

Cuaderno de Clases: CI31A

Capítulo 2: Estática de los fluidos

Javier A. Rovegno Campos

19 de junio de 2007

Licencia del Documento: Creative Commons 3.0 [Detalles de la Licencia]¹

Este documento contiene una recopilación de los apuntes, tomados por el Autor, en las clases de Mecánica de Fluido del Año 2005 impartidas en la FCFM por los profesores:

- Aldo Tamburrino
- Yarko Niño

Datos del Autor:

Correos del Autor: jrovegno@ing.uchile.cl , tatadeluxe@gmail.com

Página Personal del Autor: <http://www.cec.uchile.cl/~jrovegno/>

Este Documento forma parte de la primera etapa BETA del *Proyecto Colaborativo WikiCursos*.

Para más información sobre WikiCursos visitar:
<http://ideaschile.wordpress.com/>

¹<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

1. Introducción:

1.1. Generalidades.

1.2. Sistemas de Unidades y Medidas.

1.3. Propiedades de los fluidos: termodinámicas, de transporte (viscosidad , etc.), tensión superficial, presión de vapor (fenómenos de capilaridad y cavitación).

2. Estática de los fluidos

2.1. Análisis de la condición de equilibrio. Presión y esfuerzo de corte. Ecuación fundamental del equilibrio estático de los fluidos.

2.2. Aplicación al campo de fuerzas gravitacionales. Ley hidrostática.

2.3. Aplicación a campos de fuerzas distintas de las gravitacionales (centrífuga, etc.).

2.4. Presiones absolutas y manométricas. Medida de la presión.

2.5. Fuerzas sobre superficies planas sumergidas y curvas sumergidas. Principio de Arquímedes.

3. Cinemática de los fluidos

3.1. Clasificación de los regímenes de escurrimiento.

- Régimen laminar y turbulento. Experiencia de Reynolds.
- Régimen uniforme y variado.
- Régimen permanente e impermanente.
- Escurrimiento crítico y subcrítico con superficie libre.

- 3.2. Descripción del movimiento de un fluido. Método de Lagrange y Euler. Líneas características del flujo.
- 3.3. Enfoques alternativos de análisis; enfoque integral; concepto de sistema y volumen de control. Teorema del Transporte de Reynolds.
- 3.4. Principio de conservación de la materia. Ecuación de continuidad según enfoque integral.
- 3.5. Conceptos de gasto másico y volumétrico. Aplicaciones de la ecuación, de continuidad integral.
- 3.6. Ecuación de continuidad desde un punto de vista diferencial.
- 3.7. Deformación de fluidos en movimiento. Deformación lineal (contracción o dilatación). Deformación angular, rotación con deformación (vorticidad). Propiedades de la vorticidad.

4. Dinámica de los fluidos

- 4.1. Teorema del Momentum desde un punto de vista diferencial. Relaciones esfuerzo deformación. Flujos rotacionales e irrotacionales. Ecuaciones de Navier Stokes. Aplicaciones a la determinación de distribución de velocidades en régimen laminar.
- 4.2. Ecuación de Euler. Ecuación de Bernoulli. Aplicaciones.
- 4.3. Teorema General de la energía aplicado a los fluidos en movimiento.
- 4.4. Ecuación de Bernoulli derivada del Teorema de la Energía. Extensión a toda la corriente.
- 4.5. Teorema del Momentum desde el punto de vista integral.

5. Escurrimiento en tuberías

- 5.1. Nociones sobre Teoría de la Turbulencia. Ecuaciones de Reynolds.
- 5.2. Teoría fenomenológica de Prandtl. Distribución de velocidades en régimen turbulento.
- 5.3. Pérdidas de carga en tuberías friccionales y singulares. Aplicaciones.
- 5.4. Nociones de la Teoría de la Capa Límite.

6. Hidrodinámica y flujo potencial

- 6.1. Concepto de flujo Potencial. función Potencial y de Corriente. Propiedades de las funciones. Líneas equipotenciales y de corriente.
- 6.2. Ejemplos de flujos potenciales bidimensionales, flujo uniforme, flujo radial, fuentes y sumideros puntuales.
- 6.3. Redes de flujo y métodos de solución.

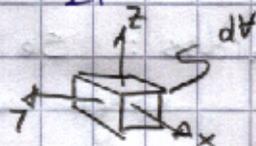
7. Análisis dimensional y teoría de modelos

- 7.1. Generalidades.
- 7.2. Fundamentos del método de Análisis Dimensional.
- 7.3. Teorema π o de Buckingham.
- 7.4. Aplicaciones. Sustentación y Arrastre.
- 7.5. Semejanza y Teoría de Modelos. Semejanza geométrica, cinemática y dinámica. Aplicaciones a estudios en modelos.

2. Hidrostática:

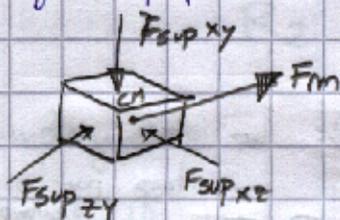
Situación de equilibrio del fluido sin mov. $\Sigma F = 0$

- Fgas. que actúan sobre un elemento de fluido (elemento de vol)



- * Fgas. másicas: Dependen de la masa y actúan en el centro de masa del elemento de vol.

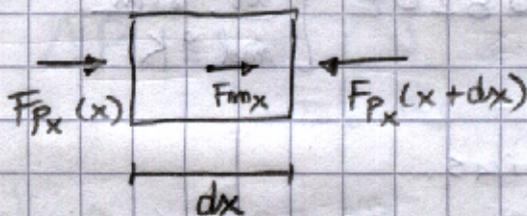
- * Fgas. superficiales: Actúan sobre la superficie que define el elemento de volumen.



$$\vec{F}_m = \vec{f}_m \cdot dm$$

\vec{f}_m : aceleración que 'siente' el elemento de fluido debido a una fuerza.

Equilibrio en la dirección x:



$$\boxed{x} \quad F_{px}(x) + F_{mx} - F_{px}(x+dx) = 0 \quad (*)$$

TAYLOR: $F_{px}(x+dx) = F_p(x) + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \dots$

Terminos orden > 2

$$\begin{aligned}
 F_{m_x} &= f_{m_x} \cdot dm \\
 &= f_{m_x} \cdot \rho \cdot dV \\
 &= f_{m_x} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz
 \end{aligned}$$

⇒ Reemplazando en (*)

$$\begin{aligned}
 F_{xx} &= \sigma_{xx} \cdot A_{yz} \\
 \Rightarrow dF_{xx} &= p_{xx} \cdot dy \cdot dz
 \end{aligned}$$

$$\cancel{F_{p_x}} + f_{m_x} \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \cancel{F_{p_x}} - \frac{\partial F_{p_x}}{\partial x} dx = 0$$

$$f_{m_x} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\partial p}{\partial x} dy \cdot dz \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot f_{m_x}$$

analogamente

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot f_{m_y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \cdot f_{m_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla p = \rho \cdot \vec{f}_m}$$

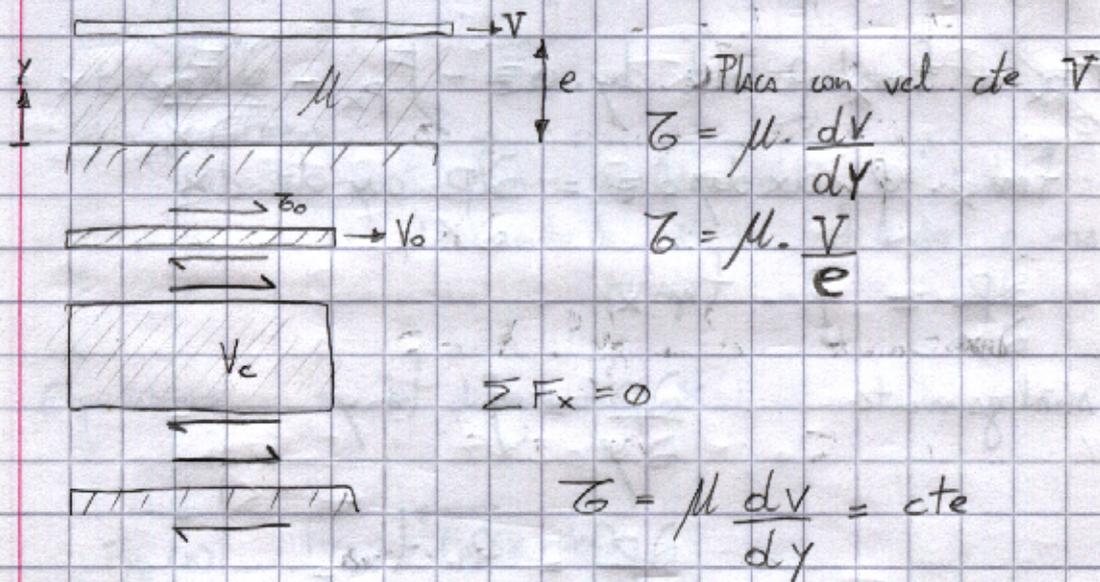
↳ Ecuación fundamental del equilibrio estático de los fluidos.

(03-08) AUXILIAR #1

Fluidos resista sólo esfuerzos normales de compresión y al aplicar esfuerzos de corte al fluido se deforma continuamente, i.e. fluye
⇒ las partículas adquieren mov. relativo

$\tau \propto \frac{dy}{dt}$ ⇒ ley de Newton-Navier

$$\tau = \mu \cdot \frac{dy}{dt}$$



$$\frac{dv}{dy} = \frac{\tau_0}{\mu} = cte$$

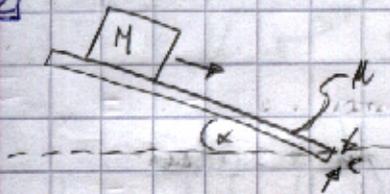
$$dv = \frac{\tau_0}{\mu} \cdot dy$$

$$v = \frac{\tau_0}{\mu} \cdot y + cte \quad / \quad (v=0) \rightarrow (y=0)$$

$$\Rightarrow v(y) = \frac{\tau_0}{\mu} \cdot y$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_0 = \mu \frac{V}{e}}$$

P2



$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = M \cdot \ddot{x}$$

$$\sum F_x = W \sin \alpha - F_R$$

$$F_R = \tau \cdot A$$

// fluido newtoniano

$$\tau = \mu \cdot \frac{V}{e}$$

$$\tau = \mu \cdot \frac{\dot{x}}{e}$$

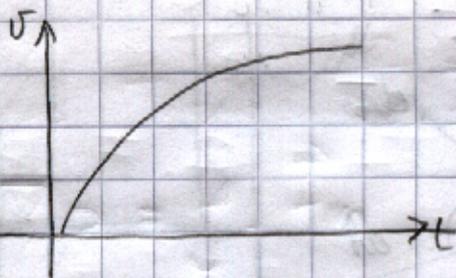
$$M \cdot g \sin \alpha - \mu \cdot A \cdot \frac{\dot{x}}{e} = M \cdot \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\mu A}{M \cdot e} \dot{x} - g \sin \alpha = 0$$

Ec de movimiento ($\dot{x}(t) \sim x(t)$)

Sol homogénea: $\lambda^2 + \frac{\mu A}{M \cdot e} \lambda = 0$

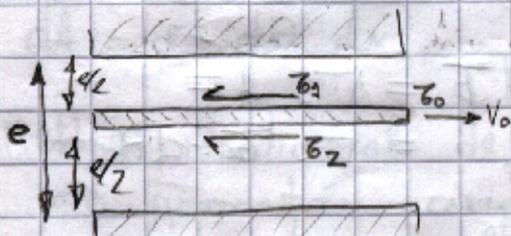
$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$



$$\Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = v = \text{cte}$$

$$v = \frac{M \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot e}{\mu \cdot A}$$

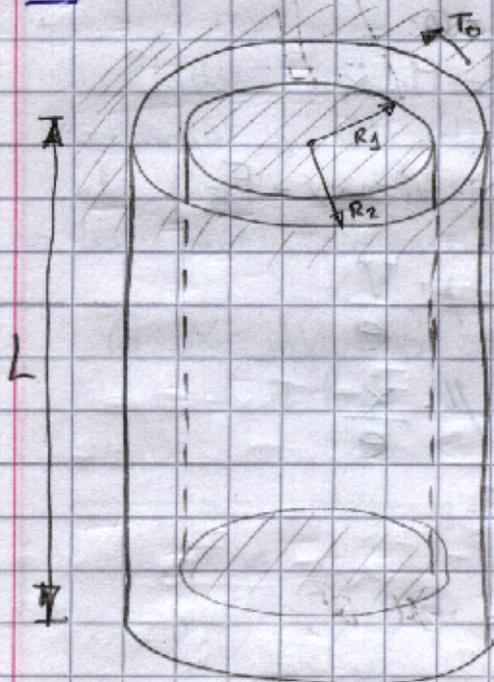


$$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2$$

$$= \mu \frac{v_0}{e/2} + \mu \frac{v_0}{e/2}$$

$$\tau_0 = 4\mu \frac{v_0}{e}$$

P1) Geometría Cilíndrica.



$$\tau = \mu \cdot r \cdot \frac{dw}{dr}$$

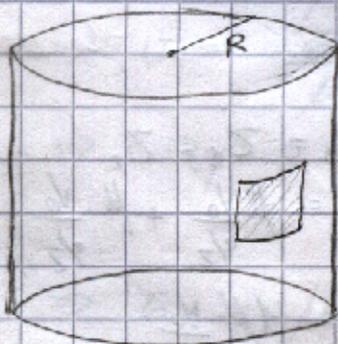
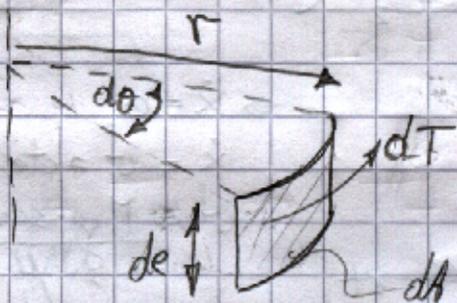
$$\frac{d\gamma}{dt} = r \frac{dw}{dr}$$

$$\sum T = I \cdot \ddot{\theta}$$

$$\sum T = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \text{cte}$$

$\Rightarrow \omega_0$ de, el cilindro fijo resiste un torque T_0 , pero a el otro salida



$$dT = r \cdot dF$$

$$= r \cdot \tau \cdot dA$$

$$dA = r \cdot d\theta \cdot dz$$

$$dT = r^2 \tau \cdot d\theta \cdot dz$$

$$dT = \mu r^3 \frac{d\omega}{dr} \cdot d\theta \cdot dz / \iint$$

$$T = \int_0^L \int_0^{2\pi} \mu r^3 \frac{d\omega}{dr} d\theta dz$$

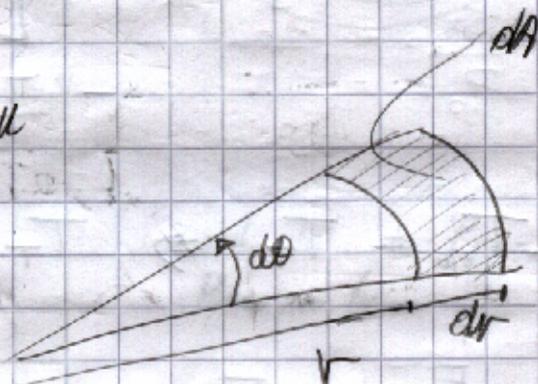
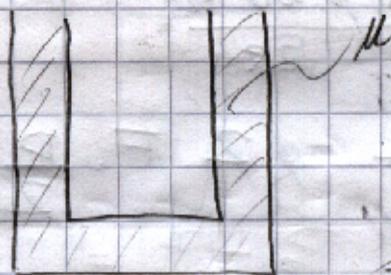
$$T_0 = 2\pi L \cdot \mu \cdot r^3 \frac{d\omega}{dr}$$

$$T_0 \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^3} = 2\pi L \mu \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

$$T_0 \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right] = 2\pi L \mu \cdot \omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{T_0}{4\pi L \mu} \left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right]$$

b)



$$dA = r \cdot d\theta \cdot dr$$

Problema idéntico al de placas paralelas pero con geometría circular.

$$\begin{aligned} \tau &= \mu \frac{dv}{dz} = \mu \frac{d(\omega r)}{dz} \\ &= \mu \frac{\omega_0 r}{e} \quad / \quad v = \omega_0 \cdot r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dT &= r \cdot dF = r \cdot \tau \cdot dA \\ &= r \cdot \mu \cdot \frac{d(\omega \cdot r)}{dz} \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \\ &= r^3 \cdot \mu \cdot \frac{\omega_0}{e} \cdot d\theta \cdot dr \quad / \quad \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$T = \frac{\pi \mu \omega_0 R_2^4}{2e}$$

$$\text{Total: } T_T = T_A + T_B$$

$$\begin{aligned} &= 4\pi \mu L \left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right]^{-1} \omega_0 \\ &\quad - \frac{\pi \mu \omega_0 R_2^4}{2e} \end{aligned}$$

$$\sum T_{\text{eff}} = T_T \Rightarrow T_T = 2 \cdot F \cdot \frac{D}{2}$$

$$F_{\text{pin}} = F$$

$$F = \frac{T_T}{D}$$

Repaso

$$\tau = \mu \cdot \frac{d}{dt}$$

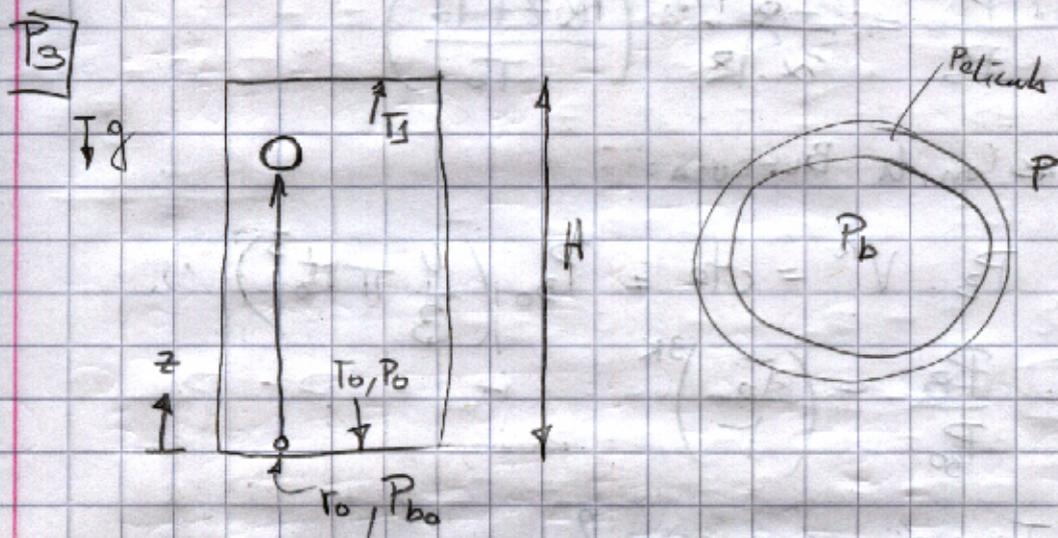
transporte de Momentum.

$$\tau = \frac{F}{A} \left[\frac{N}{m^2} \right] = \left[\text{Kg} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{m^2} \right]$$

$$\vec{p} = m \vec{v} = \left[\frac{\vec{p}}{m^2} \right]$$

Propiedades Termodinámicas

$$\cdot \text{GI} \Rightarrow P = \rho \cdot R \cdot T \quad \parallel \quad R = \frac{R_0}{M}$$



Dato $\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$

Gradiente de Presiones Recipiente.

Dato $\frac{dT}{dz} = \frac{T_1 - T_0}{H - 0} \Rightarrow T(z) = \frac{T_1 - T_0}{H} \cdot z + T_0$

Como es un GI al del estampe

$$P = \rho \cdot R \cdot T \Rightarrow \rho = \frac{P}{R \cdot T}$$

Reemplazando

$$\frac{dP}{dz} = \frac{-P_0}{R(\alpha z + T_0)}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\alpha}{R} \frac{dz}{(\alpha z + T_0)}$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\alpha}{R} \ln \left(\frac{\alpha z + T_0}{T_0} \right)$$

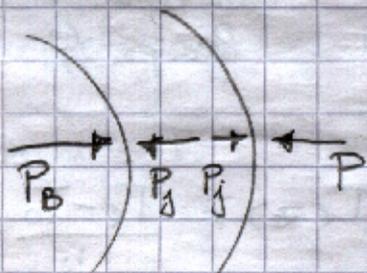
$$\frac{P}{P_0} = \frac{-\alpha}{\alpha \cdot R} \left(\frac{\alpha z + T_0}{T_0} \right)$$

GAS en la Burbuja:

$$P_B \cdot V^k = \text{cte} = P_{B_0} \left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 \right)$$

$$\frac{P_B}{P_{B_0}} = \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3k}$$

Tensión superficial

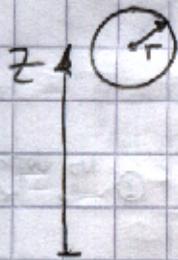


$$P_B - P_j = \frac{2\sigma}{r}$$

$$P_j - P = \frac{2\sigma}{r}$$

$$P_B - P = \frac{4\sigma}{r}$$

Para una altura z de la burbuja.



$$P_{B_0} \left(\frac{\rho_0}{\Gamma} \right)^{3K} = \frac{4\Gamma}{r} = \frac{P_0 \rho_0}{\alpha R} \left(\frac{\alpha z + T_0}{T_0} \right)$$

2.2 Campo de fuerzas másicas en el gravitacional.

$$\nabla P = \rho \cdot \vec{f}_m$$

donde $\vec{f}_m = (0, 0, -g)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \Rightarrow P = f_1(y, z) \quad \textcircled{1} \text{ No depende de } x$$

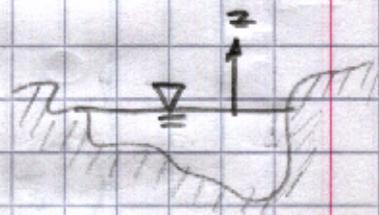
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P = f_2(x, z) \quad \textcircled{2} \text{ No depende de } y$$

$$\Rightarrow \text{por } \textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \quad P = f(z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$$

$$\Rightarrow P = -\rho \cdot g \cdot z + \text{cte}$$

$$\text{CB: } z = z_0, P = P_0$$



$$\therefore P - P_0 = -\rho \cdot g (z - z_0)$$

Def) Presión Relativa: $P_{rel} = P - P_{atm}$

$$\text{CB: } z_0 = 0 \rightarrow P = P_{atm}$$

$$P - P_{atm} = -\rho \cdot g \cdot z$$

$$\Rightarrow P_{rel} = -\rho \cdot g \cdot z$$

- 99% De los casos se usan presiones relativas sin explicitar que lo son

- PARA cambios de estado NO se usa P_{rel} solo Abs.

• Si $\rho = \text{cte} \Rightarrow$ - El fluido es homogéneo $\rho(z) = \text{cte}$.
 - El fluido incompresible $\rho(P) = \text{cte}$.

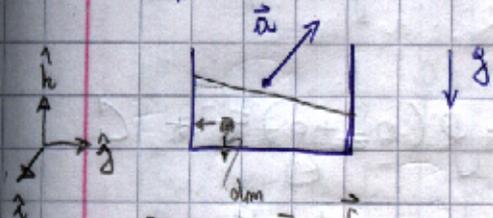
Def) Ley Hidrostática de Presiones:

$$P = -\rho \cdot g \cdot z + C$$

(Variación lineal de P con z)

LIQUIDO COMPRESIBLE: $\left(\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g\right) \wedge \left(K = \frac{dP}{d\rho}\right)$

2.3 Campo de aceleración Lineal.



Sabemos

$$\nabla p = \rho \cdot \vec{f}_m$$

[Reacción]: \vec{f}_m es la aceleración que "siente" el fluido

Se tiene que: $\vec{f}_m = (-a_x, -a_y, -(a_z + g))$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \cdot a_x \rightarrow p = -\rho a_x \cdot x + f_1(y, z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \cdot a_y \rightarrow p = -\rho a_y \cdot y + f_2(x, z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(a_z + g) \rightarrow p = -\rho(a_z + g)z + f_3(x, y)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = -\rho a_x \rightarrow f_3 = -\rho a_x \cdot x + f_4(y)$$

$$\Rightarrow p = -\rho(a_z + g) \cdot z - \rho a_x \cdot x + f_4(y)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial f_4}{\partial y} = -\rho a_y \rightarrow f_4 = -\rho a_y \cdot y + C$$

$$\therefore p = -\rho a_x \cdot x - \rho a_y \cdot y - \rho(a_z + g) \cdot z + C$$

Para det. C: CB $x = x_0, y = y_0, z = z_0; p = p_0$

$$p - p_0 = -\rho a_x (x - x_0) - \rho a_y (y - y_0) - \rho(a_z + g)(z - z_0)$$

"Las isóbaras son superficies de igual presión"

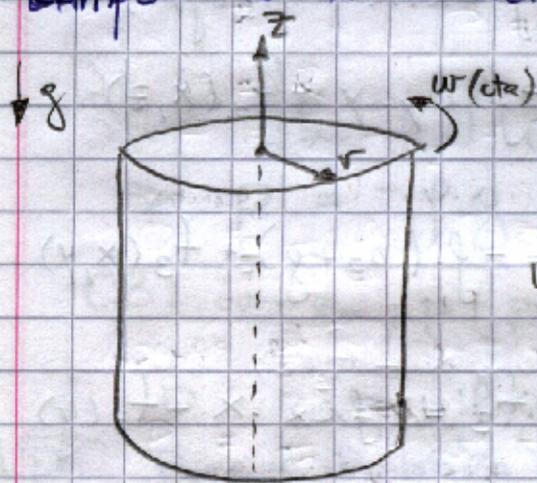
$$p = K \text{ (cte)}$$

$$K = -\rho \cdot \rho_x \cdot x - \rho \cdot \rho_y \cdot y - \rho(\rho_z + g)z + C$$

$$\rho_x \cdot x + \rho_y \cdot y + (\rho_z + g)z = \frac{C - K}{\rho}$$

Lugar geométrico de un plano en \mathbb{R}^3

3. Campo de Aceleraciones centrífuga.



$$\vec{f}_m = \omega^2 \cdot r \hat{r} - g \cdot \hat{k}$$

"Eje z coincide con el eje de giro"

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p \text{ no depende de } \theta$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \cdot \omega^2 \cdot r \rightarrow p = \rho \cdot \omega^2 \frac{r^2}{2} + f_1(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial z} = -\rho \cdot g \rightarrow f_1 = -\rho g z + C$$

$$\therefore P = \rho \cdot \omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho \cdot g \cdot z + C$$

C.B. $z = z_0$; $r = r_0$; $p = p_0$

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r^2 - r_0^2) - \int \rho g (z - z_0)$$

Iso'baras : $p = K$ (cte)

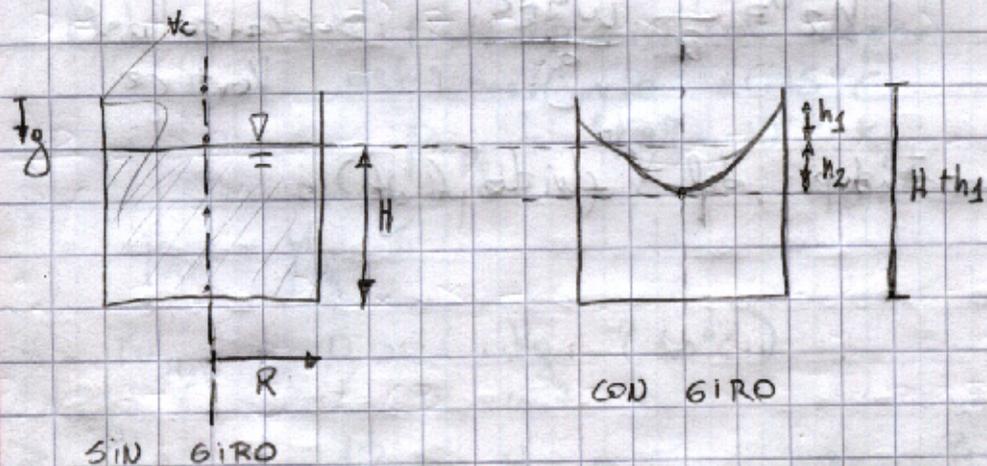
$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \int \rho g z = K$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{g} r^2 - \frac{K}{\rho \cdot g}$$

Ecuación del paraboloido de revolución.

Notar que en líneas verticales la presión varía linealmente

Aplicación: Determinar la forma y posición de la superficie libre de un líquido en un recipiente cilíndrico que gira en torno a su eje vertical con $\omega = \text{cte}$.



Conservación de Vol: $V_{c_0} = V_{c_f}$

$$\pi R^2 \cdot H = \pi R^2 (H + h_1) - V_{\text{paraboloido}}$$

$$V_{\text{paraboloide}} = \frac{1}{2} V_{\text{cilindro que lo contiene}} = \frac{1}{2} \pi R^2 (h_1 + h_2)$$

$$\pi R^2 H = \pi R^2 H + \pi R^2 h_1 - \frac{1}{2} \pi R^2 h_1 - \frac{1}{2} \pi R^2 h_2$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

Ec. de la superficie libre

$$P = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C$$

En el Pto A $P = 0$ (relativa)

$$r = R$$

$$z = h_1 + h_2 = 2h_2$$

$$0 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 - \rho g \cdot 2 \cdot h_2 + C$$

Además en el vortice $z=0$; $r=0$; $p=0$

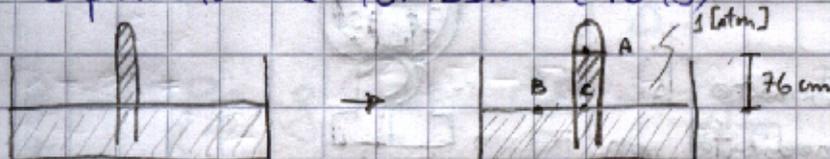
$$P = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C \Rightarrow C = 0$$

$$h_2 = \frac{1}{4} \frac{\omega^2 R^2}{g} \quad \text{Descarga del Vortice}$$

Indep. del ^{tipo de} fluido (ρ)

Experimento de Torricelli (1643)

(06/08)



$$P_B = P_C \quad (\text{las isóbaras son horizontales})$$

$$P_A + \gamma_{Hg} \cdot H = P_C = P_B \quad // \quad \gamma_{Hg} = \rho_{Hg} \cdot g$$

$$P_B = P_{atm}$$

$$\therefore P_{atm} = P_A + \gamma_{Hg} \cdot H$$

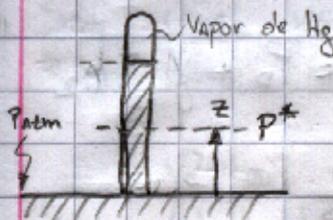
$$\gamma_{Hg} = 13,6 \quad \gamma_{H_2O} = 13,6 \times 10^3 \left[\frac{Kg}{m^3} \right]$$

Torricelli considera:

$$P_A = 0 \quad (\text{Vacío}) \sim (\text{Aprox})$$

$$P_{atm} = 0,76 \times 13,6 \times 10^3 \frac{Kg}{m^3}$$

$$P_{atm} = 10,33 \frac{Kg}{m^2} = 1 \text{ atm}$$



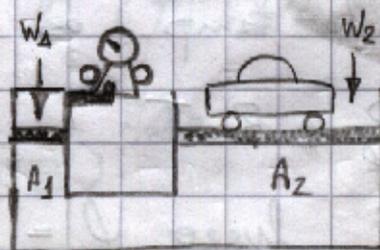
* En estricto rigor en A se tiene presión de vapor del mercurio a 15°C

$$P_{v,Hg} = 1,74 \times 10^{-6} \frac{Kg}{cm^2}$$

$$P^* = P_{atm} - \gamma_{Hg} \cdot z$$

Nota $P_{v,H_2O} = 0,012 \frac{Kg}{cm^2} (10^\circ C)$

$$\Rightarrow \frac{P_{v,H_2O}}{\gamma_{H_2O}} = 12 \text{ mm}$$



$$P_1 = P_2$$

$$P_1 = \frac{W_1}{A_1}$$

$$P_2 = \frac{W_2}{A_2}$$

$$\Rightarrow W_1 = \frac{A_1}{A_2} \cdot W_2$$

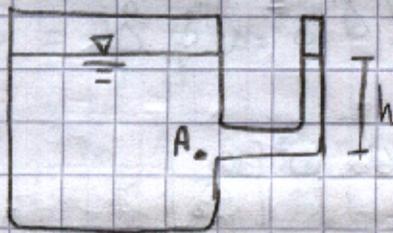
Sistema Hidráulico

- Manómetro Bourdon:



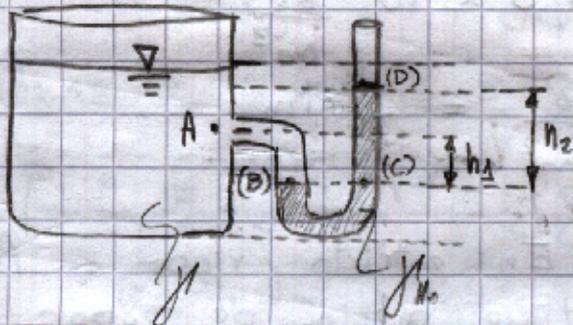
Mide directamente la presión mediante un sistema mecánico (debe ser calibrado)

- Piezómetro:



$$\Rightarrow P_A = \gamma \cdot h$$

- Piezómetro Diferencial:



$$P_A + \gamma \cdot h_1 = P_B$$

$$P_B = P_C$$

$$P_C = P_D + \gamma_{Hg} \cdot h_2$$

- Transductores de Presión : Dif. de Pot. eléctrico.

Aerostática:

Como el aire es compresible, no podemos considerar $\rho = cte$

Halley: - Hip: el aire se comporta como un GI.
- la temp. es cte $\forall z$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{P}{\rho} = R \cdot T \quad \bullet \quad T = cte$$

$$\text{luego } \rho = \frac{P}{R \cdot T}$$

Sabemos que: $\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho}{R \cdot T} \cdot g \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R \cdot T} dz \int$$

$$\ln p = -\frac{g}{R \cdot T} z + cte$$

$$\Leftrightarrow p = K \cdot e^{\frac{-g \cdot z}{R \cdot T}}$$

Aplico CB:

$$z = 0 \Rightarrow p = p_0$$

$$\therefore \boxed{p = p_0 \cdot e^{\frac{-g \cdot z}{R \cdot T}}} \quad \text{Ley de Halley}$$

Nota: Pero la temp. disminuye con la altura y no es cte.

Sea una variación lineal: $T = T_0 - \alpha \cdot z$
donde $\alpha = 6,5^\circ \text{C}/\text{km}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{p}{R(T_0 - \alpha z)}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{R(T_0 - \alpha z)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dz}{R(T_0 - \alpha z)} \int$$

$$\ln p = -\frac{g}{R \cdot \alpha} \cdot \ln(T_0 - \alpha z) + cte$$

$$\Leftrightarrow p = K \cdot (T_0 - \alpha z)^{\frac{g}{\alpha \cdot R}}$$

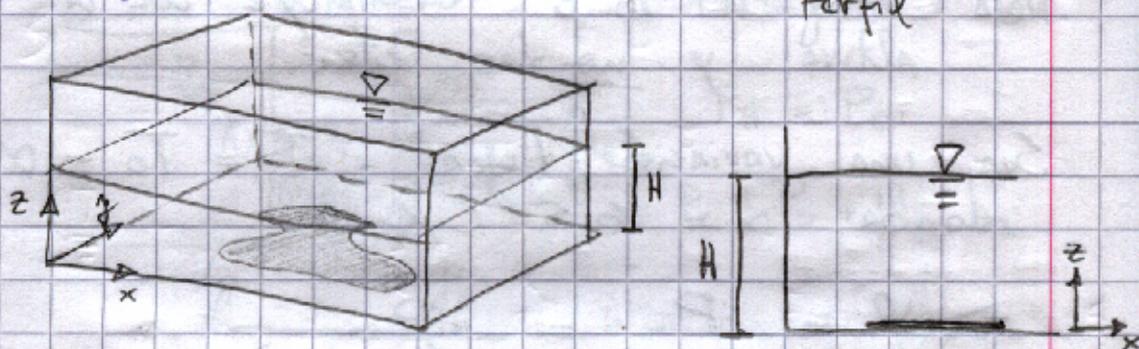
Aplica CB: $z = \alpha \Rightarrow p = p_0$

$$P = P_0 \left(\frac{T_0 - \alpha \cdot z}{T_0} \right)^{\frac{g}{\alpha \cdot R}}$$

- En la práctica el aire se modela mejor como un proceso adiabático, donde la variación de g con la altura es:

$$g(z) = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

Fuerza sobre superficie:

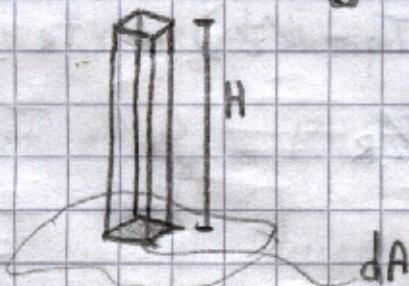


$$dF = p \cdot dA \quad // \quad p = \gamma \cdot H$$

$$\Rightarrow dF = \gamma \cdot H \cdot dA$$

$$F = \gamma \int H \cdot dA = \gamma \cdot V$$

Peso de la columna
de líquido



Pto. de Aplicación de la fuerza. (C.G.)

$$X_R \cdot F = \int x \cdot dF = \int x \cdot y \cdot H \cdot dA$$

$$X_R \cdot F = y \cdot H \int x \cdot dA$$

$$X_R \cdot \cancel{y \cdot H} \int dA = \cancel{y \cdot H} \int x \cdot dA$$

$$X_R = \frac{\int x \cdot dA}{\int dA} = X_G$$

De forma análoga:

$$Y_R = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA} = Y_G$$

El pto de Aplicación de la fuerza coincide con el C.G. de la superficie.

- Resultado válido PARA superficies en que la dirección de \hat{n} de la superficie coincide con la dirección de \hat{g} .

(09-08) CAT.

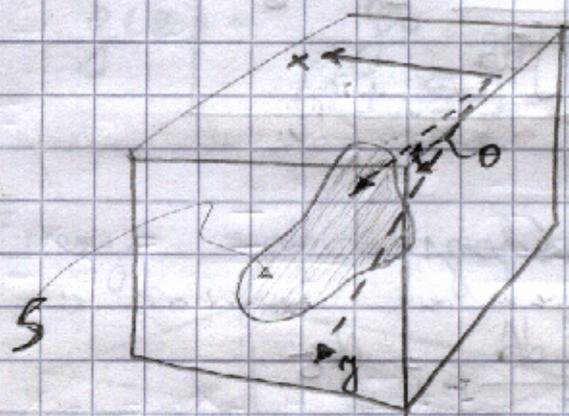
Fuerzas sobre superficies Planas

- Superficie Horizontal

$$F = \int p \, dS \quad \rightarrow \quad F = \rho \cdot y \cdot V = W$$

W: Peso de la columna de agua.

$x_R = x_G$
 $y_R = y_G$ } pto de aplicación de la fuerza coincide con el CG. de la sup.



$$F = \int p \, dS$$

$$p = \rho \cdot h, \quad h = y \sin \theta$$

$$F = \int \rho \cdot y \sin \theta \, dS$$

$$F = \rho \sin \theta \int y \, dS$$

$\underbrace{\int y \, dS}_{y_G \cdot S}$

$$F = \rho \sin \theta \cdot y_G \cdot S$$

$$F = \underbrace{\rho}_{P_G} \cdot h_G \cdot S$$

P_G : presión en el centro de gravedad de la superficie.

$$\therefore F = p \cdot S$$

$$x_R \cdot F = \int x \cdot dF = \int x \cdot p \cdot dS$$

$$= \int x \cdot y \cdot \rho \cdot \sin \theta \cdot dS$$

$$x_R \cdot \rho \cdot \sin \theta \cdot y_G \cdot S = \rho \cdot \sin \theta \int x \cdot y \cdot dS$$

$$x_R = \frac{\int x \cdot y \cdot dS}{y_G \cdot S} = \frac{I_{xy}}{y_G \cdot S}$$

I_{xy} : Producto de Inercia de la superficie respecto a los ejes x e y .

Nota: No olvidar que el eje x está contenido en la superficie libre (el origen está en la superficie libre)

$$Tb. \quad y_R \cdot F = \int y \cdot p \cdot dS$$

$$y_R \cdot \rho \cdot \sin \theta \cdot y_G \cdot S = \int y \cdot y \cdot \rho \cdot \sin \theta \cdot dS$$

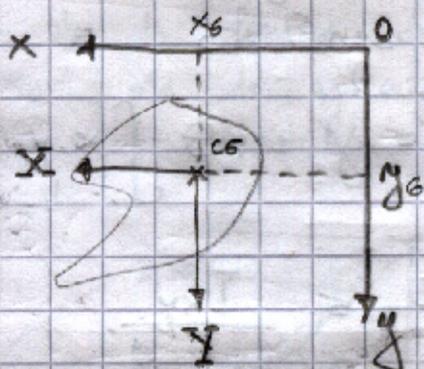
$$y_R = \frac{\int y^2 \cdot dS}{y_G \cdot S} = \frac{I_{xx}}{y_G \cdot S}$$

I_{xx} : Momento de inercia de la superficie respecto al eje x .

Recordar Steiner:

$$I_{xx} = I_{x_0} + y_0^2 \cdot S$$

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + x_0 \cdot y_0 \cdot S$$



$$\therefore X_R = \frac{I_{xy}}{y_0 \cdot S} = \frac{I_{x_0 y_0}}{y_0 \cdot S} + x_0$$

$$X_R = x_0 + \frac{I_{x_0 y_0}}{y_0 \cdot S}$$

Si la superficie es simétrica respecto a y_0 , $I_{x_0 y_0} = 0$

$$Y_R = \frac{I_{xx}}{y_0 \cdot S} = \frac{I_{x_0}}{y_0 \cdot S} + y_0$$

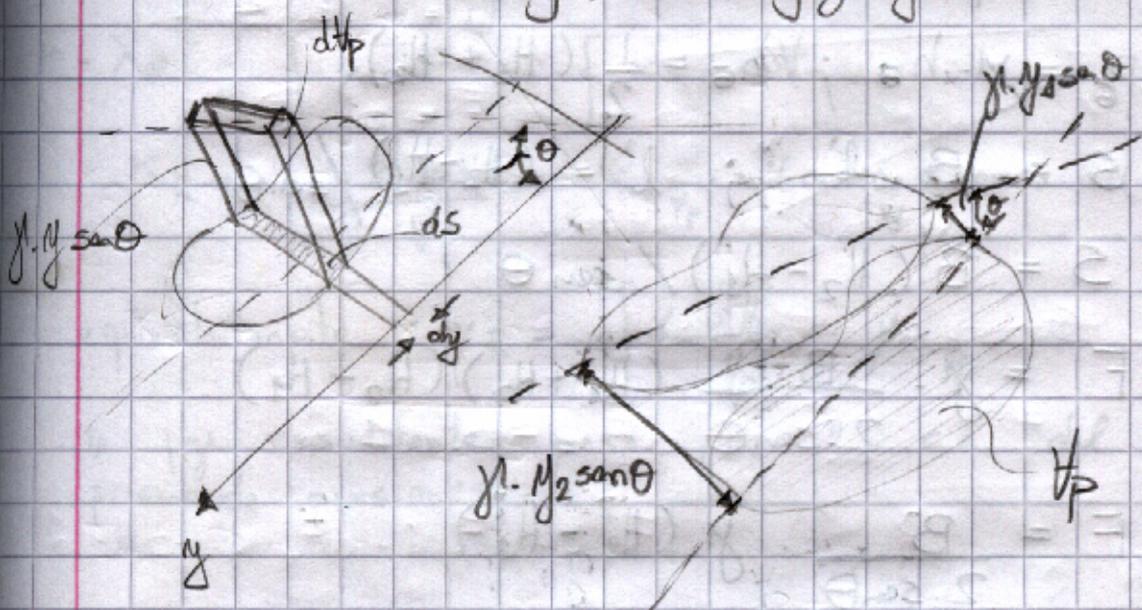
$$Y_R = y_0 + \frac{I_{x_0}}{y_0 \cdot S}$$

Como $I_{x_0} > 0 \Rightarrow Y_R > y_0$, es decir

el pto de aplicación de la fuerza está siempre más abajo que el C.G. de la superficie.

Se puede demostrar que la fuerza resultante es igual al volumen del prisma de presiones.

$$F = \int p \cdot dS = \int \gamma \cdot y \cdot \sin \theta \cdot dS$$

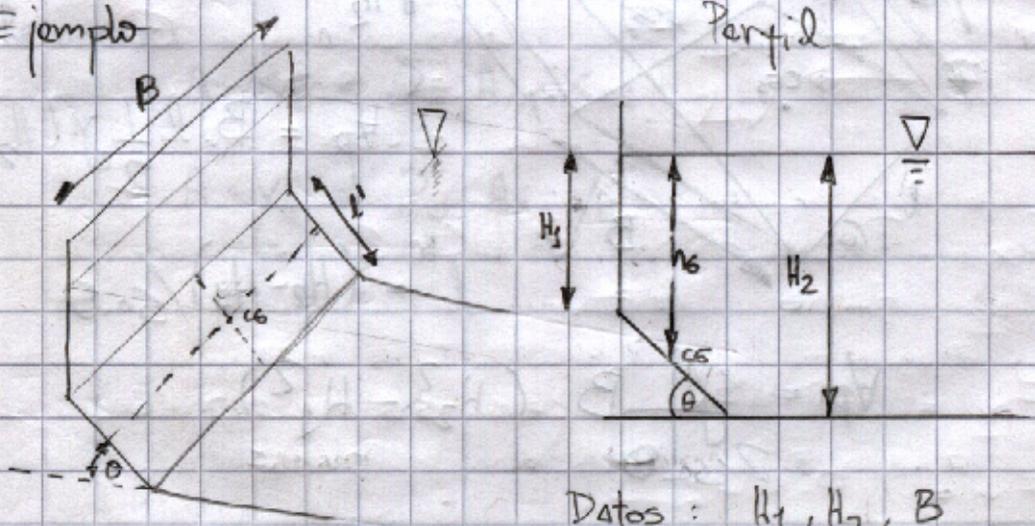


V_p : es el volumen del prisma de presiones.

$$F = \int dF_p = V_p \cdot \gamma$$

Ejemplo

Perfil



Datos : H_1, H_2, B

Calculo de la Fuerza sobre la superficie Inclinada

$$F = p_G \cdot S$$

$$p_G = \gamma \cdot h_G ; h_G = \frac{1}{2} (H_1 + H_2)$$

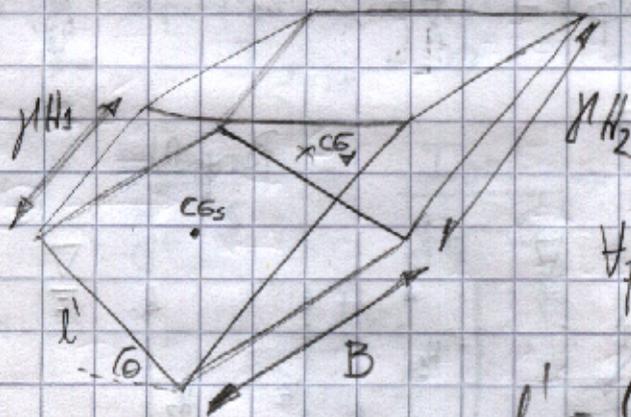
$$S = B \cdot l' ; l' = (H_2 - H_1) / \text{sen } \theta$$

$$S = B (H_2 - H_1) / \text{sen } \theta$$

$$F = \gamma \cdot \frac{B}{2 \cdot \text{sen } \theta} (H_1 + H_2) (H_2 - H_1)$$

$$F = \frac{B}{2 \cdot \text{sen } \theta} \cdot \gamma (H_2^2 - H_1^2)$$

Calculamos F a partir del volumen del prisma



$$V_p = B \cdot l' \cdot \frac{1}{2} \gamma (H_1 + H_2)$$

$$l' = (H_2 - H_1) / \text{sen } \theta$$

$$V_p = \frac{\gamma}{2 \text{sen } \theta} B (H_2^2 - H_1^2)$$

Pto de aplicación de la fuerza considerando el prisma de presiones

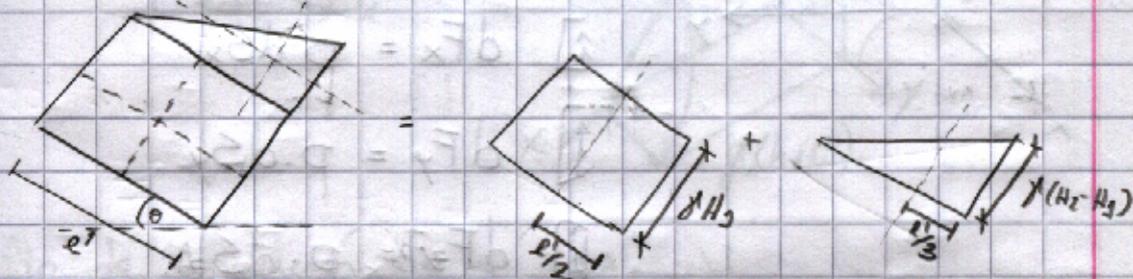
$$F = \rho_p = \int dV_p$$

$$F \cdot X_R = \int x \cdot dF = \int x \cdot dV_p$$

$$X_R = \frac{\int x \cdot dV_p}{V_p} = X_G V_p \quad (\text{centro de masa del } V_p)$$

equivalentemente : $Y_R = \frac{\int y \cdot dV_p}{V_p} = Y_G V_p$

La fca. resultante pasa por el c.s. del Vol. del prisma de presiones



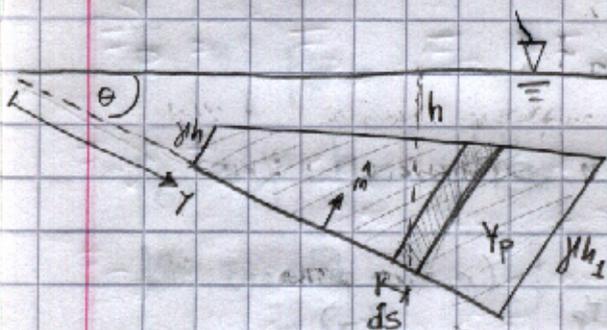
Recordar:

$$A \cdot X_G = \sum_i A_i \cdot X_{Gi}$$

$$A \cdot Y_G = \sum_i A_i \cdot Y_{Gi}$$

Cat (11-08)

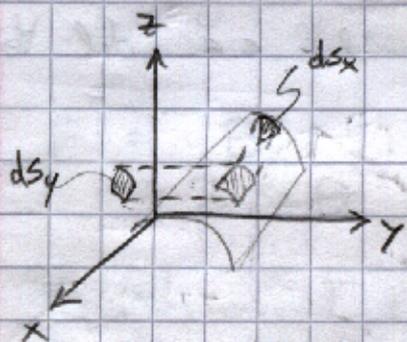
Superficie: Plana inclinada



$$h = y \cdot \sin \theta$$

$$d\vec{F} = p \cdot d\vec{S}$$

Superficie curva.



$$d\vec{F} = -p \cdot dS \hat{m}$$

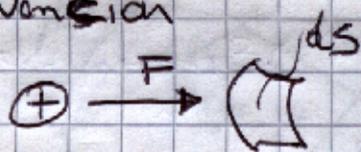
$$dF_x \hat{i} + dF_y \hat{j} + dF_z \hat{k} = -p ds \hat{m}$$

$$\hat{i} \quad dF_x = p \cdot ds_x$$

$$\hat{j} \quad dF_y = p \cdot ds_y$$

$$\hat{k} \quad dF_z = p \cdot ds_z$$

Convención



Consideramos \oplus la fza. entrando hacia la superficie

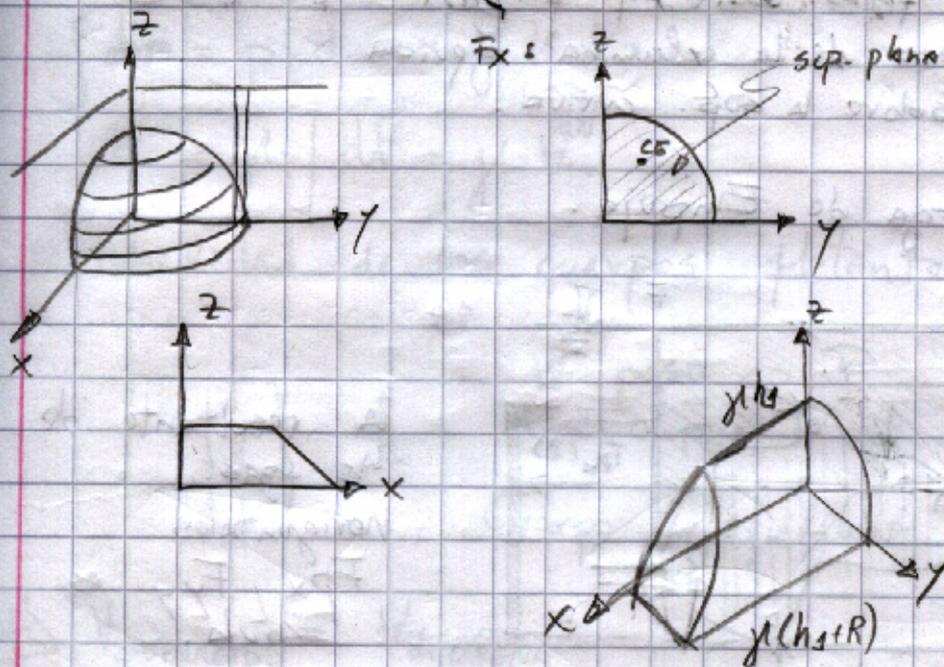
ds_x : Proyección de ds en el plano yz .

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \int p \cdot ds_x \\ F_y &= \int p \cdot ds_y \\ F_z &= \int p \cdot ds_z \end{aligned} \right\} \text{fzas. sobre superficies planas}$$

$$dF_z = p \cdot dS_z = \gamma \cdot \underbrace{h \cdot dS_z}_{V} = \gamma V = W$$

W : peso de la columna líquida.

Vol de líquido entre la superf. sobre la que calculamos la fza y la superficie libre.



Pto de Aplicación de la fza.

Para F_x y F_y el pto de aplicación se calcula como el caso para fzas. sobre superficies planas.

F_z :

$$F_z \cdot X_R = \int x dF_z = \int x \gamma \cdot dV$$

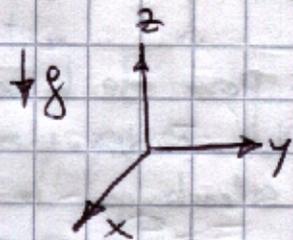
$$X_R \cdot \gamma V = \gamma \int x dV \Rightarrow X_R = \frac{\int x dV}{V} = X_G$$

Análogamente: $Y_R = \frac{\int y \cdot dV}{V} = Y_G$ donde (X_G, Y_G) : centro de gravedad del volumen. 41

(13-08)

Fgs. sobre superficies curvas.

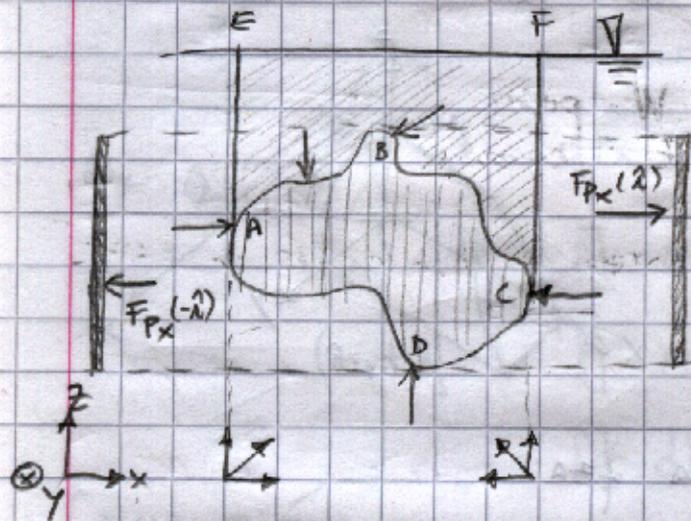
$$\vec{F}_p = (F_{px}, F_{py}, F_{pz})$$



F_{px}, F_{py} : Se calculan como fgs. sobre sup. planas

F_{pz} : Peso de la columna líquida sobre la sup. curva.

Fuerza de Empuje.



La resultante de las fgs. horizontales F_{px}, F_{py} es nula.

$$F_{px} = F_{px}(z) + F_{px}(-z) = 0$$

Superficie ABC

$$F_{zABC} = \rho \cdot V_{ABCFE} \cdot g \cdot (-h)$$

$$F_{zADC} = \rho \cdot V_{ADCFE} \cdot g \cdot (+h)$$

$$\therefore F_{zABCD} = \rho \cdot g \cdot (V_{ADCFE} - V_{ABCFE})$$

$$F_{zABCD} = \rho \cdot g \cdot V_{ABCD}$$

$$F_z = \rho \cdot g \cdot V_{\text{CUERPO SUBMERGIDO}}$$

• Principio de Arquímedes.

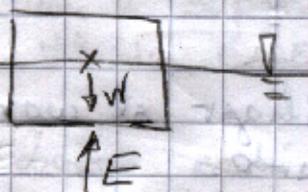
"La fga resultante de un cuerpo sumergido es igual al peso del volumen de líquido desplazado"

* Esta fga se denomina EMPUJE.

$$\int dF = p \cdot dS = \gamma h dS$$

$$F = \gamma \int dV = \gamma \cdot V$$

• Estabilidad de los cuerpos flotantes.



W: peso \Leftrightarrow P
E: empuje

Cuerpo en equilibrio si $P = E$

Def) $V_{\text{sumergido}} = V_{\text{de ARENA}}$

Def) Baricentro del volumen de arena se denomina CENTRO DE ARENA

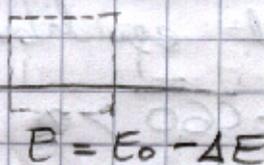
Desplacamos el V en la vertical.



$P = E_0$
(Estable)



$E = E_0 + \Delta E$



$E = E_0 - \Delta E$

$E > P \Rightarrow$ Cuerpo sube

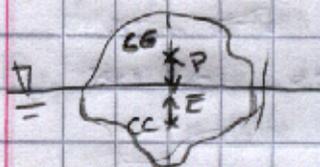
$E < P \Rightarrow$ cuerpo baja.

Desplazamiento horizontal: Estabilidad neutral.

CAT. (18-08)

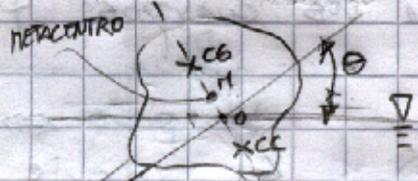
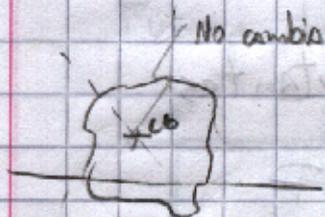
Estabilidad de cuerpos flotantes

- Estabilidad al volcamiento (giro pequeño)



En el equilibrio $P = E$

- Gira c/r a la intersección del eje de simetría con la superficie libre.



EL peso: tiende a desestabilizar al cuerpo
EL empuje: tiende a estabilizarlo.

Situación de equilibrio al giro: $IM_0 = 0$

Situación estable: $M_{empuje} > M_{peso}$

$$E \times \overline{MO} \cdot \sin\theta > P \cdot \overline{CGO} \cdot \sin\theta$$

Además $E = P$

En el equilibrio $\overline{MO} > \overline{CGO}$

$$\overline{MO} - \overline{CGO} > 0$$

Però:

$$\overline{M}_O = \overline{M}_{CC} - \overline{O}_{CC}$$

$$\overline{C}_{BO} = \overline{C}_{CC} - \overline{O}_{CC}$$

$$\overline{M}_O - \overline{C}_{BO} = \overline{M}_{CC} - \overline{C}_{CC} \quad \parallel \text{estable } \overline{M}_{CC} - \overline{C}_{CC} > 0$$
$$\Rightarrow \overline{M}_{CC} > \overline{C}_{CC}$$

Mover el CG y el CC es solo un problema de geometría, más difícil es det. la ubicación del metacentro. Puede demostrarse que:

$$\overline{M}_{CC} = \frac{I_O}{V_C}$$

I_O : Momento de inercia en torno al eje O de la sup. generada por intersección del cuerpo con la superficie libre.

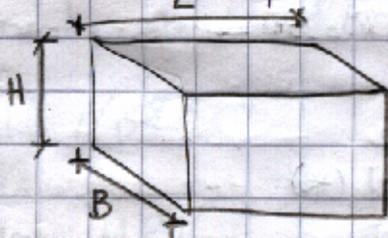
V_C : Vol de CARENA

El cuerpo será estable al volcamiento si:

$$\frac{I_O}{V_C} > \overline{C}_{CC}$$

Ep

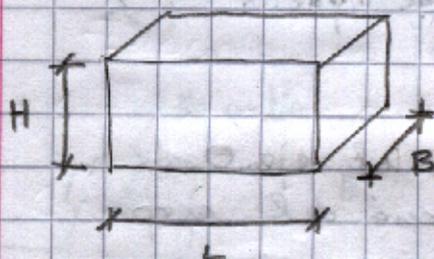
Ej: Det. la relación entre B, H y L de un durmiente de madera para que flote en forma estable.



(20-08) ~~...~~ ~~...~~ ~~...~~

En la base de los ~~...~~ ~~...~~ ~~...~~
de las ~~...~~ ~~...~~ ~~...~~ de ~~...~~

P] Det. la relación entre B , H y L de un durmiente de madera para que flote de manera estable.



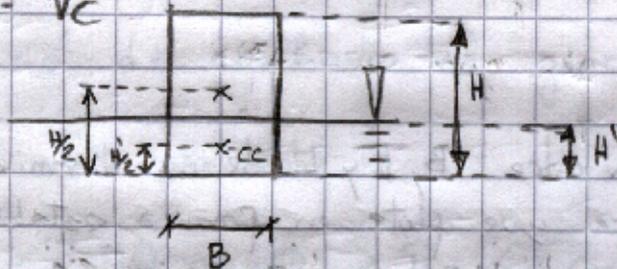
Datos

γ_m : peso específico del bloque

líquido: γ

Cond. estabilidad: $\frac{I_0}{V_c} > \overline{CCCG}$

Det. V_c



$$\overline{CCCG} = \frac{H}{2} - \frac{H'}{2}$$

$$\overline{CCCG} = \frac{1}{2} H \left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma} \right) \quad (*)$$

Equilibrio

$$P = E \Rightarrow \gamma_m HBL = \gamma H'BL$$

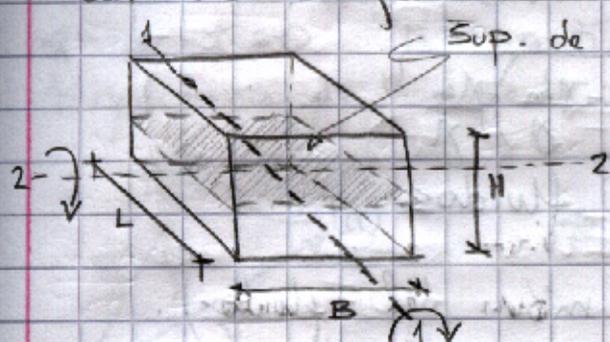
$$H' = \frac{\gamma_m}{\gamma} H \quad (*)$$

$$V_c = H'BL$$

$$V_c = \frac{\gamma_m}{\gamma} HBL$$

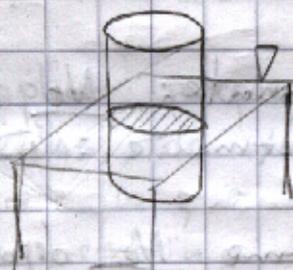
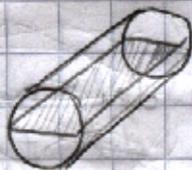
Det. I_o .

1º) Det intersección de la superficie libre con el bloque.



El cuerpo puede girar en torno a 1-1 o 2-2

Otros ejemplos de sup. de intersección.



Estabilidad respecto al giro en 1-1

$$I_{o,1-1} = \frac{1}{12} L B^3$$

Cond. de estabilidad $\frac{I_o}{Vc} > \overline{CCCG}$

$$\frac{\frac{1}{12} L B^3}{\frac{\gamma_m}{\gamma} H B L} > \frac{1}{2} \frac{H (1 - \frac{\gamma_m}{\gamma})}{\gamma}$$

$$\frac{1}{6} \frac{B^2}{H} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_m} > H \frac{(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma})}{\gamma}$$

$$B > H \sqrt{\frac{6 \frac{\gamma_m}{\gamma} (1 - \frac{\gamma_m}{\gamma})}{\gamma}}$$