

Cuaderno de Clases: CI41A

Capítulo A2: Régimen impermanente en tuberías.

Javier A. Rovegno Campos

19 de junio de 2007

Licencia del Documento: Creative Commons 3.0 [Detalles de la Licencia]¹

Este documento contiene una recopilación de los apuntes, tomados por el Autor, en las clases de Hidráulica del Año 2006 impartidas en la FCFM por los profesores:

- Aldo Tamburrino
- Yarko Niño

Datos del Autor:

Correos del Autor: jrovegno@ing.uchile.cl , tatadeluxe@gmail.com

Página Personal del Autor: <http://www.cec.uchile.cl/~jrovegno/>

Este Documento forma parte de la primera etapa BETA del *Proyecto Colaborativo WikiCursos*.

Para más información sobre WikiCursos visitar:
<http://ideaschile.wordpress.com/>

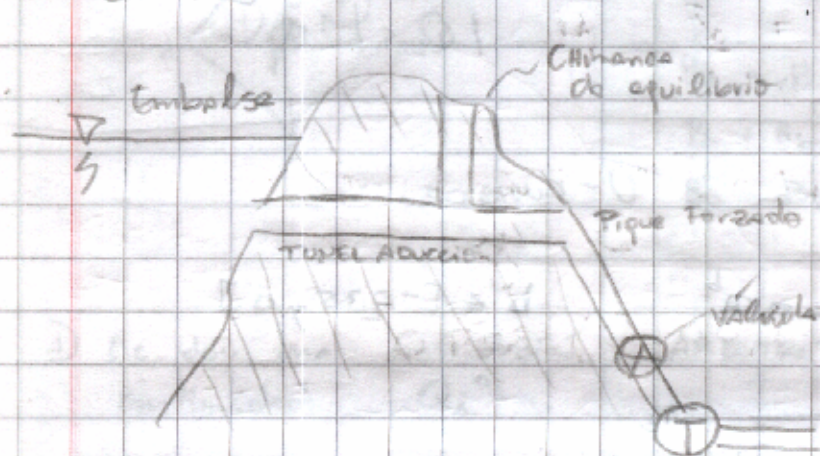
¹<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

CONTORNOS CERRADOS:

1. Análisis hidráulico de sistemas de tuberías.
 - 1.1. Introducción. Repaso de los conceptos de resistencia de los fluidos, régimen de escurrimiento, capa límite y pérdidas de energía.
 - 1.2. Singularidades (ensanche, contracción, difusor, curvas, orificios, etc). Aplicaciones.
 - 1.3. Sistemas de tuberías. Aplicaciones de sistemas de tuberías incluyendo estanques , válvulas intermedias y bombas. Bombas centrifugas. Tipos de bombas. Altura dinámica de elevación. Curvas características. Cavitación, Altura neta positiva de aspiración. Aplicaciones.
 - 1.4. Redes de tuberías. Método de Hardy Cross. Aplicaciones.
2. Régimen impermanente en tuberías.
 - 2.1. Aspectos generales. El fenómeno golpe de ariete.
 - 2.2. Método inelástico. fenómenos de oscilación en masa. Ecuaciones básicas. Aplicaciones.
 - 2.3. Método elástico. Ecuaciones del fenómeno.
 - 2.4. Métodos de solución: Métodos gráficos, analíticos y computacionales. Aplicaciones.

2. Régimen impermanente en Tuberías

Centrales Hidroeléctricas



Fenómeno del Golpe de Ariete

AUX1.

$$B_1 = B_2 + L_f - \Delta B$$

$$z_1 = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{fL}{D} \frac{v_2^2}{2g} - \Delta B$$

$$\Delta B = (z_2 - z_1) + \left(1 + \frac{fL}{D}\right) \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \Delta B = 41 + (1 + 1450 \cdot f) 827 Q^2$$

↳ Curva de op. del sistema.

Probanos distintos Q.

Primero, Medio, Final. (Vamos Rangos)

$$Q_1 = 0,1 \text{ [m}^3/\text{s]} \Rightarrow Re = 1E6$$

$$\epsilon/D = 0,0005$$

$$\Rightarrow \text{Transición: } f = 0,0172$$

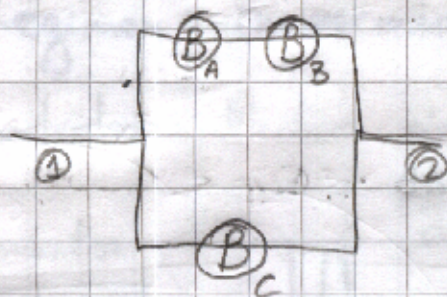
$$\Rightarrow \Delta B_1 = 255,52 \text{ [m]} \leq 45 \text{ [m]} \quad \text{Bomba entrega ERROR}$$

$$Q_2 = 0,05 \text{ [m}^3/\text{s]} \Rightarrow Re = 5,1 \cdot 10^5$$

$$\Rightarrow \text{Transición: } f = 0,0176$$

$$\Rightarrow \Delta B_2 = 95,83 \leq 98 \text{ [m]} \quad \text{OK}$$

P2



$$B_A = B_B + \Delta t_i - (H_A + H_B)$$

$$B_A = B_B + \Delta t_i - H_C$$

$$\Delta t_i = \alpha_i \cdot Q_i^2$$

Sist. en equilibrio

$$\Rightarrow H_I = \Delta t_1 - (H_A + H_B) = \alpha_1 Q_1^2 - (H_A + H_B)$$

$$H_{II} = \Delta t_2 - H_C = \alpha_2 Q_2^2 - (H_C)$$

Operación de las Ramas

$$H_I = 50 - 710 \cdot Q_I^2$$

$$H_{II} = 40 - 420 Q_{II}^2$$

Rangos de Operación Bombas

$$B_A : H_A = 20 - 500 \cdot Q_A^2$$

$$\text{Si } H_A = 0 \Rightarrow Q_{\max A} = 0,2 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$B_B : H_B = 30 - 200 Q_B^2$$

$$\text{Si } H_B = 0 \Rightarrow Q_{\max B} = 0,39 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$B_C : H_C = 110 - 400 Q_C^2$$

$$H_I = \begin{cases} 50 - 710 Q_I^2 & (0 \leq Q_I \leq 0,2) \Rightarrow A, B \\ 21,6 \leq H_I \leq 50 \\ 30 - 210 Q_I^2 & (0,2 \leq Q_I \leq 0,377) \Rightarrow B \\ 0,152 \leq H_I \leq 21,6 \end{cases}$$

$$B_c: H_c = 40 - 400 Q_c^2$$

$$\text{si } H_c = 0 \Rightarrow Q_{\max c} = 0,309 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$H_{II} \begin{cases} 40 - 420 Q_c^2 \\ 0 \leq H_{II} \leq 40 \end{cases} \quad (0 \leq Q_{II} \leq 0,309) \Rightarrow$$

Combinando ambas ramas:

$$i) \quad 0 \leq H_I = H_{II} \leq 21,6$$

$$Q_{\text{TOTAL}} = Q_I + Q_{II} \\ = \sqrt{\frac{30-H}{210}} + \sqrt{\frac{40-H}{420}}$$

$$\text{Si } H = 0 \Rightarrow Q_{\text{TOTAL}} = 0,69$$

$$H = 21,6 \Rightarrow Q_{\text{TOTAL}} = 0,41$$

$$ii) \quad 21,6 \leq H \leq 40$$

$$Q_{\text{TOTAL}} = Q_I + Q_{II} \\ = \sqrt{\frac{50-H}{710}} + \sqrt{\frac{40-H}{420}}$$

$$\text{Si } H = 21,6 \Rightarrow Q_{\text{TOTAL}} = 0,41$$

$$H = 40 \Rightarrow Q_{\text{TOTAL}} = 0,32$$

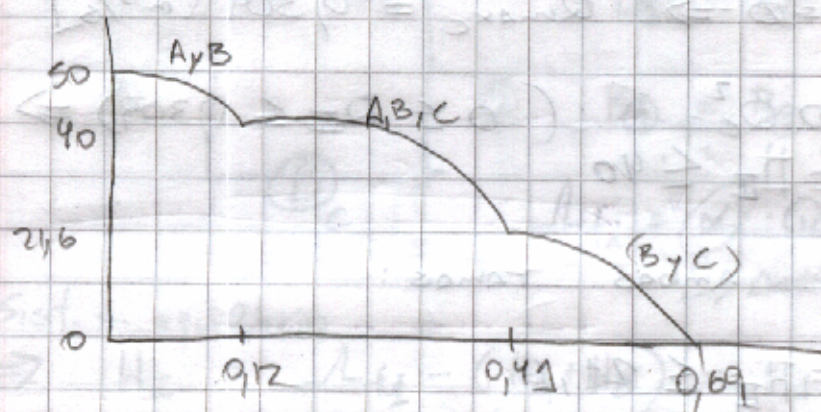
$$iii) \quad 40 \leq H \leq 50$$

$$Q_{\text{TOTAL}} = Q_I + \cancel{Q_{II}} = \sqrt{\frac{50-H}{710}}$$

$$\text{Si } H = 40 \Rightarrow Q_T = 0,32$$

$$H = 50 \Rightarrow Q_T = 0$$

Gráfico.



(17-08) CATEBRA

2

Flujo impermanente / Traslante en tuberías

2.1 Aspectos Generales.

i) Lento $\rightarrow$ oscilación en masa tipo tubo en U.

Compresibilidad del líquido es poco relevante.

ii) Rápido $\rightarrow$ onda de presión que viaja con la vel. del sonido.

Compresibilidad del líquido es importante

(Altos niveles de presión)

Deformación de la tubería.

i) Método inelástico:

* Fluido incompresible

* Tubería indeformable.

(Ec. N-5)

ii) Método elástico:

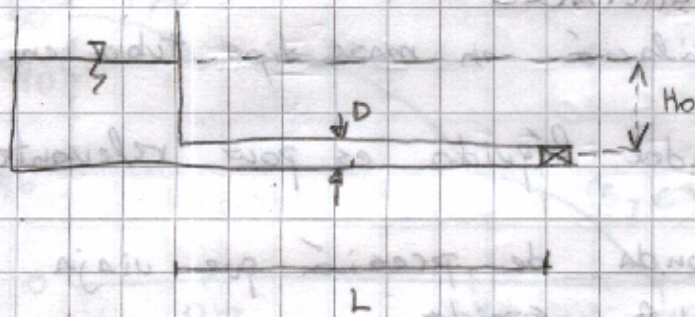
* Fluido compresible

* Tubería deformable.

2.2

F-8 (AT-8)

Método Integral.



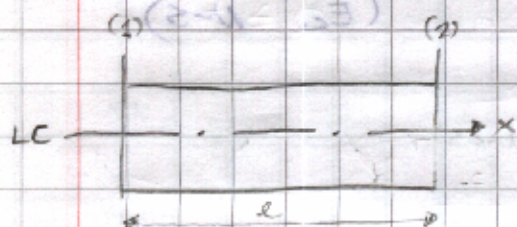
* Despreciamos pérdidas friccionales y singulares.

⇒ Fluido ideal y ⇒ Flujo irrotacional.

Planteamos la ecuación de Euler

Fluido ideal: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{v} \times \vec{\omega} \quad / \cdot d\vec{x}$

Flujo irrotacional: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = 0$



$$\vec{v} = u \hat{x}$$

$$\Rightarrow (\vec{v} \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{x} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{x} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cdot dx + g \cdot dB = 0 \quad \int_0^L$$

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dx + g \int_0^L dB = 0$$

Pare $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

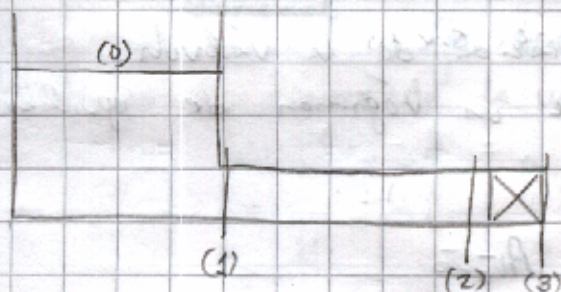
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ no depende de } x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \int_1^2 dx + g(B_2 - B_1) = 0$$

$$l \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + g(B_2 - B_1) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{l}{g} \frac{du}{dt} + B_2 - B_1 = 0 \right]$$

Me doy Algunas pto.



Entre (0) y (1) despreciamos aceleración $\frac{du}{dt}$ en el estanco de grandes dimensiones.

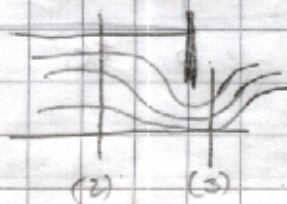
$$B_0 = B_1$$

$\rightarrow H_0$ (cte)

Entre (1) y (2)

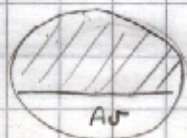
$$\frac{l}{g} \frac{du}{dt} + B_2 - B_1 = 0$$

Entre (2) y (3)



$$Q_2 = Q_3$$

$$u_2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} = u_3 \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$



Podemos despreciar los efectos inportantes
 en la válvula que largo válvula $\ll$ largo tubo.

$$\Rightarrow B_2 \approx B_3$$

$$\hookrightarrow \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\text{pero } v_3 = v_2 \cdot \frac{A}{c_c \cdot A_v}$$

$v_2 = u$ (vel en la tubería)

$$\Rightarrow B_2 = \frac{u^2}{2g} \left(\frac{A}{c_c \cdot A_v} \right)^2$$

↑ efecto poragante.

$$\left[\frac{L}{g} \frac{du}{dt} + \left(\frac{A}{c_c \cdot A_v} \right) \frac{u^2}{2g} - H_0 = 0 \right]$$

EDO

no lineal.

$A_v(t)$: Ley de operación de la válvula.

Inicialmente existe un régimen de equilibrio tal que:

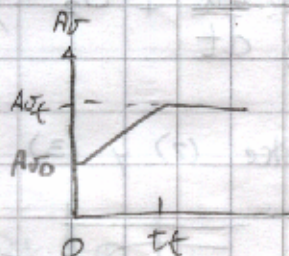
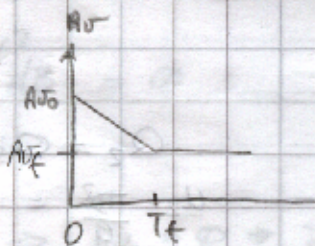
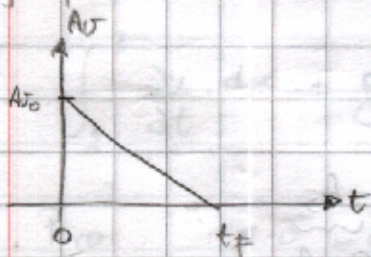
$$\text{en } t \leq 0 \quad \bullet \quad A_v = A_{v0}$$

$$\bullet \quad \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u = u_0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A}{c_c \cdot A_{v0}} \right)^2 \frac{u_0^2}{2g} - H_0 = 0$$

$$u_0 = \sqrt{2gH_0} \left(\frac{c_c \cdot A_{v0}}{A} \right)^2$$

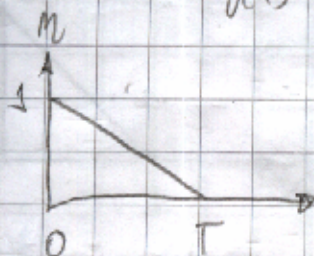
Ejemplo.



Cierre lineal al 100%

SEA

$$\eta(t) = \frac{A(t)}{A_0} \quad (\text{Adimensional})$$



$$\eta(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

Adimensionalicamos usando los parámetros: u_0, T, A_0

$$\frac{\partial(u/u_0)}{\partial(t/T)} + \underbrace{\frac{H_0 \cdot T \cdot g}{\rho_0 \cdot L}}_{\text{Adimensional}} \left\{ \frac{(u/u_0)^2}{\eta^2} - 1 \right\} = 0$$

En $t=0$: $u/u_0 = 1$, $A = A_0$
 T : tiempo de cierre de la válvula

Cat. 19-08

$$t \leq 0 : B_2 = B_3 = H_0$$

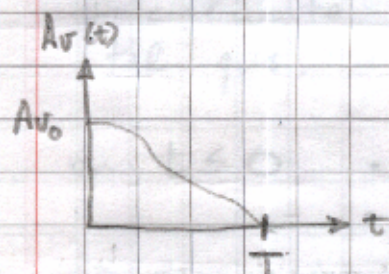
$$\Rightarrow \frac{u_3^2}{2g} = H_0 \Rightarrow u_3 = \sqrt{2gH_0}$$

$$u_3 \cdot C_c A_0 = u_0 \cdot A$$

$$\Rightarrow u_0 = C_c \frac{A_0}{A} u_3$$

$$u_0 = C_c \frac{A_0}{A} \sqrt{2gH_0}$$

Def: $A_v(t)$: Ley de operación de la válvula



$$\eta(t) = \frac{A_v(t)}{A_{v0}}$$

Def: $\tilde{u} = \frac{u}{u_0} \wedge \tilde{t} = \frac{t}{T} \wedge A = \frac{H_0 \cdot T \cdot g}{u_0 \cdot L}$

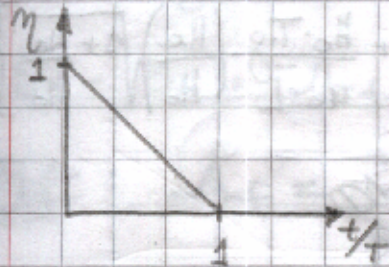
$$\Rightarrow \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + A \left(\frac{\tilde{u}^2}{\eta^2} - 1 \right) = 0$$

$$(1) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \frac{A}{\eta^2(t)} \tilde{u}^2 = 0 \quad \text{No se puede resolver analíticamente.}$$

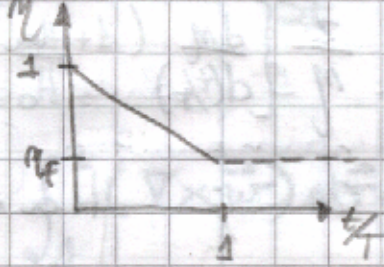
(Homogénea)

TAREA: Resolver para el caso de Apertura, cuando la válvula es inicialmente completamente cerrada

Cierre 100%



Cierre Parcial



$$0 < t < T: B_2 = \frac{u_3^2}{2g}; \quad u_3 \cdot C_c \cdot A_v = u \cdot A$$

$$\Rightarrow B(t) = \left(\frac{A}{C_c \cdot A_v} \right)^2 \cdot \frac{u(t)^2}{2g}$$

Ley lineal

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1 - \eta_f}{0 - T_f} = - \frac{1 - \eta_f}{T_f}$$

Reemplazo en (*)

$$x = \frac{u_0}{g H_0} \cdot \frac{1 - \eta_f}{T_f}$$

Def: (Arbitraria)

$$B(t) = \overbrace{B_2(0)}^{H_0} + H_a(t)$$

$$\Rightarrow B(t) = H_0 + H_a(t)$$

$$h = \frac{H_{max}}{H_0}$$

$$\Rightarrow h = \alpha \sqrt{1+h}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2} \alpha^2 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\alpha^2}} \right]$$

$$(2) \quad H_0 + H_a = \left(\frac{A}{C_c \cdot A_v} \right)^2 \cdot \frac{u^2}{2g} \quad \text{(Expresión para } H_a)$$

$$B_2(t) = \frac{u^2(t)}{2g} + \frac{P_2(t)}{\gamma} \quad \text{y} \quad H_a = B_2(t) - H_0$$

$$\Rightarrow H_a = \frac{u^2(t)}{2g} + \frac{P_2(t)}{\gamma} - H_0$$

SOBRE PRESIÓN

Si $\frac{u^2}{2g}$ pequeño $\forall t$: $B_2(t) = \frac{P_2(t)}{\gamma}$

$$(Aprox) \Rightarrow H_a(t) = \frac{P_2(t)}{\gamma} - H_0$$

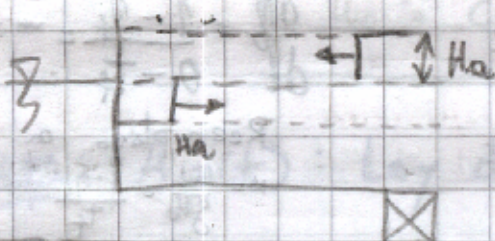
$$(2) \rightarrow (1)$$

$$\frac{d(H_a/H_0)}{d(t/t)} + \frac{2}{\eta} \left\{ \frac{d\eta}{d(t/t)} \left(1 + \frac{H_a}{H_0} \right) + \frac{H_0 \cdot T \cdot g}{u_0 \cdot L} \left(\frac{H_a}{H_0} \right) \sqrt{1 + \frac{H_a}{H_0}} \right\} = 0$$

$$CB: t=0 \quad ; \quad H_a=0$$

* Demostrar que tiene un máx.: H_{max}

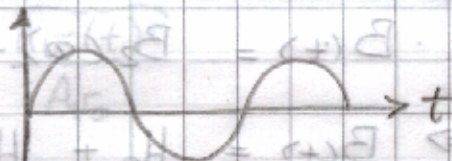
i) Cuando la válvula está cerrada, hay un exceso de sobrepresión H_a



(Despreciando pérdidas por fricción)

$$* \text{ Máx: } \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow H_{max} = \frac{-u_0 L}{g} \frac{d\eta}{dt} \sqrt{1 + \frac{H_{max}}{H_0}}$$



$$\Rightarrow \frac{H_{max}}{H_0} = \frac{1}{2} \frac{u_0 L}{g H_0} \cdot \frac{1-\eta}{T} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{u_0 H_0 \cdot T}{u_0 (1-\eta) L}} \right)$$

Pérdidas Friccionales.

$$N-S: \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g \cdot \nabla \cdot \vec{B}}_{\text{Euler}} = \underbrace{\vec{v} \times \vec{\omega} - \nu (\nabla \times \vec{\omega})}_{\text{Esfuerzos Viscosos}} / \cdot d\vec{r}$$

En una LC:

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{r} + g \int_1^2 \frac{\nabla B d\vec{r}}{dB} = -\nu \int_1^2 (\nabla \cdot \vec{\omega}) d\vec{r}$$

$$\parallel \int_1^2 (\vec{v} \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r}$$

En Régimen Permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$B_2 - B_1 = -\Delta_f$$

Def: $\Delta_f = \frac{1}{g} \int_1^2 (\nabla \times \vec{w}) d\vec{r} = (-\Delta_f)$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} dr + g(B_2 - B_1) = -\Delta_f \cdot g$$

Sea un conductor de diámetro d_c .

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

$$l \frac{du}{dt} + g(B_2 - B_1) = -g \cdot \Delta_f$$

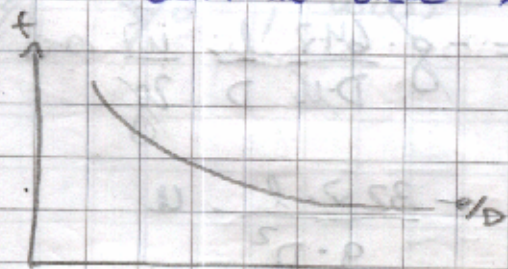
Def: $\Delta_f = J \cdot L$

$$l \cdot \frac{du}{dt} + g(B_2 - B_1) = -g \cdot l \cdot J$$

Recordando Régimen Permanente:

$$\Rightarrow \text{Darcy-Weisbach: } J = \frac{f}{D} \cdot \frac{u^2}{2g}$$

Suponemos además que
+ se obtiene del gráfico de Moody.



$$Re = \frac{u(r) \cdot D}{\nu}$$

CAT. (22-08)

Suponemos: f válido en régimen

impermanente ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$)

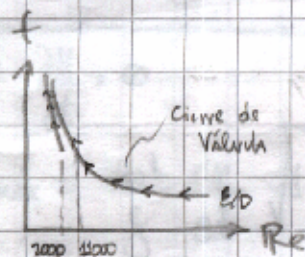
$$f(t) = f\left(\text{Re} \left(\frac{u \cdot D}{\nu} \right)\right)$$

$$\text{Re}(t) = \frac{u(t) \cdot D}{\nu} \quad J(t) = \frac{f(t)}{D} \cdot \frac{u(t)^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \left| l \frac{du}{dt} + g(B_2 - B_1) = -g \cdot \frac{f(t) \cdot l}{D} \cdot \frac{u(t)^2}{2g} \right| \quad \text{solo resuelto por métodos numéricos.}$$

Ejemplo:

Se podría usar: $f = a \cdot Q^b$



Tubo en U en régimen laminar (ANEXO 1)

$$\text{Re} = \frac{u \cdot D}{\nu} < 2000$$

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \Rightarrow f = \frac{64 \cdot \nu}{D \cdot u}$$

$$l \frac{du}{dt} + g(B_2 - B_1) = -g \cdot \frac{64 \cdot \nu}{D \cdot u} \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{u^2}{2g}$$

$$(1) \quad \frac{l}{g} \frac{du}{dt} + (B_2 - B_1) = - \underbrace{\frac{32 \cdot \nu \cdot l}{g \cdot D^2}}_{\text{Disipador de } E_0} \cdot u$$

$$B_2 = z_2 + \frac{P_{\text{ext}}}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \quad \wedge \quad B_1 = z_1 + \frac{P_{\text{ext}}}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \quad \| u_1 = u_2 = u$$

$$\Rightarrow B_2 - B_1 = z_2 - z_1 \Rightarrow \underline{\text{Def}} : z_2 - z_1 = \xi$$

$$\text{Se tiene: } u_1 = -\frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_2}{dt} = u_2 = u$$

$$\Rightarrow z \cdot u = \frac{d(z_2 - z_1)}{dt} = \frac{d\xi}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} \quad \| \text{Reemplazando esto en (1)}$$

$$(1) \quad \frac{L}{2g} \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \xi + \frac{16}{g} \frac{L}{D^2} \cdot \frac{d\xi}{dt} = 0$$

$$\text{Ec. de Forma: } a \cdot \ddot{\xi} + b \cdot \dot{\xi} + c \cdot \xi = 0$$

(Resorte Amortiguado)

EDO Lineal de 2^{do} Orden:

Sol:

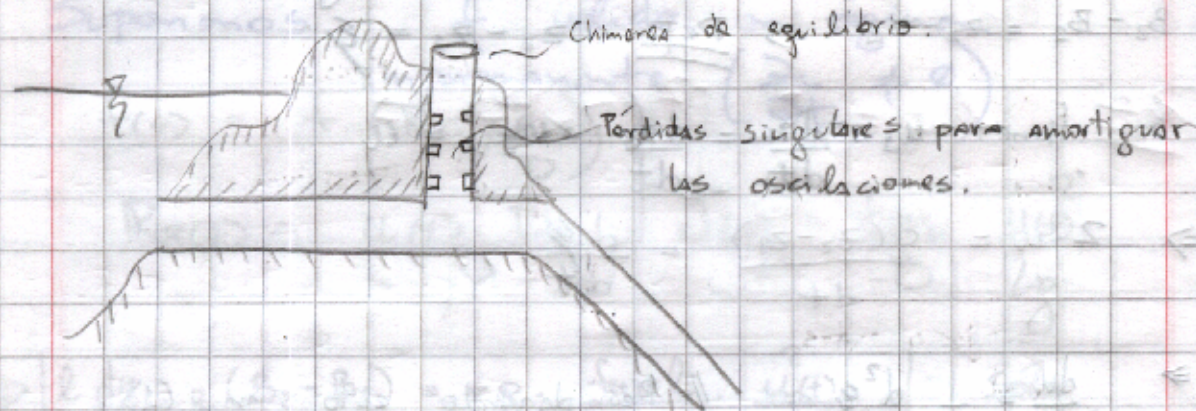
$$\xi(t) = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{m_2 \cdot t}$$

$$\text{donde } m = \frac{1}{2} \left[\frac{-32\gamma}{D^2} \pm \sqrt{\left(\frac{32\gamma}{D^2}\right)^2 - \frac{8g}{L}} \right]$$

CB para despejar C_1 y C_2

$$\xi \Big|_{t=0} = \xi_0 ; \quad u(0) = \frac{1}{2} \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

Problema: Central Hidroeléctrica.

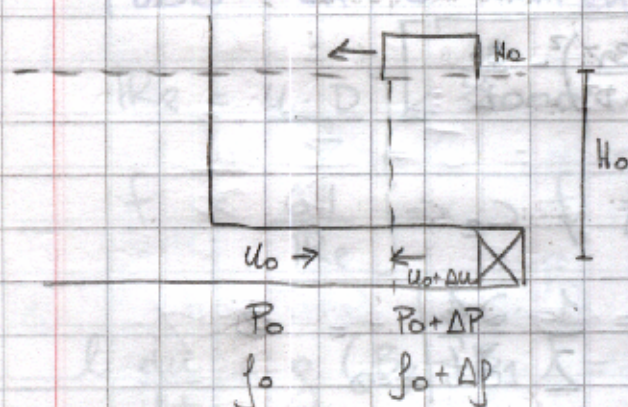


2.3 Método Elástico: (presiones grandes)

- Fluido compresible ($\Delta \rho \neq 0$)
- Tubería Deformable: ($A \neq \text{cte}$)
- Golpe de Ariete.

1) Caso Fluido Compresible. Tubería Rígida.

a : Vel del sonido



$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$$

K : módulo de compresibilidad del líquido.

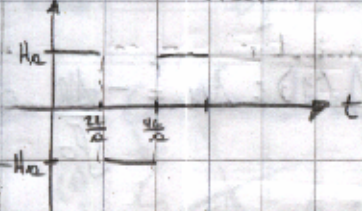
$$K_{\text{Líquido}} > K_{\text{Gases}}$$

$$K = \frac{\Delta P}{\frac{\Delta \rho}{\rho}} \Rightarrow \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{K}$$

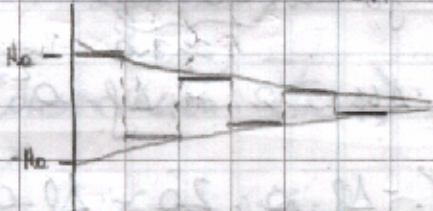
CAT. (24-08)

Onda en método elástico:

Sin Fricción



Con Fricción

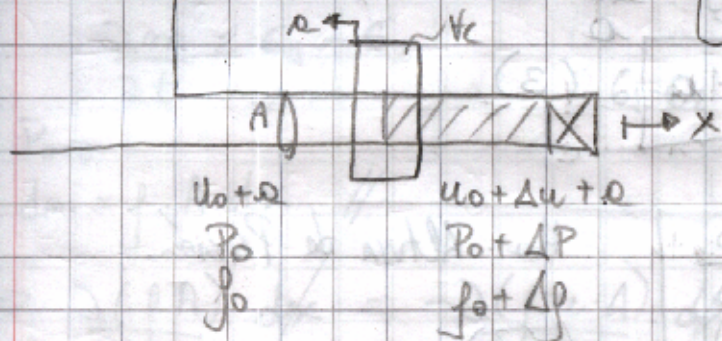


Sobrepresión justo antes de la válvula

Sist. inercial solidario al V_c con vel a .

Ec. de Conservación de masa a el V_c .

$Q_{entra} = Q_{sale} (*)$



$$\int_{\rho_0} (u_0 + a) A = \int_{\rho_0 + \Delta \rho} (u_0 + a + \Delta u) A$$

// A de tubería indeformable

$$(*) \Rightarrow \int_{\rho_0} (u_0 + a) = \int_{\rho_0 + \Delta \rho} (u_0 + a) + \int_{\rho_0 + \Delta \rho} \Delta u + \Delta \rho (u_0 + a + \Delta u)$$

$$\Rightarrow \left[\Delta \rho = -\rho_0 \frac{\Delta u}{a} \right] \quad (1) \quad \text{Ejemplo: Cierre al 100\%} \Rightarrow \Delta u = -u_0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{u_0}{a} \ll 1$$

$$** \quad TCM \quad \Sigma F_x: \quad \Sigma F_x = (\rho Q u)_{sale} - (\rho Q u)_{entra}$$

$$p_0 \cdot A - (p_0 + \Delta p) \cdot A = (\rho_0 + \Delta \rho) (u_0 + \Delta u + a)^2 \cdot A - \rho_0 (u_0 + a)^2 \cdot A$$

$$-\Delta p = \rho_0 (u_0 + a)^2 + \rho_0 \cdot 2 \cdot \Delta u (u_0 + a) + \rho_0 \cdot \Delta u^2 + \Delta \rho [(u_0 + a)^2 + 2 \cdot \Delta u (u_0 + a) + \Delta u^2]$$

$$- \rho_0 (u_0 + a)^2$$

$$\underbrace{\rho_0^2 \gg 2 \cdot \Delta u \cdot \rho_0 \gg \Delta u^2}_{\approx \rho^2}$$

$$-\Delta p = \underbrace{\rho_0 \cdot 2 \cdot \Delta u \cdot a + \rho_0 \cdot \Delta u^2}_{\rho_0 \cdot \Delta u (2a + \Delta u) \approx 2a} + \Delta \rho \cdot a^2$$

$$-\Delta p = \rho_0 \cdot \Delta u \cdot 2a + \Delta \rho \cdot a^2 \quad // (1): \Delta u = -\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \cdot a$$

$$-\Delta p = \rho_0 \cdot \left(-\frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right) \cdot a \cdot 2a + \Delta \rho \cdot a^2$$

$$-\Delta p = -\Delta \rho \cdot a^2 \Rightarrow \boxed{\Delta p = \Delta \rho \cdot a^2} \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow (2) \quad \Delta p = -\rho_0 \cdot \frac{\Delta u}{a} \cdot a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta p = -\rho_0 \cdot \Delta u \cdot a} \quad (3)$$

DEF: $\boxed{H_0 = \frac{\Delta p}{\rho_0 \cdot g}}$ H_0 : Altura de Presión. $// (3)$

$$\Rightarrow \boxed{H_0 = -\frac{a}{g} \cdot \Delta u} \quad \text{Ec. de Joukowski}$$

Recordando: $a = \sqrt{\frac{K'}{\rho}}$ donde $\frac{dp}{d\rho} = \frac{K'}{\rho}$

Ejemplo: Cierre instantáneo al 100%.

$$H_0 = \frac{a}{g} \cdot u_0$$

$$u_0 = 1 \text{ m/s}$$

$$a \approx 1000 \text{ m/s}$$

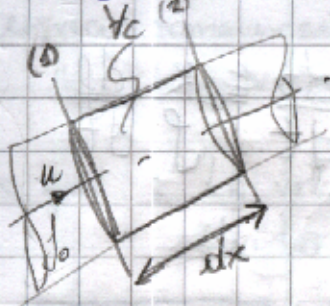
$$H_0 \approx \frac{1000 \cdot 1}{9,8} \approx 100 \text{ mca}$$

Motor de Elástico.

- 2) Tubaría deformable
Fluido compresible

4 ecs. u, P, D, ρ (cinco más)

1] Ec de Continuidad (Conservación Masa)



$$G_1 = \rho u \cdot A$$

$$G_2 = G_1 + \frac{\partial G}{\partial x} dx$$

$$= \rho u A + \frac{\partial (\rho u A)}{\partial x} dx$$

$$\frac{dm}{dt} = G_1 - G_2$$

$$G_1 - G_2 = -\frac{\partial (\rho u A)}{\partial x} dx$$

Pero

$$dm = \rho \cdot A \cdot dx //$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (\rho A)}{\partial t} dx = -\frac{\partial (\rho u A)}{\partial x} dx$$

$$\left[\frac{\partial (\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u A)}{\partial x} \right] = 0 \quad (1)$$

2] Compresibilidad: $\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{K}{p} \quad (2.1)$

Expandiendo (1)

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + u A \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho u \frac{\partial A}{\partial x} + \rho A \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$A \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left(\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad / \frac{1}{\rho A}$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Recordando

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \right] \quad (2.2)$$

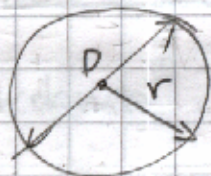
Usando (2.1) $\Rightarrow dp = \frac{K}{\rho} d\rho \quad \parallel \frac{1}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{K}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{Dp}{Dt} = K \left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{K} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \right] \quad (2)$$

CAT. (26-08)

3] Deformación de Tubería (Ley de resistencia de materiales)



$$A = \pi \cdot r^2$$

$$dA = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \quad \parallel \frac{1}{A \cdot dt}$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{\pi \cdot r^2} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{2}{r} \frac{dr}{dt}$$

Def: Deformación Unitaria

$$de_r = \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{A} \cdot \frac{DA}{Dt} = 2 \cdot \frac{DE}{Dt} \right| \quad (3.1)$$

Sabemos: $\epsilon = \frac{\sigma_t - \mu \cdot \sigma_L}{E}$

σ_t : esfuerzo transversal

σ_L : " longitudinal

E : Módulo de Elasticidad

μ : Módulo de Poisson

Se sabe que: La vel. del sonido en un medio fluido en una **Tubería deformable**.

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + \frac{K \psi}{E}}} \quad (*)$$

ψ : coef que depende del tipo de tuberías y el anclaje de ésta.

- Tipos de tuberías:

i) Tubería rígida $\Leftrightarrow \boxed{\psi = 0} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$

ii) Tubería anclada en ambos extremos:



- No hay deformación longitudinal

$$D = 2r$$

e : espesor de la pared

$$\boxed{\psi = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \frac{D}{e}}$$

iii) Tubería anclada en 1 extremo

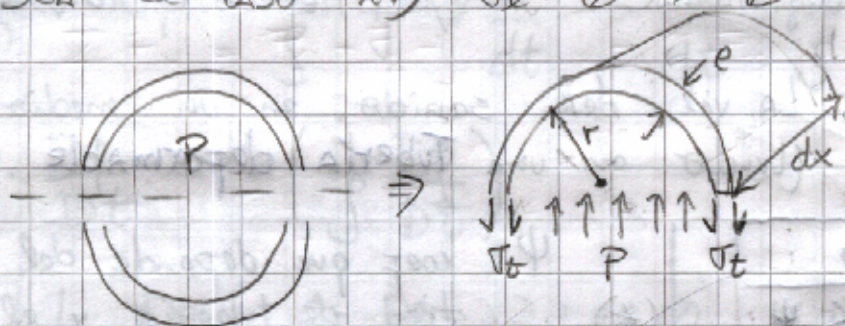
$$\boxed{\psi = \left(1 + \mu^2\right) \frac{D}{e}}$$

iv) Tubería delgada con juntas de dilatación
(se permite deformación longitudinal $\Rightarrow \sigma_e = 0$)

$$|\psi = D/e|$$

Ejemplo: de deducción del valor de ψ .

Sea el caso iv) $\sigma_e = 0 \Rightarrow E = \frac{\sigma_t}{\epsilon}$ (e.1)



$$P \cdot 2r \cdot dx = 2 \cdot \sigma_t \cdot e \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \sigma_t = \frac{P \cdot r}{e} \text{ (e.1)} \Rightarrow E = \frac{P \cdot r}{E \cdot e} \cdot \frac{D}{Dt}$$

// Suponemos $e \approx cte$

$$\begin{aligned} \frac{DE}{Dt} &= \frac{1}{E \cdot e} \frac{D(P \cdot r)}{Dt} \\ &= \frac{1}{E \cdot e} \left[r \cdot \frac{DP}{Dt} + P \cdot \frac{Dr}{Dt} \right] \\ &= \frac{P \cdot r}{E \cdot e} \left[\frac{1}{P} \frac{DP}{Dt} + \frac{1}{r} \frac{Dr}{Dt} \right] \end{aligned}$$

Sabemos que: $\frac{1}{P} \frac{DP}{Dt} \gg \frac{1}{r} \frac{Dr}{Dt}$

$$\Rightarrow \frac{DE}{Dt} = \frac{r}{E \cdot e} \cdot \frac{DP}{Dt} = \frac{1}{2A} \cdot \frac{DA}{Dt} \quad // \text{ Por (3.1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2r}{E \cdot e} \frac{DP}{Dt} = \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt}}$$

// Reemplazado en (2).

$$\frac{1}{K} \frac{DP}{Dt} + \frac{2r}{E \cdot e} \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{1}{K} + \frac{2r}{e \cdot E} \right) \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{1}{K} + \frac{\psi}{E} \right) \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{K} \left(1 + \frac{K \cdot \psi}{E} \right) \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$\frac{K}{\rho \cdot a^2}$ por (*)

$$\left[\frac{1}{\rho a^2} \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \right] \quad (3)$$

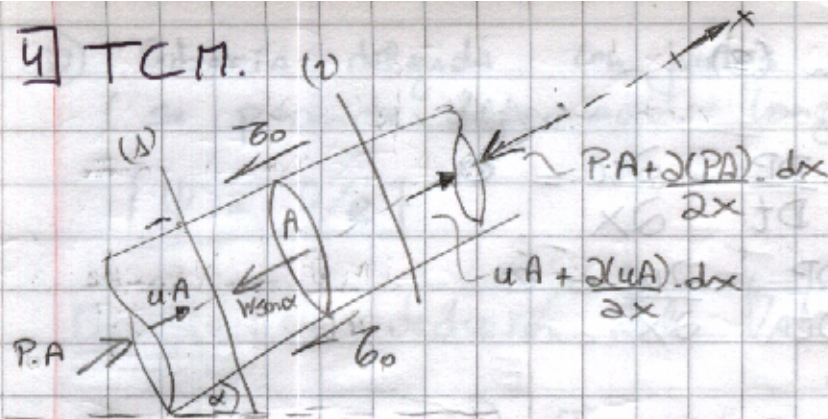
$$\Leftrightarrow \left[\frac{DP}{Dt} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \right]$$

Revisamos las magnitudes:

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + \frac{K \cdot \psi}{E}}} = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{K \cdot \psi}{E}}} \quad \frac{K}{E} \ll 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 > a}$$

4) TCM. (1)



$$\text{e/x: } \sum F_x = F_1 - F_2 - W \sin \alpha - F_s =$$

$$(\underbrace{\rho \cdot g \cdot Q u}_{\approx 1})_{\text{salida}} - (\underbrace{\rho \cdot g \cdot Q u}_{\approx 1})_{\text{entrada}} + \underbrace{0}_{\text{término impermeable}} \quad (4.1)$$

$$\text{// } x = 2\pi r$$

$$F_1 = P \cdot A \quad ; \quad F_2 = P \cdot A + \frac{\partial(P \cdot A)}{\partial x} \cdot dx$$

$$W = \rho \cdot g \cdot A \cdot dx \quad ; \quad F_s = \tau \cdot x \cdot dx$$

$$(g \cdot Q \cdot u)_{\text{entrada}} = \rho \cdot u \cdot A \cdot u = \rho \cdot A \cdot u^2$$

$$(g \cdot Q \cdot u)_{\text{salida}} = (g \cdot Q \cdot u)_{\text{entrada}} + \frac{\partial(g \cdot Q \cdot u)}{\partial x} \cdot dx$$

// Reemplazando en (4.1)

$$P \cdot A - P \cdot A - \frac{\partial(P \cdot A)}{\partial x} \cdot dx - \rho \cdot g \cdot A \cdot dx - \tau \cdot x \cdot dx =$$

$$(g \cdot Q \cdot u)_{\text{entrada}} + \frac{\partial(g \cdot Q \cdot u)}{\partial x} \cdot dx - (g \cdot Q \cdot u)_{\text{entrada}}$$

$$- \frac{\partial(P \cdot A)}{\partial x} \cdot dx - \rho \cdot g \cdot A \cdot dx - \tau \cdot x \cdot dx = \frac{\partial(g \cdot Q \cdot u)}{\partial x} \cdot dx$$

$$\left[-\frac{\partial(PA)}{\partial x} - \rho g A \sin \alpha - \bar{\tau} \cdot \chi = \frac{\partial(\rho Q u)}{\partial x} \right] + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Término impermanente}}}{0}$$

Aplicamos ahora 2^{da} ley de N. $\Sigma \vec{F} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = \frac{D(\rho \cdot A \cdot dx \cdot u)}{Dt}$

Expandiendo términos:

$$\frac{D(dm \cdot u)}{Dt} = u \frac{D(dm)}{Dt} + dm \cdot \frac{Du}{Dt} \quad // \quad dm = \rho \cdot A \cdot dx$$

o (la materia no se crea ni se destruye)

$$\Rightarrow \frac{D(\rho \cdot A \cdot dx \cdot u)}{Dt} = \rho \cdot A \cdot dx \cdot \frac{Du}{Dt}$$

$$\text{Además } \Sigma F_x = -\frac{\partial(PA)}{\partial x} dx - \rho g A \sin \alpha \cdot dx - \bar{\tau} \cdot \chi \cdot dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial(PA)}{\partial x} - \rho g A \sin \alpha - \bar{\tau} \cdot \chi = \rho \cdot A \cdot \frac{Du}{Dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial(PA)}{\partial x} + g \sin \alpha + \frac{\bar{\tau}(\chi)}{\rho \left(\frac{\chi}{A}\right)} = 0$$

Def: $R_H = \frac{A}{\chi}$ (radio hidráulico)

$$\Leftrightarrow \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho A} \left[\frac{\partial(PA)}{\partial x} \right] + g \sin \alpha + \frac{\bar{\tau}}{\rho \cdot R_H} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{Du}{Dt} + \frac{P}{\rho} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x} \right] + g \sin \alpha + \frac{\bar{\tau}}{\rho \cdot R_H} = 0$$

$$// \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \ll \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g \sin \alpha + \frac{\bar{\tau}}{\rho \cdot R_H} = 0 \right] \quad (4)$$

Hacemos el sist. de ecs. (3) y (4)

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f \cdot \alpha^2} \cdot \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot \sin \alpha + \frac{\tau}{f \cdot R_H} = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 2 \text{ ecs.} \\ 2 \text{ incog. } (P, \tau) \end{array} \right.$$

Def: $\tau = f \cdot g \cdot R_H \cdot J$

Darcy-Weisbach: $J = \frac{f}{D} \cdot \frac{u^2}{2g}$

2.4 Métodos de Solución Ec. Fenómeno elástico.

- Método de las Características.

(Para la solución del sistema (5))

Ideas: - Expandir las derivadas Totales.

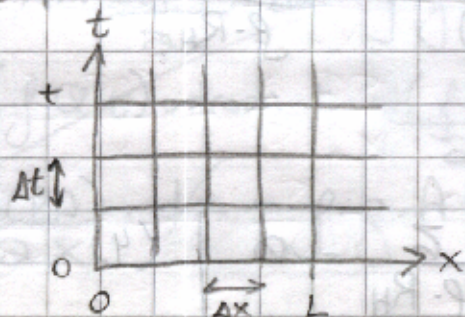
$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \quad ; \quad \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

- Llevar las derivada a límite de diferencias

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \quad // \text{ si } \Delta t \text{ pequeño}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_t \approx \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

Definimos una malla



Sea una ec. $\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$; ($a = \text{cte.}$) (1a)

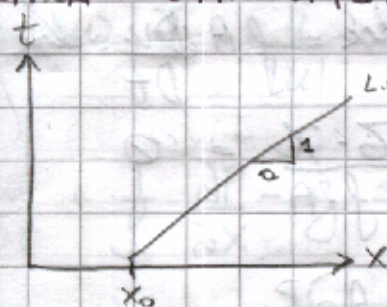
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)}_a + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\text{Si } a = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u = u(t=0)$$

* Como me muevo en líneas características (solo las tienen ec. hiperbólicas), es posible pasar de derivadas parciales a derivadas totales.

Línea Característica.

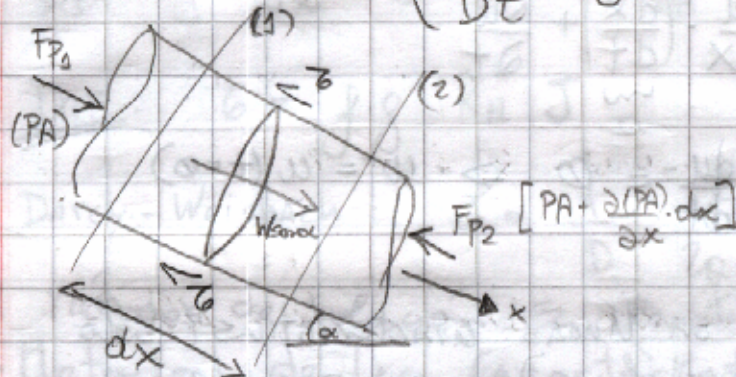


$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \Rightarrow (x - x_0) = a(t - t_0) \\ u = u(t=0) \end{cases} \quad (a > 0)$$

Cat. (29/08)

Cambio de incógnitas en el sistema de ecs. (5).

Tomamos (3): $\left(\frac{DP}{Dt} + \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \right)$



2^{da} ley de Newton: $\sum F_x = m \cdot \frac{Du}{Dt}$; $m = \rho \cdot A \cdot dx$

$$\sum F_x = F_{p1} - F_{p2} + W \cdot \text{sen} \alpha - \tau \cdot x \cdot dx = \rho \cdot A \cdot \frac{Du}{Dt} \cdot dx$$

$$-\frac{\partial(PA)}{\partial x} \cdot dx + \rho \cdot \rho \cdot A \cdot \text{sen} \alpha \cdot dx - \tau \cdot x \cdot dx = \rho A \frac{Du}{Dt} \cdot dx \quad \bigg/ \frac{1}{\rho A}$$

$$\frac{Du}{Dt} - \text{sen} \alpha + \frac{1}{\rho A} \cdot \frac{\partial(PA)}{\partial x} + \frac{\tau \cdot x}{\rho \cdot A} = 0$$

Expandiendo $\frac{\partial(PA)}{\partial x} = \frac{P \partial A}{\partial x} + A \frac{\partial P}{\partial x}$

$$= \frac{PA}{\rho A} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

Sabemos $\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \ll \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x}$

$$\Rightarrow \frac{\partial(PA)}{\partial x} = \frac{A \cdot \partial P}{\partial x}$$

$\rightarrow$ (signo de u)

$$\Rightarrow \frac{Du}{Dt} + \frac{A}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \text{sen} \alpha + \frac{\tau \cdot x}{\rho \cdot A} = 0$$

$$R_H = \frac{A}{x}$$



$$R_H = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{D}{4}$$

Tomamos: $\bar{G} = f \cdot g \cdot R_H \cdot J$
 (signo de $\bar{G}$)

$$\Rightarrow \frac{\bar{G}}{f R_H} = g \cdot J$$

(signo de u)

$$\Rightarrow \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - g \cdot \sin \alpha + g \cdot J = 0$$

Suponemos se cumple: Darcy-Weisbach

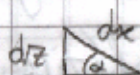
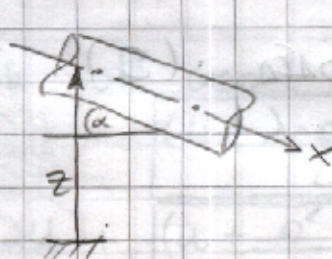
$$\Rightarrow J = \frac{f}{D} \cdot \frac{u^2}{2g} > 0$$

$$f = f \left(Re = \frac{u(t) \cdot D}{\nu}, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

$$\text{signo}(u) \cdot J = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{f}{D} \cdot \frac{u^2}{2g} = \frac{f}{D} \cdot \frac{u|u|}{2g}$$

$$\boxed{\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - g \cdot \sin \alpha + \frac{f}{2D} \cdot u|u| = 0} \quad (6)$$

Usamos cota piezométrica: $H = z + \frac{P}{\gamma}$



$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\gamma \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}}_{-\sin \alpha} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \gamma \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma \sin \alpha$$

Sea (3) $\frac{DP}{Dt} + \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad / \quad \frac{1}{\rho \cdot g}$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H}{\partial t} + \gamma \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma \sin \alpha$$

→ Cota Piezométrica.

$$L_1: \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + u \sin \alpha + \frac{\partial^2 u}{g \partial x^2} = 0$$

(6) A cota piezométrica:

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\gamma \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma \sin \alpha \right) - g \sin \alpha + \frac{f}{2D} u |u| = 0 \quad (5)''$$

$$L_2: \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2D} |u| u = 0$$

Ecs. L_1, L_2 n Incógnitas H, u

No hay solución analítica para (5)''

Método de las Características para la solución del sistema (5)''

$$L = L_1 + \lambda \cdot L_2$$

$$\left[\frac{\partial H}{\partial t} + (u + \lambda g) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + \frac{u^2}{g\lambda}) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + u \sin \alpha + \lambda \frac{f |u|}{2D} = 0$$

Queremos escribir esta ecuación en derivadas totales w.r.t al tiempo, pues son más fáciles de resolver.

Sabemos: $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \boxed{u \frac{\partial H}{\partial x}}$$

(*)

Def: la variable muda ξ .

$$d\xi(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot dx \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{dt}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \boxed{\frac{dx}{dt}}$$

(*)

// cuando $u = \frac{dx}{dt}$

En este uso Buscamos:

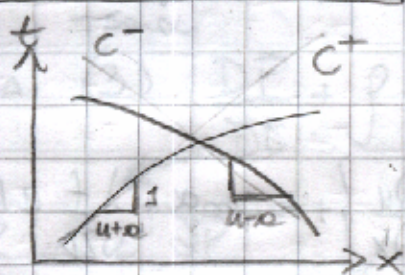
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \boxed{(u + \lambda \cdot g)} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boxed{(u + \frac{u^2}{g \cdot \lambda})} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt}$$

(*)

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = u + \lambda g = u + \frac{u^2}{g\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm \frac{u}{g}} \quad 53$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dx}{dt} = u \pm a \right| \quad (u \ll a) \quad \text{Líneas Características.}$$



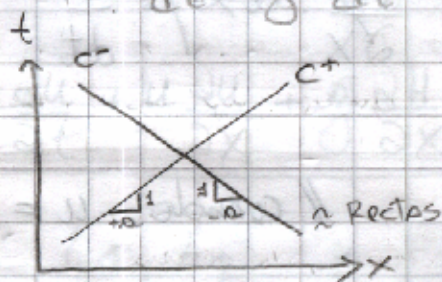
Reemplazando λ y escribiendo todo como derivadas totales.

$$\frac{dH}{dt} \pm \frac{a}{g} \frac{du}{dt} + u \sin \alpha \pm \frac{a}{g} \frac{f |u| u}{2D} = 0$$

Si $(u \ll a) \Rightarrow$ líneas características: $\frac{dx}{dt} \approx \pm a$

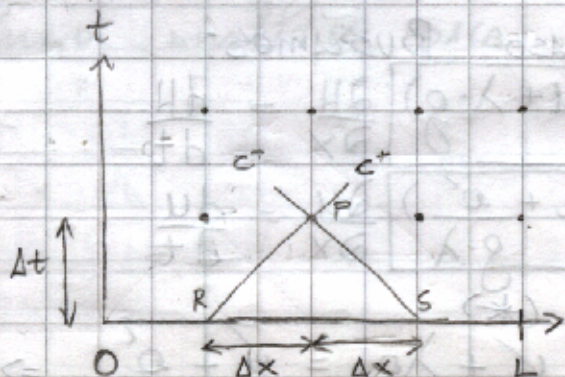
Def: $c^+ : \frac{dH}{dt} + \frac{a}{g} \frac{du}{dt} + u \sin \alpha + \frac{a}{g} \frac{f |u| u}{2D} = 0$

$c^- : \frac{dH}{dt} - \frac{a}{g} \frac{du}{dt} + u \sin \alpha - \frac{a}{g} \frac{f |u| u}{2D} = 0$



Caso Cierre de Válvula:

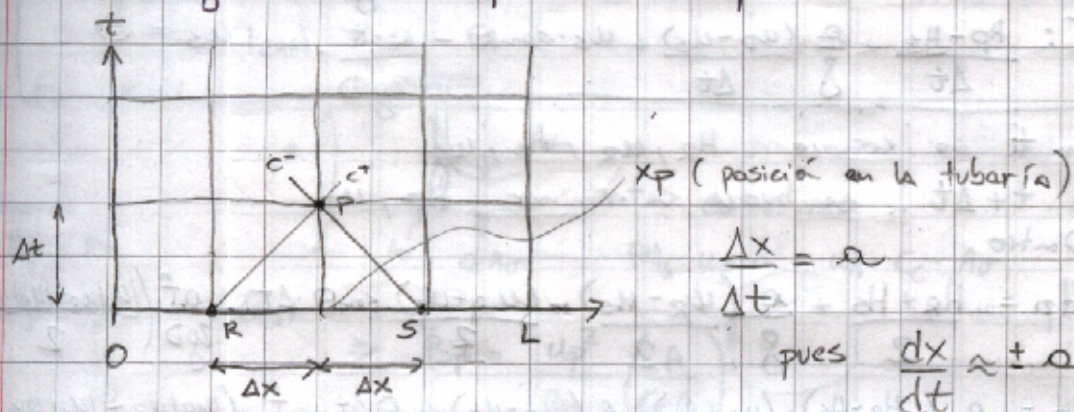
La info desde los bordes se transmite por las líneas características



TUBERIA

- Método numérico de solución

→ Discretizar el espacio-tiempo.



Para Δx dado $\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{a}$

Ej: $\Delta x = 100 \text{ [m]}$
 $a = 1000 \text{ [m/s]}$ } $\Delta t = 0,1 \text{ [s]}$

$\frac{dH}{dt} \rightarrow \frac{\Delta H}{\Delta t}$; $\frac{du}{dt} \rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta t}$ (Diferencias finitas)

$C^+ : \frac{dH}{dt} \approx \frac{H_p - H_R}{\Delta t}$; $\frac{du}{dt} \approx \frac{u_p - u_R}{\Delta t}$ } Moviéndose
 $C^- : \frac{dH}{dt} \approx \frac{H_p - H_S}{\Delta t}$; $\frac{du}{dt} \approx \frac{u_p - u_S}{\Delta t}$ } a lo largo
 de las
 líneas
 características

$C^+ : u \approx \frac{u_R + u_p}{2}$; $u \approx u_p$; $u \approx u_R$

Reemplazan estos valores en las ecuaciones características.

↳ Por simplicidad de los cálculos, válidos si se considera Δt pequeño

$C^- : u \approx \frac{u_p + u_S}{2}$; $u \approx u_p$; $u \approx u_S$

↳ se obtiene una ec. lineal

Bordes.

(At. 31-08)

$$C^+: \frac{H_p - H_R}{\Delta t} + \frac{\rho}{8} \frac{(u_p - u_R)}{\Delta t} + u_R \cdot \sin \theta + \frac{\rho \cdot f}{2gD} |u_R| u_R = 0$$

$$C^-: \frac{H_p - H_S}{\Delta t} - \frac{\rho}{8} \frac{(u_p - u_S)}{\Delta t} + u_S \cdot \sin \theta - \frac{\rho \cdot f}{2gD} |u_S| u_S = 0$$

En t se conoce H_R, u_R, H_S, u_S

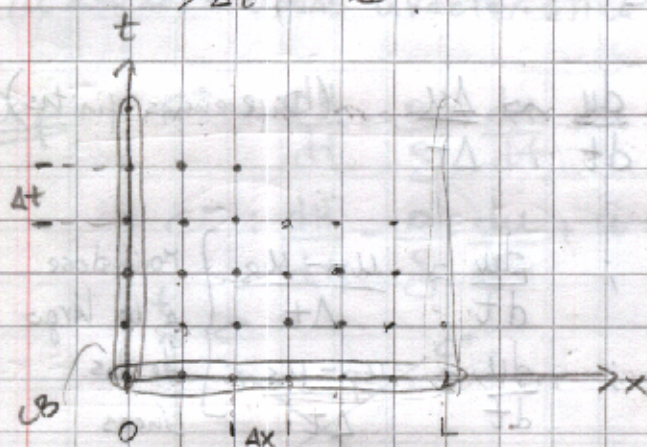
En $t + \Delta t$ se busca determinar H_p, u_p

Dentro

$$\Rightarrow H_p = \frac{H_R + H_S}{2} + \frac{\rho}{8} \frac{(u_R - u_S)}{2} - \frac{(u_R + u_S) \cdot \sin \theta \cdot \Delta t}{2} - \frac{\rho f}{2gD} \left(\frac{|u_R| u_R - |u_S| u_S}{2} \right) \Delta t$$

$$u_p = \frac{g}{8} \left(\frac{H_R - H_S}{2} \right) + \frac{(u_R + u_S)}{2} - \frac{g}{8} \frac{(u_R - u_S) \sin \theta \Delta t}{2} - \frac{f}{2D} \left(\frac{|u_R| u_R + |u_S| u_S}{2} \right) \Delta t$$

Sea: $\Delta x / \Delta t = a$



Datos:

H, u se conocen para

$t = 0$ (situación de

régimen permanente

inicial)

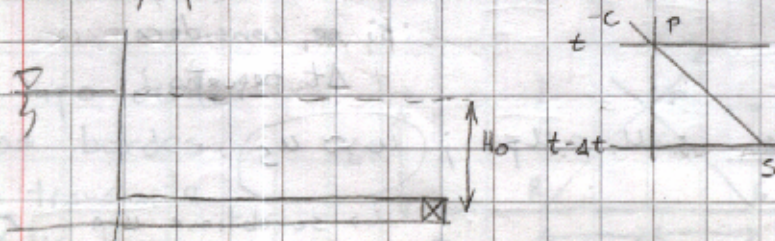
luego son datos para

un tiempo posterior

DSO: Se requiere una condición de borde para H y para u en los extremos de la tubería.

Por ejemplo:

* En $x = 0$ para un tiempo t :

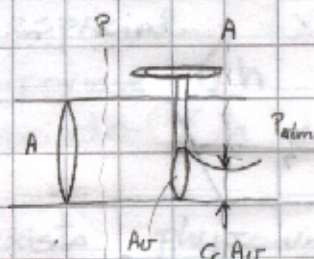


$$H(x=0, t) = H_0$$

$$C^-: \frac{H_p - H_s}{\Delta t} - \frac{\rho}{8} \frac{(u_p - u_s)}{\Delta t} + u_s \cdot \sin \theta - \frac{\rho f |u_s| \cdot u_s}{2gD} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{H_p - H_s}{\Delta t}} \right\} u_p$$

$$C.B.: H_p = H_0$$

$$* E_n \quad X=L$$



Tenemos:

$$B_p = B_a$$

$$\Rightarrow B_p = \frac{u_p^2}{2g} \quad / (*)_1$$

$$\Rightarrow B_p = \frac{u_p^2}{2g} \left(\frac{A}{C_c A_v} \right)^2$$

Tenemos:

$$B_p = H_p + \frac{u_p^2}{2g}$$

$$\Rightarrow H_p = \frac{u_p^2}{2g} \left(\frac{A}{C_c A_v} - 1 \right)$$

u_p

$$C^+: \frac{H_p - H_r}{\Delta t} + \frac{\rho}{8} \frac{(u_p - u_r)}{\Delta t} + u_p \cdot \sin \theta + \frac{\rho f |u_p| \cdot u_p}{2gD} = 0$$

- Se pueden imponer mas C.B. (para el caso de un cambio de diámetro por ej.)
- La idea es tener TRAMOS HOMOGÉNEOS, luego se debe buscar una ec. que compatibilice la unión de los tramos)

CB Típicas:

- * Estancques de cota constante o variable en el tiempo: $H_0 = cte$; $H_0 = H_0(t)$

- * Válvulas que se abren o cierran en el tiempo (Ley de operación de la válvula $\mu A_v(t)$)

- * Bomba: Curva característica

