

Cuaderno de Clases: CI41A

Capítulo B3: Resistencia al Escurrimiento.

Javier A. Rovegno Campos

19 de junio de 2007

Licencia del Documento: Creative Commons 3.0 [Detalles de la Licencia]¹

Este documento contiene una recopilación de los apuntes, tomados por el Autor, en las clases de Hidráulica del Año 2006 impartidas en la FCFM por los profesores:

- Aldo Tamburrino
- Yarko Niño

Datos del Autor:

Correos del Autor: jrovegno@ing.uchile.cl , tatadeluxe@gmail.com

Página Personal del Autor: <http://www.cec.uchile.cl/~jrovegno/>

Este Documento forma parte de la primera etapa BETA del *Proyecto Colaborativo WikiCursos*.

Para más información sobre WikiCursos visitar:
<http://ideaschile.wordpress.com/>

¹<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

CONTORNOS ABIERTOS:

1. Características Generales del Esgurrimiento en Canales.

- 1.1. Características generales del esgurrimiento en canales abiertos.
- 1.2. Clasificación de los esgurrimientos.
- 1.3. Características geométricas de los canales.
- 1.4. Distribución de velocidades. Coeficientes de Coriolis y de Boussinesq.
- 1.5. Distribución de presiones en canales.

2. Ecuaciones fundamentales del Esgurrimiento en Canales.

- 2.1. Ecuación de Continuidad.
- 2.2. Ecuación de la Energía.
 - 2.2.1. Ecuación de Bernoulli en canalizaciones abiertas. Concepto de Energía Específica.
 - 2.2.2. Esgurrimiento Crítico. Propiedades.
 - 2.2.3. Cálculo de alturas críticas en secciones regulares e irregulares.
 - 2.2.4. Esgurrimientos subcrítico y supercrítico. Noción de control hidráulico.
- 2.3. Ecuación de la Cantidad de Movimiento.
 - 2.3.1. El Teorema de la Cantidad de Movimiento en canales. Aplicaciones.
 - 2.3.2. La función Momenta y sus propiedades.
 - 2.3.3. Resalto hidráulico Clasificación, Ecuaciones de Belanger, Características geométricas del resalto completo (longitud, perfil).

3. Resistencia al Esgurrimiento.

- 3.1. Generalidades. Esfuerzo de corte medio.
- 3.2. Ecuaciones de resistencia. Chézy, Manning, fórmulas racionales.
- 3.3. Esgurrimiento Uniforme. Determinación de altura normal en secciones regulares e irregulares.

4. Esgurrimiento Gradualmente Variado.

- 4.1. Teoría y ecuaciones generales.
- 4.2. Análisis y clasificación de ejes hidráulicos.
- 4.3. Composición de ejes hidráulicos.
- 4.4. Métodos de cálculo en secciones regulares.
- 4.5. Aplicaciones.

5. Esgurrimiento Rápídamente Variado.

- 5.1. Vertederos. Características generales y clasificación.
- 5.2. Vertedero en pared delgada con napa libre. Teoría de Boussinesq. Fórmulas prácticas.
- 5.3. Vertederos triangulares en pared delgada sin influencia y con influencia de aguas abajo.
- 5.4. Otras singularidades en canales. Ensanches , angostamientos, transiciones , flujo en torno a machones.

3. Resistencia Hidráulica CAT 21-10

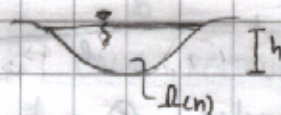
(Pérdidas Friccionales en canales)

3.1. Esfuerzo de Corte Medio:

Escurrimiento Uniforme:



CANAL PRISMÁTICO



$$TCM: s/x: \sum F_x = \rho Q \beta (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow F_1 - F_2 + W \sin \theta - \tau_0 \cdot X \cdot \Delta x = 0$$

$$\Rightarrow W \sin \theta = \tau_0 \cdot X \cdot \Delta x = F_\tau$$

Perímetro

$$W = \Omega \cdot \Delta x \cdot \gamma \quad // \quad R_H = \frac{\Omega}{X}$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \gamma R_H \sin \theta \quad // \quad \sin \theta \approx i \approx \tan \theta$$

Def: τ_0 : Esfuerzo de Corte Medio

$$\Rightarrow \boxed{\tau_0 = \gamma R_H i} \quad \text{Ley de Resistencia Hidráulica.}$$

Entonces $\exists$ una relación entre τ_0 y $\bar{v}$

Empíricamente:

$$\boxed{\tau_0 = f \cdot C_f \cdot \bar{v}^2}$$

C_f : coef. de fricción.

(Adimensional)

Desarrollando los términos:

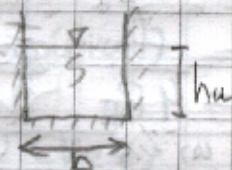
$$\tau_0 = \gamma \cdot R_H \cdot i = f \cdot C_f \cdot \bar{v}^2$$

$$g \cdot R_H \cdot \Omega = C_f \left(\frac{Q}{\Omega} \right)^2 \quad \text{S.E}$$

$$\underbrace{\Omega \sqrt{R_H}}_{f_m(h_u)} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{g_i}{C_f}}}_{\substack{\text{Ec. Para calcular } h_u.}} = Q \Rightarrow \boxed{f_m(h_u) = \frac{\sqrt{C_f} \cdot Q}{\sqrt{g_i}}}$$

Ejemplo: Canal Rectangular

$$R_H = \frac{b \cdot h_u}{b + 2h_u} \quad \Omega = b \cdot h_u$$



$$\Rightarrow \frac{(b \cdot h_u)^{3/2}}{(b + 2h_u)^{1/2}} = \frac{\sqrt{C_f} \cdot Q}{\sqrt{g_i}}$$

$f_m(h_u)$: Análisis Matemático

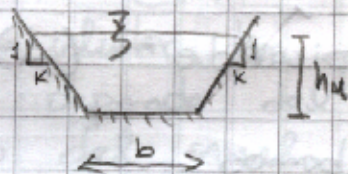
f_m monótonamente creciente con h_u

Si $Q++$ v $C_f++ \Rightarrow h_u++$

Si $i++ \Rightarrow h_u--$

Ejemplo Canal Trapecial:

$$R_H = \frac{b \cdot h_u + K h_u^2}{b + 2h_u \sqrt{1+K^2}}$$



$$\Omega = b \cdot h_u + K \cdot h_u^2$$

$$\Rightarrow \frac{(b \cdot h_u + K h_u^2)^{3/2}}{(b + 2h_u \sqrt{1+K^2})^{1/2}} = \frac{\sqrt{C_f} \cdot Q}{\sqrt{g_i}}$$

Mismo análisis caso rectangular.

Notación: h_u se le llama altura normal de esc.

$\Rightarrow (h_u = h_m)$

o esc. normal.

3.2 Ecuaciones de Resistencia.

i) Darcy-Weisbach (Válido en tuberías)

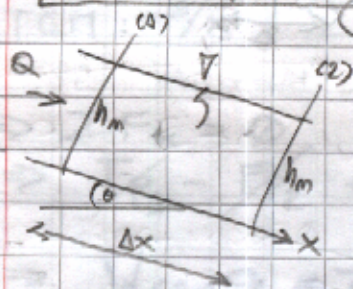
$$J = \frac{f}{D} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$



$$R_H = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{D}{4}$$

$$\Rightarrow J = \frac{f}{4R_H} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (1) \quad \Rightarrow 4R_H = D$$

(CASO CANALES)



$$B_1 = B_2 + J \cdot \Delta x$$

$$E_1 + z_1 = E_2 + z_2 + J \Delta x$$

$$E_1 = E_2 = E_m = \frac{Q^2}{2g R_H^2} + h_m$$

$$\frac{z_1 - z_2}{\Delta x} = J$$

$$\frac{\sin \theta}{i} = J \Rightarrow J = i$$

Aplicando (1) $i = \frac{f}{4R_H} \frac{\bar{v}^2}{2g}$

Sabemos:

$$\tau_0 = \rho \cdot g \cdot R_H \cdot i$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho \cdot g \cdot R_H \cdot \frac{f}{4R_H} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

$$\tau_0 = f \cdot \frac{\rho}{8} \bar{v}^2$$

τ_0

Darcy-Weisbach en canales

Donde: $f = f_m(Re_D, \frac{\epsilon}{D})$ ($m = \mu$)

$$Re_D = \frac{\bar{v} D}{\nu} = 4 \frac{\bar{v} R_H}{\nu} = 4 Re_{R_H}$$

$$\frac{E}{D} = \frac{E}{4 R_H} \quad // \quad E/R_H : \text{rugosidad relativa.}$$

- En General NO Valida (Depende de la Geometría)
- En la práctica NO se utiliza (f depende de la geometría)

ii) Ley de Chezy (1768) (Empírica)

$$\bar{v} = C \sqrt{R_H i}$$

C: coef. de Chezy
(Depende de la rugosidad del canal) ($E \uparrow \rightarrow C \downarrow$)

$$\Rightarrow i = \frac{1}{C^2 R_H} \bar{v}^2$$

Sabemos: $\tau_0 = f \rho R_H \cdot i \Rightarrow \tau_0 = f \cdot \frac{\rho}{2} \bar{v}^2$

Sabemos: $Q = A \cdot \bar{v} \quad // \quad C_f = \frac{g}{C^2}$

$$\Rightarrow \frac{Q}{C \sqrt{i}} = \underbrace{\sqrt{R_H} \cdot A}_{f_m(h_m)} \Rightarrow f_m(h_m) = \frac{Q}{C \sqrt{i}}$$

Ec. para calcular h_m

C: Se ubica en tablas y depende del material de revestimiento del canal.

iii) Fórmula de Ganguillet y Kutter (1869)

(Empírica)
$$C = \frac{23 + (0,00155/i) + \frac{m}{n}}{1 + (23 + 0,00155) \frac{m}{i R_H}}$$

m: Número de Kutter depende de las paredes del canal

iv) Fórmula de BAZIN (1897)

$$C = \frac{87,02}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_H}}}$$

m: coef. de Bazin
depende del material
de las paredes.

v) Ec. de Manning (1889) (Empírica)

$$\boxed{\bar{v} = \frac{1}{m} R_H^{2/3} \sqrt{i}}$$

m: # de Manning
Coef. de Manning

Coef. de rugosidad de Manning
(Unidades MKS TABLA 4.1)
(Apuntes)

Generalmente SI se usa en ingeniería.

Unidades: $[m] = \left[\left(\frac{\bar{v}}{R_H^{2/3}} \right)^{-1} \right] = \left[\frac{L/T}{L^{2/3}} \right]^{-1} = \left(\frac{L^{1/3}}{T} \right)^{-1}$

NO es adimensional

Siempre se expresa en MKS en las tablas

$$[m] = \left[\frac{\text{seg}}{m^{1/3}} \right]$$

m: Se det empíricamente
y depende de la
rugosidad del canal.

Sabemos

$$\tau_0 = \gamma R_H \cdot i = f C_f \bar{v}^2$$

$$\frac{\tau_0}{\gamma R_H} = \frac{f C_f \bar{v}^2}{\gamma R_H} \Rightarrow \boxed{m = \frac{C_f}{\sqrt{8}} R_H^{1/6}}$$

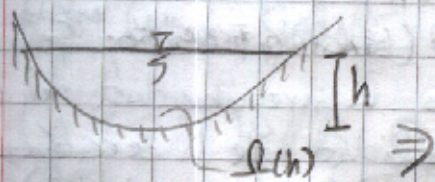
$$C_f = \frac{\phi}{C^2} = \frac{\phi \cdot m^2}{R_H^{1/3}} \Rightarrow$$

$$\boxed{C = \frac{R_H^{1/6}}{m}}$$

Relación con
Coef. Chezy
fm de
(m, R_H) 114

3.2. EC. de Manning.

Como $Q = \Omega \cdot \bar{v} \Rightarrow \boxed{\frac{Q_m}{\sqrt{i}} = \Omega R_H^{2/3}}$



$f_m(h_m)$ monotonamente creciente.

Esc. Uniforme

A mayor rugosidad mayor n .

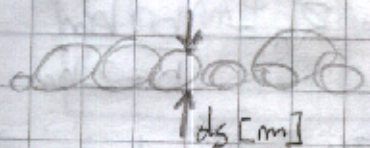


$(E \rightarrow m)$

$i = \sin \theta$

Sólo VÁLIDA para flujo turbulento con paredes hidrodinamicamente rugosas.

Ec. de Strickler (Cauce Natural)



$\boxed{m_o = \frac{d_s^{1/6}}{26.4}}$

d_s : Tamaño 90% mas grueso de los sedimentos del lecho.

Def: N° Strickler: $St = \frac{m \sqrt{g}}{d_s^{1/6}}$
(Adimensional)

Método de Cowan. (Tabla 4.2)

Estimar m en cauces NATURALES.

$$m = m [m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4]$$

m_0 : coef. valor del coef. de Manning base (canal recto, prisma^{trapezoidal}, ^{regularidad} ^{uniforme} etc)

m_1 : coef. que toma en cuenta la irregularidad del cauce

m_2 : coef. que recoge la variabilidad de la sección.

m_3 : coef. que recoge obstrucciones (rocas, árboles)

m_4 : coef. que recoge la densidad de vegetación ribera

m : frecuencia de los meandros (curvas)

3.3. Esc. Uniforme

Cálculo de la altura normal

$$\text{Manning: } \left| \frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}} = \Omega R_H^{2/3} \right| \Rightarrow \text{cálculo } h_m \quad (1)$$

Datos

* CANAL RECTANGULAR:

$$\Omega = b \cdot h_m$$

$$R_H = \frac{b \cdot h_m}{b + 2h_m}$$

$$\left| \frac{(b \cdot h_m)^{5/3}}{(b + 2h_m)^{2/3}} = \frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}} \right|$$
$$\Rightarrow \left| (b \cdot h_m)^{5/3} - \frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}} (b + 2h_m)^{2/3} = 0 \right| \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Resuelvo y obtengo h_m (raíz real positiva)

$$\parallel h_c = \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{1/3} \Rightarrow \begin{array}{ll} h_m > h_c & \text{subcrítico} \\ h_m = h_c & \text{crítico} \\ h_m < h_c & \text{supercrítico} \end{array}$$

CLASIFICACIÓN Formal de las PENDIENTES.

$\Rightarrow$ Si i es grande $\Rightarrow h_m < h_c \Rightarrow$ PENDIENTE FUERTE

Si i es pequeña $\Rightarrow h_m > h_c \Rightarrow$ " SUAVE

Si i es $\Rightarrow h_m = h_c \Rightarrow$ " CRÍTICA

(1) Reemplazando $h_m = h_c \Rightarrow$ obteng i_c .

Si $i > i_c \Rightarrow$ PENDIENTE FUERTE

$i < i_c \Rightarrow$ PENDIENTE SUAVE

** CASO CANAL RECTANGULAR MUY ANCHO.

$$\left(\frac{h}{b} \ll 1\right) \Rightarrow \frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}} = \frac{(b \cdot h_m)^{5/3}}{(b + 2h_m)^{2/3}}$$

$$Q = q \cdot b \parallel \frac{q \cdot m}{\sqrt{i}} = \frac{h_m^{5/3}}{\left(1 + \frac{h_m}{b}\right)^{2/3}} \approx h_m^{5/3}$$

$$\Rightarrow h_m = \left(\frac{q \cdot m}{\sqrt{i}}\right)^{3/5} \quad \text{CANAL MUY ANCHO}$$

* CANAL TRAPEZOIDAL:



$$\Omega = b \cdot h_m + K h_m^2$$

$$\chi = b + 2 \sqrt{1 + k^2} \cdot h_m$$

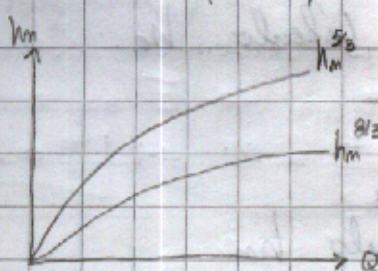
$$\Rightarrow \frac{(b h_m + K h_m^2)^{5/3}}{(b + 2 \sqrt{1 + k^2} h_m)^{2/3}} = \frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}}$$

f_m monotonamente creciente

$\Rightarrow$ Existe solo una solución.

(Casos donde hay más de una solución)

→ Entre Canal (Traf. ancho y Trapezoidal)



$$Q = m h_m^n$$

$$dQ = m n h_m^{n-1} dh_m$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{m n h_m^{n-1} dh_m}{m h_m^n}$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{n}{h_m} dh_m$$

$$\frac{1}{Q} \frac{dQ}{dh_m} = \frac{n}{h_m}$$

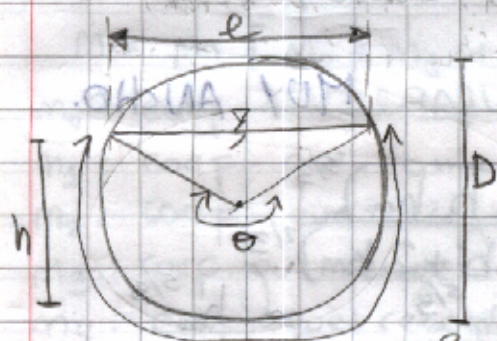
$$\frac{1}{Q} \frac{dQ}{dh_m} = \frac{n}{h_m}$$

$$\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{2}{3} \quad (n \approx 2)$$

conviene más profundizar que anchura

* Caso Acreducto circular.

$f_m(hm)$ no es una fm. monótonamente creciente.



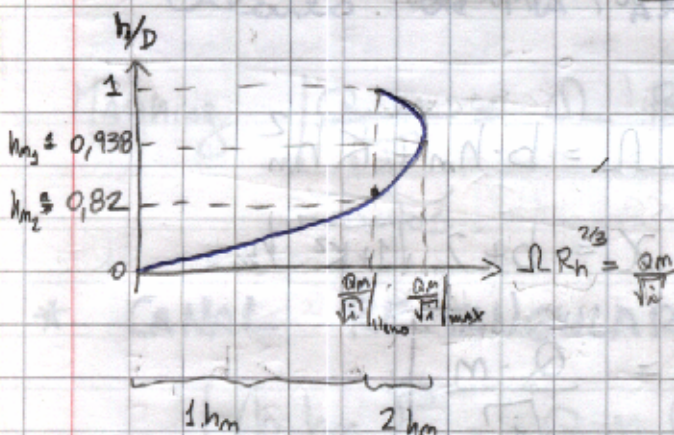
$$\Omega = \frac{D^2}{8} (\theta - \sin \theta)$$

$$X = \frac{D}{2} \theta = 2 \sqrt{h(D-h)}$$

$$\Omega \cdot R_h^{2/3} = \frac{\left(\frac{D^2}{8} (\theta - \sin \theta) \right)^{5/3}}{\left(\frac{D\theta}{2} \right)^{2/3}} = \frac{\Omega^{5/3}}{X^{2/3}}$$

AT. 25-10.

W depende de Ω
Fg depende de X



* En la práctica se usa la sección herradura, ovoide, etc.

→ Clasificación de la Parediente.

- Suave
- Fuerte.

• Cálculo de Altura crítica: h_c

$$Fr^2 = \frac{Q \cdot l(m)}{g \cdot \Omega(m)} = 1 \Rightarrow \text{Cálculo } h_c.$$

• Cálculo altura normal: h_m

$$\frac{Q \cdot m}{\sqrt{i}} = \frac{\Omega^{5/3}(h_m)}{X^{2/3}(h_m)} \Rightarrow \text{Cálculo } h_m$$

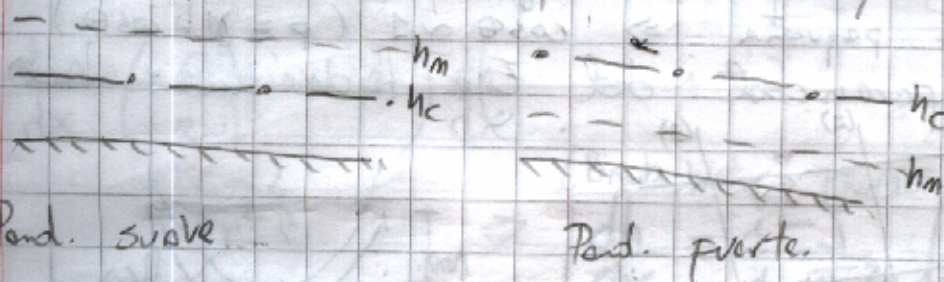
→ Comparación de h_m y h_c

- * $h_m < h_c$: Esc. uniforme supercrítico (Pond. fuerte)
- * $h_m = h_c$: Esc. uniforme crítico (Pond. crítica)
- * $h_m > h_c$: Esc. uniforme subcrítico (Pond. suave)

• Cálculo de pendiente crítica: i_c

$$\frac{Q \cdot m}{\sqrt{i_c}} = \frac{1^{5/3} (h_c)}{X^{2/3} (h_c)} \Rightarrow \text{Cálculo } i_c$$

Se compara con las pendientes de fondo.



Ej. Cambio de pendiente de fondo.

