

Cuaderno de Clases: CI41A

Capítulo B5: Escurrimiento Rápidamente Variado.

Javier A. Rovegno Campos

19 de junio de 2007

Licencia del Documento: Creative Commons 3.0 [Detalles de la Licencia]¹

Este documento contiene una recopilación de los apuntes, tomados por el Autor, en las clases de Hidráulica del Año 2006 impartidas en la FCFM por los profesores:

- Aldo Tamburrino
- Yarko Niño

Datos del Autor:

Correos del Autor: jrovegno@ing.uchile.cl , tatadeluxe@gmail.com

Página Personal del Autor: <http://www.cec.uchile.cl/~jrovegno/>

Este Documento forma parte de la primera etapa BETA del *Proyecto Colaborativo WikiCursos*.

Para más información sobre WikiCursos visitar:
<http://ideaschile.wordpress.com/>

¹<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

CONTORNOS ABIERTOS:

1. Características Generales del Esgurrimiento en Canales.

- 1.1. Características generales del esgurrimiento en canales abiertos.
- 1.2. Clasificación de los esgurrimientos.
- 1.3. Características geométricas de los canales.
- 1.4. Distribución de velocidades. Coeficientes de Coriolis y de Boussinesq.
- 1.5. Distribución de presiones en canales.

2. Ecuaciones fundamentales del Esgurrimiento en Canales.

- 2.1. Ecuación de Continuidad.
- 2.2. Ecuación de la Energía.
 - 2.2.1. Ecuación de Bernoulli en canalizaciones abiertas. Concepto de Energía Específica.
 - 2.2.2. Esgurrimiento Crítico. Propiedades.
 - 2.2.3. Cálculo de alturas críticas en secciones regulares e irregulares.
 - 2.2.4. Esgurrimientos subcrítico y supercrítico. Noción de control hidráulico.
- 2.3. Ecuación de la Cantidad de Movimiento.
 - 2.3.1. El Teorema de la Cantidad de Movimiento en canales. Aplicaciones.
 - 2.3.2. La función Momenta y sus propiedades.
 - 2.3.3. Resalto hidráulico Clasificación, Ecuaciones de Belanger, Características geométricas del resalto completo (longitud, perfil).

3. Resistencia al Esgurrimiento.

- 3.1. Generalidades. Esfuerzo de corte medio.
- 3.2. Ecuaciones de resistencia. Chézy, Manning, fórmulas racionales.
- 3.3. Esgurrimiento Uniforme. Determinación de altura normal en secciones regulares e irregulares.

4. Esgurrimiento Gradualmente Variado.

- 4.1. Teoría y ecuaciones generales.
- 4.2. Análisis y clasificación de ejes hidráulicos.
- 4.3. Composición de ejes hidráulicos.
- 4.4. Métodos de cálculo en secciones regulares.
- 4.5. Aplicaciones.

5. Esgurrimiento Rápídamente Variado.

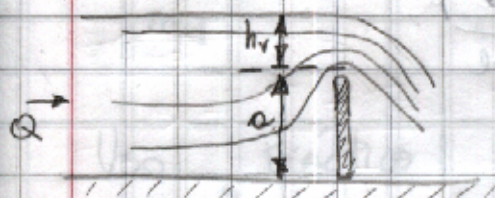
- 5.1. Vertederos. Características generales y clasificación.
- 5.2. Vertedero en pared delgada con napa libre. Teoría de Boussinesq. Fórmulas prácticas.
- 5.3. Vertederos triangulares en pared delgada sin influencia y con influencia de aguas abajo.
- 5.4. Otras singularidades en canales. Ensanches , angostamientos, transiciones , flujo en torno a machones.

5. Esc. Rápidamente Variado.

$$\frac{dh}{dx} \text{ grande.}$$

Ocurre en el entorno de singularidades.

Ejemplos: Vertedero de Pared delgada



Lugar de medición de h_v :

- No muy lejos, para despreciar pérdida friccional
- No muy cerca, para tener líneas de corriente paralelas y que sea válida hidrostática

Vertedero de Pared gruesa ($e/h_v > 3$)



Vertedero de Pared intermedia ($e/h_v < 3$)

Ec. General Canal rectangular

$$q = m \sqrt{2g} h_r^{3/2}$$

m : coef. de gasto.

Resumen: Vertedero Canal Rectangular.

$$q = m \sqrt{2g} h_v^{3/2}$$

Sin vel aprox., Sin h_s , Sin influencia aguas abajo, Sin h_f

Correcciones: Perdida singular y friccional

$$m_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\underbrace{\frac{3}{2} + \frac{K_e}{2}}_{\text{Perdas singular}} + \underbrace{\frac{q^2 m^2 e}{h_c^{13/3}}}_{\text{friccional}} \right)^{3/2}}$$

Valores	K_e	Arista
	①	Redondeada
	1/3	$a/h_c > 3,5$

Corrección: Vel. de aproximación

$$m_1 = m_0 \left(1 + 0,26 \left(\frac{h_v}{h_v + a} \right)^2 \right)$$

Corrección: Influencia de aguas abajo.

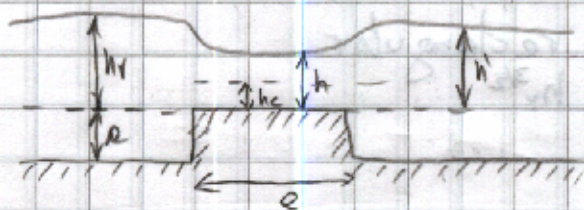


TABLA 6.6.
Conosco h'
siempre.

Conosco $q \Rightarrow$ Cálculo: $\frac{h_v - h'}{h_c}$

Conosco $h_v \Rightarrow$ Cálculo: $\frac{h_v - h'}{h_v}$

Relacion entre q y h_v : $q = m \sqrt{2g} h_v^{3/2}$

$$\frac{h_v - h'}{h_c} < 0,31 < \frac{h_v - h'}{h_c} \quad (\text{Conozco } q)$$

$$\frac{m_2}{m_1} < 1 \quad \frac{m_2}{m_1} = 1$$

$$\frac{h_v - h'}{h_v} < 0,18 < \frac{h_v - h'}{h_v} \quad (\text{Conozco } h_v)$$

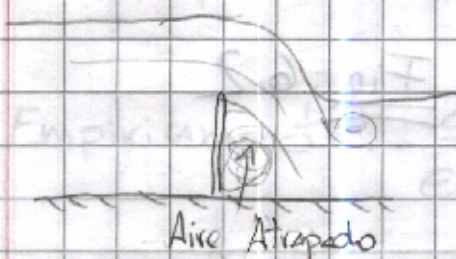
$$\frac{m_2}{m_1} < 1 \quad \frac{m_2}{m_1} = 1$$

Uso Práctico de Vertederos:

- Reducir la capacidad de conducción
- Det. el Q que pasa por el sistema.

5.2 Vertederos en Pared Delgada.

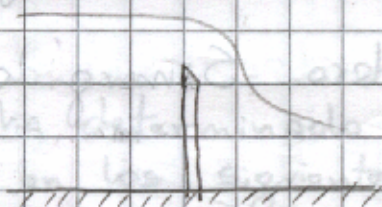
$$q = m \sqrt{2g} h_v^{3/2}$$



Napa aireada

m_{Aireada}

$>$



Napa Adherida

m_{Adherida}

144

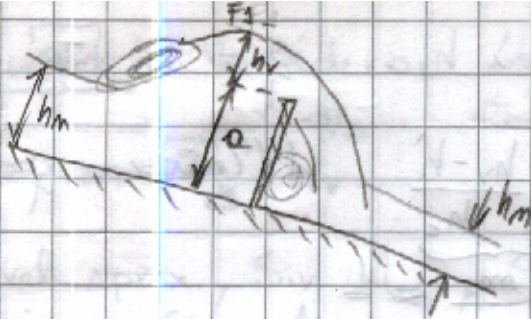
Despreciando: pérdidas, inf. Aguas abajo
rel. Aprox.

$$m = 0,434$$

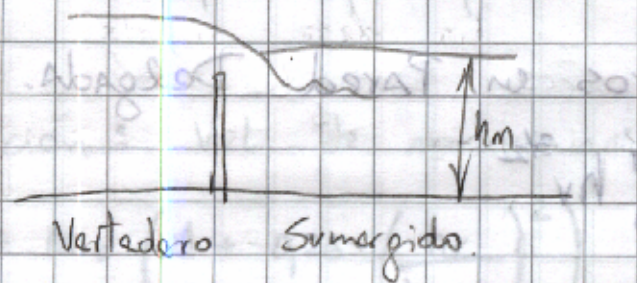
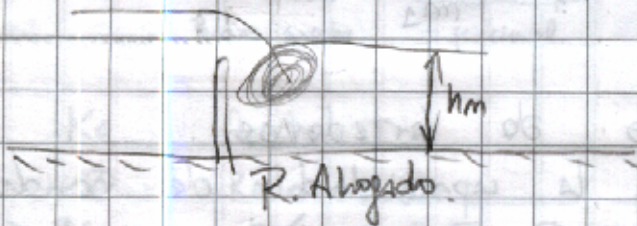
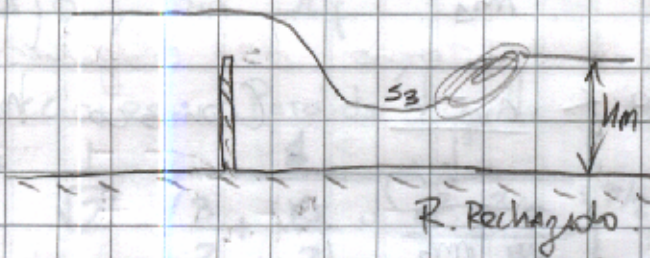
Con: rel. Aprox.

$$m = 0,434 + 0,21 \left(\frac{h_v}{h_{v1}} \right)^2$$

P.F



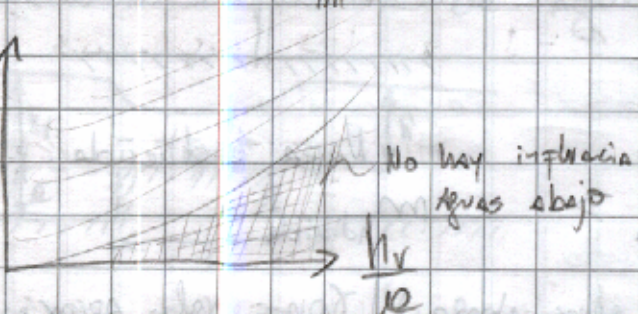
P.S



Vertedero Sumergido

Fig. 6.2

$\frac{h'}{h}$

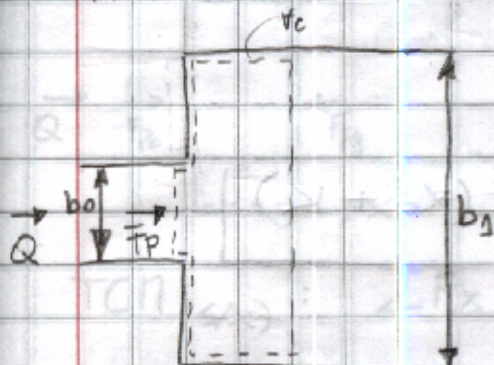


Se supone un valor de h_v y después se itera.

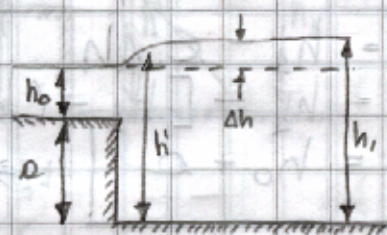
5.4 otras Singularidades en Canales.

Ensanche

Vista en Planta



Vista Corte.



$$\Delta h = h_1 - (h_0 + a)$$

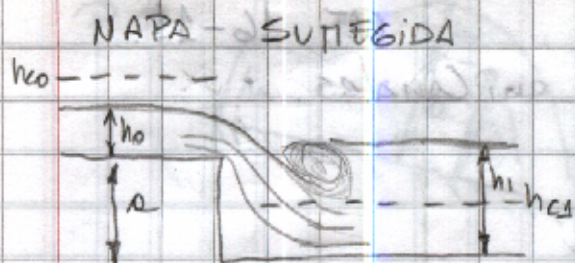
Empíricamente: la fuerza sobre la pared se ha determinado como:

$$F_p = \frac{\gamma h'}{2} (h_0 + a) b_1$$

Se define: $h' = h_1 - E \cdot \Delta h$

Empíricamente: Se ha determinado que $E=1$ en los siguientes casos:

- * Existe flujo subcrítico antes y después de la grada.
- * Existe esc. crítico aguas arriba y subcrítico aguas abajo.
- * Existe esc. supercrítico aguas arriba y subcrítico aguas abajo y resalto "mapa sumergida" al medio.



Resalto contenido por la pared del ensanche

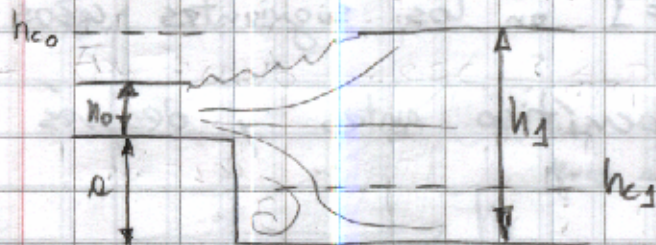
Dado que en estos casos $E = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
 h' &= h_2 - E \Delta h \\
 &= h_2 - [h_2 - (h_0 + a)] \\
 \boxed{h' = h_0 + a} &\Rightarrow \boxed{x' = (x_0 + K)}
 \end{aligned}$$

Empíricamente: Se ha determinado que $E = 1/\mu$ en este otro caso.

* Existe esc. supercrítico aguas arriba y subcrítico aguas abajo y un resalto de "napa superficial" en el medio.

NAPA SUPERFICIAL



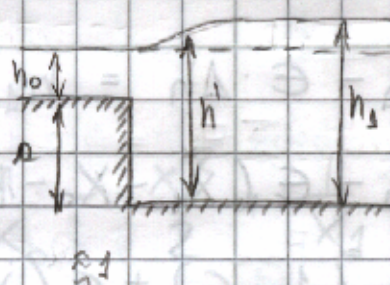
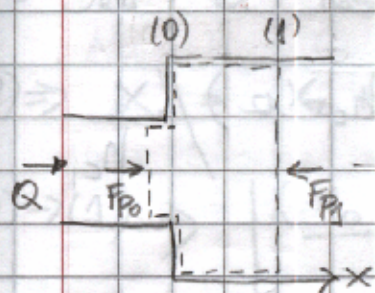
Empíricamente:

Caso esc. supercrítico - esc. supercrítico

Obtener valores de E en libro FJD M7

Determinación de la expresión que relaciona h_0 y h_1 .

Ensanche:



$$TCM(s/x): \sum F_x = \int Q \beta (v_1 - v_0)$$

$$F_{P0} - F_{P1} = \int Q \left(\frac{Q}{h_0 b_0} - \frac{Q}{h_1 b_1} \right)$$

$$\underbrace{\frac{\gamma b_1}{2} (h_0 + a) b_1}_{\text{Empírica}} - \underbrace{\frac{\gamma h_1}{2} \cdot h_1 \cdot b_1}_{\text{hidrostática}} = \int Q \left(\frac{Q}{h_0 b_0} - \frac{Q}{h_1 b_1} \right) / \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{b_1}{2} \left[h' (h_0 + a) - \frac{h_1^2}{2} \right] = \frac{Q^2}{g \cdot b_1} \left[\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \cdot \frac{b_1}{b_0} \right]$$

$$h' \frac{(h_0 + a)}{2} - \frac{h_1^2}{2} = \underbrace{\frac{Q^2}{g b_1^2}}_{\frac{h_{c1}^3}{2}} \left[\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \frac{b_1}{b_0} \right] / \frac{1}{h_{c1}^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{h'}{h_{c1}} \cdot \left(\frac{h_0 + a}{h_{c1}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{h_{c1}} \right)^2 = \left[\frac{h_{c1}}{h_1} - \frac{h_{c1}}{h_0} \cdot \frac{b_1}{b_0} \right]$$

Def: $\frac{h'}{h_{c1}} = X'$; $\frac{h_0}{h_{c1}} = X_0$; $\frac{a}{h_{c1}} = K$; $\frac{h_1}{h_{c1}} = X_1$; $\frac{b_1}{b_0} = m$

Convención: Definimos $m > 1$

$$X' \cdot \frac{(X_0 + K)}{2} - \frac{X_1^2}{2} = \left(\frac{1}{X_1} - \frac{m}{X_0} \right)$$

$$\boxed{X' \cdot \frac{(X_0 + K)}{2} - \frac{m}{X_0} = \frac{X_1^2}{2} + \frac{1}{X_1}} \quad (1)$$

$$h' = h_d - \epsilon \cdot \Delta h = h_d - \epsilon (h_d - h_0 - \alpha) / \cdot \frac{1}{h_c}$$

$$X' = X_1 - \epsilon (X_1 - X_0 - K)$$

$$\boxed{X' = X_1 (1 - \epsilon) + \epsilon (X_0 + K)} \quad (2)$$

Propuesto: Demostrar que la ec. de la momenta en un canal sin gradiente y ancho cte. se puede escribir como:

$$\frac{X_0^2}{2} + \frac{1}{X_0} = \frac{X_1^2}{2} + \frac{1}{X_1}$$

Sol:



Momenta:

$$\frac{Q^2}{g h_0} + \frac{h_0^2}{2} = \frac{Q^2}{g h_1} + \frac{h_1^2}{2}$$

$$h_c^3 \cdot \frac{1}{h_0} + \frac{h_0^2}{2} = h_c^3 \cdot \frac{1}{h_1} + \frac{h_1^2}{2} / \cdot \frac{1}{h_c^2}$$

$$\frac{h_c}{h_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{h_c} \right)^2 = \frac{h_c}{h_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{h_c} \right)^2 \quad 149$$

$$\frac{1}{X_0} + \frac{X_0^2}{2} = \frac{1}{X_1} + \frac{X_1^2}{2} \quad // \text{ QED.}$$

Ensanche:

• Sea el caso $\epsilon = 1$

$$(2) \Rightarrow X' = X_0 + K$$

$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow \left[\frac{(X_0 + K)^2}{2} + \frac{m}{X_0} = \frac{X_1^2}{2} + \frac{1}{X_1} \right] \quad (3)$$

• Sea el caso $\epsilon = 1/4$

$$(2) \Rightarrow X' = \frac{3}{4} \cdot X_1 + \frac{1}{4} (X_0 + K)$$

$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow$$

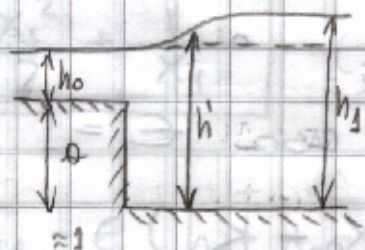
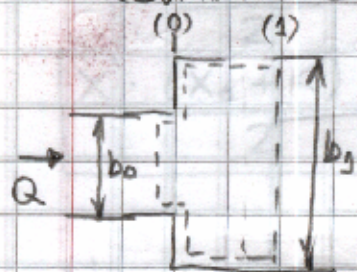
$$\left[\left[\frac{3}{4} \cdot X_1 + \frac{1}{4} (X_0 + K) \right] \cdot \frac{(X_0 + K)}{2} + \frac{m}{X_0} = \frac{X_1^2}{2} + \frac{1}{X_1} \right] \quad (4)$$

Caso: Crisis on la grada $h_0 = h_{oc}$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{h_{oc}}{h_{oc}} = \frac{\left(\left(\frac{Q}{b_0} \right)^2 / g \right)^{1/3}}{\left(\left(\frac{Q}{b_1} \right)^2 / g \right)^{1/3}} = \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^{2/3} = m^{2/3}$$

Se define: $\frac{X_{Lim}^2}{2} + \frac{1}{X_{Lim}} = \frac{(m^{2/3} + K)^2}{2} + \frac{m}{m^{2/3}}$

Resumen Ensamble:



$$TCM_{sx}: \Sigma F_x = \rho Q \beta (v_s - v_e)$$

$$F_{P_0} - F_{P_1} = \rho Q \left[\frac{Q}{b_1 h_1} - \frac{Q}{b_0 h_0} \right]$$

$$\gamma \frac{h'}{2} \cdot (h_0 + a) b_1 - \gamma \frac{h_1}{2} \cdot h_1 b_1 = \rho Q^2 \left[\frac{1}{b_1} - \frac{b_1}{b_0 h_0} \right]$$

$$\gamma b_1 \left[\frac{(h_0 + a) \cdot h'}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right] = \rho Q^2 \left[\frac{1}{b_1} - \frac{b_1}{b_0 h_0} \right]$$

$$\left[\frac{(h_0 + a) \cdot h'}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right] = \frac{Q^2}{\gamma b_1^3} \left[\frac{1}{h_1} - \frac{b_1}{b_0 h_0} \right]$$

$$\left[\left(\frac{h_0}{h_{c1}} + \frac{a}{h_{c1}} \right) \frac{h'}{h_{c1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{h_{c1}} \right)^2 \right] = \left[\frac{h_{c1}}{h_1} - \frac{b_1}{b_0} \frac{h_{c1}}{h_0} \right]$$

$$X_0 = \frac{h_0}{h_{c1}}; K = \frac{a}{h_{c1}}; X' = \frac{h'}{h_{c1}}; X_1 = \frac{h_1}{h_{c1}}; m = \frac{b_1}{b_0}$$

$$\frac{(X_0 + K) \cdot X'}{2} - \frac{X_1^2}{2} = \frac{1}{X_1} - \frac{m}{X_0}$$

$$\frac{(X_0 + K) \cdot X'}{2} + \frac{m}{X_0} = \frac{X_1^2}{2} + \frac{1}{X_1}$$

Reconociendo Términos.

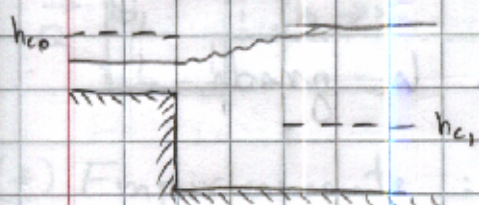
$$\frac{m_1}{h_{c1}^2} = \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{x_1}$$

$$h' = h_1 - E \cdot \Delta h$$

$$\Delta h = h_1 - (h_0 + a)$$

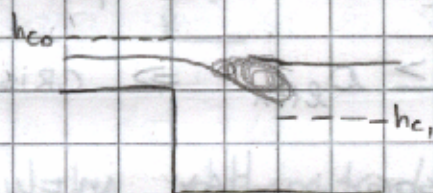
NAPA Superficial

$$E = 1/4$$



NAPA Somergida

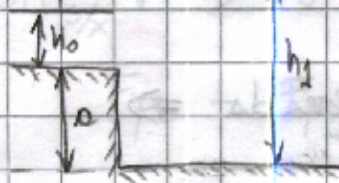
$$E = 1$$



Análisis de la energía en un Ensanche.

(a)

(d)



Despreciando Pérdidas

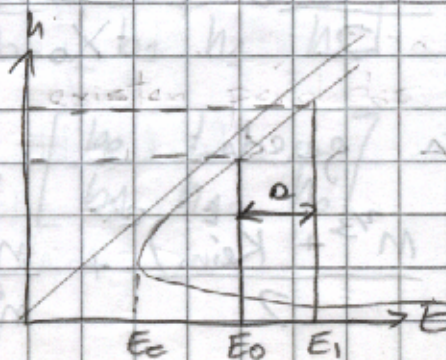
$$B_0 = B_1$$

$$E_0 + a = E_1$$

Dado que esc. AGUAS abajo es subcrítico conocemos $h_1 \Rightarrow$

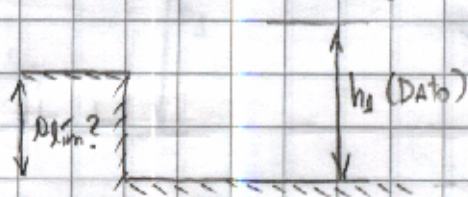
$$E_0 = E_1 - a$$

Gráficamente
(Subcrítico antes
y después)
Sin pérdidas



Pero en la realidad existen pérdidas.

Cálculo de Q_{lim} para ver influencia sobre la grada.



Suponemos:

Esc. subcrítico
Aguas abajo

Casos: No hay influencia.

$Q \geq Q_{lim} \Rightarrow$ crisis en la grada.

Casos: Hay influencia

$Q < Q_{lim} \Rightarrow$ influencia en la grada

Cálculo de Q_{lim} :

Si hay crisis en la grada $\Rightarrow$

$$\epsilon = 1 \wedge X_0 = m^{2/3} \wedge K = K_{lim} = \frac{Q_{lim}}{h_{c1}}$$

Recordando la ec. (3)

$$\frac{(X_0 + K)^2}{2} + \frac{M}{X_0} = \frac{X_1^2}{2} + \frac{1}{X_1}$$

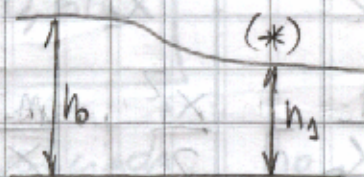
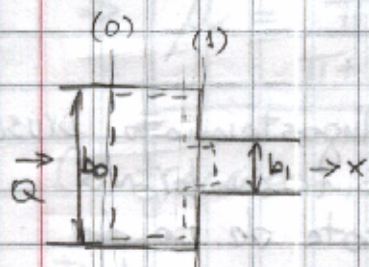
Esta queda:

$$\frac{(m^{2/3} + K_{lim})^2}{2} + \frac{M}{m^{2/3}} = \frac{X_1^2}{2} + \frac{1}{X_1}$$

Despejando K_{lim}

Se obtiene $Q_{lim} = K_{lim} \cdot h_{c1}$

Angostamiento brusco sin cambio de cota de fondo.



(*) Empíricamente: Se ha demostrado que se cumple ley hidrostática en el angostamiento.

TCP s/x : $\sum F_x = \int Q \rho (v_s - v_e)$

$$F_{p0} - F_{p1} = \int Q \left[\frac{Q}{b_1 h_1} - \frac{Q}{b_0 h_0} \right]$$

$$\gamma \frac{h_0}{2} (h_0 \cdot b_0) - \gamma \frac{h_1}{2} (h_1 \cdot b_0) = \int \frac{Q^2}{b_0} \left[\frac{b_0}{b_1} \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right]$$

$$\gamma b_0 \left[\frac{h_0^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right] = \int \frac{Q^2}{b_0} \left[\frac{b_0}{b_1} \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right]$$

$$\left[\frac{h_0^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right] = \underbrace{\frac{Q^2}{\gamma b_0^2}}_{h_{c0}} \left[\frac{b_0}{b_1} \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right]$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{h_{c0}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{h_{c0}} \right)^2 = \left(\frac{b_0}{b_1} \cdot \frac{h_{c0}}{h_1} - \frac{h_{c0}}{h_0} \right)$$

$$X_0 = \frac{h_0}{h_{c0}} ; X_1 = \frac{h_1}{h_{c0}} ; m = \frac{b_0}{b_1}$$

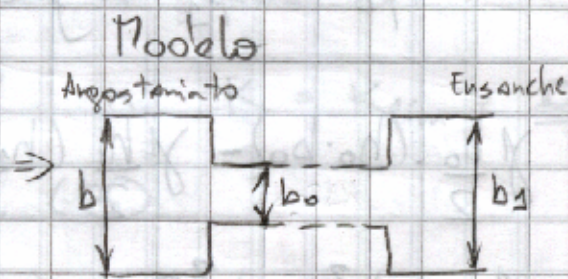
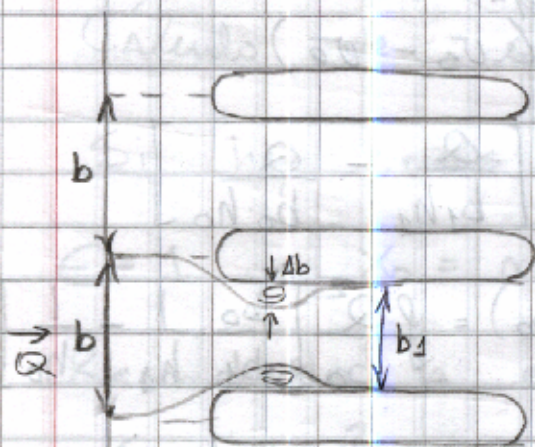
$$\frac{X_0^2}{2} - \frac{X_1^2}{2} = \frac{m}{X_1} - \frac{1}{X_0}$$

$$\boxed{\frac{X_0^2}{2} + \frac{1}{X_0} = \frac{X_1^2}{2} + \frac{m}{X_1}}$$

Angostamiento brusco
Sin cambio
cota de fondo

Aplicación en casos Reales.

Pilotes de un Puente.



$$b_0 = b_1 - 2 \cdot \Delta b$$

Calculando Δb puedo
estimar la altura aguas
arriba.

Resultados experimentales.

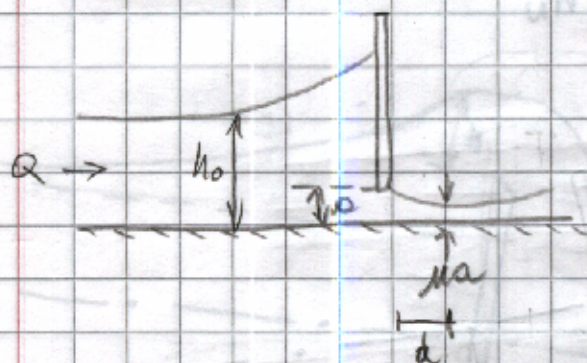
Coef. de Contracción Compuerta.

Contracción completa : $\frac{h_o}{a} \geq 8$

$$\Rightarrow \left| \mu = \frac{\pi}{\pi + 2} \approx 0,611 \right|$$

Contracción influenciada $\frac{h_o}{a} < 8$

Determinación empírica de μ .



$$\begin{aligned} m &= f(Re, We, \frac{h_0}{a}, \frac{h_1}{a}) \\ m &= f_n(\frac{h_0}{a}) \end{aligned}$$

Velazquez monovista de Dan Pancha (1965)

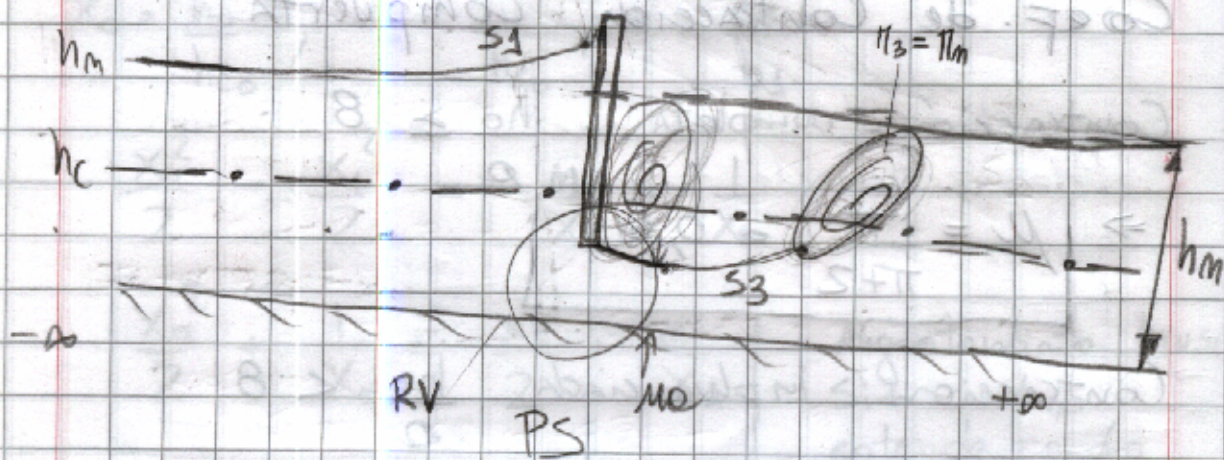
$$\boxed{d = 2 \cdot a}$$

Si Re alto $\Rightarrow$ las propiedades del flujo son indep. del Re .

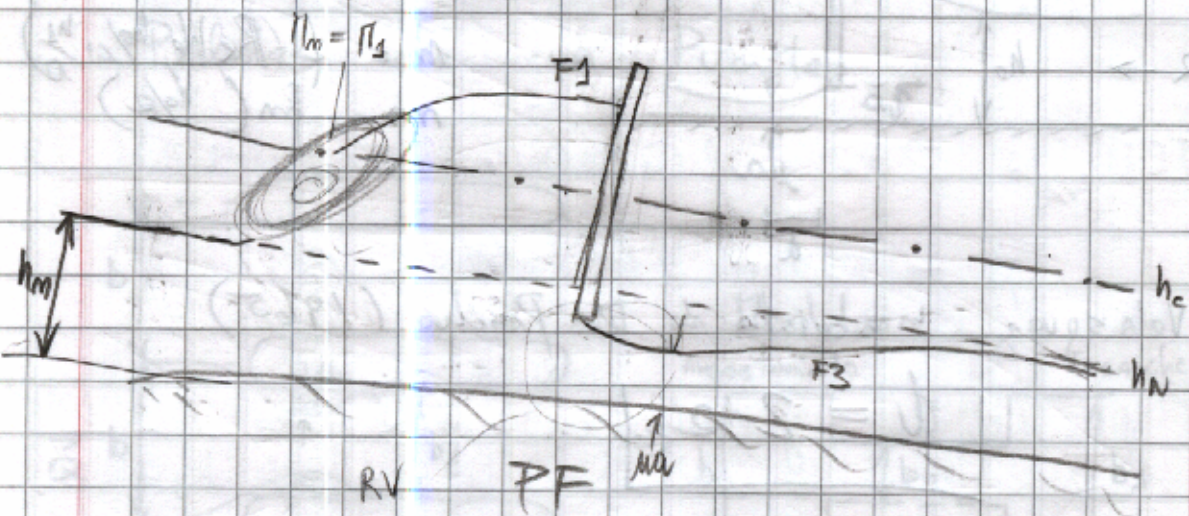
$We \Rightarrow$ efectos de tensión sup. solo relevantes en laboratorio.

Ejes Hidráulicos

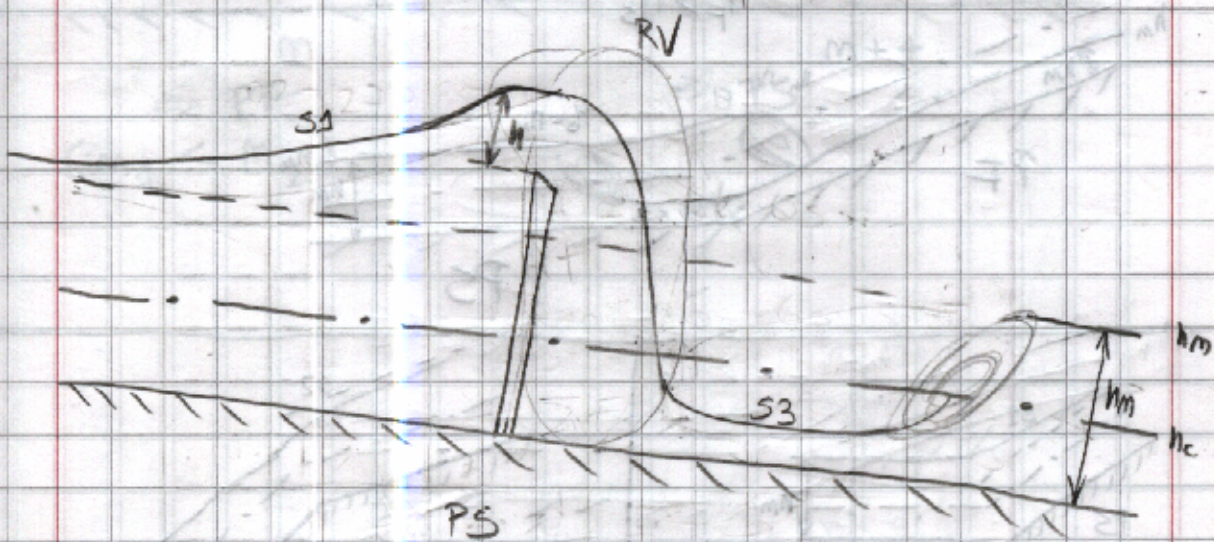
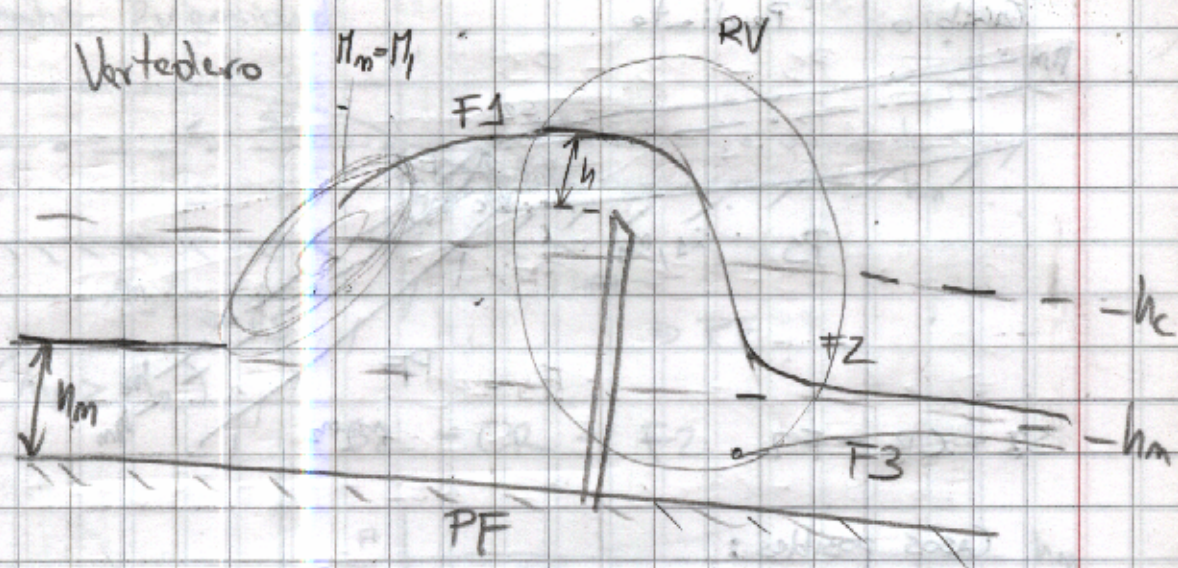
Compuerta



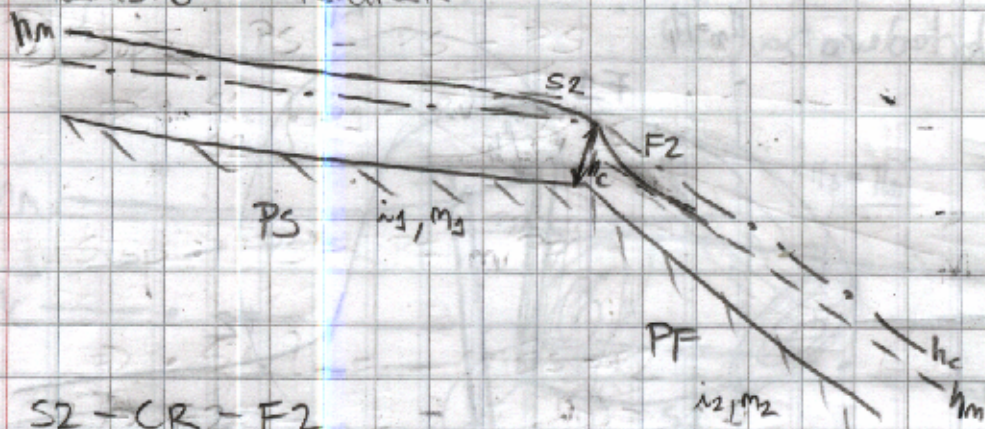
S1 - RV - S3 - RE - h_n



h_n - RE - F1 - RV - F3

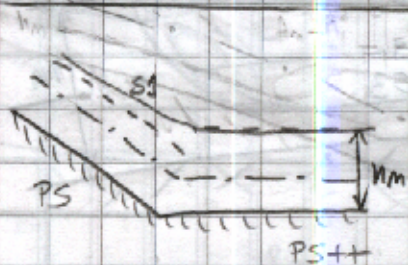
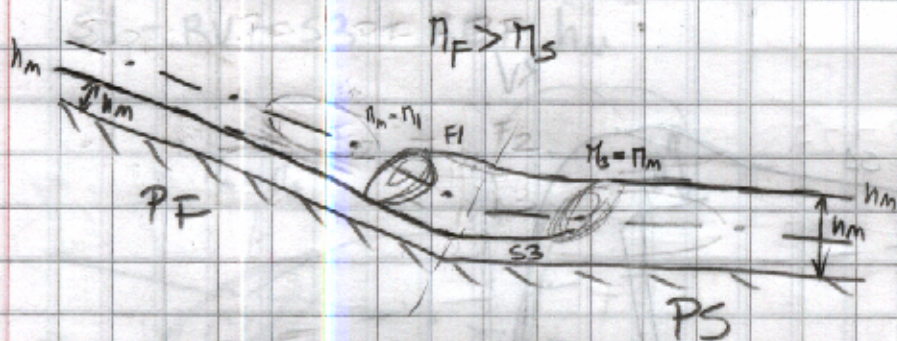


Cambio Padiate

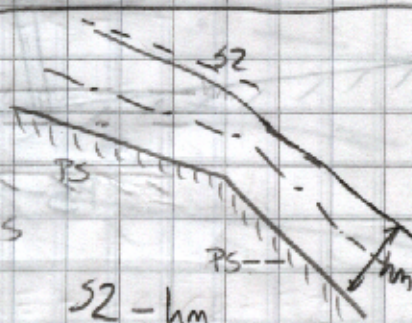


S2 - CR - F2

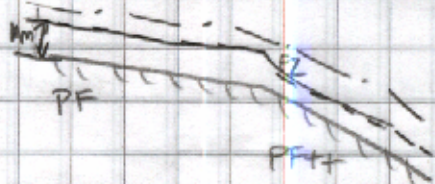
Casos posibles:



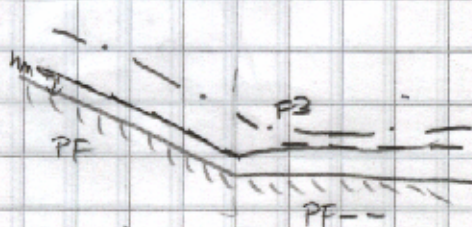
S1 - hm



S2 - hm



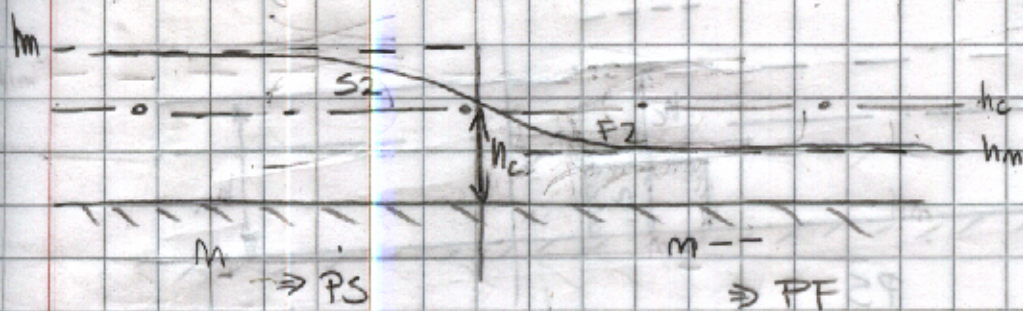
hm - F2



hm - F3

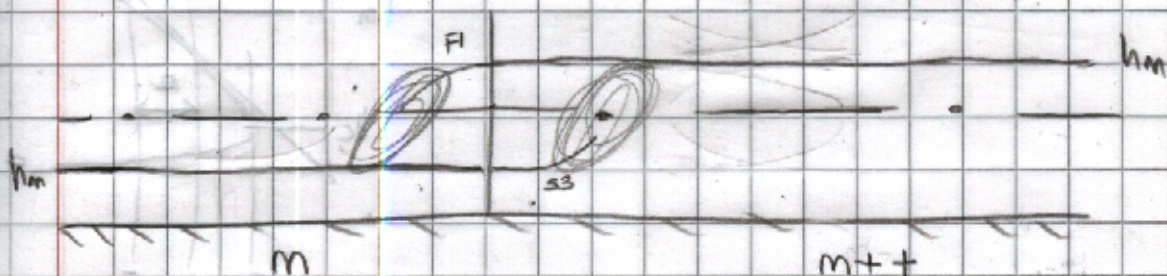
Cambio Posibilidad

(dotado) 2A1012



$(m_1 > m_2)$

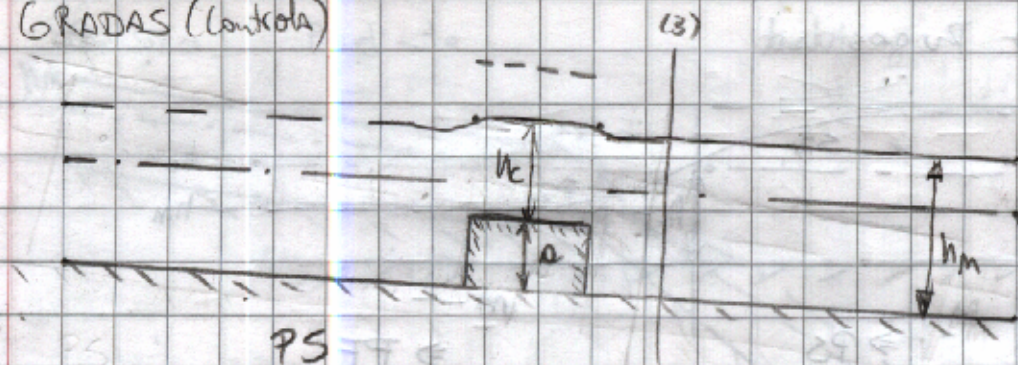
S2 - CR - F2



$(m_1 < m_2)$

etc.

GRADAS (kontrola)



$$h_c - h_m$$

