

Cuaderno de Clases: CI41A
Capítulo B2: Ecuaciones fundamentales del
Escorrimento en Canales.

Javier A. Rovegno Campos

19 de junio de 2007

Licencia del Documento: Creative Commons 3.0 [Detalles de la Licencia]¹

Este documento contiene una recopilación de los apuntes, tomados por el Autor, en las clases de Hidráulica del Año 2006 impartidas en la FCFM por los profesores:

- Aldo Tamburrino
- Yarko Niño

Datos del Autor:

Correos del Autor: jrovegno@ing.uchile.cl , tatadeluxe@gmail.com

Página Personal del Autor: <http://www.cec.uchile.cl/~jrovegno/>

Este Documento forma parte de la primera etapa BETA del *Proyecto Colaborativo WikiCursos*.

Para más información sobre WikiCursos visitar:
<http://ideaschile.wordpress.com/>

¹<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

CONTORNOS ABIERTOS:

1. Características Generales del Esgurrimiento en Canales.

- 1.1. Características generales del esgurrimiento en canales abiertos.
- 1.2. Clasificación de los esgurrimientos.
- 1.3. Características geométricas de los canales.
- 1.4. Distribución de velocidades. Coeficientes de Coriolis y de Boussinesq.
- 1.5. Distribución de presiones en canales.

2. Ecuaciones fundamentales del Esgurrimiento en Canales.

- 2.1. Ecuación de Continuidad.
- 2.2. Ecuación de la Energía.
 - 2.2.1. Ecuación de Bernoulli en canalizaciones abiertas. Concepto de Energía Específica.
 - 2.2.2. Esgurrimiento Crítico. Propiedades.
 - 2.2.3. Cálculo de alturas críticas en secciones regulares e irregulares.
 - 2.2.4. Esgurrimientos subcrítico y supercrítico. Noción de control hidráulico.
- 2.3. Ecuación de la Cantidad de Movimiento.
 - 2.3.1. El Teorema de la Cantidad de Movimiento en canales. Aplicaciones.
 - 2.3.2. La función Momenta y sus propiedades.
 - 2.3.3. Resalto hidráulico Clasificación, Ecuaciones de Belanger, Características geométricas del resalto completo (longitud, perfil).

3. Resistencia al Esgurrimiento.

- 3.1. Generalidades. Esfuerzo de corte medio.
- 3.2. Ecuaciones de resistencia. Chézy, Manning, fórmulas racionales.
- 3.3. Esgurrimiento Uniforme. Determinación de altura normal en secciones regulares e irregulares.

4. Esgurrimiento Gradualmente Variado.

- 4.1. Teoría y ecuaciones generales.
- 4.2. Análisis y clasificación de ejes hidráulicos.
- 4.3. Composición de ejes hidráulicos.
- 4.4. Métodos de cálculo en secciones regulares.
- 4.5. Aplicaciones.

5. Esgurrimiento Rápídamente Variado.

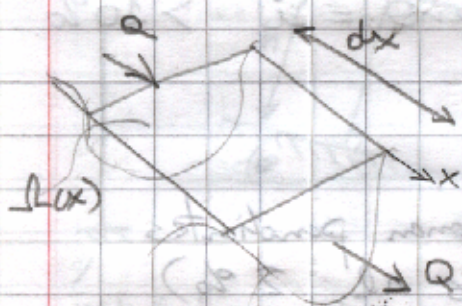
- 5.1. Vertederos. Características generales y clasificación.
- 5.2. Vertedero en pared delgada con napa libre. Teoría de Boussinesq. Fórmulas prácticas.
- 5.3. Vertederos triangulares en pared delgada sin influencia y con influencia de aguas abajo.
- 5.4. Otras singularidades en canales. Ensanches , angostamientos, transiciones , flujo en torno a machones.

2. Ecuaciones Fundamentales del Escorrentimiento en Canales. (21-09)

2.1

→ Conservación de masa / volumen

Fluido incompresible



$$\frac{\partial V}{\partial t} = Q_{\text{ENTRADA}} - Q_{\text{SALIDA}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cdot dx = Q - (Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx)$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0}$$



q : Caudal lateral por unidad de longitud.

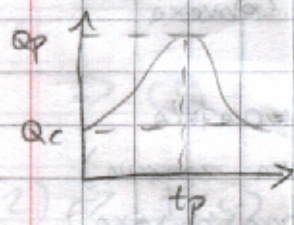
$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q}$$

En régimen permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = q}$$

Si $q = 0 \Rightarrow Q = \text{cte}$ en el canal.

Caso impermanente: Crecida de un río.



Como $h = f_m(h)$

$\Rightarrow$ Podemos definir

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

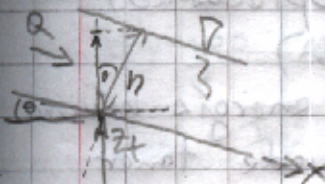
↳ medible fácilmente

2.2 → Ppto. de conservación de la Energía.
Ec. de Bernoulli, referida al fondo.

Tomamos $B = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} + h \cos \theta + z_f$

$$\bar{v} = \frac{Q}{A}$$

$$A = I_n$$



2.2.1 Concepto de Energía Específica.

DEF Energía específica (BAKmeteff, 1912)

$$E = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} + h \cos \theta$$

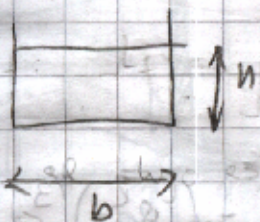
En general $i = 0,001\%$ Rapido
 $i = 0,25\%$ RIO NATURAL
 $\Rightarrow \cos \theta \approx 1$

$$\Rightarrow B = E + z_f$$

→ USO Canal Rectangular

Rapido de descarga:

$$i = 6\% \Rightarrow \cos \theta \neq 1$$



$$\Omega = b h$$

$$E = \alpha \frac{Q^2}{2g(hb)^2} + h \cos \theta$$

DEF Caudal por unidad de ancho (caudal unitario)

$$q = \frac{Q}{b} \Rightarrow E = \frac{\alpha q^2}{2g h^2} + h \cos \theta$$

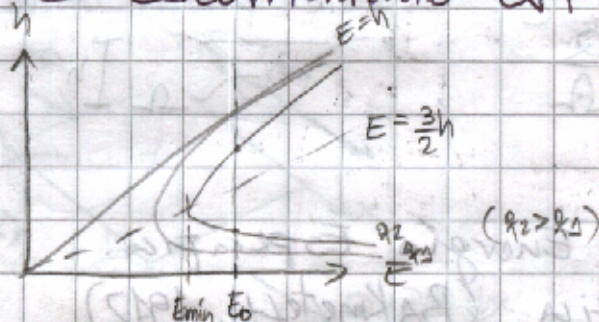
Sea $\alpha = 1$ y $\cos \theta \approx 1$

$$\Rightarrow E(q, h) = \frac{q^2}{2g h^2} + h \quad (1)$$

Sea $q = q_0 = \text{cte}$; $E = E_0 = \text{cte}$

$$E_0 = \frac{q_0^2}{2gh^2} + h \Rightarrow \boxed{E_0 \cdot h^2 - h^3 = \frac{q_0^2}{2g}}$$

2.2.2 Escurrimiento Crítico (Propiedades) (CRÍTICA)



$E_{\min}$: energía mínima que puede tener el flujo para un caudal dado.

Minimizar h ec. (1)

$$\frac{dE}{dh} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{q^2}{gh^3} = 0 \Rightarrow h_{\min} = \frac{q^{2/3}}{g^{1/3}}$$

Evaluamos $E(q, h_{\min}) = E_{\min}$

$$E_{\min} = \frac{3}{2} \frac{q^{2/3}}{g^{1/3}} = \frac{3}{2} h_{\min}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\min} = \frac{3}{2} h_{\min}}$$

$$\boxed{h_{\min} = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3}}$$

Calculamos $Fr_{E_{\min}}$

$$Fr^2 = \frac{\bar{v}^2}{g \cdot h}$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{q}{h}$$

$$\bar{v}^2 = \frac{q^2}{h^2} \Rightarrow Fr^2 = \frac{q^2}{h^2 \cdot g \cdot h} = \frac{q^2}{h^3 \cdot g} \Big|_{h=h_{\min}} = \frac{q^2}{\frac{q^2}{g} \cdot g} = 1 \Rightarrow \boxed{Fr_{E_{\min}}^2 = 1}$$

Def Altura crítica o de escuminamiento crítico.

$$|h_c = h_{Emin}| = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

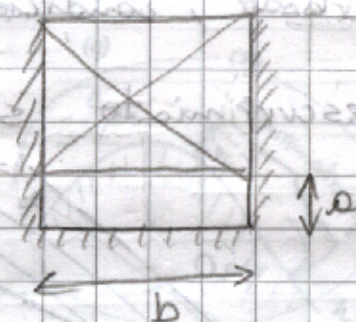
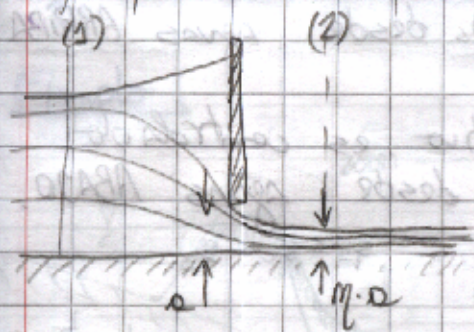
Podemos redefinir $Fr^2 = \left(\frac{h_c}{h}\right)^3$

Pues $Fr^2 = \frac{q^2}{g \cdot h^3} \cdot \frac{h_c^3}{h_c^3} = \left(\frac{q^2}{g \cdot h_c^3}\right) \cdot \frac{h_c^3}{h^3}$

$$\Rightarrow Fr^2 = \left(\frac{h_c}{h}\right)^3 //$$

2.2.3 Cálculo de alturas críticas en secciones regulares e irregulares. (23-09)

Ejemplo: Compuerta.



η = coef. de contracción del flujo ($\eta \approx 0,6$)

En (1) y (2) vale la Ley hidrostática

$$B_1 = B_2 + \cancel{I_f} + \cancel{I_s} \quad \text{(supervarios no existen)}$$

$$\Rightarrow B_1 \approx B_2$$

$$\Rightarrow E_1 + Z_1 = E_2 + Z_2 \quad | \quad z_1 \approx z_2$$

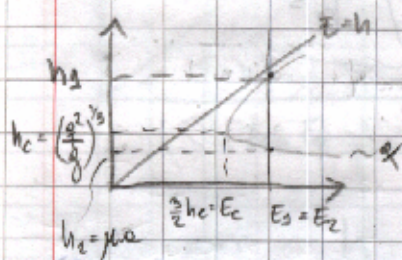
$$\Rightarrow E_1 \approx E_2$$

Tomamos $h_1 > h_2 = \mu \cdot 0$

$$E_1 = h_1 + \frac{q^2}{2g h_1^2} = h_2 + \frac{q^2}{2g h_2} = E_2$$

$$\Rightarrow h_1 + \frac{q^2}{2g h_1^2} = \mu \cdot 0 + \frac{q^2}{2g(\mu \cdot 0)} \quad \text{|| } q, 0 \text{ datos}$$

$\Rightarrow$ Buscamos h_1 :



De aquí se deduce

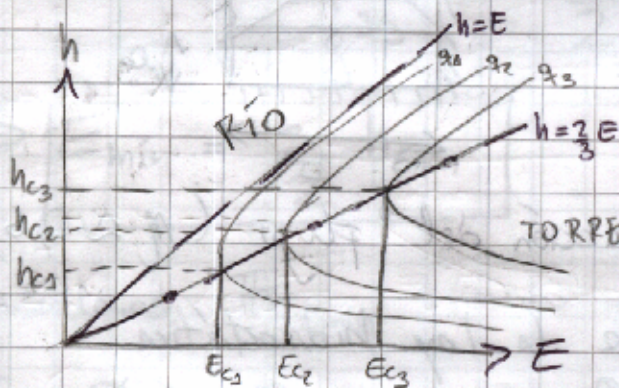
$h_2 = \mu \cdot 0$ (Esc. supercrítico)

h_1 : esc. subcrítico.

h_1 y h_2 se denominan "Alturas conjugadas"

$\Rightarrow$ El escurrimiento supercrítico es controlado (perturbado, condicionado) desde Aguas ARRIBA

$\Rightarrow$ El escurrimiento subcrítico es controlado desde Aguas ABAJO.



$$q_1 < q_2 < q_3$$

la curva de h va aumentando en E a medida que aumenta q

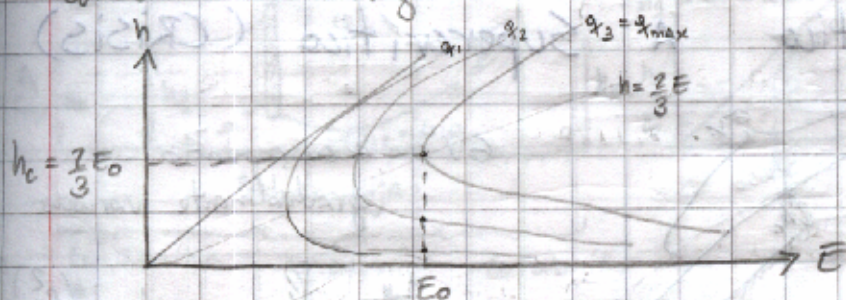
RÍO: h domina sobre $\frac{v^2}{2g}$

F_p domina sobre momentum.

TORRENTE $\frac{v^2}{2g}$ domina sobre h 78
momentum domina sobre F_p

Dado $E = E_0$

El máximo caudal que circula por un sistema dado una energía E_0 es cuando $E_0 = E_c$.



$$E_0 = \frac{q^2}{2gh} + h \Rightarrow (E_0 - h) \cdot 2gh^2 = q^2 \Rightarrow q = \sqrt{(E_0 - h) 2gh^2}$$

$$\text{MAX: } \frac{dq}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{(E_0 - h) 2gh^2} (E_0 \cdot 2g \cdot 2h - 2g \cdot 3h^2) = 0$$

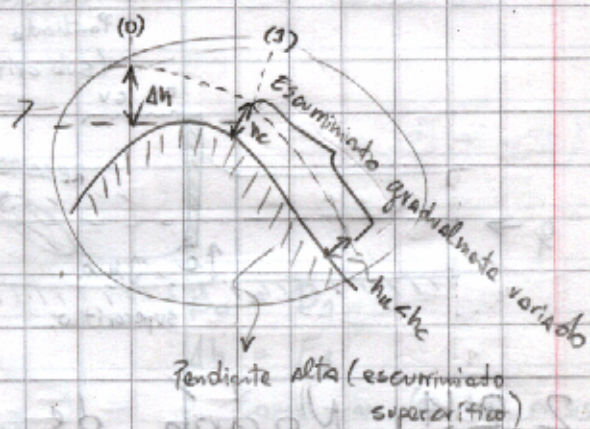
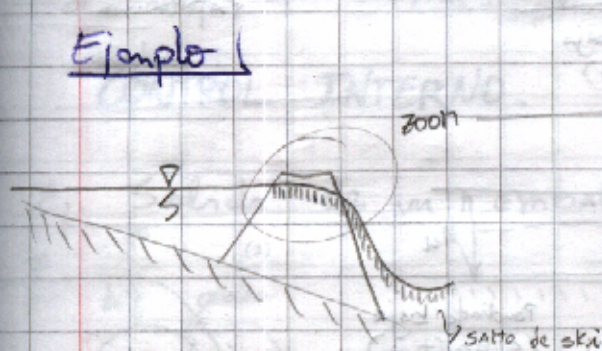
$$\Rightarrow E_0 \cdot 2g \cdot 2h - 2g \cdot 3h^2 = 0 \quad (h \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left[h^* = \frac{2}{3} E_0 \right] \Rightarrow h^* = h_c \Rightarrow \boxed{Fr^2 = 1}$$

Condición crítica.

$\Rightarrow q$ es máx. cuando $h = h_c$ para un E_0 dado.

Ejemplo 1



$$B_0 = B_1$$

$$\Delta h = E_1 = h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}$$

La naturaleza selecciona un caudal q tal que la energía $E_0 = \Delta h$ sea la mínima energía en el canal $\Rightarrow$ en (1) existen un escurrimiento crítico (may crisis) $\Rightarrow h_1 = h_c = \frac{2}{3} E_0 = \frac{2}{3} \Delta h$

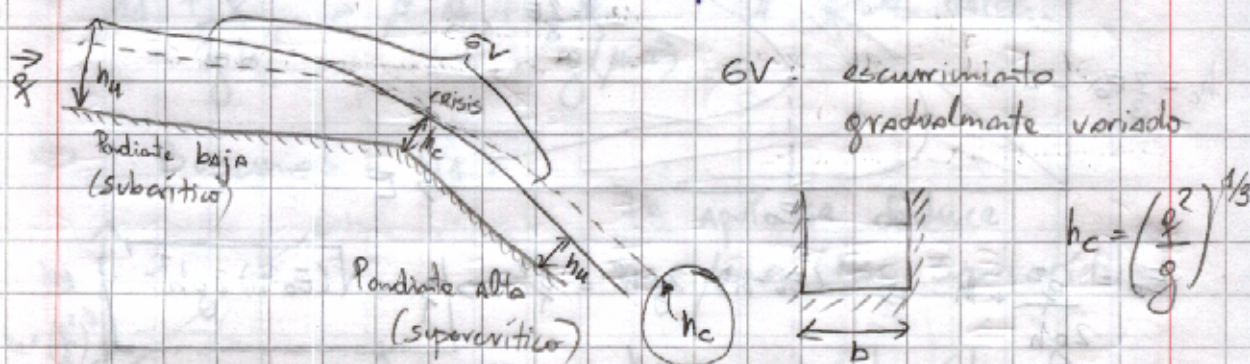
$$h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \Rightarrow q = \left(\frac{3}{2} \Delta h \right)^{3/2} \sqrt{g}$$

2.2.4

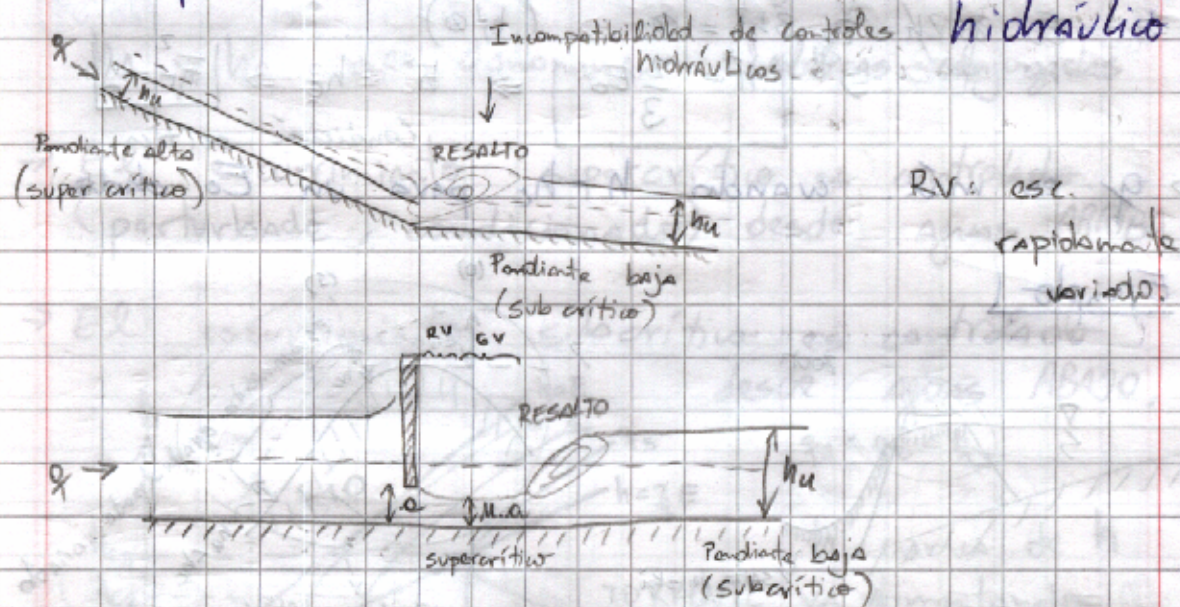
Escumimiento subcrítico y supercrítico.

Concepto de cambio de Régimen del escumimiento

→ Subcrítico A Supercrítico (CRISIS)



→ Supercrítico A Subcrítico (Resalto hidráulico)



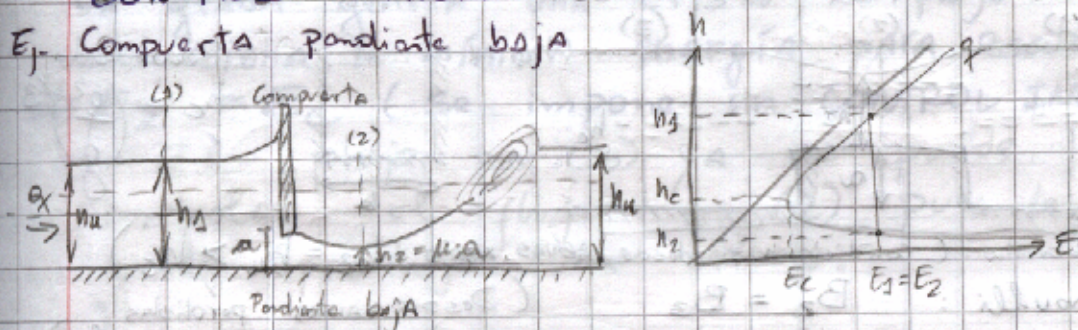
2.2.4 Notión de control hidráulico (26-00)

Se impone una altura de escumimiento (y por lo tanto un régimen de escumimiento) en un pto. dado del canal.

El control hidráulico puede ser EXTERNO o INTERNO.

CONTROL EXTERNO (Condición de Borde)

Ej. Compuerta pandiante baja



Esc. Subcrítico

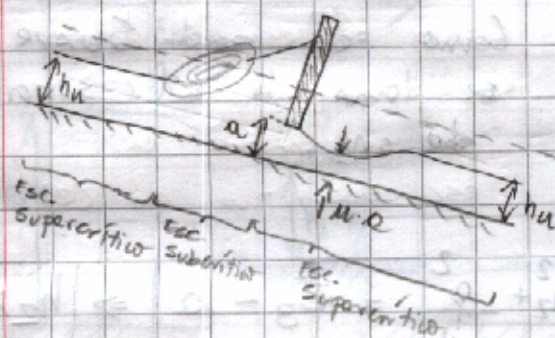
Esc. supercrítico

Esc. subcrítico

CB ubicada aguas abajo

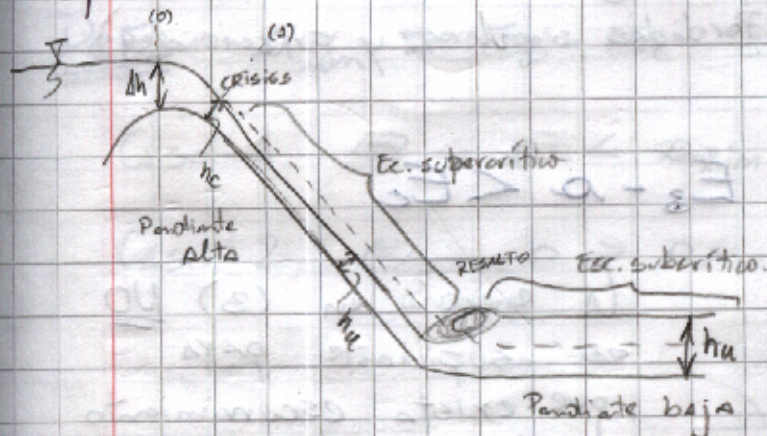
CB ubicada aguas arriba

Ej. Compuerta pandiante alta



CONTROL INTERNO

Ej. Salida de un embalse



$$B_0 = B_1$$

$$\Delta h = E_1$$

Como en (a) hay crisis

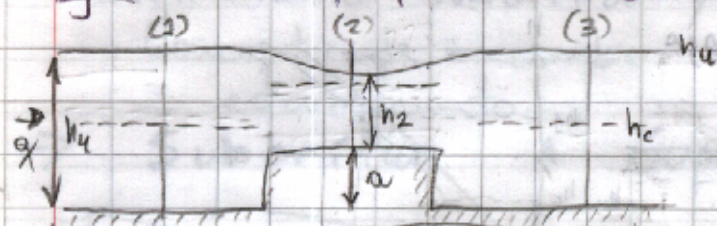
$$h_1 = h_c = \frac{2}{3} E_0$$

$$\Rightarrow \left| h_1 = \frac{2}{3} \Delta h \right|$$

En crisis

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \Rightarrow \left| q_{\max} = \left(\frac{2}{3} \Delta h \right)^{3/2} \sqrt{g} \right|$$

Ej- Grada, pendiente baja



Recordando

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$$

Esc. Subcrítica (Condicionado desde AGUAS ABAJO $h_3 = h_u > h_c$)

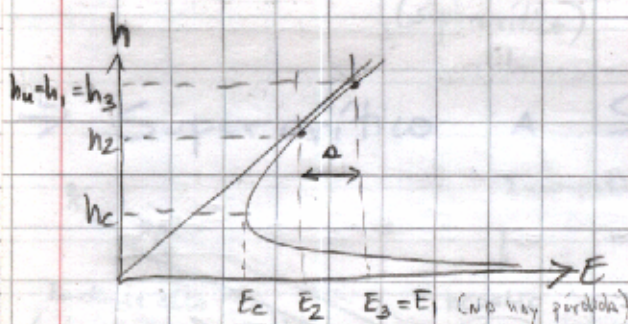
Bernoulli: $B_2 = B_3$

(Despreciamos pérdidas singulares y friccionales)

$E_2 + a = E_3$

CASO 1)

Verificamos que $E_2 = E_3 - a > E_c = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$



Como es grad. Suave se toma la sol. subcrítica de h_2 .

Con h_u calculo E_3 .

$$\left| \frac{h_2^2}{2} + \frac{q^2}{2gh_2} = E_3 - a \Rightarrow h_2 > h_c \right|$$

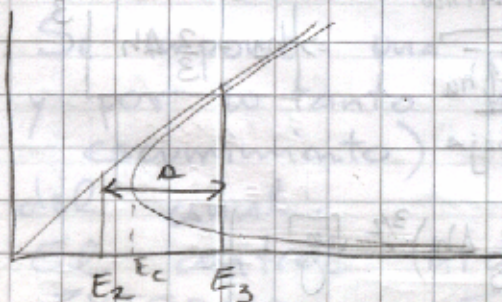
$B_1 = B_2 = B_3$

$E_1 = E_3 - a$

(Despreciamos pérdidas singulares y friccionales)

$\Rightarrow h_1 = h_3 > h_c$

Caso 2) $E_2 = E_3 - a < E_c$

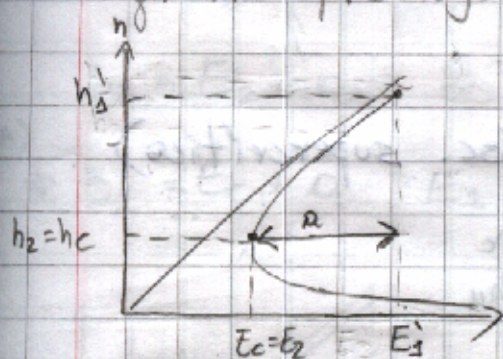


La energía en (3) NO es suficiente para que exista escurrimiento sobre la grada. $\Rightarrow$

La grada genera una crisis, el flujo selecciona la mínima energía para escurrir

$\Rightarrow E_2 = E_c$ (se impone un CONTROL INTERNO)

$\Rightarrow$ El flujo en (3) ya no puede controlar el flujo en (2) pues la grada produce una crisis.



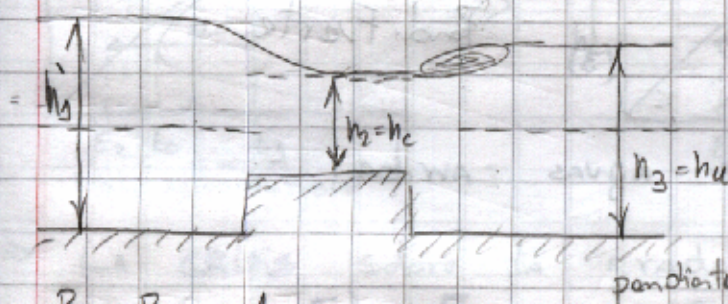
$$B_1 = B_2$$

$$E_3' = E_2 + a = E_c + a$$

$$\Rightarrow E_3' = E_c + a$$

$$\Rightarrow h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2} = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} + a$$

Como es C.P. suave elija sol. subcrítica de h_1 .



$$B_2 - B_3 = \Delta \text{ SINGULAR}$$

Cálculo de a_{lim}

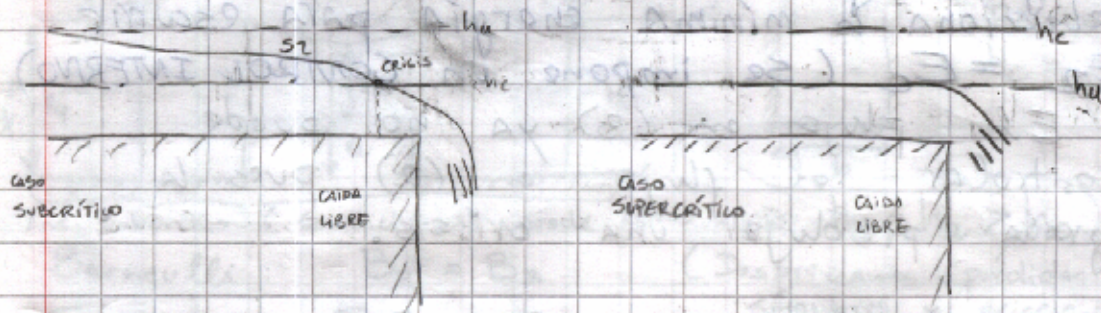
(28-09)

Def: $a_{lim} = E_3 - E_c$

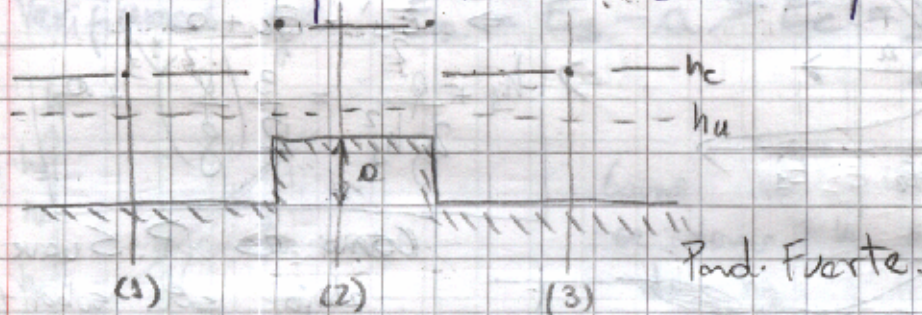
Caso 1 $\Leftrightarrow a < a_{lim}$

Caso 2 $\Leftrightarrow a > a_{lim}$

Ejemplo: Corolario



→ Grada en pendiente alta (Esc. supercrítico)



Condiciones desde Aguas Arriba:

$$h_1 = h_u$$

$$\text{Tomamos } B_1 = B_2 \Rightarrow E_1 = E_2 + \alpha$$

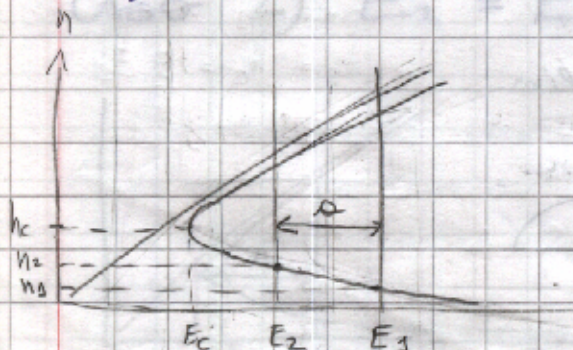
$$\Rightarrow |E_2 = E_1 - \alpha|$$

Def: $\alpha_{\text{lim}} = E_1 - E_c = \dots$

(CASO 1)

$$\alpha < \alpha_{\text{lim}}$$

$$\Leftrightarrow E_2 > E_c$$

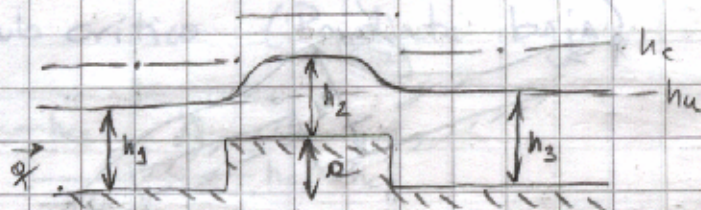


Se selecciona $h_2 < h_c$
El sist. está
condicionado solo
desde aguas arriba

$$B_2 = B_3$$

$$E_2 + \alpha = E_3 = E_1$$

$$\Rightarrow h_3 = h_1 < h_c$$



Caso 2) $\alpha > \alpha_{lim} \Leftrightarrow E_2 = E_1 - \alpha < E_c$

$$B_2 = E_2 + \alpha$$

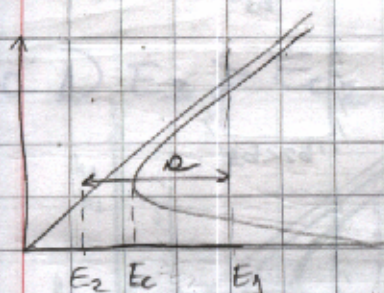
E_1 es insuficiente para controlar $E_2 \Rightarrow$

(*)

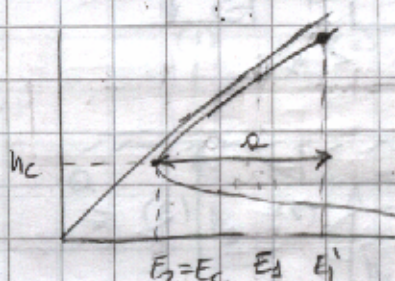
$$\Rightarrow B_2 = E_c + \alpha \quad E_1$$

En (2) ocurre **CRISIS**

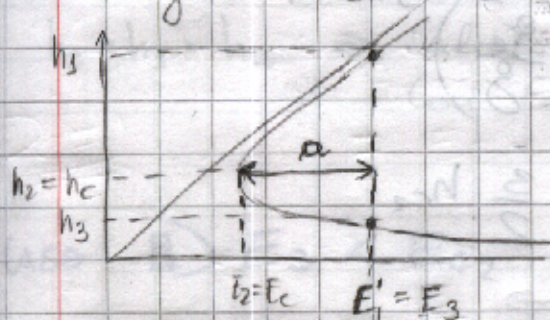
$$E_2 = E_c \quad (*)$$



SIST. INCOMPATIBLE



(*) $\Rightarrow$ LA **CRISIS** sobre la grada impone una energía $E_1' = E_c + \alpha > E_1$



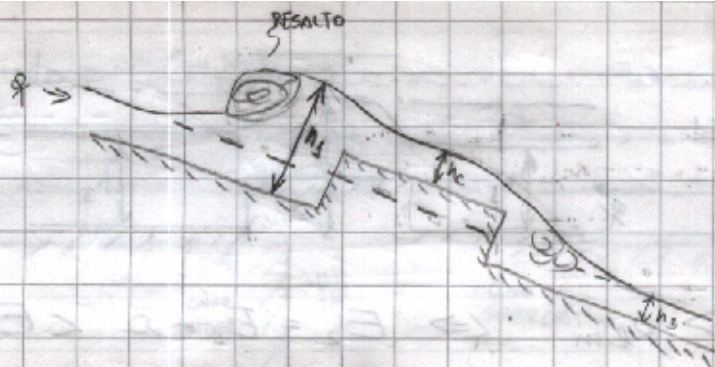
En (1) se impone ec. subcrítico condicionado por la crisis aguas abajo sobre la grada.

En (3) se impone ec. supercrítico condicionado por la crisis de aguas arriba

Para Calcular h_3

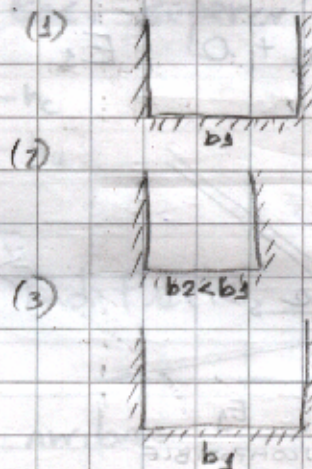
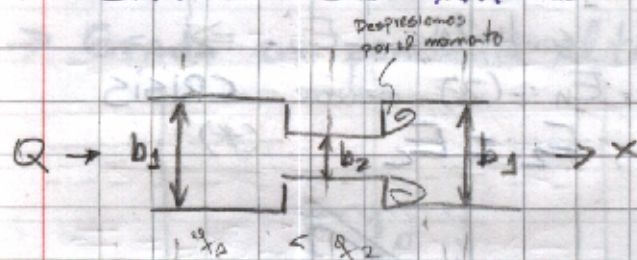
$$B_2 = B_3$$

$$E_c + \alpha = E_3$$



Se pierde
Energía en el
Resalto pero
la Pandeante
Permite que
siguiera el esc.

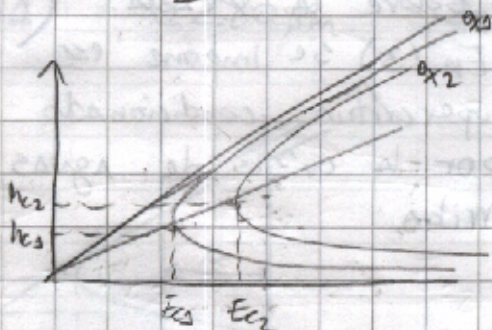
→ Cambio de Ancho en el canal.



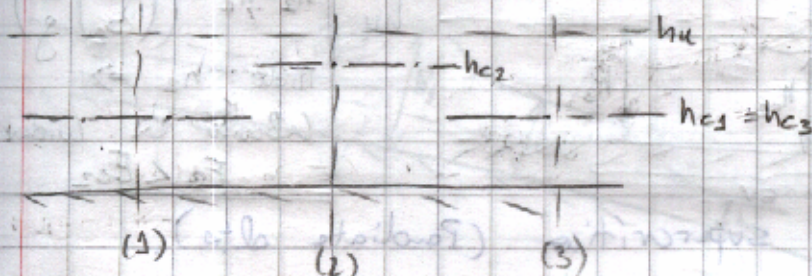
$$Q_1 = \frac{Q}{b_1} < Q_2 = \frac{Q}{b_2}$$

$$h_{c1} = \left(\frac{Q_1^2}{g} \right)^{1/3} < h_{c2} = \left(\frac{Q_2^2}{g} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow E_{c1} = \frac{3}{2} h_{c1} < E_{c2} = \frac{3}{2} h_{c2}$$



CASO 1) Esc. sub critica (Pendiente baja)



Despreciando $h_s \Rightarrow B_2 \approx B_3 \Leftrightarrow E_2 + z_{t2} = E_3 + z_{t3}$

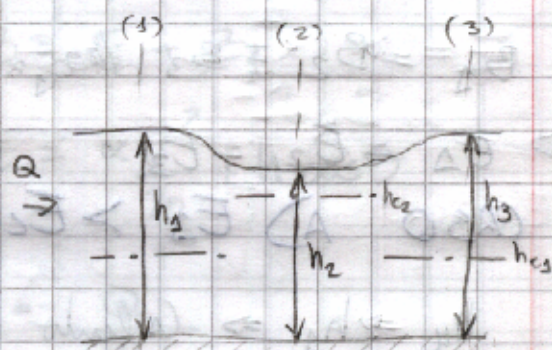
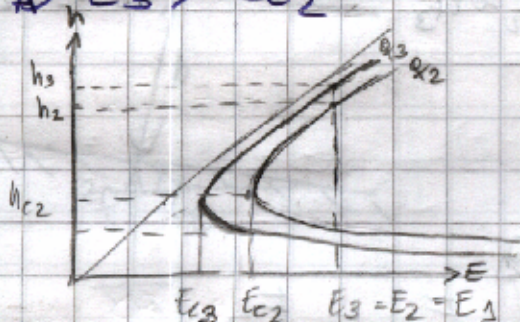
$$E_2 \approx E_3$$

// pendiente BAJA

Del mismo modo: $E_1 \approx E_2$

$$\Rightarrow E_1 \approx E_2 \approx E_3$$

CASO A) $E_3 > E_{c2}$



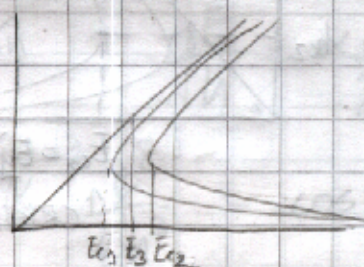
$h_3 = h_1 = h_u \Rightarrow$ Cálculo de E_3

Con $E_3: E_2 = E_3$

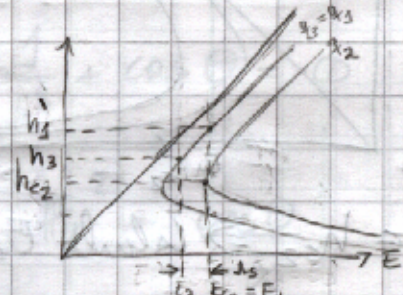
$\Rightarrow$ Cálculo de h_2

CASO B) $E_3 < E_{c2}$

(30-09)



$\Rightarrow$



INCOMPATIBLE

CRISIS en (2)

$$\Rightarrow E_2 = E_{c2}$$

Aparador Parshall

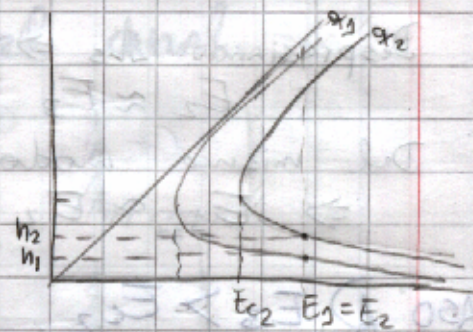
$$h_2 = h_c = \left(\left(\frac{Q}{b_2} \right)^2 \frac{1}{g} \right)^{1/3}$$

Flujo: $h_2 \rightarrow$

Calculo Q: Wider

$$E_3 < E_{c2}$$

CASO 2) Esc. supercritica (Pendiente alta).



$$B_1 = B_2 = B_3 \quad // \quad z_1 \approx z_2 \approx z_3$$

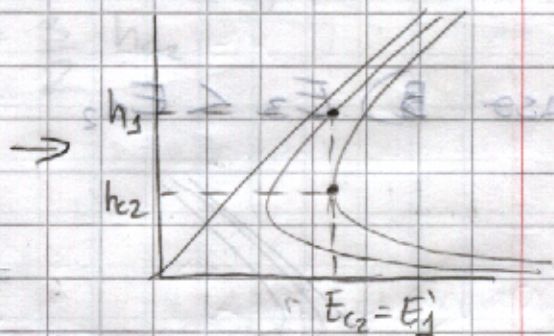
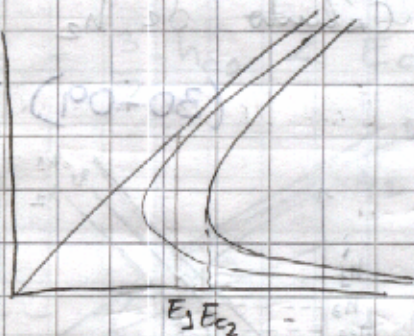
$$\Rightarrow E_1 = E_2 = E_3$$

CASO A) $E_1 > E_{c2}$

$$h_u = h_1 \Rightarrow \text{Calculo } E_1$$

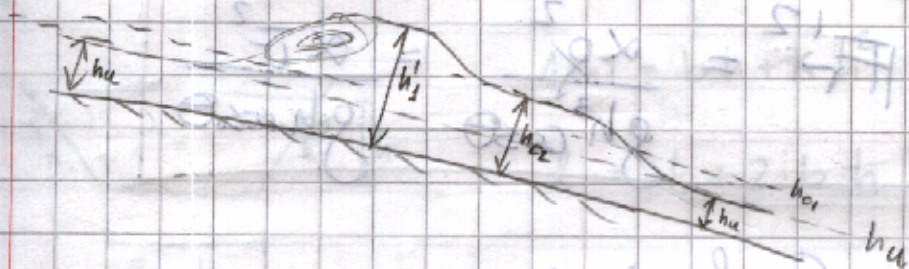
$$\text{Con } E_1 : E_1 = E_2 \quad \text{Calculo } h_2$$

CASO B) $E_1 < E_{c2}$

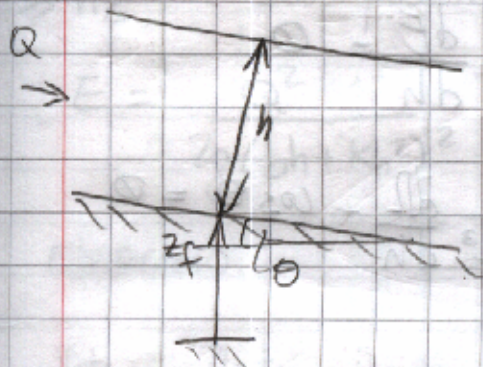


$$h_2 = h_{c2} \Rightarrow \text{Calculo } E_{c2}$$

$$E_1' = E_{c2} \rightarrow \text{Elige } h \text{ subcritica}$$



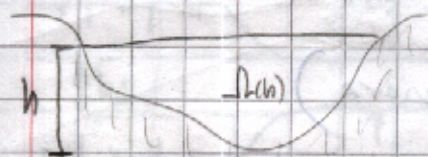
2.2.3 Cálculo de alturas críticas (03-10) en secciones regulares



$$B = E + z_f$$

$$E = \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} + h \cos \theta$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{\int b(h) dh}$$



α : Coef. Corridis

θ : inclinación fondo

→ Sección Rectangular (considerando α y $\cos \theta$)

$$E_{\min} : \frac{dE}{dh} = \alpha \frac{Q^2}{2g} (-2) \frac{1}{h^3} + \cos \theta = 0$$

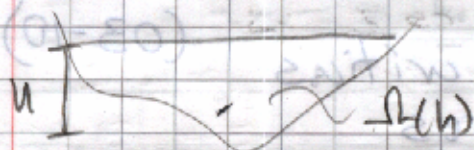
$$\alpha \frac{Q^2}{g h^3} = \cos \theta \Rightarrow Fr^2 = \frac{\cos \theta}{\alpha}$$

Otra alternativa: (CANAL RECTANGULAR)

Def:
$$Fr^2 = \frac{\alpha Q^2}{g h^3 \cos \theta} = \frac{\alpha \bar{v}^2}{g h \cos \theta}$$

→ Sección Cualquiera

$$\bar{v} = \frac{Q}{A(h)}$$



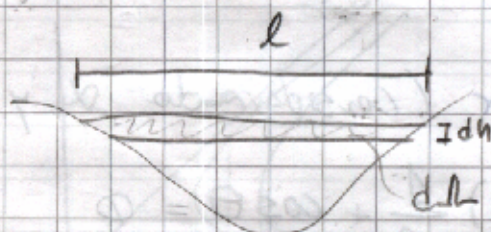
$$E = \frac{\alpha Q^2}{2g A^2} + h \cos \theta$$

$$\frac{dE}{dh} = 0$$

Emín:
$$\frac{dE}{dh} = \alpha \frac{Q^2}{2g} (-2) \cdot \frac{1}{A^3} \frac{dA}{dh} + \cos \theta = 0$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{dA}{dh} = \frac{\cos \theta}{\alpha}$$

Def: Fr^2 (Canal cualquiera)



$$\left. \frac{dA}{dh} \right|_{h=h} = l$$

↓
Ancho superficial

$$\Rightarrow Fr^2 = \frac{Q^2 l}{g A^3}$$

(Canal cualquiera)

Emín:
$$Fr^2 = \frac{\cos \theta}{\alpha}$$

Ej. Canal Trapecial.



$$L(h) = b \cdot h + K \cdot h^2$$

$$l = b + 2 \cdot k \cdot h$$

$$Fr^2 = \frac{Q^2 (b + 2k \cdot h)}{g (b \cdot h + K \cdot h^2)^3} = \frac{\cos \theta}{\alpha} \approx 1$$

$\Rightarrow h_c$ (Sol. positiva - real)

$$E = \frac{Q^2}{2g (bh + Kh^2)^2} + h$$

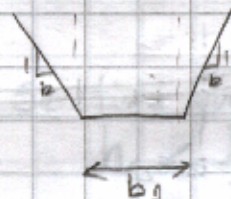
EJERCICIO.

Vista en Planta



(1)

(2)



Perfil

Canal Trapecial / Canal Rectangular

↑ Puntuación alta (Esc. Superavitosa)

En (1)

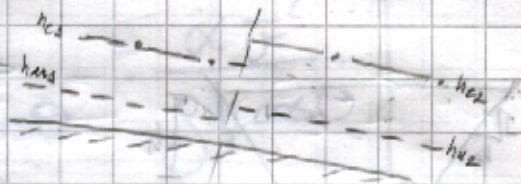
$$Fr^2 = \frac{Q^2 l}{g \sqrt{h^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{Q^2 \cdot (b_1 + 2k h_{c1})}{g (b_1 h_{c1} + k h_{c1}^2)^3} = 1$$

En (2) $Fr^2 = \frac{Q l}{g \sqrt{h^3}} \Rightarrow \frac{Q^2 \cdot b_2^2}{g (b_2 h_{c2})^3} = 1$

$$\Rightarrow h_{c2} = \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{1/3} \quad \text{y} \quad q = \frac{Q}{b_2}$$

Sea $b_1 \leq b_2 \Rightarrow$ muy probable $h_{c2} > h_{c1}$



$$h_{u1} < h_{c1} \quad \wedge \quad h_{u2} < h_{c2}$$

Flujo supercrítico: el control está aguas arriba $\Rightarrow h_1 = h_{u1}$

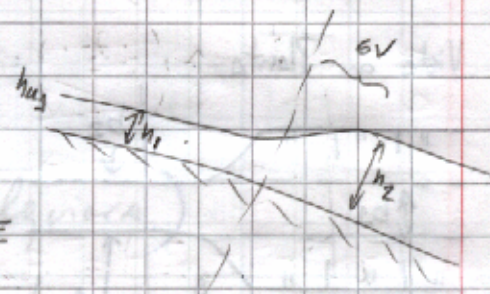
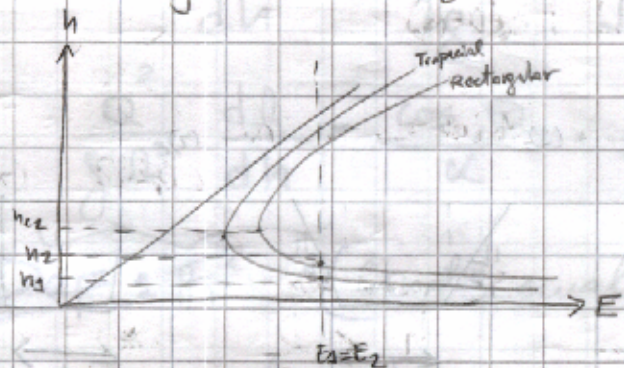
Tenemos $B_1 = B_2$ // despreciando pérdidas singulares.

$$E_1 + z_{f1} = E_2 + z_{f2} \quad // \quad z_{f1} \approx z_{f2}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2$$

$$\frac{Q^2}{2g(b_1 h_1 + b_1 h_1^2)^2} + h_1 = \frac{Q^2}{2g(b_2 h_2)^2} + h_2$$

$\Rightarrow$ Elijo $h_2 < h_{c2}$ (altura supercrítica)

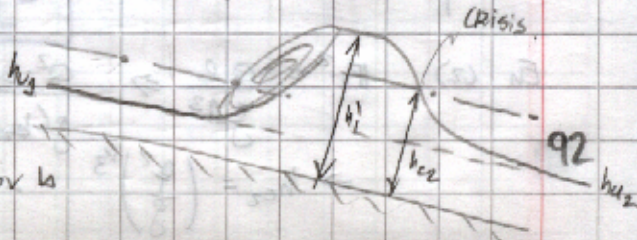


¿Qué pasa si $E_1 < E_2$?



El canal rectangular requiere como mínimo,

E_{c2}
 $\Rightarrow$ hay crisis en (2)



CRISIS modifica $E \Rightarrow E_1' = E_{c2}$

Se impone $h_1' > h_{c1}$ controlada por la crisis.

Ej. Canal Circular (Averiado.)



$$L = \frac{D^2}{8} (\beta - \sin \beta)$$

$$l = D \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2 \sqrt{h(D-h)}$$

β [rad]

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g L^3} l = \frac{\cos \theta}{2} \approx 1$$

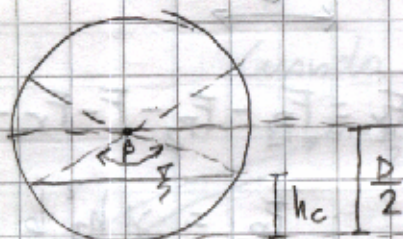
Ejemplo: SAA: $D = 1$ [m]; $Q = 500$ [l/s] = 0.5 [m³/s]

$$Fr^2 = \frac{0.5^2}{10 \cdot \left(\frac{1^2}{8} (\beta - \sin \beta)\right)} \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1 \quad \parallel \beta = \beta_c$$

$$\beta_c = 2.7345 \text{ [rad]} = 156.70^\circ$$

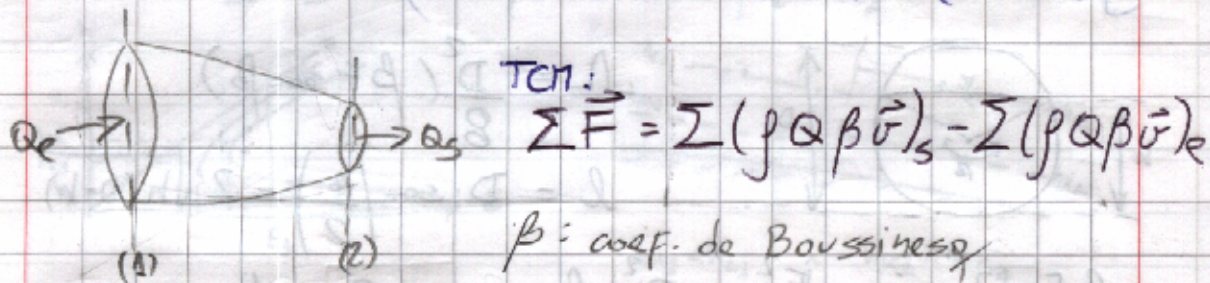
Pero $D \cdot \sin\left(\frac{\beta_c}{2}\right) = 2 \sqrt{h_c(D-h_c)}$

$$1 \cdot \sin\left(\frac{2.734}{2}\right) = 2 \sqrt{h_c(0.5-h_c)} \Rightarrow h_c \begin{cases} 0.601 \\ 0.398 \end{cases} (*)$$

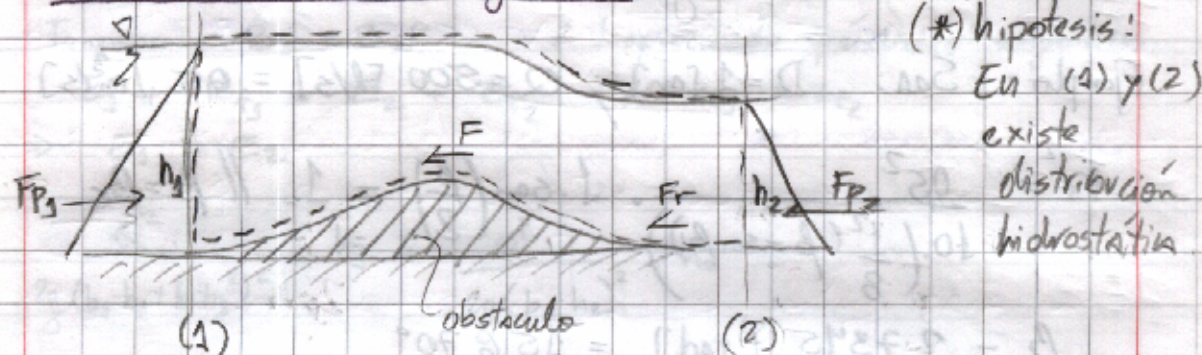


Se tiene que $h_c < \frac{D}{2}$ (*)

2.3 Ec. de la Cantidad de Movimiento. (05-10)



Caso: Canal rectangular:



TCM_x: $\sum F_x = \rho \cdot Q \beta \bar{v}_2 - \rho \cdot Q \beta \bar{v}_1$ (1)

$\bar{v} = \frac{Q}{\Omega(m)}$; $\Omega = b \cdot h$

$\Rightarrow \bar{v} = \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{q}{h}$

$q = \frac{Q}{b}$

$\sum F_x = \rho \cdot Q \left(\frac{q}{h_2} - \frac{q}{h_1} \right) \wedge \sum F_x = F_{p1} - F_{p2} - F - Fr - W \sin \theta$

$F_{p1} = \gamma \cdot \frac{h_1 \cdot h_1}{2} \cdot b = \gamma h_1^2 \cdot \frac{b}{2}$; $F_{p2} = \gamma h_2^2 \cdot \frac{b}{2}$ // (*)

(1) $\Rightarrow$

$\frac{\gamma b}{2} (h_1^2 - h_2^2) - F - Fr = \rho \cdot Q \left(\frac{q}{h_2} - \frac{q}{h_1} \right) \quad | \cdot \frac{1}{b}$

$\gamma \cdot \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} - \frac{F}{b} - \frac{Fr}{b} = \rho \cdot q^2 \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right)$

$\frac{q^2}{\gamma \cdot h_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{q^2}{\gamma \cdot h_2} + \frac{h_2^2}{2} + \frac{F}{\gamma b} + \frac{Fr}{\gamma b}$

Def: Momenta o fm momenta canal rectangular

$$m = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2}$$

momenta por unidad de ancho. $[L^2]$

$$\Rightarrow m_1 = m_2 + \frac{F}{\gamma b} + \frac{F_r}{\gamma b}$$

2.32. Fm Momenta y sus propiedades.

Uso: Canal Rectangular

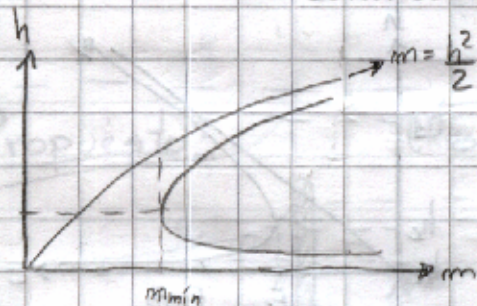
$$m(q, h) = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2} \quad \wedge \quad E(q, h) = \frac{q^2}{2gh} + h$$

- Características:

① Para un m dado existen 3 valores de h :
2 h positivos y 1 h negativo.

② Asintotas: Cuando h es grande $\Rightarrow m \sim \frac{h^2}{2}$

Cuando $h \rightarrow 0 \Rightarrow m \rightarrow \infty$



Minimizamos m

$$\frac{dm}{dh} = 0$$

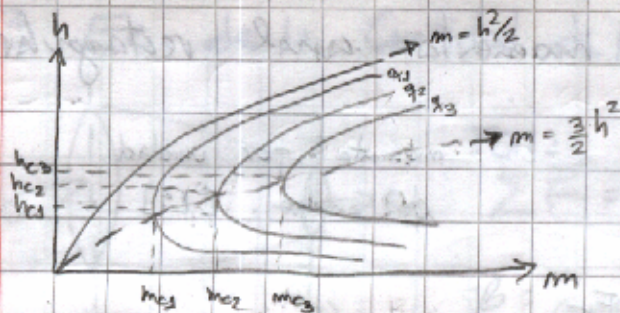
$$\Leftrightarrow -\frac{q^2}{g} \cdot \frac{1}{h^2} + \frac{2h}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^2}{gh^3} = 1 \quad \Leftrightarrow Fr^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Cuando la momenta es MÍNIMA el esc es CRÍTICO

$$h = h_c, \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}; \quad m_c = \frac{3}{2} h_c^2$$

$$m_{min} = m_c$$

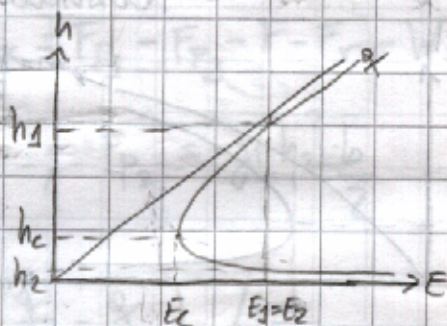
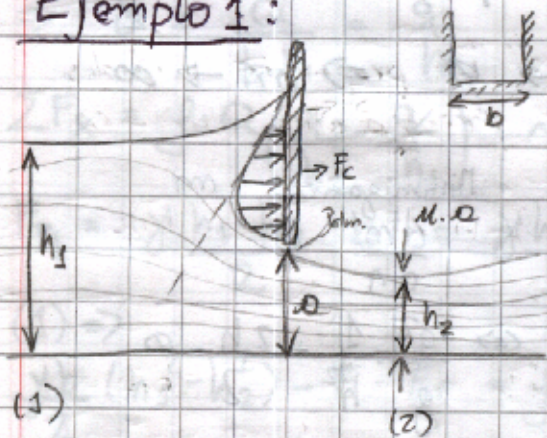


$$q_1 < q_2 < q_3$$

Esc. CRÍTICO se caracteriza por:

- i) $(Fr = 1) \quad \vee \quad \left(\frac{\bar{v}}{\sqrt{gh}} = 1 \right) (u)$
- ii) La vel. del flujo es igual a la celeridad de las ondas gravitacionales superficiales (u)
- iii) La energía específica es mín. para un caudal dado.
- iv) El caudal es máx. para una energía dada.
- v) La momento es mín. para un caudal dado.

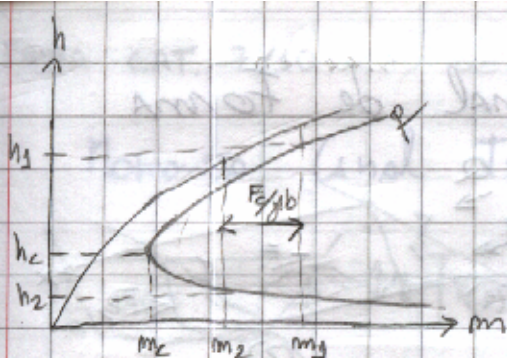
Ejemplo 1:



Energía: $B_1 = B_2 \Rightarrow E_1 = E_2$

TCH s/x: $m_1 = m_2 + \frac{F_c}{\gamma b}$

// Despreciamos pérdidas friccionales $Fr = 0$

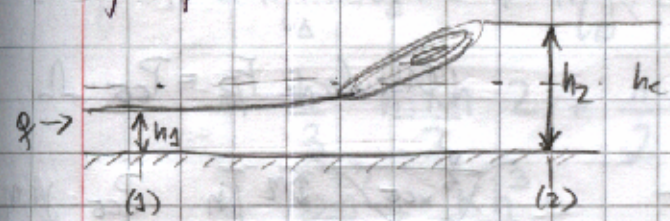


$$\frac{F_c}{\gamma b} = m_3 - m_2$$

$$= \frac{q^2}{gh_1} + \frac{h_1^2}{2} - \left(\frac{q^2}{gh_2} + \frac{h_2^2}{2} \right)$$

⇒ Sol: $h_2 = \mu \cdot \alpha$
 y h_3 viene de $E_3 = E_2$

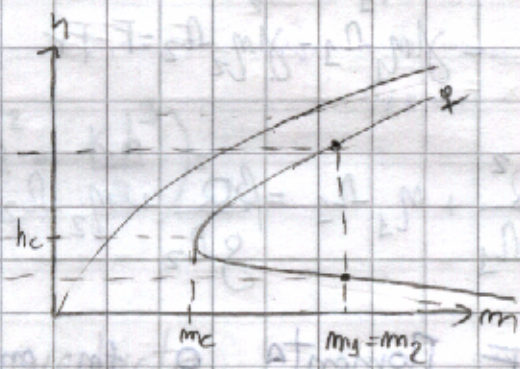
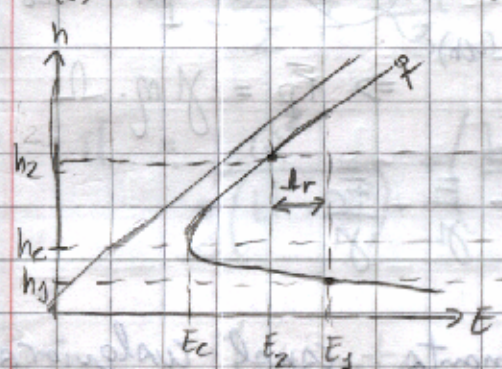
Ejemplo 2.



Energía

$$B_1 = B_2 + \Delta \text{resalto}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 + \Delta r$$



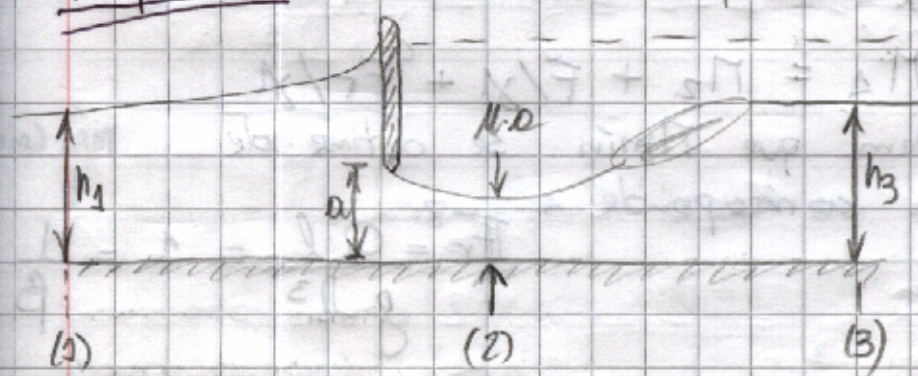
Se tiene $m_1 = m_2$

// Despreciando pérdidas
 friccionales $F_r = 0$

Propuesta:

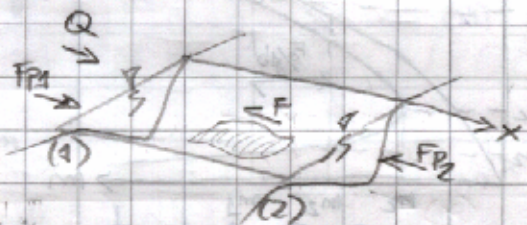
(Resalto al pie)

Datos
 q, α
 $\mu = \dots$



Det. $h_3 \Rightarrow h_2 = \mu \cdot \alpha \Rightarrow$ Dem. que $h_1 > h_3$

2.3.1 TCM en un canal de Forma Cualquiera.



TCM S/x : $\Sigma F_x = \int Q \beta (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$

$$\bar{v}_1 = \frac{Q}{\Omega_1} ; \bar{v}_2 = \frac{Q}{\Omega_2}$$

Cálculo: $F_p = P_{co} \cdot \Omega$

$$\Sigma F_x = F_{p1} - F_{p2} - F - F_r$$

$$= \gamma \eta_1 \Omega_1 - \gamma \eta_2 \Omega_2 - F - F_r$$

$\Rightarrow F_p = \gamma \eta \cdot \Omega$

$$\Rightarrow \frac{\beta Q^2}{g \Omega_1} + \eta_1 \Omega_1 = \frac{\beta Q^2}{g \Omega_2} + \eta_2 \Omega_2 + \frac{F}{\gamma} + \frac{F_r}{\gamma}$$

Def Flomanta o fm. momento canal cualquiera

$$M = \underbrace{\frac{\beta Q^2}{g \Omega}}_{\text{Udd}} + \underbrace{\eta \cdot \Omega}_{\text{Presión}} \quad [L^3]$$

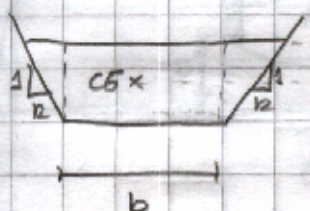
$$\Rightarrow \text{TCM: } M_1 = M_2 + F/\gamma + F_r/\gamma$$

Propuesto: Dem. que $M_{\min}$ se obtiene de

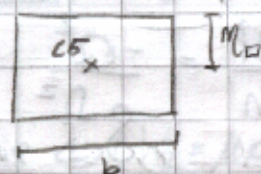
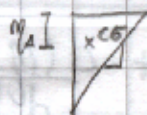
Más General

$$\frac{dM}{dh} = 0 \quad \text{corresponde a} \quad \frac{F_r}{F} = \frac{Q^2 \cdot l}{g \Omega^3} = 1 = \frac{1}{\beta}$$

Momenta Canal Trapecial.


 I_n

$$A = b \cdot h + Kh^2$$



$$\begin{aligned} I_n \cdot A &= I_{\Delta} \cdot A_{\Delta} + I_{\square} \cdot A_{\square} \\ &= \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{b \cdot h}{2} + \frac{1}{2} \cdot h \cdot b \\ &= \frac{bh^2}{2} + \frac{Kh^3}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{Q^2}{g(bh + Kh^2)} + \left(\frac{bh^2}{2} + \frac{Kh^3}{3} \right)$$

Ppto. Momanta Acueducto.



Altura mínima en un canal de geometría cualquiera.

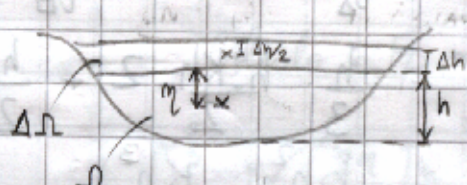
$$\Pi = \frac{Q^2}{g \Omega^3} + \eta \cdot \Omega \quad / \frac{d}{dh}$$

$$\frac{d\Pi}{dh} = \frac{-Q^2}{g \Omega^3} \cdot \frac{d\Omega}{dh} + \frac{d(\eta \cdot \Omega)}{dh}$$



$$d\Omega = dh \cdot l$$

$$\Rightarrow \frac{d\Omega}{dh} = l$$



$$\frac{d(\eta \cdot \Omega)}{dh} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{(\eta \cdot \Omega)_{h+\Delta h} - (\eta \cdot \Omega)_h}{\Delta h}$$

$$(\eta \cdot \Omega)_h = \eta \cdot \Omega$$

$$(\eta \cdot \Omega)_{h+\Delta h} = \Omega(\eta + \Delta \eta) + \frac{\Delta \Omega \Delta \eta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\eta \cdot \Omega)}{dh} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Omega(\eta + \Delta \eta) + \frac{\Delta \Omega \Delta \eta}{2} - \eta \cdot \Omega}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\Omega + \frac{\Delta \Omega}{2} \right) = \Omega$$

$$\Rightarrow \frac{d\Pi}{dh} = \frac{-Q^2}{g \Omega^3} \cdot l + \Omega = 0 \Rightarrow \frac{Q^2 l}{g \Omega^3} = 1$$

Crisis en un canal cualquiera:

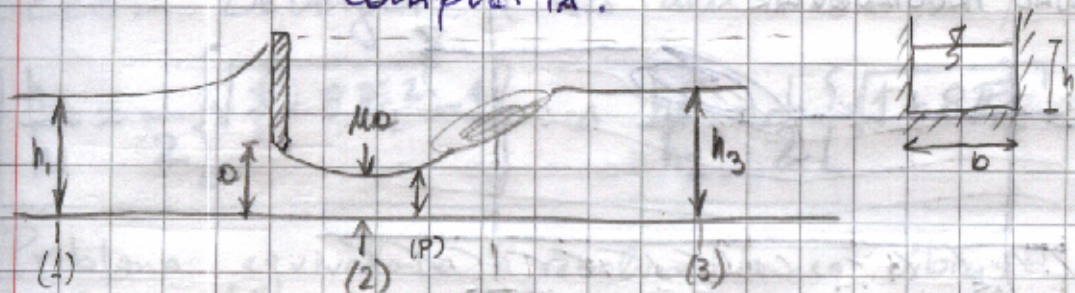
$$Fr^2 = \frac{Q^2 l}{g \Omega^3} = 1$$

Para \$Q\$ dado existe 2 alturas posibles:

\$h < h_c\$ (esc. supercrítico)

\$h > h_c\$ (esc. subcrítico)

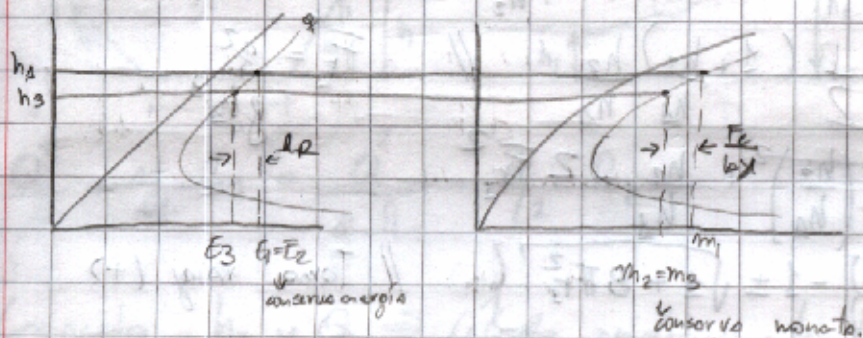
Ejemplo. Resalto al pie de una compuerta.



- a) Det. h_3 para que el resalto sea al pie $\Leftrightarrow (h_2 = u_0)$
 b) Demostrar $h_1 > h_3$

ΔR : Pérdida del resalto.

Energía:



$$m_1 = m_2 + \frac{F_2}{b\gamma} \quad ; \quad m_1 > m_2 \quad (1)$$

$$m_1 = m_3 + \frac{F_2}{b\gamma} \quad ; \quad m_2 = m_3 \quad (2)$$

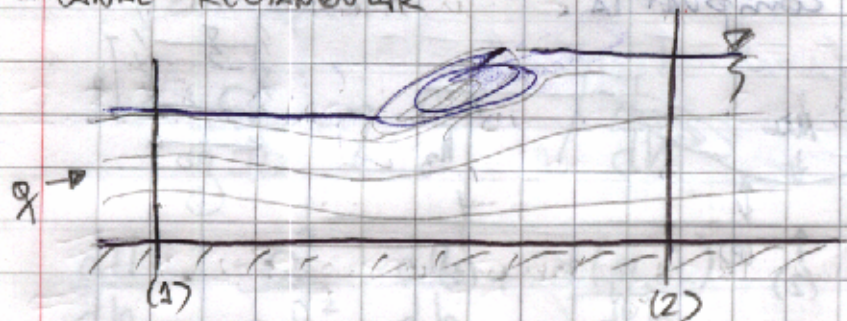
$$E_1 = E_2 \quad (3)$$

$$E_2 = E_3 + \Delta R \quad ; \quad E_3 < E_2 \quad (4)$$

2.3.3. Resulto Hidráulico.

Calc. 12-10

— CANAL RECTANGULAR



$$\frac{q^2}{g h_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{q^2}{g h_2} + \frac{h_2^2}{2} \Leftrightarrow \frac{q^2}{g} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}$$

$$\frac{q^2}{g} = \frac{(h_2 + h_1)}{2} \cdot h_1 \cdot h_2 \quad / \cdot \frac{1}{h_1^3} \rightarrow i)$$

$$/ \cdot \frac{1}{h_2^3} \rightarrow ii)$$

$$i) \frac{q^2}{g h_1^3} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) \frac{h_2}{h_1} \quad // \quad Fr_1^2 = \frac{q^2}{g h_1^3}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2 Fr_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left\{ -1 \pm \sqrt{1 + 8 Fr_1^2} \right\} \quad // \text{ Tomo raíz (+)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1 \right\}} > 1 \quad Fr_1 > 1 \quad (1)$$

Conocido q y $h_1 \Rightarrow$ Calculo $Fr_1^2 \Rightarrow$ Calculo h_2 (Altura conjugada)

$$ii) \frac{q^2}{g h_2^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{h_2} + 1 \right) \cdot \frac{h_1}{h_2} \quad // \quad Fr_2^2 = \frac{q^2}{g h_2^3}$$

$$0 = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + \frac{h_1}{h_2} - 2 Fr_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + 8 Fr_2^2} - 1 \right\}} < 1 \quad Fr_2 < 1 \quad (2)$$

Conocido q y $h_2 \Rightarrow$ Calculo $Fr_2^2 \Rightarrow$ Calculo h_1

Entonces definimos:

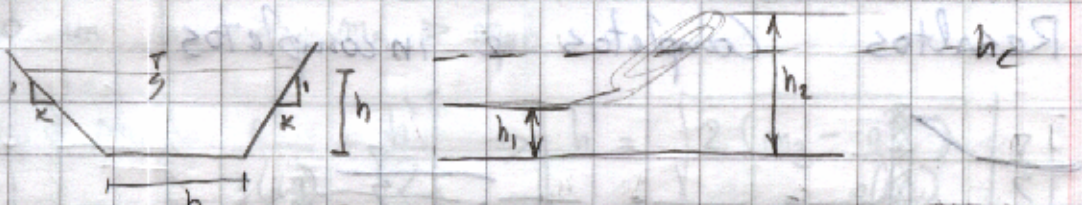
Ecs. Belanger: (Para canal Rectangular)

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right] \quad \wedge \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8Fr_2^2} - 1 \right]$$

Problema equivalente a resolver la eq. cúbica:

$$\frac{Q^2}{gh_1} + \frac{h_1^3}{2} = \frac{Q^2}{gh_2} + \frac{h_2^3}{2}$$

- CANAL TRAPEZOIDAL:



$$\frac{Q^2}{gA_1} + \gamma_1 L_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + \gamma_2 L_2$$

Conocido h_1 y $Q \Rightarrow$ Cálculo analítico de h_2
 " h_2 y $Q \Rightarrow$ " " " "

Cálculo de Pérdidas en el resalto.

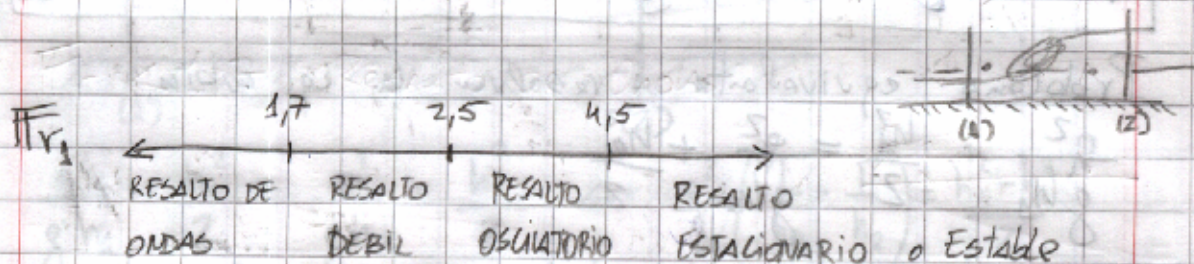
$$\frac{Q^2}{2gA_1^3} + h_1 = \frac{Q^2}{2gA_2^3} + h_2 + L_R \quad (E)$$

$$\frac{Q^2}{gA_1} + \gamma_1 L_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + \gamma_2 L_2 \quad (M)$$

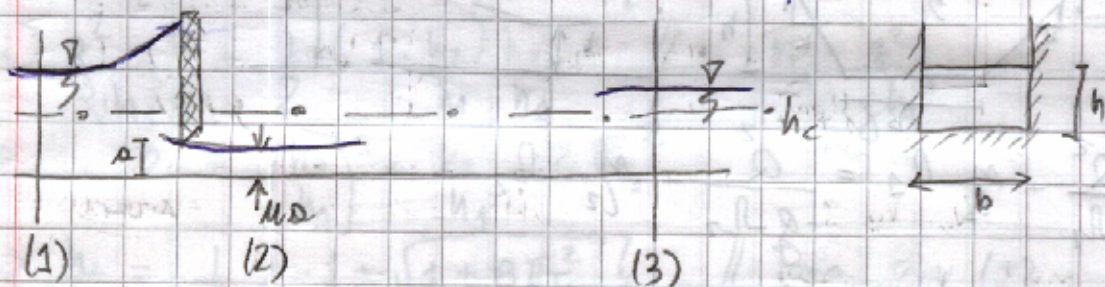
- CANAL RECTANGULAR:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q^2}{2gh_1^3} + h_1 &= \frac{Q^2}{2gh_2^3} + h_2 + L_R \\ \frac{Q^2}{gh_1} + \frac{h_1^3}{2} &= \frac{Q^2}{gh_2} + \frac{h_2^3}{2} \end{aligned} \right\} L_R = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}$$

2.3.3. Clasificación del Resalto Hidráulico. (en Terminos del Froude)



Resaltos Completos e incompletos



- Compuerta que controla escurrimiento.

Datos: q, μ, h_3

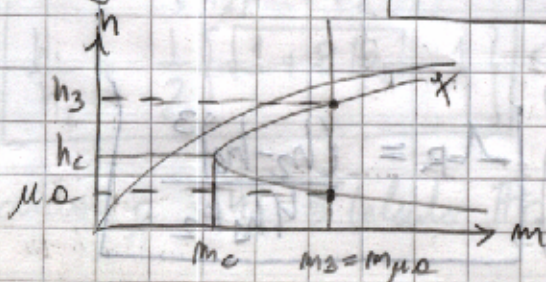
"Resalto al pie": $h_2 = \mu \cdot \alpha \Rightarrow m_2 = \frac{q^2}{g(\mu \alpha)} + \frac{(\mu \alpha)^2}{2} = m_{\mu \alpha}$

Tomamos $h_3 > h_c \Rightarrow$ es contracción desde aguas abajo, indep de la compuerta.

$$m_3 = \frac{q^2}{g h_3} + \frac{h_3^2}{2}$$

(ASO i)

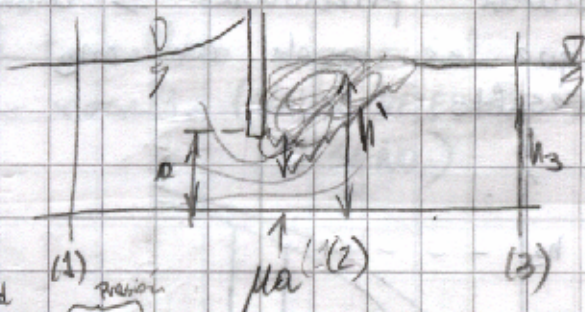
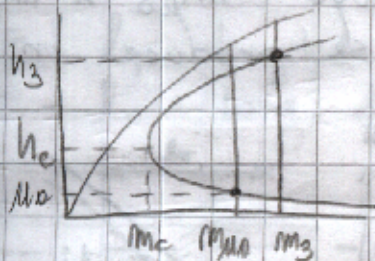
Resalto al pie $\Leftrightarrow (m_{\mu \alpha} = m_3)$



$\exists!$ h_3 que satisfaga esta condición.

h_3 es la altura conjugada de $\mu \alpha$.

(Caso ii) ($m_3 > m_{\mu a}$) (Resalto Ahogado)



$$(h' > h_c) \Rightarrow m_2 = \frac{Q^2}{g(\mu a)} + \frac{h'^2}{2} > m_{\mu a} = \frac{Q^2}{g(\mu a)} + \frac{(\mu a)^2}{2}$$

Dado un $h_3 \Rightarrow m_3 > m_{\mu a}$

$$m_3 = m_2 = \frac{Q^2}{g(\mu a)} + \frac{h'^2}{2} \Rightarrow h' = \sqrt{\frac{2(m_3 - \frac{Q^2}{g(\mu a)})}{g(\mu a)}}$$

Cálculo de h_1 :

Tomemos $E_1 = E_2$

Altura del resalto ahogado

$$\Rightarrow \frac{Q^2}{g h_1^3} + h_1 = \frac{Q^2}{g (\mu a)^3} + h' \quad (E_1 \text{ para calcular } h_1)$$

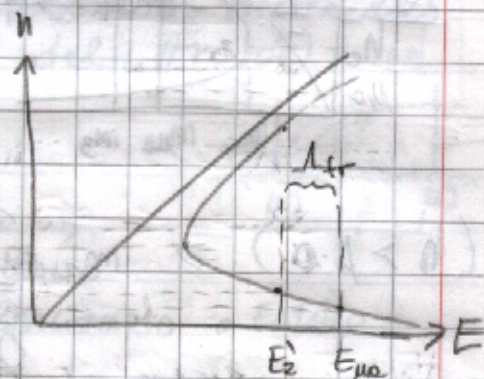
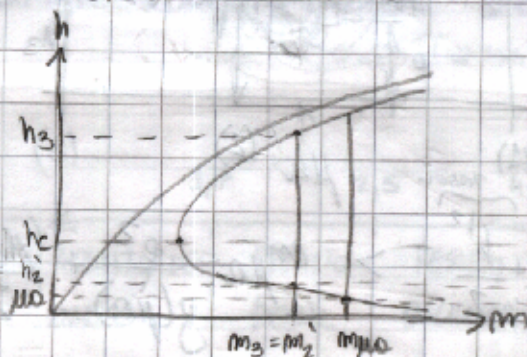
Como $E_2 > E_{\mu a} \Rightarrow h_1$ de resalto ahogado es mayor que h_1 de resalto al pie.

(Caso iii) ($m_3 < m_{\mu a}$) (Resalto Rechagado)

"Móvil"

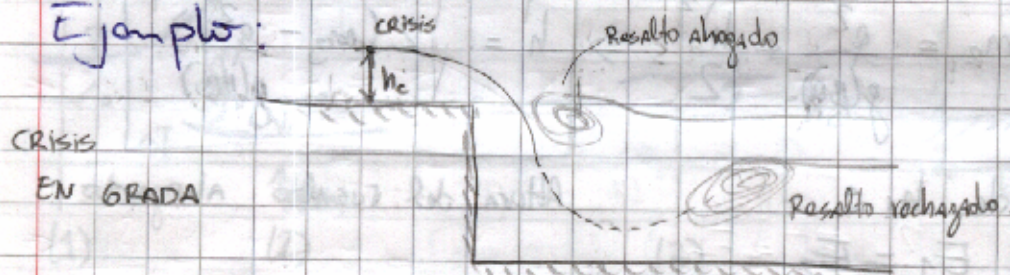


La altura h va aumentando debido a pérdida friccional $\rightarrow$ disminuye $m_{\mu 0}$ a m_2^1 que se iguala con m_3 y se produce un resalto



h_1 resalto rechazado = h_1 resalto al pie.

Ejemplo:



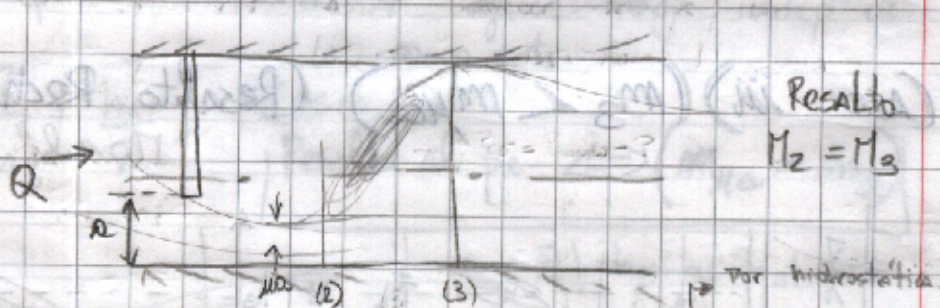
GRADA SIN CRISIS
ni resalto



Resalto incompleto
acueducto



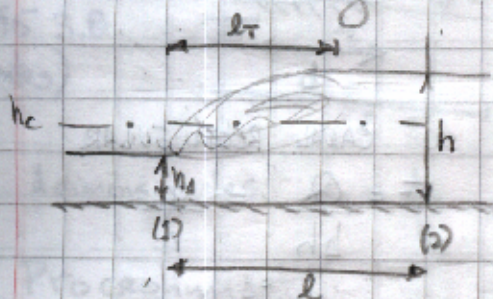
Acueducto con
presión con
Resalto



$$M_2 = \frac{Q^2}{g h_2} + \gamma h_2 = M_3 = \frac{Q^2}{g h_{tuer}} + \frac{P_{CG} \cdot h_{tuer}}{\gamma}$$

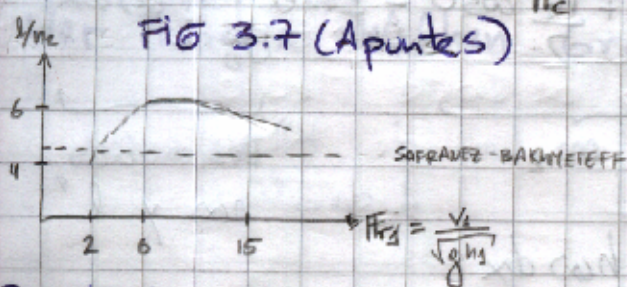
2.3.3 Longitud del resalto. CAT 19-10

Def: l_T : longitud del torbellino superficial.
 l : long. del resalto (VALOR RELEVANTE PARA DISEÑO)



Valores según distintos autores:

- Safranez: $l = 4,5 \cdot h_2$
- BAKhmeteff: $\frac{l}{h_c} = 4,5 \cdot \frac{h_2}{h_c}$ (Confirma Safranez cuando $\frac{h_2}{h_c} > 1,5$)
- Fco. JAVIER DOMINGUEZ: $\frac{l}{h_c} = [18-20] \frac{h_1}{h_c}$ (Alamos & Gallard)

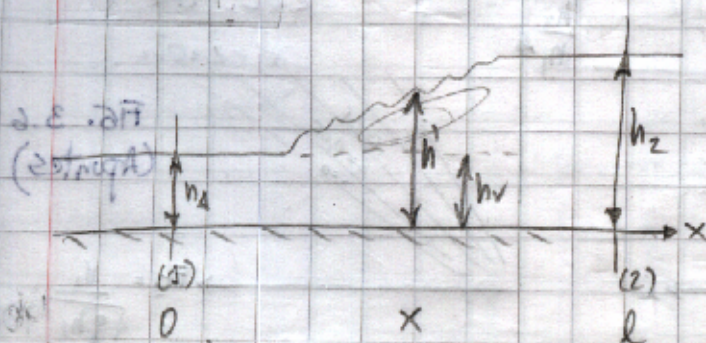


CANAL RECTANGULAR

$$\frac{h_2}{h_c} = \frac{1}{Fr_1^{2/3}}$$

Resultado Empírico:

Desarrollo de la momanta, en un resalto a lo largo de un canal Rectangular:



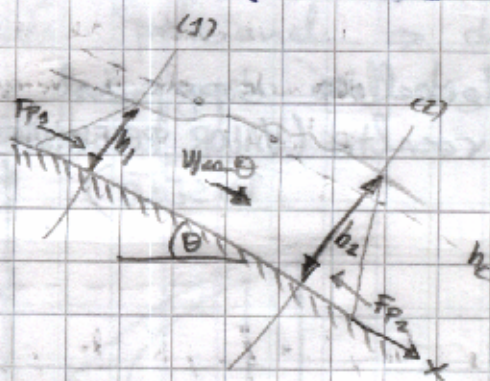
Cálculo de h_1 y h_2
 Ec. de Belanger

Tormentos: $m_1 = m_2 = m_{max}$

$$m(x) = \frac{q^2}{g h(x)} + \frac{h(x)^3}{2}$$

$h_1(x)$ y $h_2(x)$ se obtienen GRÁFICAMENTE FIG. 3.4 (APUNTES)

Resalto en canales de pendiente alta.



CAÑAL RECTANGULAR

$$\bar{V} = \frac{Q}{bh} = \frac{q}{h}$$

TCM s/x:

$$\sum F_x = F_{p1} - F_{p2} + W \sin \theta = \beta \rho Q (\bar{V}_2 - \bar{V}_1)$$

$$F_p = \gamma \frac{h^2}{2} b \cos \theta ; W = \rho g V$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{b}{2} \cos \theta \left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right) + \gamma \frac{b}{2} \sin \theta \int_0^l h(x) dx = \beta \rho \left(\frac{Q^2}{h_2} - \frac{Q^2}{h_1} \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{Q^2}{g h_1}}_{m_1} + \underbrace{\frac{h_1^2}{2} \cos \theta}_{m_2} = \underbrace{\frac{Q^2}{g h_2} + \frac{h_2^2}{2} \cos \theta}_{m_2} - \underbrace{\sin \theta \int_0^l h(x) dx}_{\text{"Desconocido: } h(x) \text{ y } l."}$$

$$m_1 = m_2 + \sin \theta \int_0^l h(x) dx$$

⇒ Necesario recurrir a la experimentación para det. la relación entre h_1 y h_2

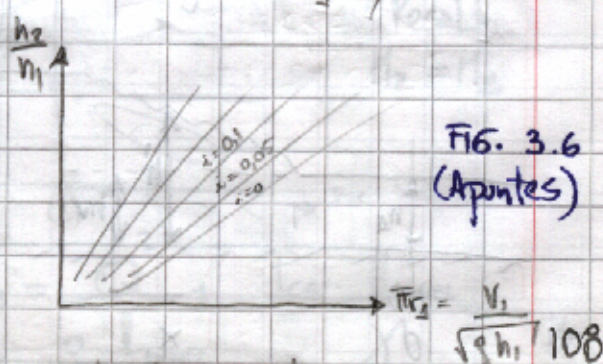
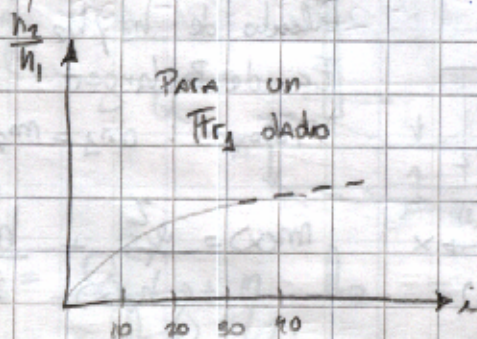


FIG. 3.6
(Apuntes)

* Para pendiente mayor que 30% extrapolar y aplicar criterio.

Resalto en cambio de Padiate (Padiate mixta)

Fig. 3.9 y
Fig. 3.8
(Apuntes)



La ubicación del resalto depende de la magnitud relativa de las momentos m_1 y m_2 .

Adimensionales: $x_0 = \frac{h_0}{h_c}$; $x_1 = \frac{h_1}{h_c}$; $L = \frac{l}{h_c}$; $N = \frac{l_1}{l}$; $\tan \alpha = i$

Procedimiento:

Conocido: q, i, h_0 y $h_1 \Rightarrow$ Cálculo: x_0 y x_1

Con x_0, x_1 e $i \Rightarrow N$ (Fig. 3.9)

Con N, x_0 e $i \Rightarrow L$ (Fig. 3.8)

Obtengo la ubicación del resalto y el largo total.

Mayor Info. sobre Resaltos:

Ver Memoria Wilken Grusz (U de Chile)