

Cuaderno de Clases: CI31A

Capítulo 6: Hidrodinámica y flujo potencial

Javier A. Rovegno Campos

19 de junio de 2007

Licencia del Documento: Creative Commons 3.0 [Detalles de la Licencia]¹

Este documento contiene una recopilación de los apuntes, tomados por el Autor, en las clases de Mecánica de Fluido del Año 2005 impartidas en la FCFM por los profesores:

- Aldo Tamburrino
- Yarko Niño

Datos del Autor:

Correos del Autor: jrovegno@ing.uchile.cl , tatadeluxe@gmail.com

Página Personal del Autor: <http://www.cec.uchile.cl/~jrovegno/>

Este Documento forma parte de la primera etapa BETA del *Proyecto Colaborativo WikiCursos*.

Para más información sobre WikiCursos visitar:
<http://ideaschile.wordpress.com/>

¹<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

1. Introducción:

1.1. Generalidades.

1.2. Sistemas de Unidades y Medidas.

1.3. Propiedades de los fluidos: termodinámicas, de transporte (viscosidad , etc.), tensión superficial, presión de vapor (fenómenos de capilaridad y cavitación).

2. Estática de los fluidos

2.1. Análisis de la condición de equilibrio. Presión y esfuerzo de corte. Ecuación fundamental del equilibrio estático de los fluidos.

2.2. Aplicación al campo de fuerzas gravitacionales. Ley hidrostática.

2.3. Aplicación a campos de fuerzas distintas de las gravitacionales (centrífuga, etc.).

2.4. Presiones absolutas y manométricas. Medida de la presión.

2.5. Fuerzas sobre superficies planas sumergidas y curvas sumergidas. Principio de Arquímedes.

3. Cinemática de los fluidos

3.1. Clasificación de los regímenes de escurrimiento.

- Régimen laminar y turbulento. Experiencia de Reynolds.
- Régimen uniforme y variado.
- Régimen permanente e impermanente.
- Escurrimiento crítico y subcrítico con superficie libre.

- 3.2. Descripción del movimiento de un fluido. Método de Lagrange y Euler. Líneas características del flujo.
- 3.3. Enfoques alternativos de análisis; enfoque integral; concepto de sistema y volumen de control. Teorema del Transporte de Reynolds.
- 3.4. Principio de conservación de la materia. Ecuación de continuidad según enfoque integral.
- 3.5. Conceptos de gasto másico y volumétrico. Aplicaciones de la ecuación, de continuidad integral.
- 3.6. Ecuación de continuidad desde un punto de vista diferencial.
- 3.7. Deformación de fluidos en movimiento. Deformación lineal (contracción o dilatación). Deformación angular, rotación con deformación (vorticidad). Propiedades de la vorticidad.

4. Dinámica de los fluidos

- 4.1. Teorema del Momentum desde un punto de vista diferencial. Relaciones esfuerzo deformación. Flujos rotacionales e irrotacionales. Ecuaciones de Navier Stokes. Aplicaciones a la determinación de distribución de velocidades en régimen laminar.
- 4.2. Ecuación de Euler. Ecuación de Bernoulli. Aplicaciones.
- 4.3. Teorema General de la energía aplicado a los fluidos en movimiento.
- 4.4. Ecuación de Bernoulli derivada del Teorema de la Energía. Extensión a toda la corriente.
- 4.5. Teorema del Momentum desde el punto de vista integral.

5. Escurrimiento en tuberías

- 5.1. Nociones sobre Teoría de la Turbulencia. Ecuaciones de Reynolds.
- 5.2. Teoría fenomenológica de Prandtl. Distribución de velocidades en régimen turbulento.
- 5.3. Pérdidas de carga en tuberías friccionales y singulares. Aplicaciones.
- 5.4. Nociones de la Teoría de la Capa Límite.

6. Hidrodinámica y flujo potencial

6.1. Concepto de flujo Potencial. función Potencial y de Corriente. Propiedades de las funciones. Líneas equipotenciales y de corriente.

6.2. Ejemplos de flujos potenciales bidimensionales, flujo uniforme, flujo radial, fuentes y sumideros puntuales.

6.3. Redes de flujo y métodos de solución.

7. Análisis dimensional y teoría de modelos

7.1. Generalidades.

7.2. Fundamentos del método de Análisis Dimensional.

7.3. Teorema π o de Buckingham.

7.4. Aplicaciones. Sustentación y Arrastre.

7.5. Semejanza y Teoría de Modelos. Semejanza geométrica, cinemática y dinámica. Aplicaciones a estudios en modelos.

6. Hidrodinámica de Flujo potencial

Consideramos un flujo irrotacional $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$
 matemáticamente se demuestra que \exists una fn escalar Φ
 $\Rightarrow \nabla \Phi = \vec{v}$; donde Φ se denomina función
 potencial (resolver $\Phi \Leftrightarrow$ resolver campo de vel)

$$\therefore \vec{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{k}$$

Para fluidos incompresibles $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$\nabla (\nabla \Phi) = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \text{ Ec. de Laplace}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

|| No hay def angular ||
 del elemento de fluido

Resumen

Si $\nabla \times \vec{v} = 0$ (flujo irrotacional)

$$\Rightarrow \exists \Phi \Rightarrow \vec{v} = \nabla \Phi \text{ (fn. potencial)}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \Phi = 0 \text{ (Fluido incompresible)}$$

Flujo Potencial \equiv Flujo irrotacional

Notar que en el flujo potencial, el campo
 de velocidades queda definido exclusivamente por
 la ec. de continuidad ($\nabla^2 \Phi = 0$ + CB del problema)

Restringamos el análisis a flujos 2-D:

En este caso:

$$\nabla^2 \Phi = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \right] \quad (1) \quad 162$$

Además: $\vec{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{j} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad (2)$

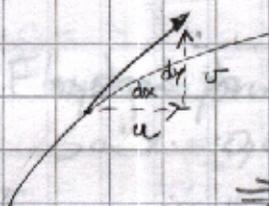
El lugar Geométrico:

Definido por $\left[\Phi = cte \right]$ se denomina LE

(línea equipotencial)

$\nabla \Phi$ representa el vector velocidad y este es \perp a las equipotenciales.

Recordemos que las LC (Lugar Geométrico de los pto. tangentes al vector velocidad) se define a partir de:



$$\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} \Rightarrow u dy = v dx$$

$$\Rightarrow \left[u dy - v dx = 0 \right] \quad (3)$$

La fn. que define las LC se denomina Ψ , sobre una línea de corriente $\Psi = cte$ o sea $d\Psi = 0$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0 \right] \quad (4)$$

Identificando términos de las ec. (3) y (4)

$$\left[\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right] \quad (5)$$

de (4) se tiene:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Ecuaiones de Cauchy - Riemann

(Validas para todo tipo de flujo)

Para un flujo irrotacional (2-D)

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \hat{k} = 0$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \right] \quad (6)$$

Reemplazando (5) \rightarrow (6)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \quad (7)$$

En un flujo potencial, la fn de corriente también cumple la EC de Laplace.

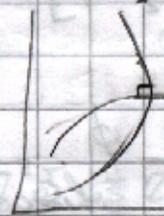
Consideremos una línea equipotencial y una LC.

$$\Phi = cte_1$$

$$\psi = cte_2$$

$$\Phi = c$$

$$\Rightarrow d\Phi = 0$$



$$\psi = cte_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \right) = 0$$

$$u dx + v dy = 0 \quad (8)$$

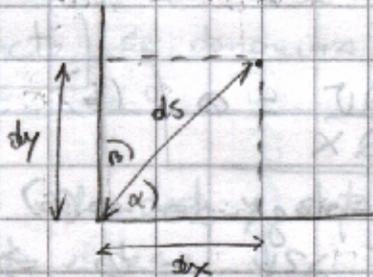
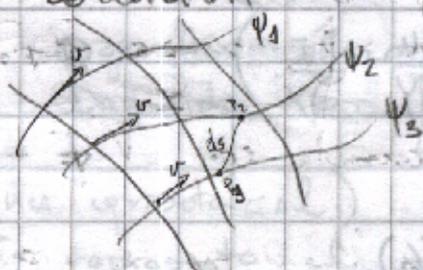
$$\psi = K \Rightarrow (d\psi = 0) \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow \left[-v dx + u dy = 0 \right] \quad (9)$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\Phi = cte} = -\frac{u}{v} \quad (10); \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\psi = cte} = \frac{v}{u} \quad (11)$$

$$(10) (11) \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\Phi = cte} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\psi = cte} = -1 \right] \quad (12)$$

Esto último corresponde a la condición de perpendicularidad $\vec{\phi} \perp \vec{\psi}$



$$d\vec{\phi} = \vec{v} \cdot \hat{n} ds$$

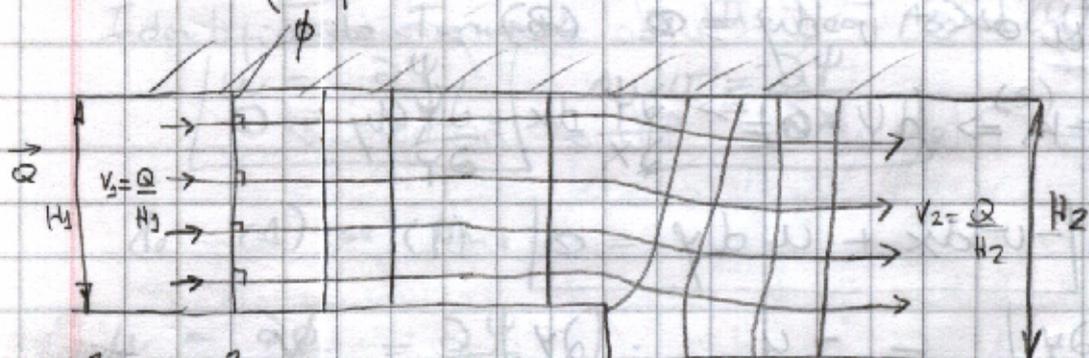
$$\vec{v} = u \hat{i} + v \hat{j} \quad \hat{n} = \cos \beta \hat{i} - \cos \alpha \hat{j} \quad (\hat{n} \perp ds)$$

$$\cos \beta = \frac{dy}{ds} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\Rightarrow Q = \int_{P_3}^{P_2} d\vec{\phi} = \int_{P_3}^{P_2} u \frac{dy}{ds} ds - \int_{P_3}^{P_2} v \frac{dx}{ds} ds$$

$$Q = \int_{P_3}^{P_2} u dy - v dx = \int_{P_3}^{P_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

La condición de perpendicularidad $\psi \perp \phi$ permite idear métodos gráficos de solución de flujos irrotacionales.



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Superposición del flujo potencial.

Si Φ_1 cumple $\nabla^2 \Phi_1 = 0$ \wedge Φ_2 cumple $\nabla^2 \Phi_2 = 0$

entonces: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ cumple con $\nabla^2 \Phi = 0$

lo mismo se cumple para ψ . O sea, si conosco las sol. para 2 flujos potenciales, puedo superponerlos y obtener la solución de la suma.

Si $\Phi_1 \rightarrow u_1 \wedge v_1$
 $\Phi_2 \rightarrow u_2 \wedge v_2$ } $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \rightarrow u = u_1 + u_2$
 $v = v_1 + v_2$

En coordenadas polares: $\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$

$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}$

$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$; $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$

$\nabla^2 \Phi = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$

$\hat{r} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}$

$\hat{\theta}$

6.2 Ejemplos de flujos potenciales bidimensionales, flujo uniforme, radial, fuentes y sumideros, puntuales.

Flujo potencial \Leftrightarrow Flujo irrotacional

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \exists \phi \ni \vec{v} = \nabla \phi$$

Fluido incompresibles:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

Si ψ es una función de corriente $\nabla^2 \psi = 0$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

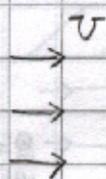
$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Ecs. de

Cauchy - Riemann

Ejemplos

1. Flujo Uniforme paralelo al eje x:



$$u = v \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = v \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \phi = vx + \text{cte}(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \text{cte}'(y) = 0$$

$$\Rightarrow \text{cte}(y) = C$$

$$\therefore \phi = vx + C$$

Podemos elegir $x = 0$, $\phi = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\therefore \phi = v \cdot x \quad \text{del mismo modo } \psi = v \cdot y$$

Ec. de Cauchy-Riemann en Polares: $u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

2. Flujo Radial (Fuente o sumidero)



El caudal que pasa por cualquier circunferencia de radio r es igual al que sale o entra de la fuente o sumidero e igual a q .

$$\therefore q = u_r \cdot 2\pi r \Rightarrow u_r = \frac{q}{2\pi r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{q}{2\pi r} \Rightarrow \phi = \frac{q}{2\pi} \ln(r) + C(\theta)$$

$$v_\theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \left(0 + C'(\theta) \right) = 0 \Rightarrow C'(\theta) = 0$$

$$C(\theta) = C_1$$

$$\therefore \phi = \frac{q}{2\pi} \ln(r) + C_1$$

Elegimos (NR del campo)

$$r=1 \rightarrow \phi=0 \Rightarrow C_1=0$$

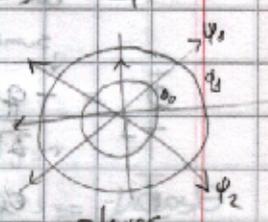
$$\therefore \left[\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r \right]$$

$\phi = cte$ en polares corresponde

A \otimes en polares (LE)

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q}{2\pi r} \Rightarrow \left[\psi = \frac{q}{2\pi} \theta \right]$$

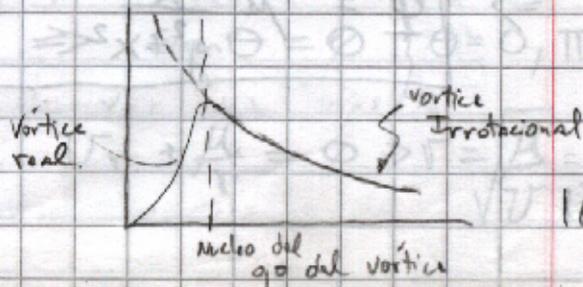
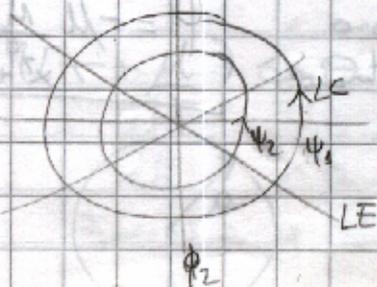
$\psi = cte$ corresponde a rectas que pasan por el origen (LC)



3. Vórtice irrotacional

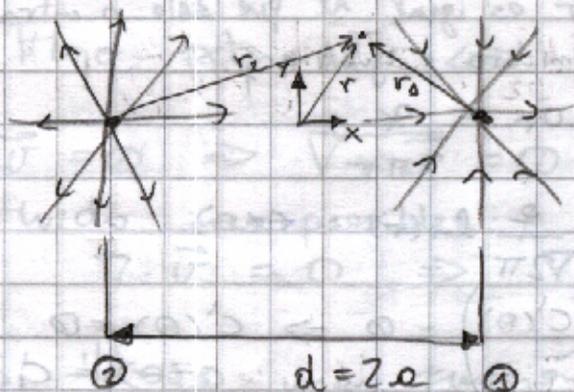
$$\text{Sea } \phi = \frac{q}{2\pi} \theta \quad \wedge \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \ln r$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \wedge \quad v_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \frac{q}{2\pi r}$$



4. Dipolo.

Combinación de una fuente y un sumidero de tal manera que su distancia "d" tiende a cero, pero "qd" = cte.



$$\Phi(r) = \Phi_1(r_1) + \Phi_2(r_2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Phi_1 = \frac{-q}{2\pi} \ln(r_1) \quad ; \quad r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\Phi_2 = \frac{q}{2\pi} \ln(r_2) \quad ; \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \left[\ln(\sqrt{(x+a)^2 + y^2}) - \ln(\sqrt{(x-a)^2 + y^2}) \right] \cdot \frac{d}{2a}$$

$$= \frac{cte}{2\pi} \cdot \frac{\left[\ln(\sqrt{(x+a)^2 + y^2}) - \ln(\sqrt{(x-a)^2 + y^2}) \right]}{2a} \quad \Big| \quad \lim_{a \rightarrow 0}$$

der. de derivada.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Phi = \frac{cte}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{cte}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = \mu \frac{x}{y^2 + x^2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Del mismo} \\ \text{modo obtenemos} \end{array} \right\} \boxed{\Psi = -\mu \frac{y}{x^2 + y^2}}$$

Lugar Geométrico de los LE: $x^2 + y^2 - \frac{\mu}{\Phi} x = 0$

$(x - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\Phi})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \frac{\mu^2}{\Phi^2}$ Círculos con centro en $(\frac{1}{2} \frac{\mu}{\Phi}, 0)$ $\wedge R = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\Phi}$

Lugar Geométrico de los LC: $x^2 + y^2 + \frac{\mu}{\Psi} y = 0$

$x^2 + (y + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\Psi})^2 = \frac{1}{4} \frac{\mu^2}{\Psi^2}$; \odot centro $(0, -\frac{1}{2} \frac{\mu}{\Psi})$ $\wedge R = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\Psi}$

5. Superposición de un Dipolo más el flujo uniforme.

Flujo uniforme: $\vec{\Phi}_u = U \hat{x} = U r \cos \theta$

$\Psi_u = U y = U r \sin \theta$

Dipolo: $\vec{\Phi}_D = \frac{\mu x}{x^2 + y^2} = \frac{\mu \cdot r \cdot \cos \theta}{r^2} = \frac{\mu \cos \theta}{r}$

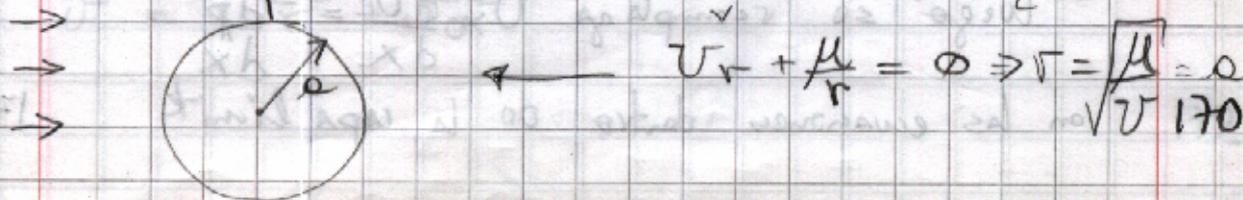
$\Psi_D = -\frac{\mu y}{x^2 + y^2} = -\frac{\mu \cdot r \cdot \sin \theta}{r^2} = -\frac{\mu \sin \theta}{r}$

$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_u + \vec{\Phi}_D = U r \cos \theta + \frac{\mu \cos \theta}{r} = (U r + \frac{\mu}{r}) \cos \theta$

$\Psi = U r \sin \theta - \frac{\mu \sin \theta}{r} = (U r - \frac{\mu}{r}) \sin \theta$

Por lo tanto, el lugar Geométrico de la LC dada por $\Psi = 0$

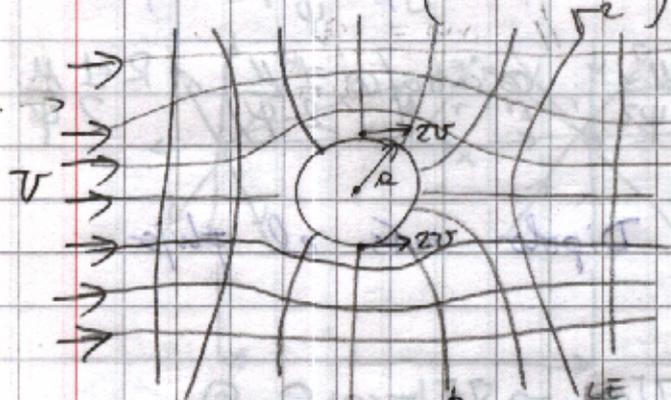
$(U r + \frac{\mu}{r}) \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$



$$\rho^2 = \frac{\mu}{U} \Rightarrow \mu = U \rho^2$$

$$\Rightarrow \Phi = U \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) r \cos \theta$$

$$\Psi = U \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) r \sin \theta$$



$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow U_{\theta} = -2U$$

$$= 2U$$

∴ la superposición de un dipolo más un flujo uniforme corresponde al flujo attorno a un cilindro inmerso en un corriente uniforme con vel. U .

$$U_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right)$$

$$U_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right)$$

Si $r = a$ (vel. a el perimetro)

$$U_r = 0 \quad U_{\theta} = -2 \sin \theta \cdot U$$

$$U_{\theta} = 0 \quad \text{punto de estancamiento}$$

$$\text{en } [\theta = 0, \pi]$$

Sol de Problemas:

- Se resuelve el flujo potencial para calcular U

- luego se reemplaza $U \times \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx}$

en las ecuaciones dentro de la capa límite

Φ

$$\psi_0 = U \cdot r \cdot \sin \theta$$

$$\psi_s = m \cdot \theta \quad // \quad m = \frac{q}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}\psi_R &= \psi_0 + \psi_s \\ &= U r \sin \theta + m \theta\end{aligned}$$

GRAFIKAR

$$\psi_R = \text{cte}$$

$$U r \sin \theta + m \theta = \text{cte}$$

$$r = \frac{\text{cte} - m \theta}{U \sin \theta}$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot (U r \cos \theta + m)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$= -U \cdot \sin \theta$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$