Cuaderno de Clases: CI31A
Capítulo 5: Escurrimiento en tuberías

Javier A. Rovegno Campos

19 de junio de 2007

Este documento contiene una recopilación de los apuntes, tomados por el Autor, en las clases de Mecánica de Fluido del Año 2005 impartidas en la FCFM por los profesores:

- Aldo Tamburrino
- Yarko Niño

Datos del Autor:

Correos del Autor: jrovegno@ing.uchile.cl , tatadeluxe@gmail.com

Página Personal del Autor: http://www.cec.uchile.cl/~jrovegno/

Este Documento forma parte de la primera etapa BETA del *Proyecto Colaborativo WikiCursos*.

Para más información sobre WikiCursos visitar:
http://ideaschile.wordpress.com/

1. Introducción:

1.1. Generalidades.

1.2. Sistemas de Unidades y Medidas.

1.3. Propiedades de los fluidos: termodinámicas, de transporte (viscosidad , etc.), tensión superficial, presión de vapor (fenómenos de capilaridad y cavitación).

2. Estática de los fluidos

2.1. Análisis de la condición de equilibrio. Presión y esfuerzo de corte. Ecuación fundamental del equilibrio estático de los fluidos.

2.2. Aplicación al campo de fuerzas gravitacionales. Ley hidrostática.

2.3. Aplicación a campos de fuerzas distintas de las gravitacionales (centrífuga, etc.).

2.4. Presiones absolutas y manométricas. Medida de la presión.

2.5. Fuerzas sobre superficies planas sumergidas y curvas sumergidas. Principio de Arquímedes.

3. Cinemática de los fluidos

3.1. Clasificación de los regímenes de escurrimiento.

- Régimen laminar y turbulento. Experiencia de Reynolds.
- Régimen uniforme y variado.
- Régimen permanente e impermanente.
- Escurrimiento critico y subcrítico con superficie libre.

3.2. Descripción del movimiento de un fluido. Método de Langrange y Euler. Líneas características del flujo.

3.3. Enfoques alternativos de análisis; enfoque integral; concepto de sistema y volumen de control. Teorema del Transporte de Reynolds.

3.4. Principio de conservación de la materia. Ecuación de continuidad según enfoque integral.

3.5. Conceptos de gasto másico y volumétrico. Aplicaciones de la ecuación, de continuidad integral.

3.6. Ecuación de continuidad desde un punto de vista diferencial.

3.7. Deformación de fluidos en movimiento. Deformación lineal (contracción o dilatación). Deformación angular, rotación con deformación (vorticidad). Propiedades de la vorticidad.

4. Dinámica de los fluidos

4.1. Teorema del Momentum desde un punto de vista diferencial. Relaciones esfuerzo deformación. Flujos rotacionales e irrotacionales. Ecuaciones de Navier Stokes. Aplicaciones a la determinación de distribución de velocidades en régimen laminar.

4.2. Ecuación de Euler. Ecuación de Bernoulli. Aplicaciones.

4.3. Teorema General de ta energía aplicado a los fluidos en movimiento.

4.4. Ecuación de Bernoulli derivada del Teorema de la Energía. Extensión a toda la corriente.

4.5. Teorema del Momentum desde el punto de vista integral.

5. Escurrimiento en tuberías

5.1. Nociones sobre Teoría de la Turbulencia. Ecuaciones de Reynolds.

5.2. Teoría fenomenológica de Prandtl. Distribución de velocidades en régimen turbulento.

5.3. Pérdidas de carga en tuberías friccionales y singulares. Aplicaciones.

5.4. Nociones de la Teoría de la Capa Limite.

6. Hidrodinámica y flujo potencial

6.1. Concepto de flujo Potencial. función Potencial y de Corriente. Propiedades de las funciones. Lineas equipotenciales y de corriente.

6.2. Ejemplos de flujos potenciales bidimensionales, flujo uniforme, flujo radial, fuentes y sumideros puntuales.

6.3. Redes de flujo y métodos de solución.

7. Análisis dimensional y teoría de modelos

7.1. Generalidades.

7.2. Fundamentos del método de Análisis Dimensional.

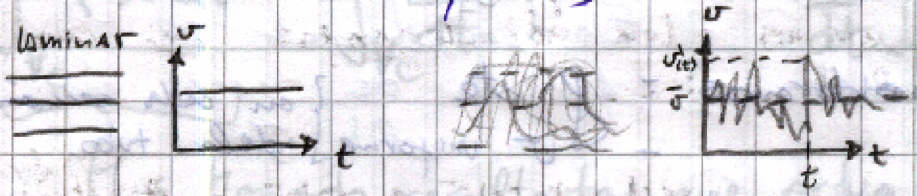
7.3. Teorema phi o de Buckingham.

7.4. Aplicaciones. Sustentación y Arrastre.

7.5. Semejanza y Teoría de Modelos. Semejanza geométrica, cinemática y dinámica. Aplicaciones a estudios en modelos.

(Cat. Aux. Atras). Catedra 3/11

5.1 Nociones sobre Teoría de la Turbulencia. Ecuaciones de Reynolds



Osborne Reynolds (1885)

Descomposición de Reynolds : $v_{(t)} = \overline{v} + v'_{(t)}$

$$\overline{v} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t v \cdot d(t) \quad \text{(Valor medio temporal)}$$

→ Velocidad

$$\boxed{v_{(t)} = \overline{v} + v'_{(t)}} \qquad / \ \overline{(\ )} \to \text{Valor medio temp.}$$

→ Fluctuación

→ valor medio temporal

$$\overline{v_{(t)}} = \overline{\overline{v} + v'(t)}$$

$$\overline{v} = \overline{\overline{v}} + \overline{v'}_{(t)}$$

$$\cancel{\overline{v}} = \cancel{\overline{v}} + \overline{v'} \Rightarrow \boxed{\overline{v'_{(t)}} = \emptyset}$$

Consideramos:

$$u = \overline{u} + u' \quad \wedge \quad v = \overline{v} + v'$$

$$\overline{u \cdot v} = \overline{(\overline{u} + u')(\overline{v} + v')}$$

$$= \overline{\overline{u}\,\overline{v} + \overline{u}v' + u'\overline{v} + u'v'}$$

$$= \overline{\overline{u}\,\overline{v}} + \underbrace{\overline{\overline{u}v'}}_{\emptyset} + \underbrace{\overline{u'\overline{v}}}_{\emptyset} + \overline{u'v'}$$

→ No se puede decir nada

$$\Rightarrow \overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v} + \overline{u'v'}$$

del mismo modo $\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}\right) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}$

$$\wedge \quad \overline{\int u \, dx_i} = \int \overline{u} \, dx_i$$

// Por prop. de la integral.

Reynolds: Consideramos un fluido Newtoneano, incompresible en un campo gravitacional cuyas variables $(\vec{v}, p)$ sean estadisticamente estacionarias (los estadigrafos **no** cambian en el tiempo)

Continuidad: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0}$ // descomp. de Reynolds

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\bar{V} + \nabla\cdot V' = 0} \quad (1) \quad // \ \overline{(\ )}$$

$$\Rightarrow \overline{\nabla\cdot\bar{V}} + \overline{\nabla\cdot V'} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\bar{\bar{V}} + \nabla\cdot\overline{V'} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\bar{V} = 0 \quad \therefore \boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0} \ (2)$$

$$(2)\to(1) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0}$$

Ec de N-S componente x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\cdot\nabla^2 u \quad (4)$$

$$(3) // \cdot u \Rightarrow u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad (5)$$

(4)+(5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\cdot\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\cdot\nabla^2 u$$ // Descomp Reynolds

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}+u')^2}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{w}+w')}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial p'}{\partial x}\right)+\nu\nabla^2(\bar{u}+u')$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial x}+\frac{\partial(2\bar{u}u')}{\partial x}+\frac{\partial u'^2}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{u}v'}{\partial y}+\frac{\partial u'\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial u'v'}{\partial y}+\frac{\partial\bar{u}\bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{u}w'}{\partial z}$$

$$+\frac{\partial u'\bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial u'w'}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial p'}{\partial x}\right)+\nu\nabla^2\bar{u}+\nu\nabla^2 u' \quad (6) \quad // \ \overline{(\ )}$$

Promedio temporal de los distintos términos.

- $\overline{\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial u'}{\partial t}}=\overline{\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial u'}{\partial t}}=\underbrace{\cancel{\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}}}_{\emptyset \text{ cte}}+\frac{\partial\overline{u'}}{\partial t}^{\nearrow\emptyset}=\emptyset$

- $\overline{\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial x}+2\frac{\partial\bar{u}u'}{\partial x}+\frac{\partial u'^2}{\partial x}}=\overline{\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial x}}+2\overline{\frac{\partial\bar{u}u'}{\partial x}}+\overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}}=\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial x}+2\frac{\partial\bar{u}\cancel{\overline{u'}}^{\nearrow\emptyset}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x}$

- $\overline{\frac{\partial\bar{u}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{u}v'}{\partial y}+\frac{\partial u'\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial u'v'}{\partial y}}=\frac{\partial\bar{u}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{u}\cancel{\overline{v'}}^{\nearrow\emptyset}}{\partial y}+\frac{\partial\cancel{\overline{u'}}^{\nearrow\emptyset}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}$

$$=\frac{\partial\bar{u}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}$$

- Equivalente: $\overline{\frac{\partial\bar{u}\bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{u}w'}{\partial z}+\frac{\partial u'\bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial u'w'}{\partial z}}=\frac{\partial\bar{u}\bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}$

$\overline{\frac{\partial p'}{\partial x}}=\frac{\partial\overline{p'}^{\nearrow\emptyset}}{\partial x}=\emptyset \quad \wedge \quad \overline{\nabla^2 u'}=\nabla^2\cancel{\overline{u'}}^{\nearrow\emptyset}=\emptyset$

Reemplazando terminos en (6) queda.

$$\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{u}\bar{w}}{\partial z}+\overbrace{\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\nu\nabla^2\bar{u}}^{\%} \quad (*_1)$$

$$2\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}=\%$$

$$\bar{u}\underbrace{\left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right]}_{\emptyset \text{ (cont)}}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}=\%$$

$$\Rightarrow \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\nu\cdot\nabla^2\bar{u} \quad (7)$$

- $\nabla^2\bar{u}=\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2} \quad (a)$

Cont: $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \;\Big/\; \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (\theta)$$

$$(a)+(\theta) = 2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y}$$

$$(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right] \quad (b)$$

$$\nu \nabla^2 \bar{u} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \bar{u} \quad (a)$$

$$(b) \cdot \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \cdot 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right]\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right]\right)\right\}$$

$$\boxed{\textbf{Def}: \; \tau_{v_{ij}} = \mu\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]} \quad \text{(Esfuerzos viscosos)}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{u} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\tau_{v_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{v_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{v_{xz}}\right\}$$

Finalmente N-S según x queda:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{v_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{v_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{v_{xz}}\right] \quad (9)$$

equivalentemente para N-S según y queda

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{v_{yx}} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{yz}\right]$$

lo mismo para z

Cat. 5/11

Descomp de Reynolds $\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}' \\ P = \bar{P} + P' \end{array} \right\}$ $N\text{-}S \to \overline{N\text{-}S}$ $\to \overline{NS}\,\overline{NS}$

Segun x: $\underbrace{\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)}_{\frac{m\,\bar{a}}{V}} + \underbrace{\rho\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \rho\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \rho\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}}_{*}$

*: Se puede interpretar como fzas. que se originan en la turbulencia. (flujos de momento de las fluctuaciones turbulentas

Al lado derecho de la ec (9) se tenía

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left[\frac{\partial \tau_{vxx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{vxy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{vxz}}{\partial z}\right]$$

Donde $\tau_{v_{ij}} = \mu\left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right]$ (10)

Pasamos las "fzas viscosas a la derecha"

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{vxx} - \rho\overline{u'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{vxy} - \rho\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{vxz} - \rho\overline{u'w'}\right)\right]$$

Def: $\tau_{Txx} = -\rho\overline{u'^2}$; $\tau_{Txy} = -\rho\overline{u'v'}$
Esfuerzos aparentes o Turbulentos de Reynolds

Luego: $\underset{total}{\tau_{ij}} = \underset{viscoso}{\tau_{v\,ij}} + \underset{turbulento}{\tau_{T\,ij}}$

$\tau_{vij} = \mu\left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right] \wedge \tau_{Tij} = -\rho\,\overline{u_i' \cdot u_j'}$

Luego al promediar sobre la turbulencia las ecs. de N-S quedan:

Ecuaciones de Reynolds (11)

$$x: \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) - \rho\overline{u'^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) - \rho\overline{u'v'}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) - \rho\overline{u'w'}\right]\right\}$$

$$y: \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) - \rho\overline{v'u'}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) - \rho\overline{v'^2}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right) - \rho\overline{v'w'}\right]\right\}$$

$$z: \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) - \rho\overline{w'u'}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) - \rho\overline{w'v'}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right) - \rho\overline{w'^2}\right]\right\}$$

Ecuaciones : Reynolds 3 + Continuidad 1 = 4

Incognitas = $\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{v'w'}$ = 10

Problema de cierre de la Turbulencia:

Tenemos más incognitas que ecuaciones, para cerrar el problema debemos modelar los términos turbulentos $\overline{u_i'u_j'}$.

Modelos de cierre de la Turbulencia.

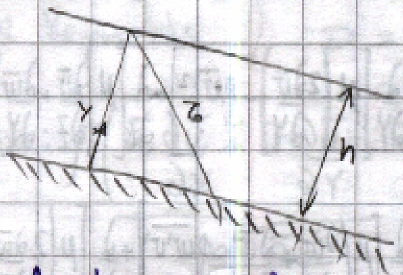
Boussinesq : (1879 → Analogía con el flujo laminar)

Caso uniforme 2D : $\left.\begin{aligned} \tau_{v_{xy}} &= \underbrace{\mu}_{\text{Prop del fluido}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ \tau_{T_{xy}} &= \underbrace{\mu_T}_{\text{Prop. del flujo}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tau_{xy} = (\mu + \mu_T)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$

μ_T : viscosidad Turbulenta o de remolinos.

El gran problema es que μ_T es una propiedad del flujo, no del fluido.

Concepto de la longitud de mezcla de Prandtl (1933)

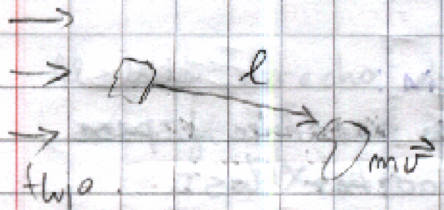


$$\tau = \tau_f \left(1 - \frac{h}{Y}\right)$$

τ_f: esfuerzo en el fondo

→ Analogía al concepto de camino libre medio en teoría cinética de los gases.

Camino libre medio: Distancia promedio que recorre una partícula de gas antes de chocar con otra.



5.2 Teoría Fenomenológica de Prandtl
Distribución de velocidades en régimen turbulento.

Cat. (08-11)

Ecuaciones de Reynolds

$$\tau_{ij} = \tau_{v_{ij}} + \tau_{T_{ij}}$$

$$\tau_{v_{ij}} = \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right), \quad \tau_{T_{ij}} = -\rho\,\overline{u_i' v_j'}$$

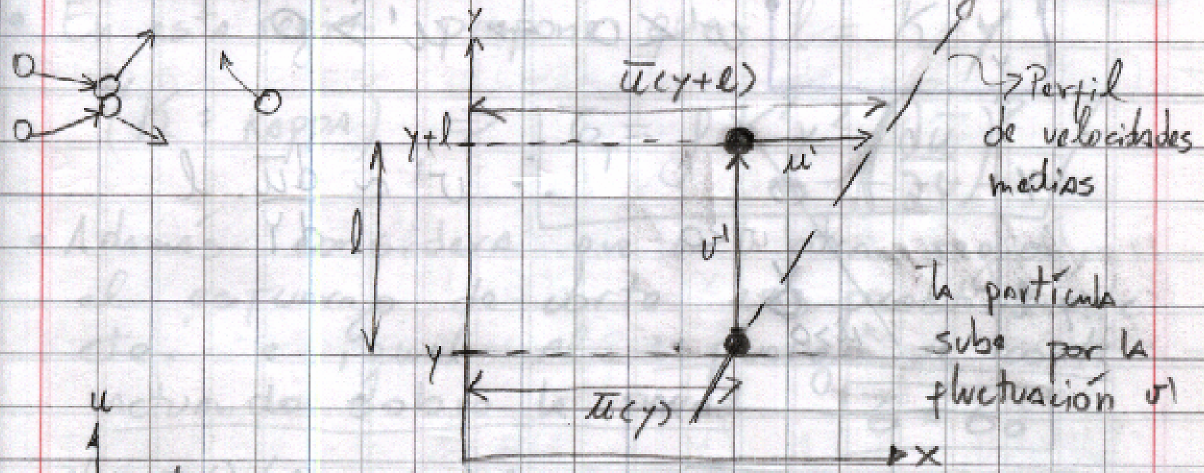
- Modelo de Boussinesq (1879).

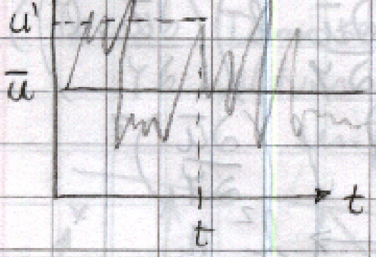
Coef. de viscosidad turbulenta o de remolinos

$$\tau_{T_{xy}} = -\rho\,\overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad // \quad \mu_T = fn(\text{Flujo})$$

- PrandtL (1933).

Concepto de longitud de mezcla en analogía al concepto de camino libre medio de la teoría cinética de los gases.





Flujo 2D, estacionario

$u = \bar{u} + u'$; $v = \underbrace{\cancel{\bar{v}}}_{0} + v'$

l: longitud de mezcla

$u' = \bar{u}(y) - \bar{u}(y+l)$ // Taylor

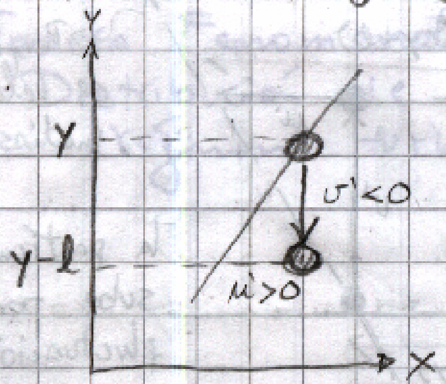
$u' = \cancel{\bar{u}(y)} - \left[\cancel{\bar{u}(y)} + \frac{d\bar{u}}{dY} l + \dots\right]$

$\boxed{u' = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \cdot l}$ (longitud de mezcla)

Experimental/ se ha observado que la turbulencia es "bien conocida"

$\Rightarrow \boxed{|u'| \sim |v'|}$ // semejanza en orden de magnitud.

Es fácil ver: $v' > 0 \rightarrow u' < 0$
$v' < 0 \rightarrow u' > 0$



$\therefore v' \sim \frac{d\bar{u}}{dY} \cdot l$

$$\tau_{T_{XY}} = -\rho \cdot \overline{u'v'} \sim -\rho \left(-\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \cdot l\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \cdot l\right)$$
$$= \underbrace{(\alpha l^2)}_{l'^2} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y}\right)^2$$

$l'^2 \xrightarrow[\text{def}]{} l^2$

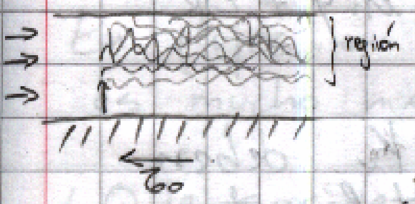
Prandtl

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{T_{XY}} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y}\right)^2}$$

Pero, el problema no está resuelto ya que no conocemos "l"

• <u>Von Kármán</u> (Alumno de Prandtl)

• Considera el flujo limitado por una pared:



• Considera una <u>región</u> del flujo cercana a la pared, pero suficientemente alejada de ella, de tal manera que <u>dominen los esfuerzos turbulentos sobre los viscosos</u> $(\tau_T >> \tau_V)$

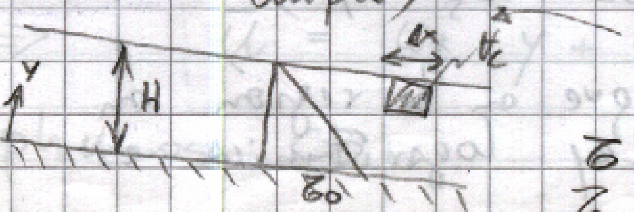
$$\boxed{\tau_0 = \tau_T + \tau_V \approx \tau_T}$$

• En esta región propone que: $\boxed{l = K \cdot y}$

(K: kappa) $\Rightarrow$ $\boxed{\tau_T = \rho K^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2}$

• Además considera que en la otra región, el esfuerzo de corte es prácticamente cte. e igual al <u>esfuerzo de corte actuando sobre la pared.</u> $\boxed{\tau = \tau_0}$

(Tarea: Demostrar que en un canal con altura de escurrimiento cte se cumple)

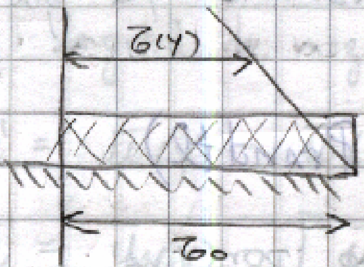


Hint: definir un vol de control.

$$\tau = \gamma H \sin\alpha$$

$$\tau = \tau_0\left(1 - \frac{y}{H}\right)$$

Por definición de u_*:



$$\tau_0 = \rho u_*^2$$

$$\therefore \rho u_*^2 = \rho K^2 Y^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} = \frac{u_*}{K \cdot Y}$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{u}}{u_*} = \frac{dy}{K \cdot Y} \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{K} \ln Y + cte$$

La cte de integración y K deben determinarse experimentalmente.

$$\boxed{\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{K} \ln Y + C_1 \quad \text{Se denomina Ley logarítmica.}}$$

- Caso paredes Lisas:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{K} \cdot \ln\left(\frac{Y \cdot u_*}{\nu}\right) + 5,5$$

- Pared hidrodinamicamente rugosa:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{Y}{K_S}\right) + 8,5$$

(En ambos casos $K = 0,4$)

Se encuentra que en la región en la cual la Ley logarítmica es válida es mucho mayor de lo que podríamos suponer a priori, entonces debemos dudar de las consideraciones hechas para su deducción.

Ley logarítmica:

En capas límites, el rango de validez llega al 20% del espesor de la capa límite.

En flujos en canales abiertos, la región es mucho mayor.

¿Qué sucede en la región entre la superficie ($y=0$) y la zona en la que es válida la Ley logarítmica?

(Pregunta válida sólo para paredes lisas)

- Consideramos que en esta región dominan los esfuerzos viscosos $\tau_v \gg \tau_T$

$$\tau \approx \tau_v = \mu \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}} \right]$$

- Además consideramos que $\tau = \tau_0 = \rho u_*^2$

Velocidad friccional o del corte.

$$\Rightarrow \rho u_*^2 = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \rho u_*^2 y = \mu . \bar{u} + cte$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{u_*^2}{\nu} . y + C_1$$

- Aplicamos CB:

CB: $y = 0$, $\overline{u} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\therefore \boxed{\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{u_* \cdot y}{\nu}}$$

Definimos variables adimensionales.

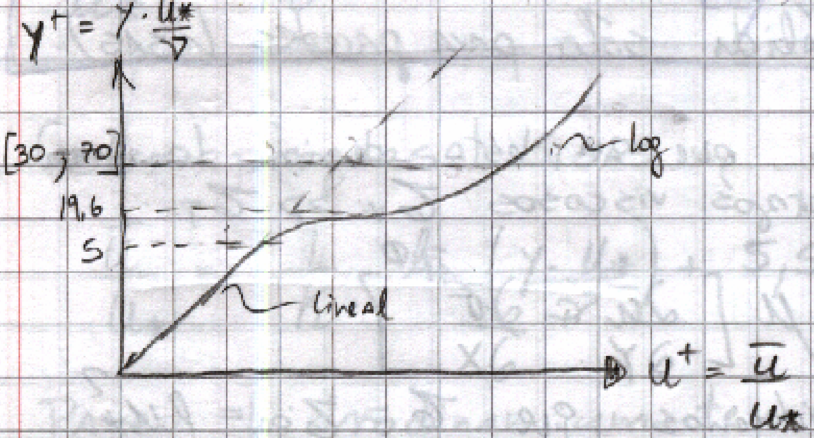
$\underline{\underline{Def}}$ $\left(u^+ = \frac{\overline{u}}{u_*} \right) \wedge \left(y^+ = \frac{u_* y}{\nu} \right)$

$$\Rightarrow \boxed{u^+ = y^+}$$

$\therefore$ la ley logaritmica queda:

$$\boxed{u^+ = \frac{1}{K} \cdot \ln y^+ + 5{,}5}$$

Pararedes lisas.



Pared lisa

$$\frac{K_S \cdot u_*}{\nu} < 5$$

Pared Rugosa

$$\frac{K_S \cdot u_*}{\nu} > 60$$

Teoría de la Turbulencia.

Reynolds: $u = \bar{u} + u'$

(N-S) Para un t suficiente para calcular un promedio temporal, pero acotado como para agregar la dependencia de la vel media del tiempo.

$$\hat{x}] \quad \frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho\overline{u'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) - \rho\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) - \rho\overline{u'w'}\right)\right]$$

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{laminar}$$

En este caso (Turbulento)

$$\tau_{xx} = \mu\, 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho\overline{u'^2}$$

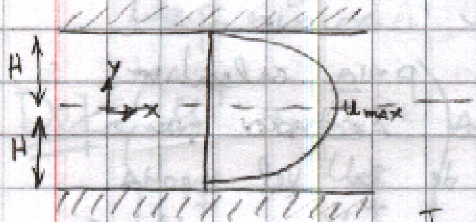
$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) - \rho\overline{u'v'} \quad ; \quad \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) - \rho\overline{u'w'}$$

Donde

$$\tau = \tau_r + \tau_T$$

5.3 Aplicación de Teo. de Turbulencia.

- Flujo turbulento estacionario entre 2 placas planas.



$$\bar{u} = \bar{u}(y)$$

$$\bar{v} = \bar{w} = 0$$

Incognitas

$$\overline{v'w'},\ \overline{u'^2},\ \overline{u'v'},\ \overline{u'w'} = fn(Y)$$

Aplicamos Continuidad

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \cancelto{0}{\frac{\partial \bar{v}}{\partial Y}} + \cancelto{0}{\frac{\partial \bar{w}}{\partial Z}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0} \quad (1)$$

Cont. para flutua

Momentum:

$$\hat{x}] : \quad 0 = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} - \rho \overline{u'v'}\right] \quad (2)$$

$$\hat{y}] : \quad 0 = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial Y} - \rho \frac{\partial}{\partial Y}\left(\overline{v'^2}\right) \quad (3)$$

$$\hat{z}] : \quad 0 = -\frac{\partial}{\partial Y}\left(\overline{v'w'}\right) \quad (4)$$

de (4) $\Rightarrow \quad \overline{v'w'} = cte$

$v' = w' = 0$ en la pared $\Rightarrow \overline{v'w'} = 0$

$$(3) \Rightarrow \bar{p} = -\rho\,\overline{v'^2} + cte \Rightarrow \boxed{\bar{p} = -\rho\,\overline{v'^2} + \hat{p}_{pared}} \quad (5)$$

Pues en la pared $v' = 0 \Rightarrow cte = \hat{p}_{pared}$

$(2) \Rightarrow \dfrac{\partial \hat{\bar{p}}}{\partial X} = \dfrac{d}{dY}\underbrace{\left(\mu \dfrac{d\bar{u}}{dY} - \rho \overline{u'v'}\right)}_{\tau_{xy} \text{ no es fn de } x}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial X} = \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y}$ (7) $\Rightarrow \hat{\bar{p}} = \dfrac{d\tau_{xy}}{dY} \cdot x + cte$ La presión varía linealm. con x igual que en laminar

$(5)/\dfrac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \emptyset + \dfrac{\partial \hat{p}_{pared}}{\partial x}$

en (7) $\Rightarrow \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} = \dfrac{\partial \hat{p}_{pared}}{\partial x} \Rightarrow \tau_{xy} = \dfrac{\partial \hat{p}_{pared}}{\partial x} \cdot y + C_2$ (9)

En $y = H \rightarrow \tau = \tau_{pared} = \rho \cdot u_*^2$

$(9) \rightarrow \tau_{pared} = \dfrac{\partial \hat{p}_{pared}}{\partial x} \cdot H + C_2$ (10)

$(10) \rightarrow C_2$

C_2 en $(9) \rightarrow \tau_{xy} = \dfrac{\partial \hat{p}_{pared}}{\partial x} \cdot y + \left(\tau_{pared} - \dfrac{\partial \hat{p}_{pared}}{\partial x} \cdot H\right)$

$\Rightarrow \tau_{xy} = \dfrac{\partial \hat{p}_{pared}}{\partial x}(y - H) + \tau_{pared}$ (11)

Por simetría, para $y = \emptyset \rightarrow \tau = 0$

$\Rightarrow \emptyset = -\dfrac{\partial \hat{p}_{pared}}{\partial x} \cdot H + \tau_{pared}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \hat{p}_{pared}}{\partial x} H = \tau_{pared}$ (12)

$(12 \wedge 11) \Rightarrow \tau = \tau_{pared} \dfrac{y - H}{H} + \tau_{pared}$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{pared} \dfrac{y}{H}} \quad (13)$$

∴ Distribución del efecto de corte es lineal con respecto a y:

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dY} - \rho \overline{u'v'} = \tau_{pared} \frac{y}{H}$$

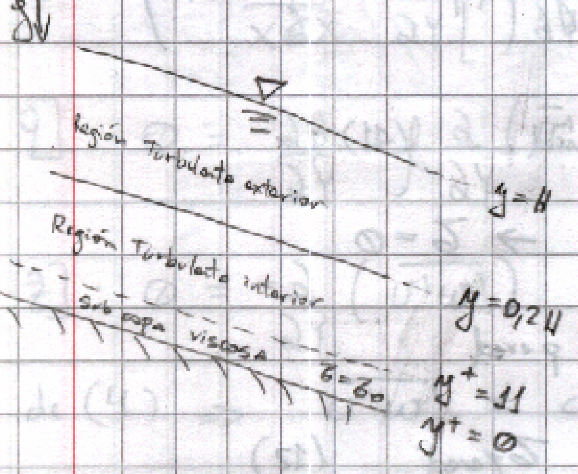
$$\Rightarrow \boxed{\mu \frac{d\bar{u}}{dY} = \tau_{pared} \frac{y}{H} + \rho \overline{u'v'}} \quad (14)$$

Como no conocemos $\overline{u'v'}$ necesitamos una ley de cierre

Ej. Boussinesq: $\tau_v = \mu \frac{d\bar{u}}{dY}$ por analogía

$$\tau_T = \mu_T \frac{d\bar{u}}{dY} = -\rho \overline{u'v'}$$

Problema 1



Def: $y^+ = \frac{u^*}{\nu} \cdot y$

- Región Turbulenta interior: $(\tau_T \gg \tau_v)$

$$\tau = \tau_T + \tau_v \approx \tau_T$$

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'}$$

$$\tau = \tau_T \approx \tau_0 = \rho \cdot u_*^2 \quad ; \; l = K \cdot y$$

$$\underline{\text{Prandtl:}} \quad \tau_T = \rho \cdot l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dY}\right)^2$$

$$\cancel{\rho} \cdot u_*^2 = \cancel{\rho} \cdot l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dY}\right)^2 \Big/ \sqrt{\ } \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dY} = \frac{u_*}{K \cdot Y}$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{u}}{u_*} = \frac{dy}{K \cdot Y} \Big/ \int \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{K} \ln y + cte$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\bar{u}}{u_*}}_{u^+} = \frac{1}{K} \ln \Big(\underbrace{Y \cdot \frac{u_*}{\nu}}_{Y^+}\Big) + C_1$$

$$\boxed{u^+ = \frac{1}{K} \ln(Y^+) + C_1} \quad (1) \qquad (K = 0{,}4)$$

- Sub-capa viscosa: $\tau_v \gg \tau_T$

$$\Rightarrow \tau = \tau_v \quad ; \quad \tau \approx \tau_0 = \rho u_*^2 = \mu \frac{d\bar{u}}{dY}$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{u}}{u_*} = \frac{u_*}{\nu} dY \Big/ \int \Rightarrow \underbrace{\frac{\bar{u}}{u_*}}_{} = \underbrace{\frac{u_*}{\nu} \cdot Y}_{}$$

$$\boxed{u^+ = Y^+} \quad (2)$$

$$(1)_{(Y^+ = 11)} = (2)_{(Y^+ = 11)}$$

$$11 = \frac{1}{0{,}4} \cdot \ln(11) + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 5{,}005}$$

- Región Turbulencia exterior $(\tau_T \gg \tau_v)$

$$\boxed{\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{Y}{H}\right)} = \rho u^{*2} \left(1 - \frac{Y}{H}\right)$$

$$\tau \approx \tau_T = \rho \cdot l_0^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dY}\right)^2 :$$

$$l_0 = 0{,}08H \Rightarrow d\overline{u} = \alpha'\left(1-\frac{Y}{H}\right)^{1/2} dy$$

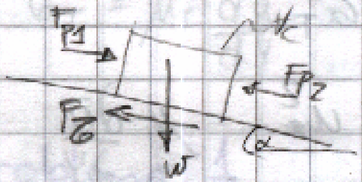
$$\alpha' = \frac{u_*}{l_0} \qquad \frac{\overline{u}}{u^*} = \frac{1}{l_0}\frac{2}{3}(Y-H)\sqrt{\frac{(H-Y)}{H}} + C_{12}$$

$$(2)_{(Y=0{,}2H)} = (3)_{(Y=0{,}2H)}$$

$$\frac{u_*}{\nu} \cdot 0{,}2H = -5{,}96 + C_{12}$$

ii) Flujo uniforme:

a) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}0001$; $H = 1\,[m]$, $\nu = 10^{-6}\left[\frac{m^2}{s}\right]$



$$\Sigma F = \rho Q \Delta V_x \rightarrow \Sigma F = 0$$

$$F_{p1} = F_{p2} \Rightarrow F_\tau = \tau_0 \cdot \Delta x$$

$$u_* = \Delta x \cdot H \operatorname{sen}\alpha \cdot \gamma$$

$$F_\tau = W_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_0 = \gamma H \operatorname{sen}\alpha}$$

$$\tau_0 = \rho u_*^2 \Rightarrow \boxed{u_* = \frac{1}{\rho} \cdot \gamma H \operatorname{sen}\alpha}$$

5.4 Nociones sobre la teoría de la capa límite.

(Hoja CAT : 10-11)