

Cuaderno de Clases: CI41A

Capítulo B4: Escurrimiento Gradualmente Variado.

Javier A. Rovegno Campos

19 de junio de 2007

Licencia del Documento: Creative Commons 3.0 [Detalles de la Licencia]¹

Este documento contiene una recopilación de los apuntes, tomados por el Autor, en las clases de Hidráulica del Año 2006 impartidas en la FCFM por los profesores:

- Aldo Tamburrino
- Yarko Niño

Datos del Autor:

Correos del Autor: jrovegno@ing.uchile.cl , tatadeluxe@gmail.com

Página Personal del Autor: <http://www.cec.uchile.cl/~jrovegno/>

Este Documento forma parte de la primera etapa BETA del *Proyecto Colaborativo WikiCursos*.

Para más información sobre WikiCursos visitar:
<http://ideaschile.wordpress.com/>

¹<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

CONTORNOS ABIERTOS:

1. Características Generales del Esgurrimiento en Canales.

- 1.1. Características generales del esgurrimiento en canales abiertos.
- 1.2. Clasificación de los esgurrimientos.
- 1.3. Características geométricas de los canales.
- 1.4. Distribución de velocidades. Coeficientes de Coriolis y de Boussinesq.
- 1.5. Distribución de presiones en canales.

2. Ecuaciones fundamentales del Esgurrimiento en Canales.

- 2.1. Ecuación de Continuidad.
- 2.2. Ecuación de la Energía.
 - 2.2.1. Ecuación de Bernoulli en canalizaciones abiertas. Concepto de Energía Específica.
 - 2.2.2. Esgurrimiento Crítico. Propiedades.
 - 2.2.3. Cálculo de alturas críticas en secciones regulares e irregulares.
 - 2.2.4. Esgurrimientos subcrítico y supercrítico. Noción de control hidráulico.
- 2.3. Ecuación de la Cantidad de Movimiento.
 - 2.3.1. El Teorema de la Cantidad de Movimiento en canales. Aplicaciones.
 - 2.3.2. La función Momenta y sus propiedades.
 - 2.3.3. Resalto hidráulico Clasificación, Ecuaciones de Belanger, Características geométricas del resalto completo (longitud, perfil).

3. Resistencia al Esgurrimiento.

- 3.1. Generalidades. Esfuerzo de corte medio.
- 3.2. Ecuaciones de resistencia. Chézy, Manning, fórmulas racionales.
- 3.3. Esgurrimiento Uniforme. Determinación de altura normal en secciones regulares e irregulares.

4. Esgurrimiento Gradualmente Variado.

- 4.1. Teoría y ecuaciones generales.
- 4.2. Análisis y clasificación de ejes hidráulicos.
- 4.3. Composición de ejes hidráulicos.
- 4.4. Métodos de cálculo en secciones regulares.
- 4.5. Aplicaciones.

5. Esgurrimiento Rápídamente Variado.

- 5.1. Vertederos. Características generales y clasificación.
- 5.2. Vertedero en pared delgada con napa libre. Teoría de Boussinesq. Fórmulas prácticas.
- 5.3. Vertederos triangulares en pared delgada sin influencia y con influencia de aguas abajo.
- 5.4. Otras singularidades en canales. Ensanches , angostamientos, transiciones , flujo en torno a machones.

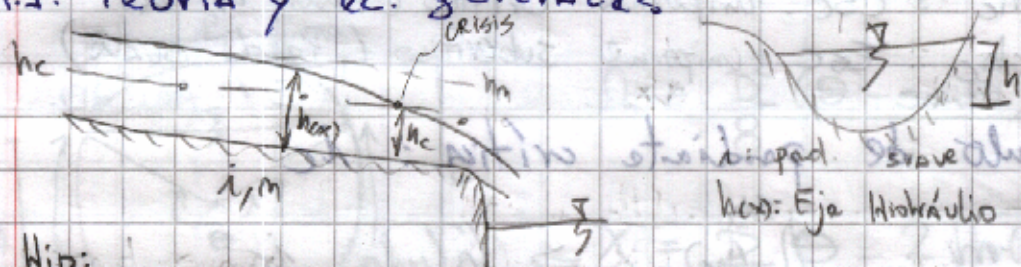
Valida ley $\leftrightarrow$ LC casi paralelas
hidrostática

$h(x)$

CAT 26-10

4. Esc. Gradualmente Variado.

4.1. Teoría y ec. generales

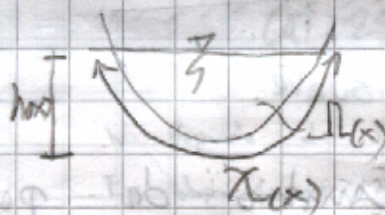
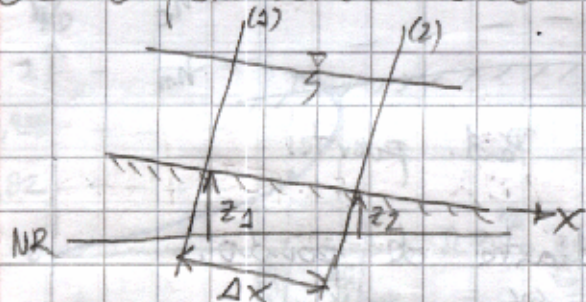


hcx : Eje Hidráulico

Hip:

- Curvatura LC pequeña $\Rightarrow$ válida ley hidrostática.
- Flujo Permanente - Sección prismática del canal
- * Pendiente constante a lo largo del canal
- Pendiente pequeña $\Rightarrow \cos \theta \sim 1$ ($p = \gamma h \cos \theta$)

Ec. diferencial del Eje Hidráulico $h(x)$



$$B_1 = B_2 + \Delta B \Rightarrow \frac{dB}{dx} dx = -\Delta B = -J \cdot dx$$

$$B_2 = B_1 + \frac{dB}{dx} \cdot dx \Rightarrow \frac{dB}{dx} = -J$$

Sabemos: $B = E + Z \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$

$$\frac{dB}{dx} = \frac{dE}{dx} + \frac{dZ}{dx} = -J$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dE}{dx} = i - J \right|$$

Flujo Uniforme:

$$h = h_m \rightarrow E(h_m) = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{J = i}$$

$$E = \frac{\alpha Q^2}{2g\Omega^2} + h \cos \theta \quad \parallel \alpha \approx \cos \theta \approx 1$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} + h \quad \Bigg| \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Q^2}{2g} \cdot (-2) \frac{1}{\Omega^3} \cdot \frac{d\Omega}{dx} + \frac{dh}{dx}$$

$$= -\frac{Q^2}{g\Omega^3} \left(\frac{d\Omega}{dx} \cdot \frac{dh}{dx} \right) + \frac{dh}{dx} \quad \parallel \left[Fr^2 = \frac{Q^2 \Omega}{g\Omega^3} \right] \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dx} = \left(-\frac{Q^2 \Omega}{g\Omega^3} + 1 \right) \frac{dh}{dx} = i - J$$

$\underbrace{\frac{Q^2 \Omega}{g\Omega^3}}_{Fr^2}$

(Back Water - PROFILE)

$$\Rightarrow \left[\frac{dh}{dx} = \frac{i - J}{1 - Fr^2} \right] \quad (1)$$

Ec. diferencial del
Eje hidráulico $h(x)$

h, J, Fr son $f(x)$

Ec. no válida en entornos de la crisis
(No se cumple hidrostática, pues LC no tienen una
curvatura pequeña)

* Como estimar J : si conozco C_f :

$$\zeta_0 = \gamma R_H \cdot J = f \cdot C_f \cdot \bar{v}^2$$

$$\Rightarrow J = \frac{C_f}{g R_H(x)} \bar{v}^2 \quad ; \quad \bar{v} = \frac{Q}{\Omega(x)}$$

$$\left[J = \frac{C_f \cdot (Q)^2}{g R_H (\Omega)^2} \right]$$

* Como estimar J con la ec. de Manning.
(Manning = Ley de Resistencia)

- Suponemos que Manning válida para G.V.

$$\Rightarrow \frac{Q \cdot m}{\sqrt{J}} = \Omega R_H^{2/3} \Rightarrow J = \left(\frac{Qm}{\Omega \cdot R_H^{2/3}} \right)^2 \quad (3)$$

- Canal muy ancho $\sim i = 0$
- Canal muy ancho $\sim m = \text{cherry}$ } solución analítica.

(2) $\wedge$ (3) $\Rightarrow$ (1)

$$\left[\left(1 - \frac{Q^2 l(m)}{g \cdot A(m)} \right) \frac{dh}{dx} - i + \left(\frac{Q \cdot m}{A(m) \cdot R_H(m)} \right)^2 \right] = 0$$

EDO 1^{er} orden No-lineal

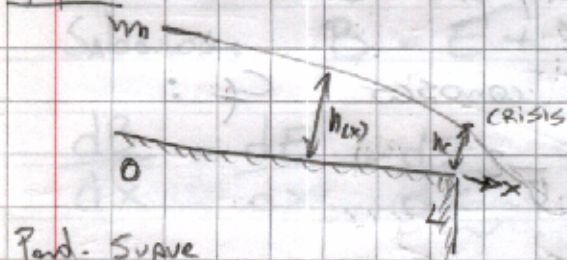
* Requiere de UNA CB: $x = x_0$; $h = h_0$

→ Esc. subcrítico la CB es aguas abajo

→ Esc. supercrítico la CB es aguas arriba.

⇒ Se debe determinar si $h(x)$ es mayor o menor que h_c .

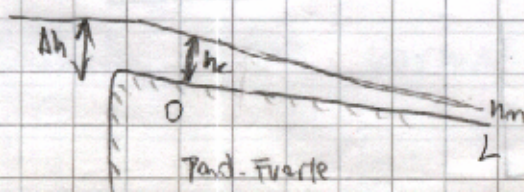
Ejemplo: Caida libre



CB: $h = h_c$; $x = L$

Parad. Suave

Ejemplo: Embalse.

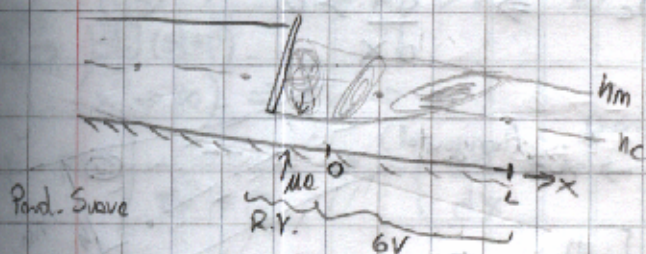


CB: $h = h_c$; $x = 0$

Parad. Fracte

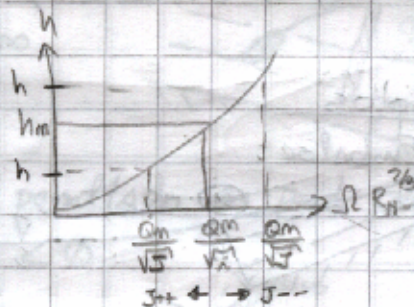
Ejemplo: Compuerta

$$\left(\frac{h_c}{h}\right)^3 = Fr^2$$



CB: $x=0, h = \mu \Delta$

$$\left(\frac{dh}{dx}\right) = \frac{\text{SIGNO} (i - J)}{\text{SIGNO} (1 - Fr^2)}$$



$$\begin{aligned} h > h_c &\Rightarrow 1 - Fr^2 > 0 \quad \text{F.J.D. (Río)} \\ h < h_c &\Rightarrow 1 - Fr^2 < 0 \quad \text{(Towante)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h < h_m &\Rightarrow i - J < 0 \\ h > h_m &\Rightarrow i - J > 0 \end{aligned}$$

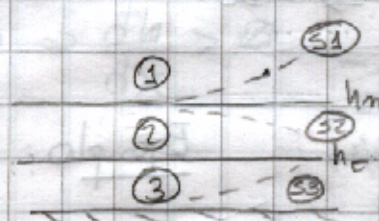
(CAT. 28-10.)

4.2. Analisis y clasificación de ejes hidráulicos

Clasificamos: * Según Ponderate < Suave ($h_m > h_c$)
Fuerte ($h_m < h_c$)
 $Fr^2 < 1$

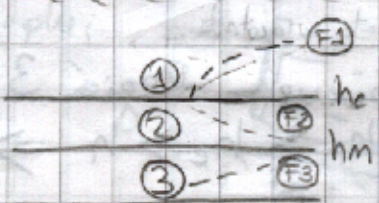
- Según ZONA:

→ Ponderate suave:



$\frac{dh}{dx}$	$1 - Fr^2$	$i - J$
+	+	+
-	+	-
+	-	-

→ Ponderate fuerte:



+	+	+
-	-	+
+	-	-

Suponiendo: $AR^{2/3} \sim h^m$

$$A \sim h^m \Rightarrow$$

$$r = 2m + 1$$

3 par
escribir

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \left(\frac{h_m}{h}\right)^m}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^r}$$

* Parediente Suave - Region 1 (Río Paralelizado en pond. suave)

- (S1) : $h > h_m > h_c \Rightarrow \frac{dh}{dx} > 0$

Inglés MI (mild)

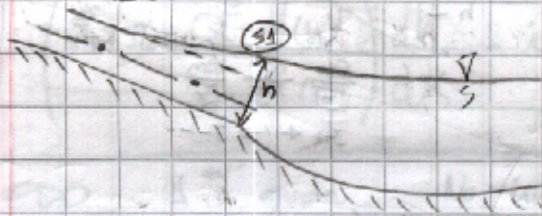
$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (h \rightarrow \infty)$

$\Rightarrow \begin{cases} J \rightarrow 0 \\ Fr^2 \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dh}{dx} \rightarrow 0 \end{cases}$ (horizontal)

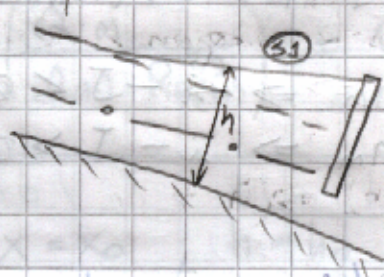
$(x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (h \rightarrow h_m) \Rightarrow \frac{dh}{dx} \rightarrow 0$

Ejemplos

Embalse:



Compuerta:

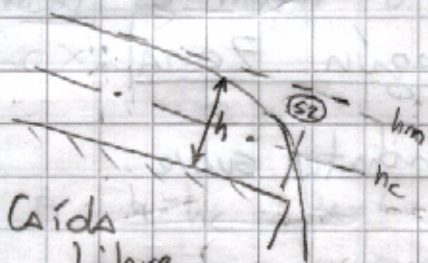


* Parediente Suave - Region 2 (Río deprinido en pond suave)

- (S2) : $h_m > h > h_c \Rightarrow \frac{dh}{dx} < 0$

$(h \rightarrow h_c) \Rightarrow Fr^2 \rightarrow 1$

$\Rightarrow \frac{dh}{dx} \rightarrow -\infty$



En la práctica en la crisis

Ejemplo: Caída Libre

no se cumple hidrostática

$\Rightarrow$ En la realidad la pendiente es acotada.

* Parediente Suave - Region 3 (Torrente deprinido en pond suave)

- (S3) : $h_m > h_c > h \Rightarrow \frac{dh}{dx} > 0$

$(h \rightarrow h_c) \Rightarrow \frac{dh}{dx} \rightarrow +\infty$

Ejemplo:

Entre contracción y un Resalto al pie o rechazado



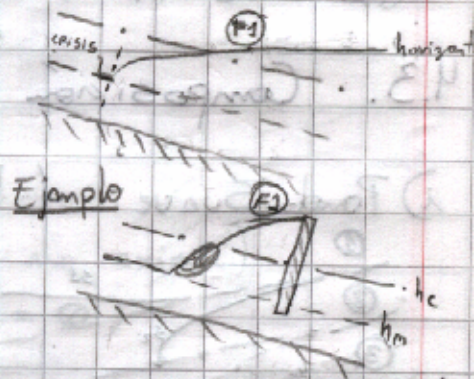
* Pend. Fuerte - Region 1 (Río peraltado en pend. fuerte)

Ingles $\rightarrow$ $\textcircled{F1}$: $h > h_c > h_m \Rightarrow \frac{dh}{dx} > 0$

$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (h \rightarrow \infty)$

$\Rightarrow \begin{cases} J \rightarrow 0 \\ Fr^2 \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dh}{dx} \rightarrow i \end{cases}$ (horizontal)

$(x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (h \rightarrow h_c) \Rightarrow \frac{dh}{dx} = \infty$



* Pend. Fuerte - Region 2 (Torrente peraltado en pend. fuerte)

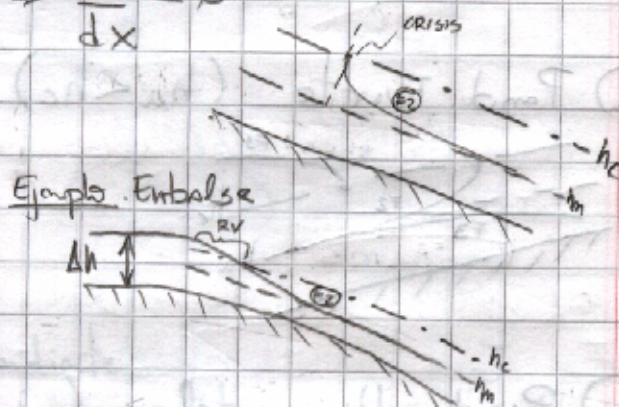
$\textcircled{F2}$: $h_c > h > h_m \Rightarrow \frac{dh}{dx} < 0$

$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (h \rightarrow h_m)$

$\Rightarrow \frac{dh}{dx} \rightarrow 0$

$(x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (h \rightarrow h_c)$

$\Rightarrow \frac{dh}{dx} \rightarrow -\infty$



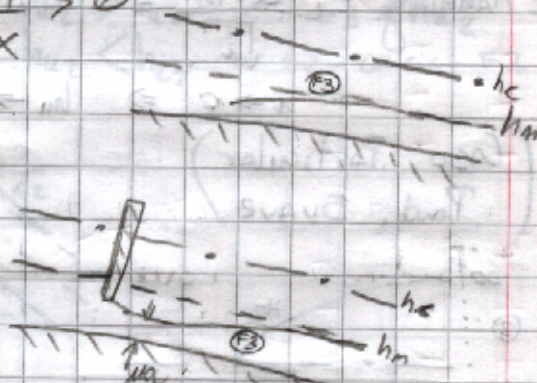
* Pend. Fuerte - Region 3 (Torrente deprimido pend. fuerte)

$\textcircled{F3}$: $h_c > h_m > h \Rightarrow \frac{dh}{dx} > 0$

$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (h \rightarrow h_m)$

$\Rightarrow \frac{dh}{dx} \rightarrow 0$

Ejemplo:



$$\frac{dh}{dx} = i \cdot \frac{1 - \left(\frac{h_m}{h}\right)^m}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^r}$$

Ejes Hidráulicos

(AT (02/11))

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - f}{1 - Fr^2}$$

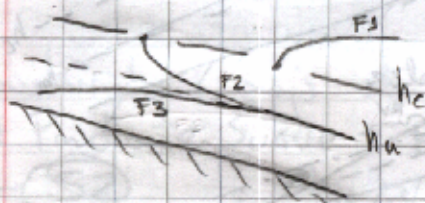
4.3. Composición de Ejes hidráulicos.

i) Pand. Suave. ($h_u > h_c$)



- Válido en tramos largos
- En contracciones NO hay ejes
- 3 posibles ejes dada una pendiente.

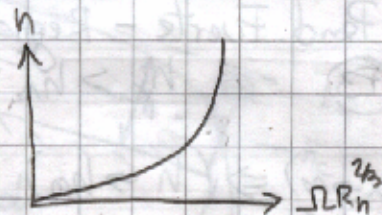
ii) Pand. Fuerte ($h_u < h_c$)



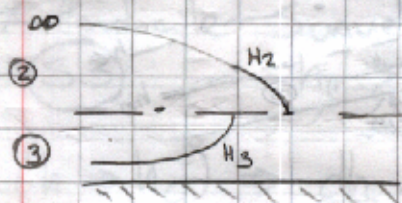
iii) Pand. Horizontal ($i=0$) $\Rightarrow$ ($h_u = \infty$)

$$\text{Manning} : \frac{Q \cdot M}{\sqrt{i}} = \Omega(h_u) R_h(h_u)^{2/3}$$

$$i \rightarrow 0 \Rightarrow h_u \rightarrow \infty$$



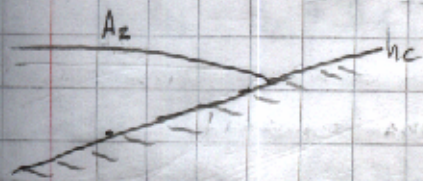
(Caso Particular)
Pand. Suave



iv) Pndl. Crítica: ($h_u = h_c$) (Caso Particular)
Pndl. Fuerte



v) Pndl. Adversa: ?? (h_m no existe)
($h_c = \emptyset$)



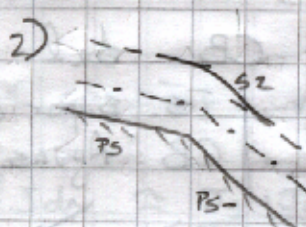
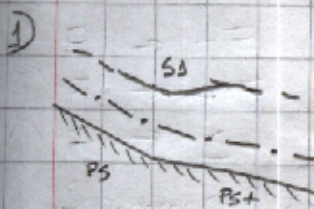
Ejercicios: Cambio de Pndiate

1) $S \rightarrow +S$

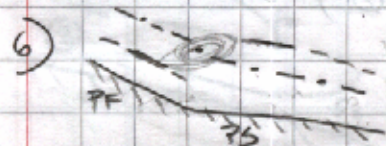
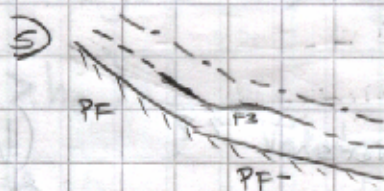
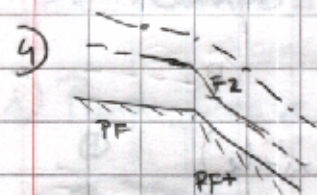
2) $S \rightarrow -S$

3) $S \rightarrow F$

$h_{u1} > h_{c1} \wedge h_{u2} > h_{c2} \wedge h_{u1} < h_{u2}$ S1
 $h_{u1} > h_{c1} \wedge h_{u2} > h_{c2} \wedge h_{u1} > h_{u2}$ S2
 $h_{u1} > h_{c1} \wedge h_{u2} < h_{c2} \wedge$ S2 - CRISIS - F2



- 4) $F \rightarrow +F$ $h_{u1} < h_{c1}$ $h_{u2} < h_{c2}$ $h_{u1} > h_{u2}$
 5) $F \rightarrow -F$ $h_{u1} < h_{c1}$ $h_{u2} < h_{c2}$ $h_{u1} < h_{u2}$
 6) $F \rightarrow S$ $h_{u1} < h_{c1}$ $h_{u2} > h_{c2}$ RESALTO



(CAT (4-11))

4.4 Método de cálculo de Ejes Hidráulicos (GV) en secciones regulares.

Ec. Ejes Hidráulicos : $\frac{dh}{dx} = \frac{i - J}{1 - Fr^2}$ (1)

$Fr^2 = \frac{Q^2 \cdot l}{g \cdot L^3} = f_m(h)$ $J = \left(\frac{Qm}{2Rh^{2/3}} \right)^2 = f_m(h)$

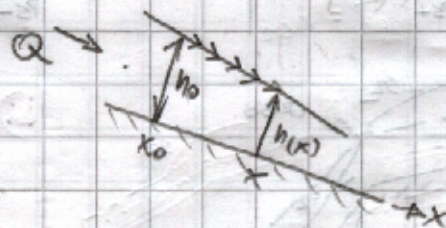
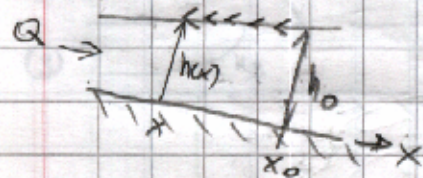
- Determinar las CB del asc.

Esc. Subcrítico

CB: Aguas Abajo

Esc. Supercrítico

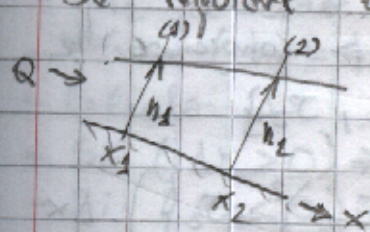
CB: Aguas Arriba



ES $h(x)$ con $x \leq x_0$

$h(x)$ con $x \geq x_0$

- (1) No se puede Resolver Analíticamente.
Se requiere desarrollar un método numérico



línea de Energía : $\frac{dB}{dx} = -J$ (2)

+ En esc. uniforme $J = i = ck$.

$$(2) B_1 = B_2 + \Delta t \Rightarrow B_1 = B_2 + \int_{x_1}^{x_2} J \cdot dx$$

Def: $\bar{J} = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \int_{x_1}^{x_2} J dx$; $\Delta x = x_2 - x_1$

$$\Rightarrow B_A = B_2 + \bar{J} \cdot \Delta x \quad \parallel B = E + z_f$$

$$\Rightarrow E_1 + z_{f1} = E_2 + z_{f2} + \bar{J} \cdot \Delta x \quad \parallel z_{f1} - z_{f2} = i \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2 - E_1 = (i - \bar{J}) \cdot \Delta x} \quad (3)$$

Método aproximado de solución de Eje hidráulico
(Método de paso estándar)

Sea

$$E_1 = h_1 + \frac{Q^2}{2g A^3(h_1)}$$

$$J_1 = \left(\frac{Qm}{A(h_1) R_H(h_1)} \right)^2$$

$$E_2 = h_2 + \frac{Q^2}{2g A^3(h_2)}$$

$$J_2 = \left(\frac{Qm}{A(h_2) R_H(h_2)} \right)^2$$

Válido para Δx pequeño $\checkmark$ $h_1 \sim h_2$

$$\text{Aprox: } \bar{J} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} J dx \approx \frac{J_1 + J_2}{2} \quad (\text{Aprox. 1})$$

$$\approx \sqrt{J_1 \cdot J_2} \quad (\text{Aprox. 2})$$

$$(3)_{\text{aprox.}} \quad h_2 + \frac{Q^2}{2g A^3(h_2)} - \left(h_1 + \frac{Q^2}{2g A^3(h_1)} \right) = \left(i - \frac{J_1 + J_2}{2} \right) \cdot \Delta x$$

Relación entre h_1 y h_2

* Método 1: (Eugonoso)

- Dado ($\Delta x = cte$)

+ Sea en este caso esc. subcrítico $\Rightarrow$ conocemos h_2

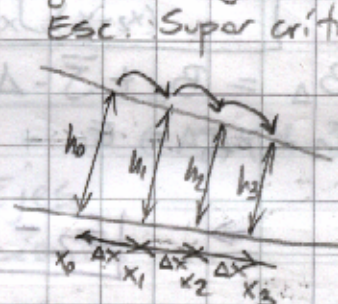
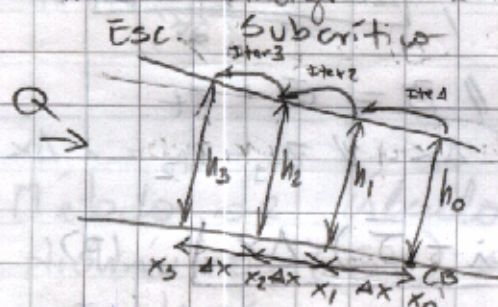
- Calculamos CB: $h_2 \rightarrow \{E_2, J_2\}$

- Calculamos h_1 :

$$E_2 - \left(h_1 + \frac{Q^2}{2g S(h_1)^2} \right) = \left(\bar{i} - \left\{ \frac{\left(\frac{Q_m}{\Omega_m R_H(h_1)} \right)^2 + J_2}{2} \right\} \right) \Delta x$$

$\Rightarrow$ Obtengo h_1 :

$\Rightarrow$ Repito para las alturas de escurrimiento. Aguas arriba utilizando la altura de aguas abajo calculada.



+ En el caso esc. supercríticos $\Rightarrow$ conocemos h_1

- Calculamos CB: $h_1 \rightarrow \{E_1, J_1\}$

- Calculamos h_2 :

* Método 2: (Simple)

Dado ($\Delta h = cte$)

$$E_2 - E_1 = (\bar{i} - \bar{J}) \Delta x$$

- Me doy h_1 y h_2 .

- Calculamos: $h_1 \rightarrow \{E_1, J_1\}$ y $h_2 \rightarrow \{E_2, J_2\}$

- Cálculo de Δx .

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{\bar{i} - \left(\frac{J_1 + J_2}{2} \right)}$$

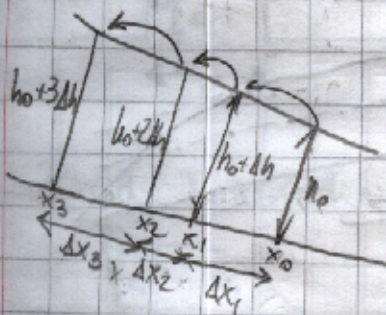
→ Esc. sub crítico : CB aguas abajo.

- h_2 conocido S_2 S_1, S_3
- Sea ($h_1 = h_2 + \Delta h$) $\wedge$ Elija ($\Delta h > 0$) $\vee$ ($\Delta h < 0$)
- Cálculo Δx
- Si ($\Delta x > 0$) $\Rightarrow (h_1' = h_1 \wedge h_2' = h_2 + \Delta h)$
- Si ($\Delta x < 0$) $\Rightarrow$ Elija ($\Delta h < 0$) $\vee$ ($\Delta h > 0$)

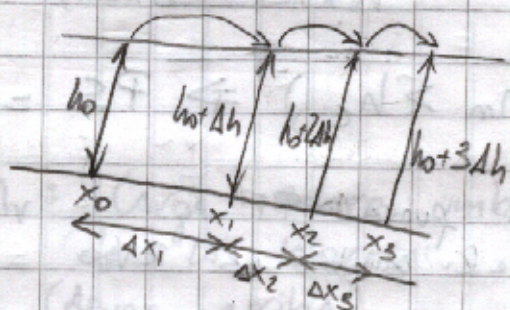
→ Esc. super crítico : CB aguas arriba.

- h_1 conocido F_1, F_3 F_2
- Sea ($h_2 = h_1 + \Delta h$) $\wedge$ Elija ($\Delta h > 0$) $\vee$ ($\Delta h < 0$)
- Cálculo Δx
- Si ($\Delta x > 0$) $\Rightarrow (h_1' = h_1 \wedge h_2' = h_1 + \Delta h)$
- Si ($\Delta x < 0$) $\Rightarrow$ Elija ($\Delta h < 0$) $\vee$ ($\Delta h > 0$)

Esc. sub crítico



Esc. super-crítico



EXCEL

Δh

$h_2 \quad E_2 \quad J_2 \quad h_1 \quad E_1 \quad J_1 \quad J_m \quad \Delta x \quad x$

Procedimiento: $\left[\frac{\Delta E}{\Delta x} = 1 - \bar{J} \right]; \Delta E = E_{i+1} - E_i$ donde $E_i = E(h_i)$
 $\bar{J} = \frac{1}{2}(J_i + J_{i+1})$ $J_i = J(h_i)$

• CB: $x = x_0, h = h_0$

HEC-RAS

$x_0, h_0 \rightarrow A_0, R_0, J_0, V_0 = Q/A_0$
 $\left[h_1 = h_0 + \Delta h \right]$

$A_1, R_1, V_1 \rightarrow E_1, J_1$

h_1, x_1

$x_1 = x_0 + \Delta x_1$

$\Delta E_1 = E_1 - E_0 \rightarrow \Delta x_1 = \frac{\Delta E_1}{1 - \bar{J}_1}$
 $\bar{J}_1 = \frac{1}{2}(J_1 + J_0)$

4.5 Aplicaciones (Cálculo de Ejes Hidráulicos)

Ejemplo:
 $Q = 30 \text{ m}^3/\text{s}$

$$i = 0.0005$$

$$m = 0.014$$

Caida libre



Vamos a si es PF u PS:

$$q = \frac{Q_0}{b} = 5 \Rightarrow h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \Rightarrow h_c = 1.366 \text{ (m)}$$

Manning: $\frac{Q_m}{\sqrt{i}} = \Omega(h_m) \cdot R_h(h_m)$

$$\frac{Q_m}{\sqrt{i}} = \left(\frac{b \cdot h}{b + 2h} \right)^{2/3} \cdot h \Rightarrow h_m = 2.533 \text{ (m)}$$

$$(h_m > h_c) \Rightarrow \text{PS} =$$

Si fuera PF
el cambio es RV.

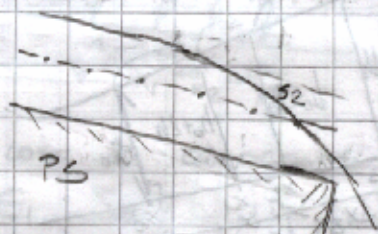
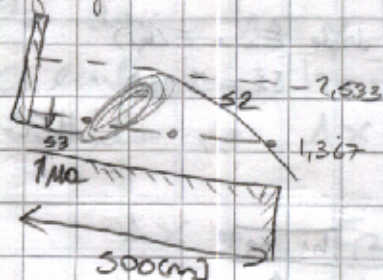


TABLA: EXCEL: $\Delta h =$

$h_2 \quad E_2 \quad J_2 \quad h_1 \quad E_1 \quad J_1 \quad J_m \quad \Delta x \quad x \quad h$

Agregando una compuerta



Cálculo del S_3 y S_2 .

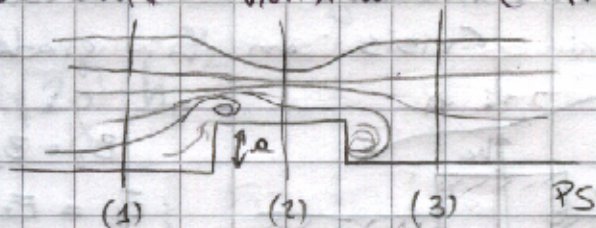
5. ESC. Rápidamente Variado (RV) UT(7-1)

Ejemplo: Grada:

$$B_1 = B_2 + \Delta s_{12}$$

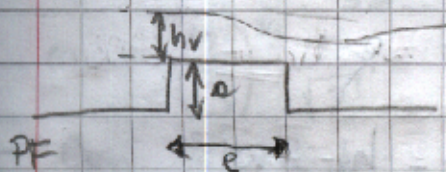
$$B_2 = B_3 + \Delta s_{23}$$

$$\rightarrow E_1 = E_2 + \Delta_2 + \Delta s_{12} \quad \wedge \quad E_2 + \Delta = E_3 + \Delta s_{23}$$



5.1 Vertederos Características Generales y Clasificación.

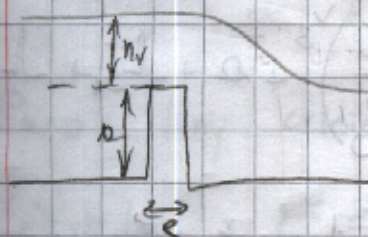
* Pared Gruesa (Grada) $\left(\frac{a}{h_v} > 3\right)$



* Pared Delgada



* Pared Intermedia



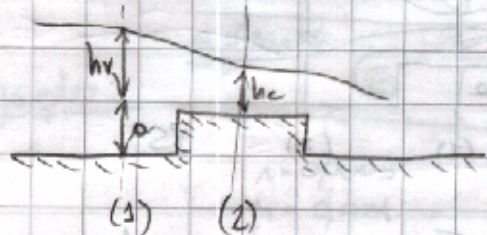
h_v : Carga sobre umbral de la barrera (Aguas arriba)

Se mide en una sección donde existe distribución hidrostática de presiones.

(RV)

GRAN CURVATURA DE LAS LÍNEAS CORRIENTE.

⇒ Grada: Vertedero de Pared Gruesa
(Caso: Crisis en la grada)

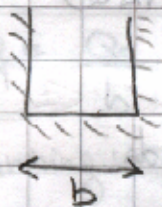


$$B_1 = B_2 + l_{se} + l_f$$

$$E_1 = E_2 + 0 + l_{se} + l_f \quad (1)$$

Crisis: $E_2 = E_c$

(Caso: Canal rectangular)



$$E_c = \frac{3}{2} h_c$$

$$q = \frac{Q}{b}$$

$$E_c = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$$

Dado: $h_v \Rightarrow$ Calcular q :

$$E_1 = \underbrace{\frac{q^2}{2g h_1^3}}_{h_{vel}} + \underbrace{h_1}_{h_p} ; h_1 = h_v + 0$$

$$\frac{q^2}{2g(h_v + 0)^3} + (h_v + 0) = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} + 0 + l_{se} + l_f \quad (2)$$

h_{vel} de aproximación

• Supuesto: $h_{vel} \approx$ despreciable ("o muy grande")

$$(2) \Rightarrow h_v + 0 = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} + 0 + l_{se} + l_f$$

• Supuesto: $l_{se} + l_f \approx 0$ (Despreciables)

$$\Rightarrow h_v = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow q = \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \sqrt{g} h_v^{3/2}$$

Llevando a una expresión general:

$$Q = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2}}}_m \sqrt{2g} h_v^{3/2}$$

Def: E_c del vertedero:

$$Q = m \sqrt{2g} h_v^{3/2}$$

m : coef. de gasto del vertedero.

Valor de m : vert. rectangular, sin pérdida,
sin vel. de Aprox, sin influencia aguas abajo

$$m = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,385$$

- Con Pérdida singular en la entrada.

$$S_{ea} = \Delta s_e = K_e \frac{v^2}{2g}$$

Pero: Hay crisis en la grada $\Rightarrow E_c = \frac{3}{2} h_c$

Sobre la Grada: $E_c = h_c + \frac{v^2}{2g} = \frac{3}{2} h_c \Rightarrow \frac{v^2}{2g} = \frac{h_c}{2}$

$$\Rightarrow \Delta s_e = K_e \frac{h_c}{2} = \frac{K_e}{2} \left(\frac{Q^2}{g}\right)^{1/3}$$

- Con Pérdida friccional en la grada

$$\Delta f = S \cdot e$$

Manning: $J = \left\{ \frac{Q_m}{\rho(h_c) R_{chc}^{1/3}} \right\}^2$

Suponamos: Canal muy ancho:

$$\Rightarrow R_h \approx h \quad \wedge \quad \Omega = b \cdot h$$

$$\Rightarrow J = \left\{ \frac{Q \cdot m}{b \cdot h_c \cdot h_c^{2/3}} \right\}^2 = \frac{Q^2 \cdot m^2}{h_c^{10/3}} \quad // \quad h_c = \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow J = \frac{g^{10/9} \cdot m^2}{Q^{2/9}}$$

$$\Rightarrow h_c = g^{-2/9} \cdot g^{10/9} \cdot m^2 \cdot e$$

Vertedero rectangular, despreciando vel. aproximación

$$h_v + \phi = \frac{3}{2} \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{1/3} + \phi + \frac{K_e}{2} \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{1/3} + g^{-2/9} \cdot g^{10/9} \cdot m^2 \cdot e$$

$$\Rightarrow h_v = \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{1/3} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{K_e}{2} + \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{-1/3} \cdot g^{-2/9} \cdot g^{10/9} \cdot m^2 \cdot e \right\}$$

$$Q = m \sqrt{2g} \cdot h_v^{3/2}$$

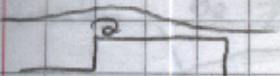
$$\Rightarrow m_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{2} + \frac{K_e}{2} + m^2 g^{10/9} \cdot g^{-2/9} \cdot e \cdot \frac{1}{h_c} \right]^{-3/2}$$

Tipos de Problemas.

- 1) Dado $Q \rightarrow \det h_v \quad \wedge \quad m$
- 2) Dado $h_v \rightarrow \det Q \quad \wedge \quad m$

Necesario iterar pues m f.m de Q

Arista Viva



$$K_e = f_m \left(\frac{Q}{h_c} \right)$$

$$\text{Si } \frac{Q}{h_c} > 3,5 \rightarrow K_e = \frac{1}{3}$$

Arista Redondeada



$$K_e = 0$$

(At. (9-11))

Flujo Subcrítico Condicionado por
AGUAS Abajo

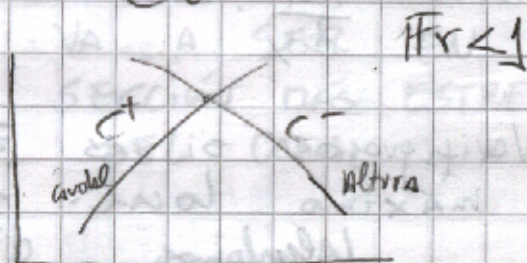
Flujo supercrítico Condicionados por
AGUAS Arriba

$$C^+ : \frac{dx}{dt} = c + v$$

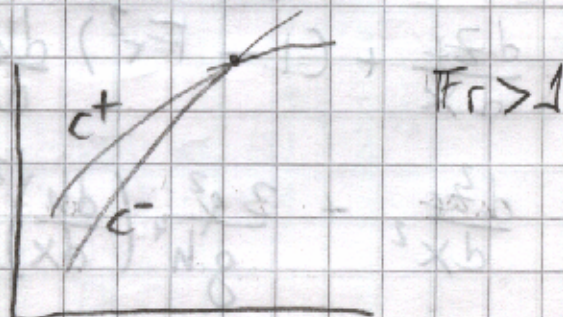
$$C^- : \frac{dx}{dt} = v - c$$

$$\text{Si } |v| < |c|$$

$$c = \sqrt{gh}$$



$$\text{Si } |c| < |v|$$



Si existe un esc. critico: ¿Dónde se Produce?

CANAL RECTANGULAR

$$B = z_f + E$$

localmente $B = \text{cte} \Rightarrow dB/dx = 0$

$$\frac{dB}{dx} = \frac{dz_f}{dx} + \frac{dE}{dx} \quad // \text{ pero}$$

$$\frac{dB}{dx} = \frac{dz_f}{dx} + \frac{dE}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} = 0 \quad (*)$$

Donde $E = h + \frac{q^2}{2gh^2} \Rightarrow \frac{dE}{dh} = 1 - \frac{q^2}{gh^3} = 1 - Fr^2$

$$\therefore \frac{dz_f}{dx} + (1 - Fr^2) \frac{dh}{dx} = 0$$

En la condición crítica $Fr = 1$

Como $\frac{dh}{dx}$ debe ser finito $\Rightarrow \boxed{\frac{dz_f}{dx} = 0}$

Verifiquemos si es z_f un mínimo o máximo local.

Calculamos

$$\frac{d^2 z_f}{dx^2}$$

$$\frac{dz_f}{dx} + (1 - Fr^2) \frac{dh}{dx} = 0 \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2 z_f}{dx^2} + \frac{3q^2}{gh^4} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \left(1 - \frac{q^2}{gh^3} \right) \frac{d^2 h}{dx^2} = 0$$

En Crisis: $Fr = 1$

$$\left. \frac{d^2 z_f}{dx^2} \right|_{Fr=1} = - \frac{3q^2}{gh^4} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 < 0 \quad 138$$

La crisis se produce en los máximos locales de ZF.

⇒ Si EXISTE CRISIS, SE PRODUCE EN LOS PUNTOS ALTOS (LOCALES) DEL CANAL.

CRISIS ⇒ EN PTOS ALTO ...

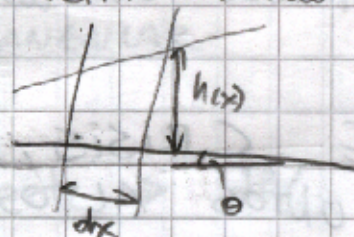
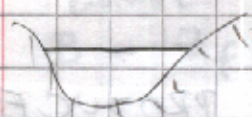
PTOS ALTO ~~⇒~~ CRISIS

TAREA: CALCULAR PARA UNA GEOMETRÍA WALOWIERA

TAREA: DEM. PARA un tramo horizontal de ancho variable.

Si HAY CRISIS ⇒ VA A SER EN LA SECCIÓN MÁS ESTRECHA DEL CANAL

4. A partir de TCM. Cálculo del Esf. Corte Medio



$$\sum F_x = \frac{\gamma \beta Q \Delta u}{g} \quad ; \quad \sum F_{ext} = F_{p1} - F_{p2} - F_0 + W \sin \theta$$

$$F_{p2} = F_{p1} + \frac{dF_p}{dx} \cdot dx + \dots \quad ; \quad F_p = P_0 A = \gamma \eta A$$

$$u_2 = u_1 + \frac{du}{dx} \cdot dx + \dots \quad ; \quad - \frac{dF_p}{dx} \cdot dx - \tau_0 x dx + \gamma A dx \sin \theta = \frac{\gamma Q}{g} \frac{du}{dx} \cdot dx$$

Además: $Q = u \cdot A$

$$\therefore - \gamma \frac{d}{dx} (\eta A) - \tau_0 x + \gamma A \sin \theta = \frac{\gamma}{g} A u \frac{du}{dx}$$

$$\eta = \frac{P}{\gamma} \quad \text{Puede demostrarse: } \frac{d\eta A}{dx} = A \frac{d\eta}{dx}$$

$$- \gamma A \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{\gamma} \right) - \tau_0 \cdot x + \gamma A \sin \theta = \frac{\gamma}{g} A \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2} \right) \quad / \quad \frac{1}{\gamma A}$$

$$\sin \theta = - \frac{dz}{dx}$$

$$- \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{\gamma} \right) - \frac{\tau_0}{\gamma R} - \frac{dz}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = 0$$

$$- \frac{\tau_0}{\gamma R} = \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z \right)$$

Por def $\frac{dB}{dx} = -J$

$$\Rightarrow \tau_0 = \gamma R \cdot J$$

↳ Esf. de corte medio

$$F_0 = \int_0^L \tau_0 x dx$$

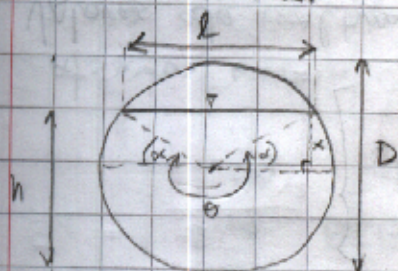
Esc. Uniforme.

Flujo uniforme $\Rightarrow W \sin \theta = F_G$
 $\Rightarrow i = J$

En teoría esta situación se da en canales infinitamente largos o se alcanza sólo asintóticamente.

En la práctica, es posible considerar que en canales largos se alcanza la condición de esc. uniforme.

Sección Circular



$$\begin{aligned} h &= \frac{D}{2} + x \\ x &= \frac{D}{2} \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

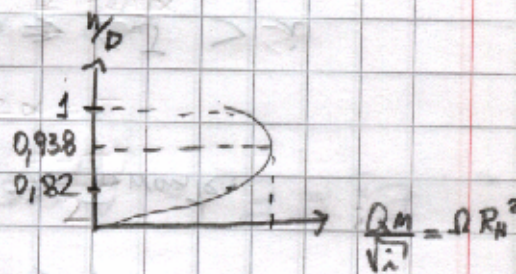
$$\begin{aligned} \theta &= 2\alpha + \pi \\ \Rightarrow x &= \frac{(\theta - \pi)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{D}{2} + \frac{D}{2} \cdot \sin \left(\frac{\theta - \pi}{2} \right) \\ &= \frac{D}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \left(1 - 2 \cdot \frac{h}{D} \right) \quad *1$$

Capacidad Máxima del acueducto:

$$\frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}} \Big|_{h=0,938} = \frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}} \Big|_{\max} \quad \text{Evaluando } \left(\frac{h}{D} \right)_{\max} \text{ en } *1$$



$$\Rightarrow \theta_{\max} = 5,29 \text{ [rad]}$$

Geometría Tubaría:

$$\begin{aligned} L &= \frac{D^2 (\theta - \sin \theta)}{8} \\ X &= \frac{D \cdot \theta}{2} \end{aligned}$$

Ley de Resistencia:

Manning:
$$\frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}} = \frac{L^{5/3}}{X^{2/3}}$$

Reemplazando:
$$\frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}} = \frac{D^{8/3} \cdot (\theta - \sin \theta)^{5/3} \cdot 2^{2/3}}{32 \cdot \theta^{2/3}}$$

Evaluando $\theta_{\max}$

$$Q_{\max} = 0,335 \frac{\sqrt{i}}{M} \cdot D^{8/3}$$