la forma siguiente $z = d_o\ sen 2\theta$. Determine la máxima aceleración que experimenta el extremo de cada aspa.

A.24.- Las componentes del vector de posición de una partícula en movimiento, expresadas en componentes cartesianas, son las siguientes: $x = A \cos \omega t$ $\qquad y = A\ sen\ \omega t$ $\qquad z = B\ sen\ \lambda t$

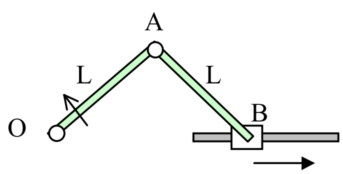
donde A, B, ω y λ son constantes. Encontrar la relación que debe haber entre ω y λ para que el movimiento ocurra en un plano.

A.25.- Un faro proyecta un haz de luz que rota con una velocidad angular ω_o en el sentido indicado en la figura. Determine la rapidez y aceleración con que se desplaza la luz proyectada sobre una pared a una distancia *h* del faro, cuando el haz de luz incide con un angulo de *45°* respecto de la pared.

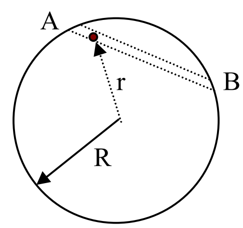


(Prob. A.25)

A.26.- Considere un sistema formado por dos barras articuladas de largo *L* cada una. La barra OA gira alrededor de O y un extremo de la otra barra se mueve horizontalmente fijo al anillo B que desliza a lo largo de una barra. Determine la velocidad angular ω y la aceleración angular α de la barra OA en función de la velocidad *v* y la aceleración *a* de la pieza B.



(Prob. A.26)



(Prob. A.27)

A.27.- Suponga que es posible excavar un túnel entre dos puntos A y B de la Tierra, como se indica en la figura. La aceleración de gravedad, que apunta hacia el centro de la Tierra, tiene una magnitud que es proporcional a la distancia *r*.

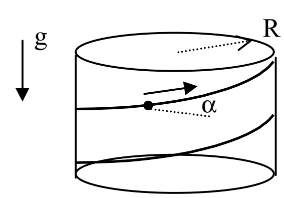
$$|\vec{a}| = \frac{g}{R} r$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra *(g=9,81 m/s)* y *R* es el radio de la Tierra (*R=6328 km*). Asumiendo que un vehículo parte del reposo en el punto A y se mueve sin roce en el interior del túnel bajo el efecto de la gravedad, calcule:

a) el tiempo que requiere para llegar al punto B, que está a una distancia *R* en línea recta del punto A.
b) la rapidez máxima del movimiento resultante.

A.28.- Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria espiral cilíndrica (ver figura) con una rapidez *v(t).* La distancia desde cualquier punto de la trayectoria al eje de la espiral es R y el ángulo que forma el vector velocidad con el plano perpendicular al eje de la espiral (α) es constante. Determine en términos de R, *v(t)* y α:

a) las componentes de velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas.
b) las componentes tangencial y normal de la aceleración.
c) el radio de curvatura de la trayectoria.



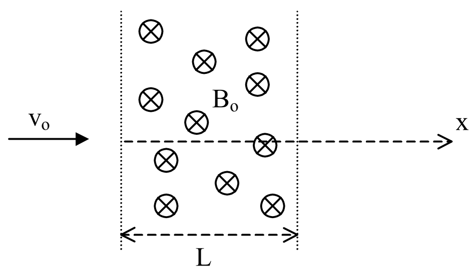
A.29.- Como una aplicación particular del problema anterior considere el caso de un automóvil que desciende por una rampa (de la forma indicada en la figura del problema A.28) en un edificio de estacionamiento, con una rapidez constante v_o. Si la rampa desciende una altura *h* cada vuelta completa determine la magnitud de la aceleración que experimenta el automóvil a medida que se desplaza por la rampa.

A.30.- Una partícula se mueve a lo largo de la espiral $\rho = a\theta$ desde $\theta = 0$, con rapidez constante v_o. Determine:

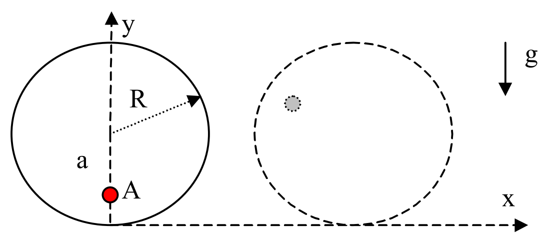
a) el vector velocidad en función de θ.
b) el vector unitario **t** tangente a la trayectoria, en función del ángulo θ. Obtenga una expresión para el camino recorrido *s* en función del tiempo.
c) calcule la aceleración ***a*** en función de θ.
d) determine el vector ***n*** normal a la trayectoria, en función de θ y obtenga una expresión para el radio de curvatura r_c en función de θ.
e) verifique que la aceleración es siempre perpendicular a la velocidad.

A.31.- Una partícula de masa *m* y carga eléctrica *q* que se mueve a lo largo del eje x, con rapidez $v_0 \hat{i}$ entra en una región del espacio de ancho ***L.*** En esta región existe un campo magnético constante del tipo $\boldsymbol{B_o} = B_o \hat{j}$ el cual ejerce una fuerza $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B_o}$ sobre la partícula. Suponga en el análisis que la fuerza gravitacional es muy pequeña comparada con la fuerza magnética.

a) demuestre que la magnitud de la velocidad es constante durante el movimiento.
b) determine la trayectoria que sigue la partícula mientras que se mueve en la región donde actúa el campo magnético y analice los casos posibles dependiendo de la magnitud de L.



(Prob. A.31)



(Prob.A.32)

A.32.- Un disco de radio R rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal, de modo que su centro avanza en dirección x con rapidez constante v_o. En la posición inicial el centro del disco se encuentra en x = 0. Considere una partícula fija al disco en el punto A, situado a una distancia a < R de su centro y calcule:

a) los vectores de posición, velocidad y aceleración del punto A, en función del tiempo, en el sistema de coordenadas cartesianas indicado en la figura.
b) el radio de curvatura de la trayectoria del punto A cuando pasa por los puntos más bajo y más alto (mínimo y máximo de y).

A.33.- El vector posición de una partícula, en función del tiempo (función itinerario) está dado por:

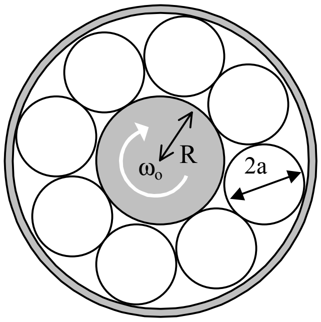
$$r(t) = R\cos\omega_0\hat{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega_0\hat{j} + ct\hat{k}$$

donde *R*, ω_o y *c* son constantes, y t es el tiempo. Determine:

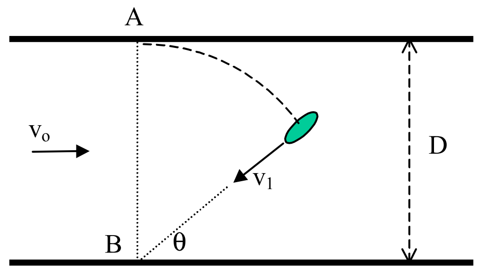
a) rapidez de la partícula en función del tiempo, y las componentes tangencial y normal de su aceleración.
b) radio de curvatura de la trayectoria, en función del tiempo.
c) ¿ qué relación debe existir entre ω_o y c, para que el movimiento ocurra sobre un plano ?

A.34.- En un rodamiento el radio del eje es *R* y el radio de cada esfera es ***a.*** El eje gira con una velocidad angular constante ω_o ,mientras que la pared exterior P se encuentra en reposo. Si las esferas ruedan sin resbalar en el eje y en la pared exterior, determine:

a) rapidez del centro de cada esfera.
b) velocidad angular de rotación de cada esfera con respecto a su centro.



(Prob. A.34)



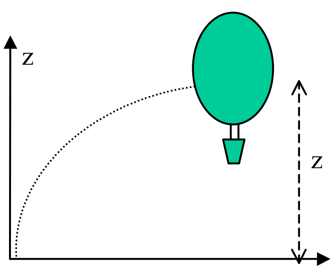
Nota: $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \ln(\operatorname{tg}(\frac{x}{2}))$

(Prob. A.35)

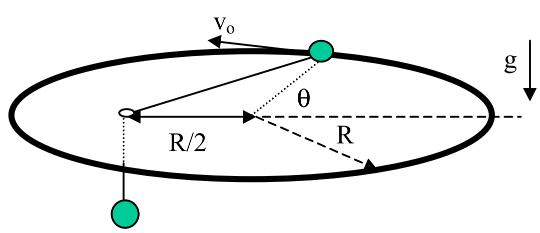
A.35.- Un botero cruza un río de ancho D partiendo desde el punto A con el objetivo de alcanzar la orilla opuesta justo en la posición opuesta al otro lado del río (punto B). La velocidad del agua es v_o que se supone constante en todo el punto del río. El botero imprime al bote una velocidad v_1 relativa al agua, apuntando siempre hacia el punto donde desea llegar (punto B). Determine la ecuación de la trayectoria del bote, en un sistema de coordenadas x-y cuyo origen se localiza en B y donde el eje x apunta en la direccion de movimiento de las aguas, y el eje y en la dirección hacia el punto A. Comente sobre los valores posibles de v_1 que le permiten al botero alcanzar el objetivo deseado.

A.36.- Un globo asciende desde el suelo a una velocidad vertical v_o Debido al viento el globo adquiere una componente horizontal de velocidad $v_x = k\,z$, donde k es una constante y z es la altura sobre el terreno. Si se coloca el origen del sistema de coordenadas en el punto de lanzamiento, determine:

a) trayectoria del globo y su vector de posición en función del tiempo.
b) las componentes tangencial y normal de la aceleración en función de la altura "z".



(Prob. A.36)

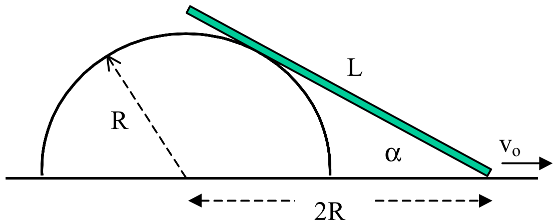


(Prob. A.37)

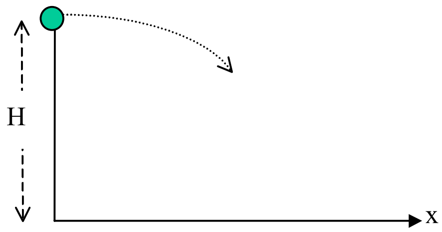
A.37.- Una partícula se mueve con rapidez v_o constante sobre un riel circular de radio R colocado en posición horizontal sobre una superficie horizontal. La partícula se encuentra atada mediante una cuerda inextensible a un bloque que cuelga debajo de un agujero localizado a una distancia $R/2$ del centro del riel, como se muestra en la figura. Determine:

a) la rapidez del bloque en función del ángulo θ.
b) la rapidez máxima del bloque.
c) la aceleración del bloque cuando la partícula que se mueve sobre el riel pasa por la posición $\theta = 0$.

A.38.- Una barra de largo L se encuentra apoyada sobre un semi-cilindro de radio R, como se indica en la figura. El extremo inferior de la barra es forzado a moverse con rapidez constante v_o hacia la derecha. Determine la velocidad y aceleración del extremo superior de la barra en el instante cuando su extremo inferior se encuentra a una distancia $2R$ del eje del semi-cilindro y el ángulo que forma la barra con la horizontal es α.



(Prob. A.38)



(Prob. A.39)

A.39.- Desde un avión que vuela con una velocidad v_o en dirección horizontal y a una altura H sobre el suelo, se suelta un objeto. Si se asume que el roce viscoso con el aire es despreciable frente a la fuerza gravitacional, determine:

a) ecuación de la trayectoria con respecto al sistema de referencia fijo indicado en la figura.
b) aceleración tangencial y normal en función del tiempo
c) radio de curvatura en función del tiempo

A.40.- Una partícula describe una trayectoria plana con una rapidez proporcional a la distancia al origen (ρ), siendo k la constante de proporcionalidad, y con una velocidad angular constante ω_o en torno al origen. En el instante inicial, la distancia al origen es ρ_o , $\theta = 0$ y la componente radial de la velocidad es positiva. Determine:

a) ecuación de la trayectoria en un sistema de coordenadas polares.
b) demuestre que la aceleración es proporcional a la distancia de la partícula al origen.
c) determine las componentes tangencial y normal de la aceleración en función del tiempo.

A.41.- Una partícula describe la trayectoria parabólica descrita por la ecuación x y = a, manteniendo una rapidez constante v_o. Calcule los siguientes parámetros cuando la partícula pasa por el punto más cercano al origen de las coordenadas:

a) componentes cartesianas de la velocidad
b) componente de aceleración según el eje x
c) componente de aceleración a lo largo de la trayectoria y perpendicular a ella.
d) radio de curvatura de la trayectoria en ese punto

A.42.- Considere una partícula que se mueve en un plano de modo tal que la componente de su aceleración perpendicular al radio vector es nula ($a_\theta = 0$).

a) demuestre que bajo estas condiciones se cumple que el producto entre el cuadrado de la magnitud del radio vector y la velocidad angular es constante.
b) si la trayectoria de la partícula queda descrita por la ecuación: $\rho(\theta) = (2 - \cos\theta)^{-1}$ (elipse)
   demuestre que la componente radial de la aceleración es proporcional a ρ^{-2}.

A.43.- La función itinerario de una partícula está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \omega_o t\, \mathbf{i} + R \,\mathrm{sen}\, \omega_o t\, \mathbf{j} + ct\, \mathbf{k}$$

Determine en función del tiempo:

a) la rapidez de la partícula y las componentes tangencial y normal de su aceleración.
b) el radio de curvatura de la trayectoria.